ریاضی

۱- گزینه «۱» ــ دو ضلع مجاور مربع بر هم عمودند، پس ضرب شیب‌های دو خط L و L' برابر ۱- است.

$$\frac{-۳}{m}\times\frac{-۲}{m-۵}=-۱ \Rightarrow m(m-۵)=-۶ \Rightarrow m^{۲}-۵m+۶=۰ \Rightarrow m=۲,۳$$

اگر $m=۲$ باشد:

$$\begin{matrix}۳\\ ۲\end{matrix}\begin{cases}۳x+۲y=۰\\ ۲x-۳y=\frac{۱۳}{۲}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}۹x+۶y=۰\\ ۴x-۶y=۱۳\end{cases} \xrightarrow{+} ۱۳x=۱۳ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow y=-\frac{۳}{۲}$$

مختصات نقطه برخورد دو خط L و L' برابر $(۱,-\frac{۳}{۲})$ است. (نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ جبر و معادله) (متوسط)

۲- گزینه «۱» ــ

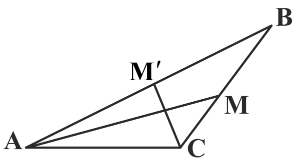
$$|AB|=۸ \Rightarrow \sqrt{(m-۴)^{۲}+(۷+۱)^{۲}}=۸ \Rightarrow (m-۴)^{۲}=۰ \Rightarrow m=۴$$

$$m=۴ \Rightarrow C(۴,۷),D(۱,۳)$$

$$|CD|=\sqrt{(۴-۱)^{۲}+(۷-۳)^{۲}}=۵$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ فاصله دو نقطه) (آسان)

۳- گزینه «۲» ــ نقطه C بر روی میانه وارد بر AB واقع است.



$$m+m+۱=۵ \Rightarrow m=۲ \Rightarrow C(۲,۳)$$

$$M=\frac{۱}{۲}(B+C)=(۳,۴),\ m_{AM}=\frac{۴-۳}{۳+۲}=\frac{۱}{۵}$$

$$AM: y-۴=\frac{۱}{۵}(x-۳) \Rightarrow ۵y-۲۰=x-۳ \Rightarrow ۵y-x=۱۷$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ مختصات وسط پاره‌خط) (متوسط)

۴- گزینه «۴» ــ فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر آن برابر شعاع دایره است.

$$\frac{|۳(۲)+۴(۳)+k|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=۲ \Rightarrow |k+۱۸|=۱۰ \Rightarrow \begin{cases}k+۱۸=۱۰ \Rightarrow k=-۸\\ k+۱۸=-۱۰ \Rightarrow k=-۲۸\end{cases} \Rightarrow k_{۱}+k_{۲}=-۳۶$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ فاصله نقطه از خط) (متوسط)

۵- گزینه «۳» ــ اضلاع روبه‌رو موازی‌اند:

$$L_{۱}\parallel L_{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۳}=\frac{-n}{-۴} \Rightarrow n=۴$$

فاصله خطوط موازی، اضلاع مستطیل خواهند بود.

$$\text{طول مستطیل}: a=\frac{|۲n-۰|}{\sqrt{۳^{۲}+۴^{۲}}}=\frac{۸}{۵}$$

$$\text{عرض مستطیل}: b=\frac{|m-۳|}{\sqrt{۱+۴}}=\frac{|m-۳|}{\sqrt{۵}}$$

$$ab=\frac{۸|m-۳|}{۵\sqrt{۵}}=\frac{۱۶}{۵\sqrt{۵}} \Rightarrow |m-۳|=۲ \xrightarrow{m>۲} m=۵$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ فاصله دو خط موازی) (متوسط)

۶- گزینه «۱» ــ

$$\begin{cases}۶-x>۰ \Rightarrow x<۶\\ x+۲>۰ \Rightarrow x>-۲\end{cases} \xrightarrow{\cap} -۲<x<۶$$

اعداد طبیعی موجود در این بازه ۵ تا است. (نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ محورهای مختصات) (آسان)

۷- گزینه «۱» ــ

$$\begin{cases}b-۶=۰ \Rightarrow b=۶\\ ۲a-۴=۰ \Rightarrow a=۲\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A(۶,۰)\\ B(۰,۷)\end{cases} \Rightarrow M_{AB}=(۳,\frac{۷}{۲})$$

$$|OM|=\sqrt{۳^{۲}+(\frac{۷}{۲})^{۲}}=\frac{۱}{۲}\sqrt{۸۵}$$

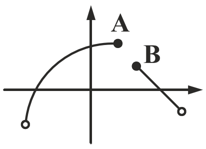
(نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ مختصات وسط یک پاره‌خط) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ــ

$$m_{AB}=m_{BC}\Rightarrow \frac{۲a+۱+۱}{a-۳}=\frac{۴+۱}{۲-۳}\Rightarrow \frac{۲a+۲}{a-۳}=-۵\Rightarrow -۵a+۱۵=۲a+۲\Rightarrow ۷a=۱۳\Rightarrow a=\frac{۱۳}{۷}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ــ هندسه تحلیلی ــ شیب خط) (آسان)

۹- گزینه «۳» ــ در نقاطی که تابع در آن‌ها همسایگی ندارند، اکسترمم نسبی هم نداریم؛ مانند نقطه A و B در شکل زیر:



(نصیری) (پایه دوازدهم ــ کاربرد مشتق ــ اکسترمم نسبی ــ نقطه بحرانی) (آسان)

۱۰- گزینه «۴» ــ در توابع چندجمله‌ای ریشه‌های مشتق، طول نقاط بحرانی است.

