ریاضیات

۱- گزینه «۴» ـ

$$f'(x)=-۳x^۲+۲۴x+۹۹\ge ۰ \xrightarrow{\div(-۳)} x^۲-۸x-۳۳\le ۰ \Rightarrow (x-۱۱)(x+۳)\le ۰ \Rightarrow -۳\le x\le ۱۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی)

۲- گزینه «۲» ـ تابع در فاصله‌های $(-\infty,۱]$, $[۳,+\infty)$ صعودی اکید است که در فاصله $(-\infty , -۱]$, $[۳ , ۴]$ مقدار منفی دارد. با توجه به گزینه‌ها تابع در فاصله $(-\infty , -۱)$ صعودی اکید و مقدار آن منفی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی)

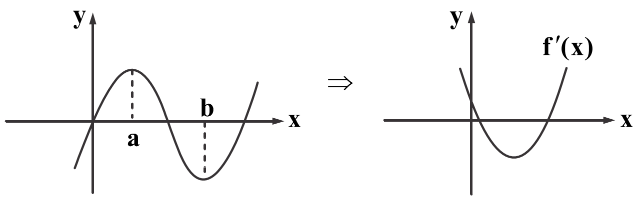
۳- گزینه «۲» ـ

$$y=x^۳-(m+۲)x^۲+۳x \Rightarrow y'=۳x^۲-۲(m+۲)x+۳\ge ۰ \Rightarrow \Delta\le ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲-۹\le ۰ \Rightarrow (m+۲)^۲\le ۹$$

$$\Rightarrow -۳\le m+۲\le ۳ \xrightarrow{-۲} -۵\le m\le ۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی)

۴- گزینه «۱» ـ تابع f در فاصله $(-\infty , a)$ صعودی اکید $(a>۰)$، در فاصله (a , b) نزولی اکید، در فاصله $(b , +\infty)$ صعودی اکید است و همچنین در دو نقطه a و b مشتق‌شان صفر است. پس:از چپ به راست، نمودار f' ابتدا باید بالای محور x، سپس پایین محورxها و در نهایت مجدداً بالای محورxها باشد و در نقطه با طول‌های مثبت محور xها را قطع کند، پس گزینه «۱» صحیح است.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی)

۵- گزینه «۲» ـ ریشه‌های مشتق، نقاط بحرانی‌اند.

$$f(x)=x^۴-x-۱ \Rightarrow f'(x)=۴x^۳-۱=۰ \Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۴}}$$

پس f یک نقطه بحرانی دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بحرانی)

۶- گزینه «۳» ـ f در دو نقطه مماس افقی و در یک نقطه شکستگی دارد، پس ۳ نقطه بحرانی دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بحرانی)

۷- گزینه «۳» ـ اگر f در a بحرانی باشد و $f'(a)$ وجود داشته باشد، بایستی $f'(a)=۰$ شود.بررسی گزینه‌ها:

گزینه «۱»: $f(x)=|x-۲| \Rightarrow f'(۲)$ وجود ندارد

گزینه «۲»: $f(x)=[x] \Rightarrow f'(۱)$ وجود ندارد

گزینه «۳»: $f(x)=x^۳-۳x \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۳ \Rightarrow f'(-۱)=۰$

گزینه «۴»: $f(x)=x^۳+۳x \Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۳ \Rightarrow f'(۱)=۶$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بحرانی)

۸- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=x^۳-۹x \Rightarrow f'(x)=۳x^۲-۹=۰ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۳}$$

نقاط بحرانی در بازه $[-۱,۳]$ عبارتند از: $\{-۱ , \sqrt{۳} , ۳\}$

$$\begin{cases} f(-۱)=-۱+۹=۸ \\ f(\sqrt{۳})=۳\sqrt{۳}-۹\sqrt{۳}=-۶\sqrt{۳} \\ f(۳)=۲۷-۲۷=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max f(x)=۸ \\ \min f(x)=-۶\sqrt{۳} \end{cases}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم مطلق)

۹- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=x-\sqrt[۳]{x} \Rightarrow f'(x)=۱-\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}=۰ \Rightarrow ۳\sqrt[۳]{x^۲}=۱ \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲۷} \Rightarrow x=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

$$f(\frac{۱}{۳\sqrt{۳}})=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}-\sqrt[۳]{\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}}=\frac{۱}{۳\sqrt{۳}}-\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{-۲}{۳\sqrt{۳}}$$

$$f(۱)=۰ , f(۸)=۸-۲=۶ \Rightarrow a=۶ , b\sqrt{۳}=\frac{-۲}{۳\sqrt{۳}} \Rightarrow b=\frac{-۲}{۹} \Rightarrow a+b=۶-\frac{۲}{۹}=\frac{۵۴-۲}{۹}=\frac{۵۲}{۹}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم مطلق)

