ریاضی ۱

۱- گزینه «۱» ــ از خانه سمت چپ شروع می‌کنیم:

اولین خانه به ۶ حالت می‌تواند پر شود:

$\underline{۶}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

دومین خانه به ۵ حالت پر می‌شود، زیرا که نباید با خانه قبلی یکسان باشد:

$\underline{۶}\ \underline{۵}\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_\ \_$

و سومین خانه هم به ۵ حالت (۶ حرف منهای آن حرفی که در خانه دوم نشسته) به‌همین ترتیب و طبق اصل ضرب خواهیم داشت:

تعداد حالات : $\underline{۶}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵}\ \underline{۵} = ۶\times ۵^{۸}$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۱ ــ شمارش) (متوسط)

۲- گزینه «۲» ــ هر عضو ۲ حالت دارد، یا دو زیرمجموعه هست یا نیست، ۳ و ۱ که تکلیفشان مشخص است و ۱ حالت دارند، پس برای بـاقی اعضـا طبق اصل ضرب $۱۶ = ۲\times ۲\times ۲\times ۲$. (طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۱ ــ شمارش) (متوسط)

۳- گزینه «۳» ــ نفر اول یک نفر از ۱۳ نفر است که ۱۳ حالت دارد، نفر دوم یک نفر از ۱۲ نفر باقی مانده است که خود ۱۲ حالت دارد، نفر سوم یـک نفر از ۱۱ نفر باقی مانده است که ۱۱ حالت دارد، پس طبق اصل ضرب، نفرات اول تا سوم به $۱۱\times ۱۲\times ۱۳$ حالت ممکن است مشخص شوند.

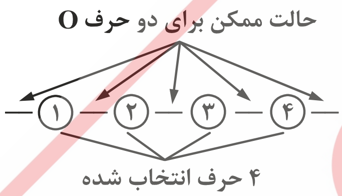
(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۱ ــ شمارش) (متوسط)

۴- گزینه «۱» ــ فضای نمونه‌ای این پرتاب به‌صورت:

{(پ , ۶)، (پ , ۴)، (پ , ۲)، (ر , ۶)، (ر , ۴)، (ر , ۲)}

پس $n(A) = ۶$. (سراسری) (فصل ششم ــ درس ۱ ــ شمارش) (آسان)

۵- گزینه «۲» ــ ابتدا جایگشت ۴ حرف دیگر را حساب می‌کنیم که برابر است با !۴ حالت. حال دو حرف O را مابین آن‌ها جای می‌دهیم که با توجه به شکل باید ۲ خانه از ۵ خانه را انتخاب کنیم که $۱۰ = \frac{۵!}{۳!\times ۲!} = \binom{۵}{۲}$ حالت دارد، پس طبق اصل ضرب، جواب $۴!\times \binom{۵}{۲}$ می‌باشد.



(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۱ ــ شمارش) (دشوار)

۶- گزینه «۳» ــ معلمین و معاونین به‌ترتیب به !۳ و !۲ حالت می‌توانند در کنار هم جایگشت داشته باشند، از طرفی معلمین می‌توانند در ابتدا قرار گیرند و معاونین به دنبال آن‌ها و برعکس، پس دو حالت نیز ترتیب آن‌ها را داریم، پس:

تعداد کل حالات : $۲\times ۳!\times ۲! = ۲۴$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۲ ــ جایگشت) (متوسط)

۷- گزینه «۲» ــ

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(n+۱)n(n-۱)!} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow \frac{۱}{n(n+۱)} = \frac{۱}{۲۰} \Rightarrow n(n+۱) = ۲۰ \Rightarrow n = ۴ \Rightarrow n! = ۴! = ۲۴$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۳ ــ ترتیب) (آسان)

۸- گزینه «۱» ــ

$$\frac{n!}{(n-۱)!} = \frac{n(n-۱)!}{(n-۱)!} = n$$

$$\frac{n!}{(n+۱)!} = \frac{n!}{(n+۱)n!} = \frac{۱}{n+۱}$$

$$\frac{n!}{(n-۱)!} + \frac{n!}{(n+۱)!} + \frac{n}{n+۱} = n + \frac{۱}{n+۱} + \frac{n}{n+۱} = n + \frac{n+۱}{n+۱} = n+۱$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۳ ــ ترتیب) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ــ

$$\begin{array}{cccccc} \_ & S & \_ & S & \_ & S \\ ۳ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ & ۱ \end{array} \Rightarrow ۶$$

$$\begin{array}{cccccc} S & \_ & S & \_ & S & \_ \\ ۱ & ۳ & ۱ & ۲ & ۱ & ۱ \end{array} \Rightarrow ۶$$

$$\Rightarrow ۶+۶=۱۲$$

(کتاب همراه علوی) (فصل ششم ــ درس ۲ ــ جایگشت) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ــ می‌دانیم که $۱=!۰=!۱$ می‌شود، بنابراین:

$$(x-۱)!=۰! \Rightarrow x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

$$(x-۱)!=۱! \Rightarrow x-۱=۱ \Rightarrow x=۲$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۱ ــ شمارش) (متوسط)

