ریاضی و آمار

۱- گزینه «۴» ـ ابتدا اختلاف مشترک را حساب می‌کنیم: $d = a_۲ - a_۱ = -۲ - (-۴) = ۲$ مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه $S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$ به‌دست می‌آید، که $a_۱$ جمله اول و d اختلاف مشترک است:

$$\begin{cases} a_۱ = -۴ \\ d = ۲ \\ S_n = ۵۰ \end{cases} \Rightarrow ۵۰ = \frac{n}{۲}[۲(-۴) + (n-۱)(۲)] \Rightarrow ۵۰ = \frac{n}{۲}[-۸ + ۲n - ۲] \Rightarrow$$

$$۲ \times ۵۰ = ۲n^۲ - ۱۰n \Rightarrow ۲n^۲ - ۱۰n - ۱۰۰ = ۰ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۲}}$$

$$n^۲ - ۵n - ۵۰ = ۰ \xrightarrow{\text{تجزیه می‌کنیم}} (n+۵)(n-۱۰) = ۰ \Rightarrow n = -۵ , ۱۰$$

چون n باید عدد طبیعی باشد فقط $n = ۱۰$ قابل قبول است. (اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموع n جمله اول دنباله حسابی)

۲- گزینه «۳» ـ از رابطه بازگشتی $a_n = a_{n+۱} + ۳$ داریم: چون a_n و $a_{n+۱}$ دو جمله متوالی‌اند، پس این دنباله یک دنباله حسابی با اختلاف مشترک -۳ است. مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] \Rightarrow S_{۱۲} = \frac{۱۲}{۲}[۲(۴) + (۱۲-۱)(-۳)] \Rightarrow S_{۱۲} = ۶[۸ - ۳۳] = -۱۵۰$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموع n جمله اول دنباله حسابی)

۳- گزینه «۱» ـ در حالت اول، جمله اول را $a_۱$ و اختلاف مشترک را d می‌گیریم و مجموع ۸ جمله اول را حساب می‌کنیم. از رابطه مجموع n جمله اول دنباله حسابی داریم:

$$S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d] \Rightarrow S_۸ = \frac{۸}{۲}[۲a_۱ + (۸-۱)d] \Rightarrow S_۸ = ۴[۲a_۱ + ۷d] = ۸a_۱ + ۲۸d$$

در حالت دوم، جمله اول را $a_۱$ و اختلاف مشترک را $d - ۳$ می‌گیریم. (چون ۳ واحد از اختلاف مشترک کم شده) حال مجموع ۸ جمله را حساب می‌کنیم:

$$S'_۸ = \frac{۸}{۲}[۲a_۱ + (۸-۱)(d-۳)] = ۴[۲a_۱ + ۷(d-۳)] \Rightarrow \begin{cases} S'_۸ = ۸a_۱ + ۲۸d - ۸۴ \\ S_۸ = ۸a_۱ + ۲۸d \end{cases} \Rightarrow$$ ۸۴ واحد از مجموع ۸ جمله کم شده است.

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموع n جمله اول دنباله حسابی)

۴- گزینه «۳» ـ در دنباله حسابی $... , n , m , ۴ , -۲$ جمله اول $a_۱ = -۲$ و جمله سوم $a_۳ = ۴$ می‌باشد. d را حساب می‌کنیم:

جمله عمومی یک دنباله حسابی از رابطه $a_n = a_۱ + (n-۱)d$ بدست می‌آید.

$$a_۳ = a_۱ + ۲d \Rightarrow ۴ = -۲ + ۲d \Rightarrow d = ۳$$

حال با $a_۱ = -۲$ و $d = ۳$ و $n = ۱۶$ مقدار S_n را از رابطه $S_n = \frac{n}{۲}[۲a_۱ + (n-۱)d]$ حساب می‌کنیم:

$$S_{۱۶} = \frac{۱۶}{۲}[۲(-۲) + ۱۵(۳)] = ۳۲۸$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ مجموع n جمله اول دنباله حسابی)

۵- گزینه «۲» ـ

$$\begin{cases} a_۵ = \frac{۱}{۸} \\ a_۹ = ۲ \end{cases}$$

جمله عمومی یک دنباله هندسی به‌صورت $a_n = a_۱ r^{n-۱}$ است.