۱۰- گزینه «۱» ـ

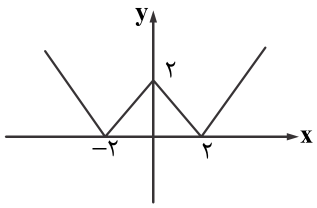
$$۲x+y=a \Rightarrow y=a-۲x$$

$$A=xy=x(a-۲x)=ax-۲x^۲ \Rightarrow A'=a-۴x=۰ \Rightarrow x=\frac{a}{۴}, y=a-\frac{a}{۲}=\frac{a}{۲} \qquad \max(A)=\frac{a}{۴}\times\frac{a}{۲}=\frac{a^۲}{۸}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه سازی)

۱۱- گزینه «۳» ـ تابع $y=|x|$ در $x=۰$ مینیمم نسبی دارد. تابع $y=x^۴$ در $x=۰$ مینیمم نسبی دارد. تابع $y=۱$ بی‌شمار نقطه اکسترمم نسبی دارد. تابع $y=\sqrt{x}$ فاقد اکسترمم نسبی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۱۲- گزینه «۲» ـ نمودار تابع به صورت مقابل است:



تابع در $(۲,۰)$ و $(−۲,۰)$ مینیمم نسبی و در $(۰,۲)$ ماکزیمم نسبی دارد و هر سه اکسترمم، نقاط بحرانی هستند.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بحرانی و اکسترمم)

۱۳- گزینه «۳» ـ

$$f(x)=۲x^۳-۶x+۵m-۱ \Rightarrow f'(x)=۶x^۲-۶=۰ \Rightarrow x=\pm۱$$

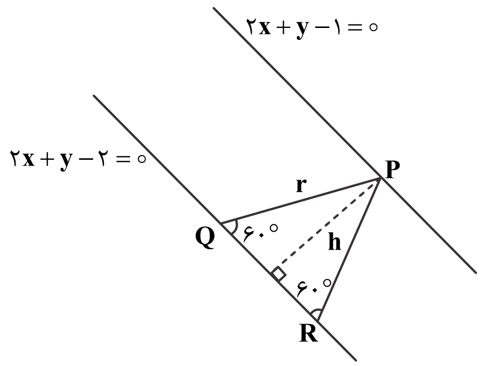
x	$-\infty$		-۱		۱		$+\infty$
$f'(x)$		+	۰	−	۰	+	
	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-۱)$	$\searrow$	$f(۱)$	$\nearrow$	$+\infty$

با توجه به جدول تغییرات کمترین مقدار تابع $f(۱)$ است.

$$f(۱)=۲-۶+۵m-۱=۰ \Rightarrow m=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی)

۱۴- گزینه «۳» ـ



با توجه به شکل دو خط با یکدیگر موازیند پس ارتفاع مثلث فاصله دو خط موازی است، بنابراین داریم:

$$h=\frac{|-۱+۲|}{\sqrt{۴+۱}}=\frac{۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\sin۶۰^\circ=\frac{h}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\frac{۱}{\sqrt{۵}}}{a} \Rightarrow a=\frac{۲}{\sqrt{۱۵}}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی)

۱۵- گزینه «۱» ـ دو خط مماس داده شده موازی‌اند فاصله آن‌ها قطر دایره است.

$$\begin{cases} ۵x-۱۲y+۱۳=۰ \\ ۵x-۱۲y=۰ \end{cases}$$

$$\text{قطر دایره}: D=\frac{|۱۳-۰|}{\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}}=\frac{۱۳}{۱۳}=۱$$

$$\text{مساحت دایره}: S=\frac{\pi}{۴}D^۲=\frac{\pi}{۴}\times ۱=\frac{\pi}{۴}\simeq\frac{۳}{۴}=۰/۷۵$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی)

۱۶- گزینه «۳» ـ نقاطی را که روی خط $y=x$ قرار می‌گیرند، به صورت $M(a\,,a)$ در نظر می‌گیریم:

$$|AM|=\sqrt{۱۰}\Rightarrow\sqrt{(a-۲)^۲+(a-۰)^۲}=\sqrt{۱۰}\Rightarrow a^۲-۴a+۴+a^۲=۱۰\Rightarrow ۲a^۲-۴a-۶=۰$$

$$\xrightarrow{\div ۲} a^۲-۲a-۳=۰\Rightarrow\begin{cases} a=-۱ \\ a=۳ \end{cases}$$

پس نقاط مورد نظر $M_۱(-۱\,,-۱)$ و $M_۲(۳\,,۳)$ می‌باشند. مجموع عرض‌ها برابر ۲ خواهند بود. (نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی)