۱۱- گزینه «۴» ــ اعداد شش رقمی باید با ارقام ۱ یا ۴ شروع شوند، پس دو حالت برای رقم آن وجود دارد که پس از انتخاب آن، پنج رقم باقی‌مانده به $۷۲۰=۲\times۳\times۴\times۵\times۶$ حالت می‌توانند انتخاب شوند، پس تعداد کل اعداد برابر است با:

$$۲\times۷۲۰=۱۴۴۰$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۲ ــ جایگشت) (متوسط)

۱۲- گزینه «۴» ــ هر سه گزینه صحیح هستند، زیرا می‌توان ابتدا مسئولیت هریک از افراد را مشخص کرد، پس به سراغ نفر بعدی رفت و افراد اولویتی نسبت به یکدیگر ندارند.

$$\binom{۱۲}{۳}\binom{۹}{۴}\binom{۵}{۵}=\binom{۱۲}{۵}\binom{۷}{۳}\binom{۴}{۴}=\binom{۱۲}{۴}\binom{۸}{۳}\binom{۵}{۵}$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۲ ــ جایگشت) (دشوار)

۱۳- گزینه «۳» ــ با هر سه نقطه روی یک دایره می‌توانیم یک مثلث درست کنیم، پس:

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!\times۵!}=۵۶$$

(کتاب همراه علوی) (فصل ششم ــ درس ۳ ــ ترتیب) (آسان)

۱۴- گزینه «۴» ــ

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۳}=۱۰\times۴=۴۰$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۲ ــ جایگشت) (آسان)

۱۵- گزینه «۳» ــ

پر کردن نیمکت ۳ نفره: $\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times۳!}=۲۰$

پر کردن نیمکت ۲ نفره از بین ۳ دانش‌آموز باقی‌مانده: $\binom{۳}{۲}=۳$

پر کردن نیمکت ۱ نفره با ۱ دانش‌آموز باقی‌مانده: $\binom{۱}{۱}=۱$

پس تعداد کل حالات برابر است با:

$$۲۰\times۳\times۱=۶۰$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۲ ــ جایگشت) (دشوار)

۱۶- گزینه «۱» ــ می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با: $\binom{n}{k}$

از طرفی می‌دانیم:

$$\binom{n}{k_1}=\binom{n}{k_2} \Rightarrow k_1+k_2=n$$

پس:

$$\binom{n}{۳}=\binom{n}{۴} \Rightarrow n=۳+۴=۷$$

پس تعداد زیرمجموعه‌های ۶ عضوی آن برابر است با:

$$\binom{۷}{۶}=۷$$

(طلوعی) (فصل ششم ــ درس ۱ ــ شمارش) (متوسط)

۱۷- گزینه «۳» ـ از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$\text{دو مهره سیاه}: \binom{۳}{۲}\times\binom{۷}{۱} = ۳\times ۷ = ۲۱$$

$$\text{سه مهره سیاه}: \binom{۳}{۳}\times\binom{۷}{۰} = ۱\times ۱ = ۱$$

$$\Rightarrow\ ۲۱+۱=۲۲$$

(طلوعی) (فصل ششم ـ درس ۳ ـ ترتیب) (متوسط)

۱۸- گزینه «۳» ـ سه عدد a، b و c تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، اگر $2b = a+c$.

$$\binom{n}{۱}+\binom{n}{۳}=۲\binom{n}{۲}$$

$$n+\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۳\times ۲\times ۱}=۲\frac{n(n-۱)}{۲}\xrightarrow{\div n} ۱+\frac{(n-۱)(n-۲)}{۳\times ۲}=n-۱ \Rightarrow \frac{۶+n^۲-۳n+۲}{۶}=n-۱ \Rightarrow n^۲-۳n+۸=۶n-۶$$

$$n^۲-۹n+۱۴=۰ \Rightarrow (n-۷)(n-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} n=۷ \\ n=۲ \end{cases}$$

با توجه به $\binom{n}{۳}$ مشخص است که $n\geq ۳$، پس $n=۷$ قابل قبول است. (طلوعی) (فصل سوم ـ درس ۱ ـ شمارش) (دشوار)

۱۹- گزینه «۲» ـ

$$P(n,۲)-C(n,۲)=۳۶ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!}-\frac{n!}{۲!(n-۲)!}=۳۶ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!}(۱-\frac{۱}{۲})=۳۶ \Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!}(\frac{۱}{۲})=۳۶ \xrightarrow{\times ۲} \frac{n!}{(n-۲)!}=۷۲$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=۷۲$$

$$n(n-۱)=۷۲ \Rightarrow n=۹$$

(کتاب همراه علوی) (فصل ششم ـ درس ۳ ـ ترتیب) (متوسط)

۲۰- گزینه «۳» ـ در کلمه «مسلمانان» حرف «الف» ۲ بار و حرف «ن» ۲ بار و حرف «م» نیز ۲ بار تکرار شده است و تعداد کل حروف ۸ می‌باشد، بنابراین:

$$\text{تعداد جایگشت‌ها}: \frac{۸!}{۲!\times ۲!\times ۲!}=\frac{۸\times ۷!}{۸}=۷!$$

(سراسری) (فصل ششم ـ درس ۲ ـ جایگشت) (متوسط)