ریاضیات

۱- گزینه «۱» ـ نقطه A را به‌صورت $A(k\,,\,۰)$ در نظر می‌گیریم. فاصله آن‌را از خط $۳x+۴y-۱=۰$ برابر $\frac{۹}{۵}$ قرار می‌دهیم:

$$|AH|=\frac{|۳(k)+۴(۰)-۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{|۳k-۱|}{۵}=\frac{۹}{۵} \Rightarrow |۳k-۱|=۹ \Rightarrow \begin{cases} ۳k-۱=۹ \\ ۳k-۱=-۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۳k=۱۰ \Rightarrow k=\frac{۱۰}{۳} \\ ۳k=-۸ \Rightarrow k=-\frac{۸}{۳} \end{cases}$$

پس فاصله نقطه A از محور yها $\frac{۱۰}{۳}$ یا $\frac{۸}{۳}$ خواهد بود. (نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ هندسه تحلیلی)

۲- گزینه «۳» ـ مرکز دایره را حساب می‌کنیم.

$$O=\frac{۱}{۲}(A+B)=(۱\,,\,۳)$$

شعاع دایره را محاسبه می‌کنیم:

$$r=|OA|=\sqrt{(۳-۱)^۲+(۷-۳)^۲}=\sqrt{۴+۱۶}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

نقطه‌ای روی دایره قرار دارد که فاصله آن از مرکز دایره برابر شعاع دایره یعنی $۲\sqrt{۵}$ باشد. گزینه‌ای صحیح است که فاصله آن از O برابر $۲\sqrt{۵}$ باشد:

$$A'(-۳\,,\,۵)\,,\,O=(۱\,,\,۳) \Rightarrow |OA'|=\sqrt{(۱+۳)^۲+(۵-۳)^۲}=\sqrt{۲۰}=۲\sqrt{۵}$$

چون فاصله نقطه $A'\ (-۳\,,\,۵)$ از نقطه $O(۱\,,\,۳)$ برابر $۲\sqrt{۵}$ است، پس A' روی دایره قرار د ارد.

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ هندسه تحلیلی)

۳- گزینه «۱» ـ چون دو ضلع داده شده اضلاع مقابل مربع هستند پس با هم موازیند.

$$\begin{cases} L: x+۲y=m \\ L':(۱-n)x-۲y=۰ \end{cases} \xrightarrow{L\parallel L'} \frac{۱}{۱-n}=\frac{۲}{-۲} \Rightarrow ۱-n=-۱ \Rightarrow n=۲ \Rightarrow \begin{cases} L: x+۲y=m \\ L': x+۲y=۰ \end{cases}$$

فاصله دو خط موازی L و L' برابر ضلع مربع است. اگر ضلع مربع را a فرض کنیم.

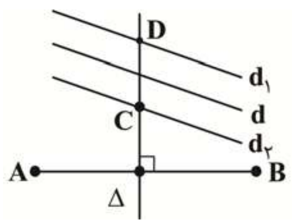
$$a=\frac{|m-۰|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|m|}{\sqrt{۵}}$$

$$\text{مساحت مربع}=a^۲=\frac{m^۲}{۵}=۸۰ \Rightarrow m^۲=۴۰۰ \Rightarrow m=\pm۲۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ درس اول ـ هندسه تحلیلی)

۴- گزینه «۳» ـ مکان هندسی نقاطی که از دو سر AB یکسان باشد، عمودمنصف AB است. همچنین مکان هندسی نقاطی که از خط d فاصله ۴ داشته باشد دو خط موازی با d به فاصله ۴ واحد است. جواب مسئله مکان‌های مشترک است.

با توجه به توضیحات داده شده نقاط C و D جواب مسئله است.



