ریاضی

۱-گزینه «۲» - در بازه $(b,+\infty)$ نمودار $f'(x)$ زیر محور x ها قرار دارد بنابراین در این بازه تابع $f(x)$ اکیداً نزولی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ یکنوایی توابع) (آسان)

۲-گزینه «۱» - طبق شکل تابع $f(x)$ بالای محور x ها و اکیداً صعودی است بنابراین در بازه (a,b) داریم: $f'(x)>0$ و $f(x)>0$

$$g(x)=2x+f^2(x)\Rightarrow g'(x)=2+2f(x)f'(x)$$

$$\xrightarrow{f(x)>0,\ f'(x)>0} g'(x)>0$$

بنابراین $g(x)$ اکیداً صعودی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ یکنوایی) (دشوار)

۳-گزینه «۲» -

$$f'(x)=3x^2+2bx+c=0\Rightarrow\begin{cases}-1+2=-\frac{2b}{3}\Rightarrow b=-\frac{3}{2}\\ -1\times 2=\frac{c}{3}\Rightarrow c=-6\end{cases}$$

x		-1		2	
f'	+	0	−	0	+

طبق جدول تعیین علامت f' نقطه با طول -1 ماکزیمم نسبی است.

$$f(-1)=-1+b-c+8=7-\frac{3}{2}+6=13-\frac{3}{2}=11/5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ اکسترمم نسبی) (متوسط)

۴-گزینه «۲» -

$$a\times b=1000\Rightarrow \log(a\times b)=3\Rightarrow \log a+\log b=3$$

$$\begin{cases}\log a+\log b=3\\ (\log a)(\log b)=\max\end{cases}\Rightarrow \log a=\log b=\frac{3}{2}$$

بنابراین بیشترین مقدار $(\frac{3}{2})^2$ یعنی ۲/۲۵ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ بهینه سازی) (متوسط)

۵-گزینه «۳» - نقاط روی سهمی را به فرم $M(x,-x^2)$ در نظر می‌گیریم.

$$d(x)=MH=\frac{|x-x^2-4|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^2-x+4)$$

$$d'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}(2x-1)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$d(\frac{1}{2})=\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+4)=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1-2+16}{4}=\frac{15}{8}\sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ بهینه‌سازی) (دشوار)

۶-گزینه «۲» -

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x}{(\sqrt{x}-1)^2}=0\Rightarrow\frac{\sqrt{x}}{2}=1\Rightarrow x=4$$

$$f(\frac{9}{4})=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{3}{2}-1}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}=4/5\qquad f(4)=\frac{4}{2-1}=4\qquad f(9)=\frac{9}{3-1}=4/5$$

$$\max f(x)+\min f(x)=4/5+4=8/5$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ اکسترمم‌های مطلق) (متوسط)

۷-گزینه «۱» -

$$f'(x)=5x^4-3x^2-2=0\Rightarrow(x^2-1)(5x^2+2)=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ نقاط بحرانی) (متوسط)

۸-گزینه «۴» -

$$f(2)=1\Rightarrow 8+4b+2c=1\Rightarrow 4b+2c=-7\ (1)$$

$$f'(x)=3x^2+2bx+c$$

$$f'(2)=0\Rightarrow 12+4b+c=0\Rightarrow 4b+c=-12\ (2)$$

$$(1)-(2)\Rightarrow c=5\Rightarrow b=\frac{-17}{4}$$

$$f'(x)=3x^2-\frac{17}{2}x+5=(x-2)(3x-\frac{5}{2})$$

x		$\frac{5}{6}$		2	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

بنابراین نقطه با طول ۲ مینیمم نسبی $f(x)$ است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ اکسترمم نسبی) (متوسط)

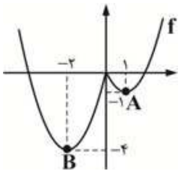
۹-گزینه «۲» - کافی است جدول تعیین علامت برای f' رسم کنیم تا اکسترمم‌های نسبی بدست آید.