$a_۵$ و $a_۹$ را در رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_۵ = a_۱ r^۴ \\ a_۹ = a_۱ r^۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{۱}{۸} = a_۱ r^۴ \\ ۲ = a_۱ r^۸ \end{cases} * \xrightarrow[\text{تقسیم می کنیم}]{\text{دو معادله را بر یکدیگر}} \frac{\frac{۱}{۸}}{۲} = \frac{a_۱ r^۴}{a_۱ r^۸} \Rightarrow \frac{۱}{۱۶} = \frac{۱}{r^۴} \Rightarrow r = ۲$$

r را در یکی از معادلات * قرار می‌دهیم تا $a_۱$ به‌دست آید:

$$۲ = a_۱ r^۸ \Rightarrow ۲ = a_۱ (۲)^۸ \Rightarrow a_۱ = ۲^{-۷}$$

$$a_n = a_۱ r^{n-۱} \Rightarrow a_n = ۲^{-۷} \times ۲^{n-۱} = ۲^{n-۸} \Rightarrow a_n = ۲^{n-۸}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ دنباله هندسی)

۶- گزینه «۴» ـ هرگاه a، b و c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند آن‌گاه $b^۲ = a \times c$ که b را واسطه هندسی میان a و c می‌نامند، در اینجا $x-۱$ و x و $x+۲$ سه جمله متوالی‌اند بنابراین داریم:

$$x^۲ = (x-۱)(x+۲)$$

$$\Rightarrow x^۲ = x^۲ + x - ۲ \Rightarrow x = ۲$$

چون دنباله افزایشی است پس جمله دوم از جمله اول بیشتر است یعنی x جمله دوم و $x-۱$ جمله اول است:

$$r = \frac{\text{جمله دوم}}{\text{جمله اول}} = \frac{x}{x-۱} = \frac{۲}{۲-۱} = ۲$$

جمله عمومی دنباله هندسی برابر $a_n = a_۱ r^{n-۱}$ است.

$$\begin{cases} a_۱ = x-۱ = ۲-۱ = ۱ \\ r = ۲ \end{cases} \Rightarrow a_۶ = ۱ \times ۲^۵ = ۳۲$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ دنباله هندسی)

۷- گزینه «۳» ـ بین دو عدد ۸ و ۶۴، پنج جمله داریم:

$$۸ , \underbrace{\cdots\cdots}_{\text{۵ جمله}} , ۶۴ \Rightarrow$$ در کل ۷ جمله داریم که جمله اول ۸ و جمله آخر ۶۴ می‌باشد.

با توجه به رابطه جمله عمومی یک دنباله هندسی $a_n = a_۱ r^{n-۱} \Leftarrow$

$$۶۴ = ۸ r^{۷-۱} \Rightarrow ۶۴ = ۸ r^۶ \Rightarrow r^۶ = ۸$$

$$(r^۲)^۳ = ۲^۳ \Rightarrow r^۲ = ۲$$

$$r = \pm\sqrt{۲}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ دنباله هندسی)

