هندسه ۲

۱- گزینه «۳» ـ با توجه به این‌که M' مجانس نقطه M به مرکز O و با نسبت k می‌باشد، داریم:

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{۱}{k}\overrightarrow{OM'}$$

یعنی نقطه M مجانس نقطه M' به مرکز O و با نسبت $\frac{۱}{k}$ است. (گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم ـ تجانس)

۲- گزینه «۴» ـ می‌دانیم در تجانس، خطوطی که نقاط نظیر را به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس یک‌دیگر را قطع می‌کنند، بنابراین کافی است معادله خطوط AA' و BB' را نوشته و محل تلاقی آن‌ها را که همان مرکز تجانس می‌باشد، پیدا کنیم:

$$AA': y - y_A = \frac{y_A - y_{A'}}{x_A - x_{A'}}(x - x_A) \Rightarrow y - ۱ = \frac{۱-(-۲)}{۱-۴}(x-۱) \Rightarrow y - ۱ = -x + ۱ \Rightarrow AA': x + y = ۲ \qquad (۱)$$

$$BB': y - y_B = \frac{y_B - y_{B'}}{x_B - x_B{}'}(x - x_B) \Rightarrow y - ۵ = \frac{۵-۸}{۱-۴}(x-۱) \Rightarrow y - ۵ = x - ۱ \Rightarrow BB': y - x = ۴ \qquad (۲)$$

حال با توجه به روابط (۱) و (۲) خواهیم داشت:

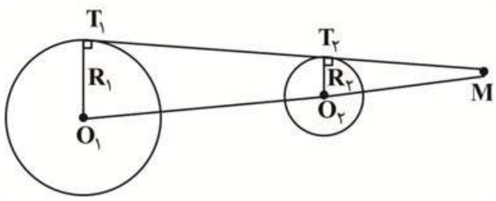
$$\begin{cases} x+y=۲ \\ y-x=۴ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=۳ \\ x=-۱ \end{cases} \Rightarrow O(-۱,۳) \Rightarrow \alpha - \beta = -۴$$

(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم ـ تبدیل‌ها ـ تجانس)

۳- گزینه «۱» ـ اگر در تجانس $K = ۱$ آن‌گاه تصویر شکل تحت این تجانس بر خودش منطبق می‌شود پس در این حالت تجانس تبدیل همانی است.

(فیروزی) (فصل دوم ـ تجانس)

۴- گزینه «۲» ـ



$$M\overset{\Delta}{O_۱}T_۱ \sim M\overset{\Delta}{O_۲}T_۲ \Rightarrow \frac{O_۱M}{O_۲M} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow \frac{O_۱M}{O_۱M - O_۱O_۲} = \frac{R_۱}{R_۲} \Rightarrow O_۱M = \frac{R_۱ \times O_۱O_۲}{R_۱ - R_۲} = \frac{۳\times۵}{۳-۱} = \frac{۱۵}{۲} = ۷/۵$$

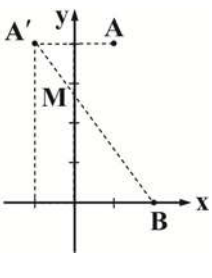
(گروه مؤلفان علوی) (فصل دوم ـ تجانس)

۵- گزینه «۱» ـ قرینه A نسبت به محور y را نقطه A' می‌نامیم:

$$A(۱,۴) \rightarrow A'(-۱,۴)$$

از A' به B وصل می‌کنیم طبق قضیه هرون طول کوتاه‌ترین مسیر مذکور برابر است با طول مسیر $MA + MB$.

که طبق ویژگی‌های بازتاب داریم: $MA = MA'$

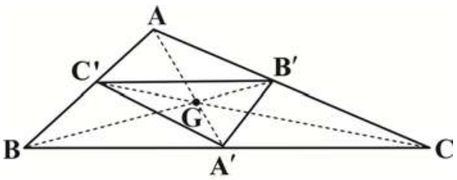


پس:

$$MA + MB = MA' + MB = A'B = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۰-۴)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

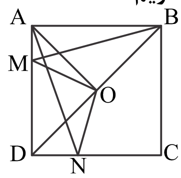
(فیروزی) (فصل دوم ـ کاربرد بازتاب)

۶- گزینه «۲» ـ چون نقاط A' ، B' و C' اوساط اضلاع هستند پس A' که متناظر A هست را به هم وصل کرده و B' که متناظر B است را نیز به هم وصل کرده این دو یکدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که مرکز تجانس است، پس مرکز تجانس نقطه هم رأسی سه میانه مثلث است و نسبت تجانس $-\frac{۱}{۲}$ است.