x	p		a		0		b		c		q
f'		+	ت ن	−	0	+	ت ن	+	0	−	
f		↗		↘		↗		↗		↘	

تابع f دو ماکزیمم نسبی و یک مینیمم نسبی دارد.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ اکسترمم‌های نسبی) (متوسط)

۱۰-گزینه «۴» - نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

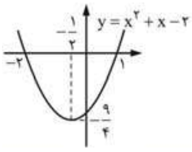


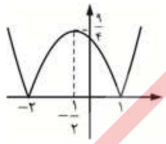
نقاط $A(1,-1)$ و $B(-2,-4)$ مینیمم نسبی تابع $f(x)$ هستند.

$$|AB|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ اکسترمم‌های نسبی) (متوسط)

۱۱-گزینه «۳» - نقاط بحرانی $A(1,0)$، $B(-2,0)$ و $C(-\frac{1}{2},\frac{9}{4})$ است.





$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times\frac{9}{4}\times 3=\frac{27}{8}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ نقاط بحرانی) (آسان)

۱۲-گزینه «۱» -

$$V=\frac{\pi}{3}r^2h=\frac{\pi}{3}r^2(12-3r)=\frac{\pi}{3}(12r^2-3r^3)$$

$$V'=0\Rightarrow 24r-9r^2=0\Rightarrow 3r(8-3r)=0\xrightarrow{r>0} r=\frac{8}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ بهینه‌سازی) (متوسط)

۱۳-گزینه «۴» -

$$f'(x)=x^3+9x^2+15x-25=(x-1)(x^2+10x+25)$$

$$f'(x)=(x-1)(x+5)^2$$

x		-5		1	
f'	−	0	−	0	+
	↘		↘		↗

$f'(5)$ برابر صفر است اما f' در $x=-5$ تغییر علامت نداده است و در اطراف $x=-5$ شبیه گزینه «۴» است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ یکنوایی) (متوسط)

۱۴-گزینه «۴» -

$$f'(x)=14x^6-28x^3+14=0$$

$$\Rightarrow x^6-2x^3+1=0\Rightarrow(x^3-1)^2=0\Rightarrow x=1$$

$$f(0)=0$$

$$f(1)=2-7+14=9$$

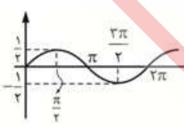
$$f(2)=16(16-7)+28=172$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ اکسترمم‌های مطلق) (متوسط)

۱۵-گزینه «۴» -

$$f'(x)=\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x$$

نمودار $\frac{1}{2}\sin x$ را ببینید:



در بازه‌ای که $f'(x)<0$ باشد، $f(x)$ اکیداً نزولی است. پس تابع $f(x)$ در بازه $(\pi,2\pi)$ اکیداً نزولی است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ یکنوایی) (متوسط)

۱۶-گزینه «۴» - نقطه A محل برخورد دو خط $y=۲x$ و $۳x+۴y=۱۱$ است.

$$\begin{cases}۳x+۴y=۱۱\\ y=۲x\end{cases}\Rightarrow ۳x+۴(۲x)=۱۱\Rightarrow x=۱, y=۲$$

پس مختصات نقطه A به صورت $A(۱,۲)$ خواهد بود. طول نقطه B محل برخورد خط $۳x+۴y=۱۱$ با محور x هاست.

$$۳x+۴y=۱۱\xrightarrow{y=۰}x=\frac{۱۱}{۳}$$

$$S_{OAB}=\frac{۱}{۲}\times ۲\times\frac{۱۱}{۳}=\frac{۱۱}{۳}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)

۱۷-گزینه «۱» -

$$M=\frac{B+C}{۲}=(۲,۵)$$

$$m_{AM}=\frac{۵-۱}{۲-۲}=\text{تعریف نشده}$$

AM معادله $: x=۲$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (آسان)

۱۸-گزینه «۴» - قرینه نقطه A نسبت به B را C می‌نامیم.

$$C=۲B-A=(۰,-۲)-(-۲,۳)=(۲,-۵)$$

حال فاصله C را از خط $۳x+۴y-۱=۰$ حساب می‌کنیم.

$$|CH|=\frac{|۳(۲)+۴(-۵)-۱|}{۵}=۳$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)