۸- گزینه «۲» ـ طبق اطلاعات سؤال داریم:

$$\begin{cases} a_۴ = ۹ \\ a_۶ \times a_۵ = ۳۶ \\ a_۷ = ? \end{cases}$$

جمله عمومی یک دنباله هندسی به‌صورت $a_n = a_۱ r^{n-۱}$ می‌باشد. $a_۴$, $a_۵$, $a_۶$, $a_۷$ را در رابطه بالا جایگذاری می‌کنیم:

$$\begin{cases} a_۴ = a_۱ r^۳ = ۹ \\ a_۵ = a_۱ r^۴ \\ a_۶ = a_۱ r^۵ \\ a_۷ = a_۱ r^۶ \end{cases}$$

$$a_۶ \times a_۵ = ۳۶ \Rightarrow a_۱ r^۵ \times a_۱ r^۴ = ۳۶ \Rightarrow \underbrace{a_۱ r^۳}_{a_۴} \times \underbrace{a_۱ r^۶}_{a_۷} = ۳۶ \Rightarrow ۹ \times a_۷ = ۳۶ \Rightarrow a_۷ = ۴$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ دنباله هندسی)

۹- گزینه «۲» ـ جمله عمومی دنباله هندسی به‌صورت $a_n = a_1 r^{n-1}$ می‌باشد.

$$\begin{cases} a_4 = 27 \Rightarrow \\ a_6 = 3 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} a_4 = a_1 r^3 \Rightarrow \\ a_6 = a_1 r^5 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} 27 = a_1 r^3 \\ 3 = a_1 r^5 \end{cases} \xrightarrow[\text{تقسیم می‌کنیم}]{\text{دو طرف را بر یکدیگر}} \frac{27}{3} = \frac{a_1 r^3}{a_1 r^5} \Rightarrow 9 = \frac{1}{r^2} \Rightarrow r = \pm\frac{1}{3}$$

چون دنباله کاهشی است فقط $r = \frac{1}{3}$ قابل قبول است. در یکی از معادلات بالا r را جایگذاری می‌کنیم و a_1 را به‌دست می‌آوریم:

$$3 = a_1 r^5 \Rightarrow 3 = a_1 (\frac{1}{3})^5 \Rightarrow a_1 = 3^6$$

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $s_n = a\frac{(1-r^n)}{1-r}$ به‌دست می‌آید که a جمله اول است.

$$s_3 = 3^6 \frac{(1-(\frac{1}{3})^3)}{1-\frac{1}{3}} = 3^6 \frac{(1-\frac{1}{27})}{\frac{2}{3}} = 3^6 \times \frac{\frac{26}{27}}{\frac{2}{3}} \Rightarrow s_3 = 1053$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

۱۰- گزینه «۱» ـ مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ به‌دست می‌آید. چون روی سؤال تعداد جملات را خواسته باید یک n پیدا کنیم:

$$r = 2$$

$$a = \frac{1}{3}$$

$$s_n = 5$$

$$5 = \frac{1}{3} \times \frac{1-2^n}{1-2} \Rightarrow 15 = \frac{1-2^n}{-1}$$

$$1-2^n = -15 \Rightarrow 2^n = 16 \Rightarrow n = 4$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

۱۱- گزینه «۲» ـ هر جمله $\frac{1}{5}$ جمله قبلی‌اش است:

$$r = \frac{1}{5}$$

باتوجه به رابطه $s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$:

$$\begin{cases} s_3 = 31 \\ a = ? \\ n = 3 \end{cases} \Rightarrow 31 = a\frac{1-(\frac{1}{5})^3}{1-\frac{1}{5}} \Rightarrow 31 = a\frac{1-\frac{1}{125}}{\frac{4}{5}} \Rightarrow 31 = a\frac{\frac{124}{125}}{\frac{4}{6}} \Rightarrow 31 = a\frac{\overset{31}{\cancel{124}} \times \cancel{5}}{\underset{25}{\cancel{125}} \times \cancel{4}} \Rightarrow a = 25$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

۱۲- گزینه «۳» ـ از رابطه بازگشتی $a_n = 4a_{n-1}$ نتیجه می‌گیریم که a_n یک دنباله هندسی با نسبت مشترک $r = 4$ است.

مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی از رابطه $s_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$ به‌دست می‌آید که a جمله اول و r نسبت مشترک است:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{5} \\ r = 4 \\ s_4 = ? \end{cases} \Rightarrow s_4 = \frac{1}{5} \times \frac{1-4^4}{1-4} = \frac{1}{5} \times \frac{1-256}{1-4} = \frac{1}{5} \times 85 = 17$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

۱۳- گزینه «۴» ـ از رابطه مجموع n جمله اول یک دنباله هندسی داریم:

$$s_n = a\frac{1-r^n}{1-r} = \frac{a-ar^n}{1-r}$$

چون $a_n = ar^n \Leftarrow$

$$s_n = \frac{a-a_n}{1-r}$$

در اینجا جملات اول و آخر را داریم:

$$a = 3 \qquad a_n = 63$$

$$s_n = 180 \Rightarrow 180 = \frac{3-63}{1-r} \Rightarrow 1-r = \frac{-60}{180} \Rightarrow 1-r = -\frac{1}{3} \Rightarrow r = 1+\frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

(اکبری) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ مجموع n جمله اول دنباله هندسی)

۱۴- گزینه «۱» ـ تابع f یک تابع تک ضابطه‌ای است:

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 \\ D_f = \mathbb{R} \end{cases}$$

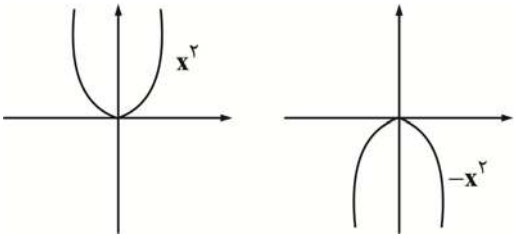
تابع g که تابع علامت است یک تابع سه ضابطه‌ای است.

$$g(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}, D_g = \mathbb{R}$$

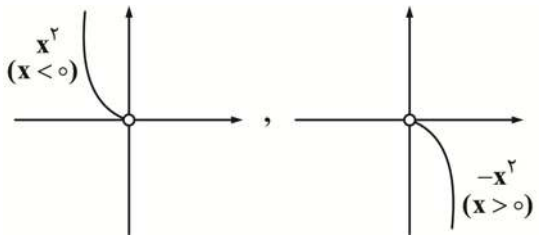
ضابطه این در تابع را در محدوده‌های $x > 0$، $x = 0$ و $x < 0$ درهم ضرب می‌کنیم:

$$\begin{aligned} &x > 0 : f(x)\times g(x) = -x^2 \times 1 = -x^2 \\ &x = 0 : f(x)\times g(x) = -x^2 \times 0 = 0 \\ &x < 0 : f(x)\times g(x) = -x^2 \times (-1) = x^2 \end{aligned} \Rightarrow (fg)(x) = \begin{cases} -x^2 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

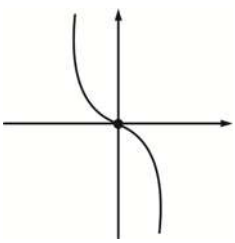
نمودار دو تابع $y = x^2$ و $y = -x^2$ به‌صورت زیر است:



باید نمودار $y = x^2$ را در محدوده $x < 0$ و نمودار $y = -x^2$ در محدوده $x > 0$ رسم کنیم:



با اضافه کردن نقطه $(0, 0)$ نمودار تابع fg به‌دست می‌آید،



(اکبری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۵- گزینه «۲» ـ دامنه در تابع f, g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f = \{۱, ۰, -۱\}, D_g = \{۰, ۳, ۱\}$$

$$D_{\frac{g}{f}} = D_g \cap D_f - \{x \mid \underbrace{f(x)}_{\text{خروجی } f(x) \text{ برابر صفر نیست}} = ۰\} = \{۰, ۱\} - \{\varnothing\} = \{۰, ۱\}$$

$$x = ۰ \quad (\frac{g}{f})(۰) = \frac{g(۰)}{f(۰)} = \frac{-۱}{-۲} = \frac{۱}{۲}$$

$$x = ۱ \quad (\frac{g}{f})(۱) = \frac{g(۱)}{f(۱)} = \frac{۶}{۳} = ۲$$

پس تابع $\frac{g}{f}$ شامل دو زوج مرتب $(۰, \frac{۱}{۲}), (۱, ۲)$ است.