(گروه مؤلفان علــوی) (فصل دوم ـ تجانس)

۷- گزینه «۲» ـ فرض کنیم O مرکز مربع $ABCD$ باشد. باتوجه به اینکه در هر مربع قطرها نیمساز زوایای نظیرشان هستند، داریم:

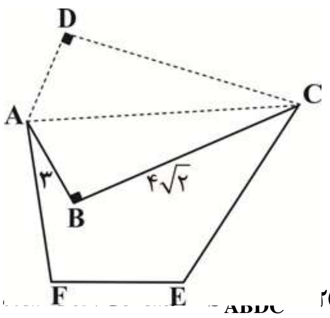


$$\left.\begin{array}{l} OA = OD \\ AM = DN \\ O\hat{A}M = O\hat{D}N = ۴۵^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAM} \cong \overset{\Delta}{ODN} \Rightarrow \begin{cases} OM = ON \\ M\hat{O}N = ۹۰^\circ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} OA = OB \\ A\hat{O}B = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow B \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} A \\ \left.\begin{array}{l} OA = OD \\ A\hat{O}D = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow A \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} D \\ \left.\begin{array}{l} OM = ON \\ M\hat{O}N = ۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow M \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} N \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{BAM} \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} \overset{\Delta}{ADN}$$

(گروه مؤلفان علــوی) (فصل دوم ـ تبدیل‌های هندسی و کاربردها ـ دوران)

۸- گزینه «۴» ـ AC را محور بازتاب در نظر می گیریم، بازتاب مثلث ABC، مثلث ADC است و می‌دانیم:



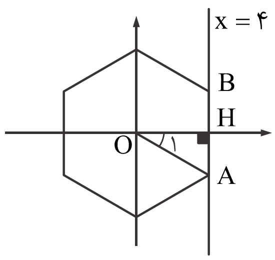
$$AB = AD\ ,\ BC = CD$$

پس محیط دو ۵ ضلعی $ABCEF$ و $ADCEF$ باهم برابرند، میزان مساحت اضافه شده برابر است با:

$$ABDC \quad ۲(\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$$

(فیروزی) (فصل دوم ـ کاربرد تبدیل‌ها)

۹- گزینه «۱» ـ شکل حاصل از دوران‌های متوالی این خط، یک شش ضلعی منتظم است. می‌دانیم مساحت هر شش ضلعی منتظم به ضلع a برابر با $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^۲$ است، بنابراین داریم:



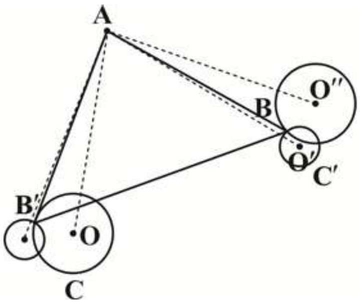
$$\overset{\Delta}{OAH} : \hat{O}_۱ = \frac{۶۰^\circ}{۲} = ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow \cos\hat{O}_۱ = \frac{OH}{OA} = \frac{۴}{OA} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow OA = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$$

$$OA = AB \Rightarrow AB = \frac{۸\sqrt{۳}}{۳} \Rightarrow S_{\text{شش ضلعی}} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}AB^۲ = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲} \times \frac{۶۴}{۳} = ۳۲\sqrt{۳}$$

(گروه مؤلفان علــوی) (فصل دوم ـ تبدیل‌های هندسی و کاربردها ـ دوران)

۱۰- گزینه «۴» ـ نقطه A و ۲ دایره C و C' را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط AO را حول نقطه A، ۹۰ درجه دوران می‌دهیم تا پاره خط AO'' به‌دست آید.



به مرکز O'' و به شعاع دایره C، دایره‌ای ترسیم می‌کنیم (دایره C'') و محل برخورد دایره C'' و C' را B می‌نامیم. پاره‌خط AB را حول نقطه A و به اندازه (۹۰−) درجه دوران می‌دهیم و محل تلاقی آن با دایره C را B' می‌نامیم. از آنجا که $AB = AB'$ بوده و $B\hat{A}B' = ۹۰^\circ$ است، لذا مثلث $\overset{\Delta}{BAB'}$ قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین خواهد بود. (سراسری خارج از کشور ریاضی ۹۴) (فصل دوم ـ تبدیل ـ ترکیبی)