(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس اول ـ ترسیم‌های هندسی)

۵- گزینه «۳» ـ اگر $\frac{a}{a'}=k$ فرض شود:

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{۱}{۲}a\times h}{\frac{۱}{۲}a'\times h'}=\frac{a}{a'}\times\frac{h}{h'}\Rightarrow k+۴=۳k\Rightarrow k=۲\Rightarrow\frac{S}{S'}=k+۴=۲+۴=۶$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ نسبت)

۶- گزینه «۴» ـ چون مثلث ABC قائم‌الزاویه است پس:

$$AC^۲=BC^۲-AB^۲=۱۷^۲-۸^۲=۹\times ۲۵\Rightarrow AC=۱۵$$

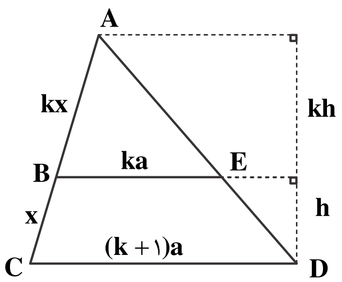
طبق قضیه تالس:

$$\frac{BD}{AB}=\frac{BE}{BC}=\frac{DE}{AC}\Rightarrow\frac{۱}{۲}=\frac{DE}{۱۵}=\frac{BE}{۱۷}\Rightarrow DE=۷/۵\,,BE=۸/۵$$

$$\text{محیط ذوزنقه}=۷/۵+۸/۵+۱۵+۴=۱۶+۱۹=۳۵$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تالس)

۷- گزینه «۱» ـ فرض می‌کنیم که $BC=x$ باشد. دراین‌صورت $AB=kx$ خواهد بود.

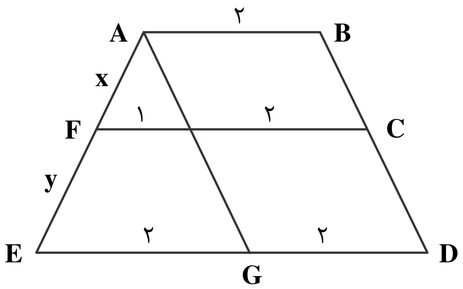


$$S(ABE)=S(BEDC)\Rightarrow\frac{۱}{۲}ka\times kh=\frac{۱}{۲}(۲k+۱)a\times h$$

$$\Rightarrow k^۲=۲k+۱\xrightarrow{k>۰}k=\sqrt{۲}+۱$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تالس)

۸- گزینه «۳» ـ از A به موازات BD پاره‌خطی رسم می‌کنیم.

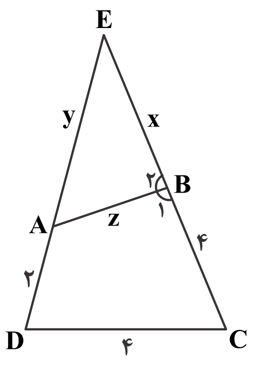


$$\Delta AEG:\frac{AF}{AE}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{x}{x+y}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow ۳x=x+y\Rightarrow y=۲x\Rightarrow\frac{y}{x}=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس دوم ـ تالس)

۹- گزینه «۳» ـ امتداد BC و AD یکدیگر را در E قطع می‌کنند.



$$\hat{B}_۱+\hat{B}_۲=\hat{B}_۱+\hat{D}=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۲=\hat{D}$$

با توجه به این‌که در دو مثلث AEB و EDC دو زاویه با هم برابرند پس با هم متشابه‌اند.

$$\begin{cases}E:\text{مشـــترک}\\ \hat{D}=\hat{B}_۲\end{cases}\Rightarrow\Delta AEB\sim\Delta EDC\Rightarrow\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{DC}=\frac{BE}{DE}$$

$$\Rightarrow\frac{y}{x+۴}=\frac{z}{۴}=\frac{x}{y+۲}\xrightarrow{AE=y=۴}\frac{۴}{x+۴}=\frac{x}{۶}\Rightarrow x^۲+۴x=۲۴$$

$$\Rightarrow x^۲+۴x+۴=۲۸\Rightarrow(x+۲)^۲=۲۸\Rightarrow x+۲=۲\sqrt{۷}\Rightarrow x=۲(\sqrt{۷}-۱)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم ـ تشابه مثلث‌ها)

۱۰- گزینه «۳» ـ چون $f'(x)$ تابع خطی با شیب منفی است پس $f(x)$ تابعی درجه دوم با ضریب درجه دوم منفی است و همچنین $f'(x)$ در نقطـه‌ای بـا طول مثبت، صفر است پس طول رأس سهمی مثبت است. با توجه به توضیحات فوق تابع $-۲x^۲+۴x$ می‌تواند $f(x)$ باشد.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نمودار مشتق)

