ریاضی ۱

۱- گزینه «۲» ـ اگر A یک مجموعه m عضوی و B یک مجموعه n عضوی باشد تعداد توابع قابل تعریف از A به B برابر n^m می‌باشد با توجه به این نکته تعداد توابعی که از B به A می‌توان تعریف کرد $۳^۴ = ۸۱$ می‌باشد. (طلوعی) (فصل ششم ـ درس اول) (آسان)

۲- گزینه «۲» ـ می‌دانیم اگر کاری شامل k مرحله باشد به‌طوری که مرحله اول به $n_۱$ حالت در مرحله دوم $n_۲$ حالت و در مرحله k ام بر n_k حالت داشته باشیم کار مورد نظر به $n_۱ \times n_۲ \times \cdots \times n_k$ حالت قابل انجام است با توجه به این نکته برای رفتن از شهر A به D $۴ \times ۳ \times ۲ = ۲۴$ راه وجود دارد. (طلوعی) (فصل ششم ـ درس اول) (متوسط)

۳- گزینه «۱» ـ در خانه اول سمت راست (یکان) ۲ حالت داریم: ۳ یا ۵ در اولین خانه سمت چپ (صدگان) صفر نمی‌تواند باشد و یک عدد هم برای خانه اول (یکان) انتخاب کرده‌ایم پس ۳ حالت دارد. در خانه وسط صفر نیز می‌تواند باشد پس ۳ حالت دارد.

$۳ \times ۳ \times ۲ = ۱۸$ عدد می‌توان ساخت

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس اول) (متوسط)

۴- گزینه «۲» ـ از آنجایی که صفر در بین ارقام است دو حالت را در نظر می‌گیریم:

ارقام $= \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

یکان غیرصفر: $\frac{۴}{} \times \frac{۴}{} \times \frac{۳}{} \times \underbrace{\frac{۲}{}}_{\text{عدد ۲ و ۴}} = ۹۶$

یکان صفر: $\frac{۵}{} \times \frac{۴}{} \times \frac{۳}{} \times \underbrace{\frac{۱}{}}_{\text{عدد ۰}} = ۶۰$

بنا بر اصل جمع: $۹۶ + ۶۰ = ۱۵۶$

توجه شود برای اینکه عدد کوچک‌تر از ۶۰۰۰ باشد باید رقم هزارگان از بین اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ انتخاب می‌شد.

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس اول) (دشوار)

۵- گزینه «۳» ـ

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(n-۱)!}} = n(n+۱) \Rightarrow n(n+۱) = ۳۰ \Rightarrow n = ۵$$

$$\frac{n^۲ + ۵}{n!} = \frac{۲۵ + ۵}{۵!} = \frac{۳۰}{۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱} = \frac{۱}{۴}$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (آسان)

۶- گزینه «۴» ـ

$$\frac{۱۰!}{۱۰! + ۱۱!} - \frac{۱۰!}{۱۰! - ۱۱!}$$

$$\frac{۱۰!}{۱۰! + ۱۱!} + \frac{۱۰!}{۱۱! - ۱۰!} = \frac{۱۰!}{۱۰! + ۱۱ \times ۱۰!} + \frac{۱۰!}{۱۱ \times ۱۰! - ۱۰!} = \frac{۱۰!}{۱۰!(۱+۱۱)} + \frac{۱۰!}{۱۰!(۱۱-۱)} = \frac{\cancel{۱۰!}}{۱۲ \times \cancel{۱۰!}} + \frac{\cancel{۱۰!}}{۱۰ \times \cancel{۱۰!}} = \frac{۱}{۱۲} + \frac{۱}{۱۰} = \frac{۱۱}{۶۰}$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (متوسط)

۷- گزینه «۲» ـ

$$p(n, n-۲) = ۱۲ \Rightarrow \frac{n!}{(n-(n-۲))!} = ۱۲$$

$$\frac{n!}{۲!} = ۱۲ \Rightarrow n! = ۱۲ \times ۲ \times ۱ = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱$$

$$n = ۴$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (آسان)

۸- گزینه «۳» ـ می‌دانیم:

$۰! = ۱ \quad ۱! = ۱$

$۵x^۲ - ۴x = ۰ \Rightarrow x(۵x - ۴) = ۰ \qquad x = ۰ , x = \frac{۴}{۵}$

$۵x^۲ - ۴x = ۱ \Rightarrow ۵x^۲ - ۴x - ۱ = ۰ \qquad x = ۱ , x = -\frac{۱}{۵}$

مجموعه جواب: $\{-\frac{۱}{۵} , ۰ , \frac{۴}{۵} , ۱\}$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (متوسط)

۹- گزینه «۱» ـ برای انتخاب ۳ نفر از ۱۲ نفر داریم:

$$p(۱۲ , ۳) = \frac{۱۲!}{(۱۲-۳)!} = \frac{۱۲!}{۹!} = \frac{۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ \times \cancel{۹!}}{\cancel{۹!}} = ۱۲ \times ۱۱ \times ۱۰ = ۱۳۲۰$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (آسان)

۱۰- گزینه «۳» ـ حرف R را در وسط قرار می‌دهیم. برای ۶ جایگاه دیگر ۶ حرف داریم:

			R			

DADASS که حروف S و A و D هر کدام ۲ بار تکرار شده است باید جای دیگر این ۶ حرف را حساب کنیم که حروف تکراری نیز دارند:

$$\frac{۶!}{۲! \times ۲! \times ۲!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴ \times ۳ \times ۲!}{۲! \times ۲ \times ۲} = ۶ \times ۵ \times ۳ = ۹۰$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (دشوار)

۱۱- گزینه «۴» ـ حروف p، l و c را در یک باکس قرار می‌دهیم این ۳ به $۳!$ طریق می‌توانند قرار بگیرند ۴ کلمه دیگر در ۴ باکس و باکسی که شامل سه حرف p، l و c است جمعاً ۵ باکس خواهند بود که جایگشت آن‌ها $۵!$ می‌باشد پس تعداد کل حالت‌ها $۵! \times ۳! = ۷۲۰$ می‌باشد.