۱۷- گزینه «۲» ـ

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{k-(k+۱)}{۲-k}<۰\Rightarrow\frac{۱}{k-۲}<۰\Rightarrow k-۲<۰\Rightarrow k<۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی)

۱۸- گزینه «۲» ـ

$$m_{BC}\times m_{AC}=-۱\Rightarrow\frac{۰-\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۵}}\times\frac{a-\frac{۲}{۵}}{۱-\frac{۱}{۵}}=-۱\Rightarrow\frac{-۲}{۴}\times\frac{۵a-۲}{۴}=-۱\Rightarrow\frac{۵a-۲}{۸}=۱\Rightarrow ۵a-۲=۸\Rightarrow a=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه تحلیلی)

۱۹- گزینه «۲» ـ دو مثلث سایه‌زده متشابه‌اند، نسبت مساحت‌ها $\frac{۴}{۹}$ است پس نسبت قاعده‌ها $\frac{۲}{۳}$ خواهد بود. پس اگر قاعده کوچک‌تر ۱۴ باشد قاعده بزرگ‌تر $\frac{۱۴}{\frac{۲}{۳}}=۲۱$ است. (نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه پایه ـ تشابه)

۲۰- گزینه «۴» ـ به ترتیب ضلع‌ها در تناسب توجه کنید.

$$\frac{۳}{۴}=\frac{۵}{x}=\frac{۶}{۸}\Rightarrow x=\frac{۲۰}{۳}$$

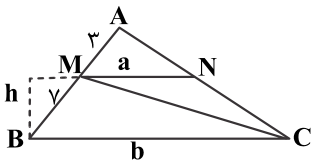
(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه پایه ـ تشابه)

۲۱- گزینه «۱» ـ از تشابه دو مثلث ADM و BCM استفاده می‌کنیم.

$$\frac{AD}{BC}=\frac{MH'}{MH}\Rightarrow\frac{۶}{۹}=\frac{MH'}{MH'+HH'}\Rightarrow\frac{۶}{۹}=\frac{۴}{۴+HH'}\Rightarrow ۲۴+۶HH'=۳۶\Rightarrow ۶HH'=۱۲\Rightarrow HH'=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه پایه ـ تشابه)

۲۲- گزینه «۴» ـ



بنا به قضیه تالس داریم: $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۳+۷}=\frac{۳}{۱۰}$ پس:

$$\frac{S_{MNC}}{S_{MBC}}=\frac{\frac{۱}{۲}h\times MN}{\frac{۱}{۲}h\times BC}=\frac{a}{b}=\frac{۳}{۱۰}=٪۳۰$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه پایه ـ تالس)

۲۳- گزینه «۴» ـ

$$BC \parallel MN \Rightarrow \frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$$

$$\frac{x+۴}{x}=\frac{x+۲}{x-۱} \Rightarrow \frac{x+۴}{x+۴-x}=\frac{x+۲}{x+۲-x+۱}$$

$$\Rightarrow \frac{x+۴}{۴}=\frac{x+۲}{۳} \Rightarrow ۳x+۱۲=۴x+۸ \Rightarrow x=۴ \Rightarrow AM=x+۴=۴+۴=۸$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه پایه ـ تالس)

۲۴- گزینه «۳» ـ

$$\frac{a}{۲}=\frac{b}{۵}=\frac{c}{۷}=\frac{a+b+c}{۲+۵+۷} \Rightarrow \frac{a+b+c}{۱۴}=\frac{c}{۷}$$

بنابراین:

$$x=۱۴\,,\,y=۷$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه پایه ـ نسبت)

۲۵- گزینه «۴» ـ رأس A در سه مثلث ACE و ADE و ABD مشترک است و ضلع مقابل رأس A در هر سه مثلث روی یک خط قرار دارد. بنابراین مساحت این سه مثلث متناسب با طول ضلع مقابل به رأس A در آنها می‌باشد پس:

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=\frac{EC}{DE} \Rightarrow \frac{۳}{۱}=\frac{EC}{DE} \Rightarrow DE=\frac{۱}{۳}EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=\frac{EC}{BD} \Rightarrow \frac{۳}{۱}=\frac{EC}{BD} \Rightarrow BD=\frac{۱}{۳}EC$$

$$\frac{DE}{BC}=\frac{\frac{۱}{۳}EC}{BD+DE+EC}=\frac{\frac{۱}{۳}EC}{\frac{۱}{۳}EC+\frac{۱}{۳}EC+EC}=\frac{\frac{۱}{۳}EC}{\frac{۵}{۳}EC}=\frac{۱}{۵}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ هندسه پایه ـ نسبت)