۱۱- گزینه «۳» ـ گزینه‌ای صحیح است که مشتق آن همواره مثبت باشد. مشتق تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱) $y = x^۳ + x^۲ \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۲x = x(۳x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ , -\frac{۲}{۳}$

x		$-\frac{۲}{۳}$		۰	
y′	+	۰	−	۰	+

۲) $y = x^۴ - ۴x \Rightarrow y' = ۴x^۳ - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۱$

x		۱	
y′	−	۰	+

۳) $y = x^۳ + x \Rightarrow y' = ۳x^۲ + ۱$

x	به ازای هر x
y′	+

۴) $y = \frac{۱}{۵}x^۵ + ۴x^۲ \Rightarrow y' = x^۴ + ۸x = x(x^۳ + ۸) = ۰ \Rightarrow x = ۰ , -۲$

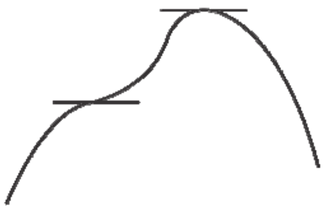
x		−۲		۰	
y′	+	۰	−	۰	+

ملاحظه می‌کنید که مشتق تابع $x^۳ + x$ همواره مثبت است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ یکنوایی)

۱۲- گزینه «۱» ـ تابع $f'(x)$ در فاصله $(-\infty , ۲)$ صعودی اکید است زیرا نمودار آن بالای محور xهاست. دقت کنید که f' در ۲- صفر می‌شود و مشکلی در صعودی اکید بودن f ایجاد نمی‌کند.

x	−∞		−۲		۲		+∞
f′		+	۰	+	۰	−	

یک نمودار تقریبی از $f(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ یکنوایی)

۱۳- گزینه «۳» ـ چون $f(x)$ چند جمله‌ای است پس:

$$f(-۱) = ۲ \Rightarrow -۱ - a + b = ۲ \Rightarrow b - a = ۳ \quad (۱)$$

$$f'(x) = ۳x^۲ + a , f'(-۱) = ۰ \Rightarrow ۳ + a = ۰ \Rightarrow a = -۳ \xrightarrow{(۱)} b = ۰ \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x \Rightarrow f'(x) = ۳x^۲ - ۳$$

x	−∞		−۱		۱		+∞
y′		+	۰	−	۰	+	
y	−∞	□	۲	□	−۲	□	+∞

ملاحظه می‌کنید که اکسترمم دیگر تابع $(۱ , -۲)$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم نسبی)

۱۴- گزینه «۴» ـ

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۶x = ۰ \Rightarrow ۳x(x + ۲) = ۰ \Rightarrow x = ۰ , -۲$$

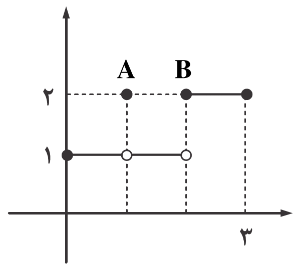
x	−∞		−۲		۰		+∞
f′(x)		+	۰	−	۰	+	
f(x)	−∞	□	۶	□	۲	□	+∞

پس $A(-۲ , ۶)$ ماکزیمم نسبی و $B(۰ , ۲)$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ است.

$$|AB| = \sqrt{(۰ + ۲)^۲ + (۶ - ۲)^۲} = \sqrt{۴ + ۱۶} = ۲\sqrt{۵}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم نسبی)

۱۵- گزینه «۲» ـ نمودار تابع را در فاصله $[۰ , ۳]$ رسم می‌کنیم.

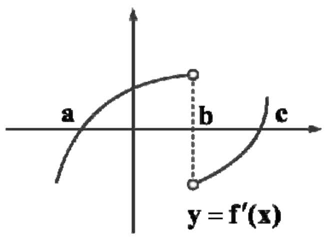


$$(۰ \le x < ۲ , x \ne ۱) \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$۲ \le x \le ۳ \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۱ \Rightarrow y = ۲$$

با توجه به نمودار هر دو نقطه A و B ماکزیمم نسبی $f(x)$ هستند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم نسبی)

۱۶- گزینه «۱» ـ جدول تعیین علامتی برای f' تنظیم می‌کنیم:



x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
f'		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

ملاحظه می‌کنید که $f'(a) = f'(c) = ۰$ است و همچنین $f'(b)$ وجود ندارد، پس تابع $f(x)$