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (متوسط)

۱۲- گزینه «۲» ـ کلمات آرمین، شروین و بهزاد کلمات ۵ حرفی هستند و تعداد ترتیب آن‌ها $۵!$ می‌باشد ولی کلمه آرمان یک کلمه ۵ حرفی با دو حرف تکراری می‌باشد که تعداد ترتیب آن $\frac{۵!}{۲!}$ می‌باشد. (طلوعی) (فصل ششم ـ درس دوم) (آسان)

۱۳- گزینه «۳» ـ

جعبه ۳ تایی با ۶ گوی $\binom{۶}{۳} = \frac{۶!}{۳! \times ۳!} = ۲۰$

جعبه ۲ تایی با ۳ گوی باقی‌مانده $\binom{۳}{۲} = \frac{۳!}{۲!} = ۳$

جعبه تکی با ۱ گوی باقی‌مانده $\binom{۱}{۱} = ۱$

پس تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با:

$۲۰ \times ۳ \times ۱ = ۶۰$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس سوم) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» ـ می‌دانیم:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^{۲}-۳۰=x \\ x^{۲}-x-۳۰=۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۵)=۰ \\ x=۶ \quad x=-۵ \text{ غ ق ق} \\ \text{یا} \\ x^{۲}-۳۰=۱۰۲-x \end{array}\right\} \Rightarrow x^{۲}+x-۱۳۲=۰ \Rightarrow (x-۱۱)(x+۱۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱۱ \\ x=-۱۲ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس سوم) (متوسط)

۱۵- گزینه «۴» ـ تعداد شیمیدانان و ریاضی‌دانان می‌توانند به حالت‌های صفر، یک دو و سه نفر با هم برابر باشند.

صفر شیمی‌دان و صفر ریاضی‌دان: $\binom{۴}{۰}\times\binom{۵}{۰}\times\binom{۶}{۶}=۱\times۱\times۱=۱$

یک شیمی‌دان و یک ریاضی‌دان: $\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۴}=۴\times۵\times۱۵=۳۰۰$

دو شیمی‌دان و دو ریاضی‌دان: $\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۲}=۹۰۰$

سه شیمی‌دان و سه ریاضی‌دان: $\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۰}=۴۰$

$$\Rightarrow ۱+۳۰۰+۹۰۰+۴۰=۱۲۴۱$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس سوم) (دشوار)

۱۶- گزینه «۲» ـ می‌دانیم:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

$$c(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\frac{n!}{(n-۴)!}=۶۰\times\frac{(n-۲)!}{(n-۴)!\times۲!} \Rightarrow n!=۳۰(n-۲)!$$

$$n(n-۱)\cancel{(n-۲)!}=۳۰\cancel{(n-۲)!} \Rightarrow n(n-۱)=۳۰ \Rightarrow n^{۲}-n-۳۰=۰$$

$$(n-۶)(n+۵)=۰ \begin{cases} n=۶ \\ n=-۵ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس سوم) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» ـ چون گوی قرمزی نباید انتخاب شود درواقع باید ۳ گوی از بین ۹ گوی دیگر انتخاب کرد.

$$C(۹,۳)=\frac{۹!}{۶!\times۳!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۳\times۲\times۱}=۸۴$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس سوم) (آسان)

۱۸- گزینه «۳» ـ برای حل این سؤال از متمم استفاده می‌کنیم.

$$\text{کل حالات}: \binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۵! \times ۴!} = ۱۲۶$$

هر دو نفر دعوت شوند: (۳ از بقیه انتخاب شوند)

$$\binom{۷}{۳}\binom{۲}{۲} = \frac{۷!}{۳! \times ۴!} \times ۱ = ۳۵$$

$$\Rightarrow ۱۲۶ - ۳۵ = ۹۱$$

(سراسری) (فصل ششم ـ درس سوم) (دشوار)

۱۹- گزینه «۴» ـ چون قرار است اعداد متشکل از ارقام فرد باشند، باید از اعداد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ استفاده کنیم. از متمم استفاده می‌کنیم.

تعداد کل اعداد متشکل از ارقام فرد:

$$\boxed{۵} \times \boxed{۵} \times \boxed{۵} = ۱۲۵$$

تعداد اعداد متشکل از ارقام فرد و بخش‌پذیر بر ۵:

$$\boxed{۵} \times \boxed{۵} \times \boxed{۱} = ۲۵$$

توجه کنید برای جایگاه یکان فقط می‌توان عدد ۵ را قرار داد (اعداد کاملاً باید بر ۵ بخش‌پذیر باشند پس با هر یک از ارقام صفر یـا ۵ اسـتفاده شود که صفر عدد فرد نیست) برای خانه‌های دیگر شرط خاصی نداریم پس سایر ارقام به پنج حالت پر می‌شوند. پس:

$$۱۲۵ - ۲۵ = ۱۰۰$$

(سراسری) (فصل ششم) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» ـ چون ارقام داده شده شامل اعداد تکراری است داریم:

$$\frac{۶!}{\underbrace{۳!}_{\text{جایگشت تکراری ۵ها}} \times \underbrace{۲!}_{\text{جایگشت تکراری ۳ها}}} = ۶۰$$

(سراسری) (فصل ششم) (آسان)