$$\frac{g}{f} = \{(۰, \frac{۱}{۲}), (۱, ۲)\}$$

(اکبری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۶- گزینه «۳» ـ

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

(زیر رادیکال باید بزرگ مساوی صفر باشد: $x + ۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۱$)

$$D_f = \mathbb{R} \qquad D_g = x \geq -۱$$

$$\Rightarrow D_{f-g} = x \geq -۱ \Rightarrow D_{f-g} = [-۱, +\infty)$$

(اکبری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ اعمال جبری روی توابع)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$\text{میانگین درآمدها } \bar{x} = \frac{\text{مجموع درآمدها}}{\text{تعداد افراد}} = \frac{۱+۲+۳+۲+۴+۳+۵+۶+۸+۸۰}{۱۰} = \frac{۱۱۴}{۱۰}$$

$$\bar{x} = ۱۱/۴ \text{ میلیون تومان}$$

$$\text{خط فقر به روش نصف میانگین} = \frac{\bar{x}}{۲} = \frac{۱۱/۴}{۲} = ۵/۷ \text{ میلیون تومان}$$

برای محاسبه خط فقر به روش نصف میانه ابتدا باید درآمدها را از کوچک به بزرگ مرتب کنیم:

$$\underbrace{۱, ۲, ۲, ۳}, \boxed{۳, ۴}, \underbrace{۵, ۶, ۸, ۸۰}$$

چون تعداد داده‌ها زوج است میانه به‌صورت زیر است:

$$\frac{۳+۴}{۲} = ۳/۵$$

$$\text{خط فقر به روش نصف میانه} = \frac{۳/۵}{۲} = ۱/۷۵ \text{ میلیون تومان}$$

$$\text{خط فقر به روش نصف میانگین} - \text{خط فقر به روش نصف میانه} = ۵/۷ - ۱/۷۵ = ۳/۹۵$$

(اکبری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ شاخص‌های آماری ـ خط فقر)

۱۸- گزینه «۴» ـ

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{تعداد بیکاران}}{\text{جمعیت فعال}} \times ۱۰۰$$

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{۵}{۶۰} \times ۱۰۰ = \frac{۱}{۱۲} \times ۱۰۰ = ۸/۳$$

(اکبری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ شاخص‌های آماری ـ نرخ بیکاری)

۱۹- گزینه «۲» ـ

$$\text{تورم مسکن} = \frac{(\text{شاخص مسکن در سال ۹۴}) - (\text{شاخص مسکن در سال ۹۸})}{\text{شاخص مسکن در سال ۹۴}} \times ۱۰۰ \Rightarrow$$

$$۶۰ = \frac{۳۰ - x}{x} \times ۱۰۰ \Rightarrow \frac{۳۰ - x}{x} = \frac{۶۰}{۱۰۰} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow ۱۵۰ - ۵x = ۳x \Rightarrow x = ۱۸/۷۵$$

(اکبری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ شاخص‌های آماری ـ تورم)

۲۰- گزینه «۳» ـ

$$\Rightarrow \text{شاخص پایه آموزش} = [\text{میانگین تعداد کلمات هر جمله} + \text{درصد کلمات دشوار}) \times ۰/۴]$$

$$۱۰ = [(۲۱ + x) \times ۰/۴] \Rightarrow ۲۱ + x = \frac{۱۰}{۰/۴} = \frac{۱۰۰}{۴} = ۲۵ \Rightarrow x = ۲۵ - ۲۱ = ۴$$

(اکبری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ شاخص‌های آماری ـ شاخص پایه آموزش)