در سه نقطه به طول‌های a، b و c بحرانی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نقاط بحرانی)

۱۷- گزینه «۱» ـ

$$f'(x) = ۴x^۳ - ۳x^۲ = ۰ \Rightarrow x^۲(۴x - ۳) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x = \frac{۳}{۴} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۴}$		۰		$+\infty$
$f'(x)$		−	۰	+	۰	+	

تابع f در $x = ۰$ مشتقی برابر صفر دارد، اما در اطراف آن تغییر علامت نداده است، پس $x = ۰$ نقطه بحرانی است ولی اکسترمم نیست.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ بحرانی)

۱۸- گزینه «۳» ـ مشتق تابع و سپس نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \in [-۱ , ۲] \\ x = ۴ \notin [-۱ , ۲] \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{۲ , -۱ , ۰\}$ است. حال مقادیر تابع را در نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

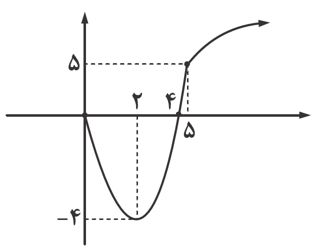
x	۰	−۱	۲
y	m	$m - ۷$	$m - ۱۶$

ماکزیمم تابع برابر m و مینیمم آن برابر $m - ۱۶$ خواهد بود.

$$m = ۸ \Rightarrow m - ۱۶ = -۸$$

(نصیری) (فصل پنجم ـ هندسه تحلیلی ـ هندسه)

۱۹- گزینه «۴» ـ نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



تابع در نقطه $(۲ , -۴)$ مینیمم مطلق دارد، پس کمترین مقدار تابع برابر ۴- است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم مطلق)

۲۰- گزینه «۲» ـ تابع را مرتب می‌کنیم، مشتق می‌گیریم، سپس آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f(x) = -x^{۳} + ۳x - ۱ \Rightarrow f'(x) = -۳x^{۲} + ۳ = ۰ \Rightarrow x = \pm ۱$$

x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-۳	$\nearrow$	۱	$\searrow$	$-\infty$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ جدول تغییرات)

۲۱- گزینه «۴» ـ

$$y = ۱ + \sqrt[۳]{x} + \sqrt[۳]{-x} = ۱ + \sqrt[۳]{x} - \sqrt[۳]{x} = ۱ \Rightarrow y' = ۰$$

چون در این تابع $y' = ۰$ شده است پس تمام نقاط دامنه آن بحرانی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ بحرانی)

۲۲- گزینه «۲» ـ تابع f در تمام نقاط صحیح به غیر از $x = ۰$ ناپیوسته است و در نتیجه بحرانی است. اما این تابع در $x = ۰$ پیوسته ولی مشتق‌ناپذیر است، پس کل $\mathbb{Z}$ برای f بحرانی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نقاط بحرانی)

۲۳- گزینه «۳» ـ

$$\begin{cases} x + ۲y = ۸ \Rightarrow x = ۸ - ۲y \\ xy = y(۸ - ۲y) = ۸y - ۲y^{۲} = f(y) \end{cases} \Rightarrow f'(y) = ۸ - ۴y = ۰ \Rightarrow y = ۲\,, x = ۴ \Rightarrow \mathrm{Max}(xy) = ۲ \times ۴ = ۸$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ بهینه‌سازی)

۲۴- گزینه «۱» ـ

$$f'(x) = ۸x - \frac{۱}{x^{۲}} = \frac{۸x^{۳} - ۱}{x^{۲}} = ۰ \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}$$

x	۰		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$f'(x)$	ت ن	$-$	۰	$+$	
$f(x)$	ت ن	$\searrow$	۳	$\nearrow$	۰

$$\min f(x) = ۳$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ بهینه‌سازی)

۲۵- گزینه «۱» ـ اگر $M(x\,, (x-۳)^{۲})$ فرض شود، آن‌گاه مساحت مثلث OMH برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times x(x-۳)^{۲} \Rightarrow S' = \frac{۱}{۲}((x-۳)^{۲} + ۲x(x-۳)) = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(x-۳)(x-۳+۲x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow S = ۲ \\ x = ۳ \Rightarrow S = ۰ \end{cases}$$

پس بیشترین مساحت $S = ۲$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس دوم ـ بهینه‌سازی)