۱۹-گزینه «۳» -

$$m_{BC}=\frac{۷+۱}{-۱-۳}=-۲$$

$$BC: y+۱=-۲(x-۳)\Rightarrow y+۲x=۵$$

$$A\in(y+۲x=۵)\Rightarrow ۴m+m=۵\Rightarrow m=۱\Rightarrow A(\frac{۱}{۲},۴)$$

$$|OA|=\sqrt{\frac{۱}{۴}+۱۶}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۵}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (آسان)

۲۰-گزینه «۳» -

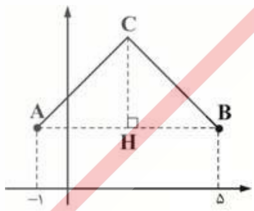
$$AB\perp AC\Rightarrow\frac{۲+۱}{۳-k}\times\frac{۰+۱}{-۱-k}=-۱$$

$$(۳-k)(k+۱)=۳\Rightarrow ۳k+۳-k^۲-k=۳$$

$$\Rightarrow -k^۲+۲k=۰\Rightarrow k=۰,۲\xrightarrow{k>۰}k=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (آسان)

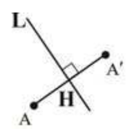
۲۱-گزینه «۴» - نقطه C روی عمودمنصف AB قرار داد پس می‌توانیم C را به صورت $C(۲,n)$ در نظر بگیریم.



$$|CH|=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۶\Rightarrow |n-۲|=۳\sqrt{۳}\xrightarrow{n>۰}n=۲+۳\sqrt{۳}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)

۲۲-گزینه «۲» -



$$m_L=-۱\Rightarrow m_{AA'}=۱$$

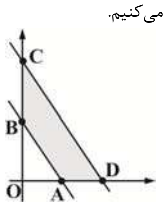
$$AA': y+۱=۱(x-۱)\Rightarrow y=x-۲$$

$$H:\begin{cases}y=x-۲\\ y=۲-x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲\\ y=۰\end{cases}\Rightarrow H(۲,۰)$$

$$A'=۲H-A=(۴,۰)-(۱,-۱)=(۳,۱)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)

۲۳-گزینه «۴» - دو خط داده شده موازی‌اند. سطح خواسته شده ذوزنقه متساوی الساقین است. نقاط برخورد با محورها و همچنین فاصله دو خط را حساب می‌کنیم.



$$A(۲,۰),B(۰,۳),C(۰,۶),D(۴,۰)$$

$$S_{ABCD}=S_{OCD}-S_{OAB}=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۶-\frac{۱}{۲}\times ۲\times ۳=۱۲-۳=۹$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)

۲۴-گزینه «۲» -

$$\frac{-a+۱}{۲a}=\frac{۳}{۶}\Rightarrow -a+۱=a\Rightarrow a=\frac{۱}{۲}$$

دو خط را به صورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}x+۳y=\frac{۱}{۲}\\ x+۶y=b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+۶y=۱\\ x+۶y=b\end{cases}$$

$$\frac{|b-۱|}{\sqrt{۱+۳۶}}=\frac{۱}{\sqrt{۳۷}}\Rightarrow |b-۱|=۱\Rightarrow\begin{cases}b_۱=۰\\ b_۲=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow b_۱+b_۲=۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)

۲۵-گزینه «۱» - اگر قطر و ضلع را قطع دهیم یک راس به دست می‌آید.

$$\begin{cases}x+y=۷\\ ۳x-y=۱\end{cases}\xrightarrow{+}۴x=۸\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۵$$

مرکز مربع، در معادله قطر صدق می‌کند.

$$-۱+a=۷\Rightarrow a=۸\Rightarrow O(-۱,۸)$$

یک راس مربع $A(۲,۵)$ و مرکز آن $O(-۱,۸)$ است.

$$OA=\sqrt{۳^۲+۳^۲}=۳\sqrt{۲}$$

چون $OA=۵$ است پس قطر مربع برابر ۱۰ خواهد بود.

$$S=\frac{۱}{۲}\times(۳\sqrt{۲})^۲=۹$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل اول ـ هندسه تحلیلی) (متوسط)