$$y'=۳x^۲-۶x-۹=۰\Rightarrow \begin{cases}x=-۱\Rightarrow y=۲۲\\ x=۳\Rightarrow y=-۱۰\end{cases}$$

پس نقاط بحرانی $A(-۱,۲۲)$ و $B(۳,-۱۰)$ است.

$$|AB|=\sqrt{(۳+۱)^۲+(۲۲+۱۰)^۲}=\sqrt{۴^۲(۱+۸^۲)}=۴\sqrt{۶۵}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ــ کاربرد مشتق ــ نقاط بحرانی) (آسان)

۱۱- گزینه «۳» ــ در توابع داده شده فقط $h(x)$ به ازای هر مقدار a صعودی اکید است، و در نتیجه اکسترمم نسبی ندارد:

$$h'(x)=۳x^۲+۴>۰$$

سایر توابع چنین شرایطی را ندارند. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ کاربرد مشتق ــ اکسترمم نسبی) (متوسط)

۱۲- گزینه «۱» ــ

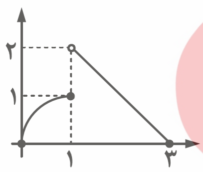
$$f'(x)=\frac{۲x(x-۱)-x^۲}{(x-۱)^۲}=\frac{x^۲-۲x}{(x-۱)^۲}=۰\Rightarrow x=۰,۲$$

نقاط بحرانی تابع در بازه داده شده $\{\frac{۳}{۲},۲,۳\}$ است. اکنون مقادیر تابع را در نقاط بحرانی آن‌ها حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{۳}{۲})=\frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۳}{۲}-۱}=\frac{\frac{۹}{۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۹}{۲},\ f(۲)=۴,\ f(۳)=\frac{۹}{۲}$$

پس ماکزیمم تابع برابر $\frac{۹}{۲}$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ کاربرد مشتق ــ اکسترمم‌های مطلق) (متوسط)

۱۳- گزینه «۱» ــ نمودار تابع را ببینید:



با توجه به نمودار جملات صحیح متناظر با گزینه‌ها به شرح زیر است:

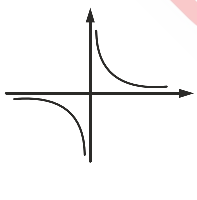
گزینه «۱»: تابع فاقد اکسترمم نسبی است.

گزینه «۲»: تابع مینیمم مطلق برابر صفر دارد، اما ماکزیمم مطلق ندارد.

گزینه «۳»: تابع در سه نقطه با طول‌های $\{۰,۱,۳\}$ بحرانی دارد.

گزینه «۴»: تابع غیریکنواست. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ کاربرد مشتق ــ بحرانی ــ نسبی ــ مطلق) (متوسط)

۱۴- گزینه «۱» ــ تابع $x^۲-۴x$ مینیمم مطلق و تابع $-x^۲$ ماکزیمم مطلق دارد. تابع $\sqrt{x}$ هم مینیمم مطلق دارد. فقط تابع $\frac{۱}{x}$ نه ماکزیمم و نه مینیمم مطلق دارد. نمودار آن را ببینید:

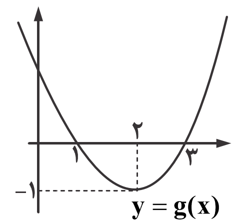


(نصیری) (پایه دوازدهم ــ کاربرد مشتق ــ اکسترمم‌های مطلق) (آسان)

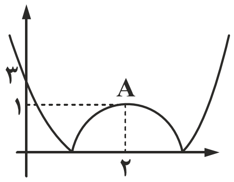
۱۵- گزینه «۱» ـ

$f(x)=|(x-۱)(x-۳)|$

نمودار تابع $g(x)=(x-۱)(x-۳)$ را رسم می‌کنیم:



حال نمودار f را رسم می‌کنیم:



نقطه $A(۲,۱)$ ماکزیمم نسبی تابع خواهد بود.

$$|OA|=\sqrt{۱+۴}=\sqrt{۵}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق -اکسترمم نسبی) (متوسط)

۱۶- گزینه «۲» ـ کافی است از تابع مشتق بگیریم و آن را تعیین علامت کنیم:

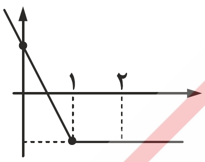
$$f'(x)=-۳x^۲+۳=۰ \Rightarrow x=\pm۱$$

$$f(۱)=-۱+۳+۱۷=۱۹\ ,\ f(-۱)=۱-۳+۱۷=۱۵$$

بنابراین گزینه «۲» صحیح است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ جدول تغییرات) (آسان)

۱۷- گزینه «۴» ـ تابع $f(x)$ فقط یک نقطه بحرانی $x=۳$ دارد. تابع $g(x)$ در $x=۰$ بحرانی دارد. تابع $h(x)$ هم در $x=۲$ بحرانی دارد، اما تابع $m(x)$ بی‌شمار نقطه بحرانی دارد. برای فهم بهتر نمودار $m(x)$ را ببینید:

x	۰	۱	۲
y	۱	-۱	-۱



تمام نقاط بازه $[۱,+\infty)$ نقطه بحرانی $m(x)$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ نقطه بحرانی) (متوسط)

۱۸- گزینه «۲» ـ

$$f'(x)=۳x^۲+۲bx \xrightarrow{f'(۱)=۰} ۳+۲b \Rightarrow b=-\frac{۳}{۲}$$

$$f(۱)=۲ \Rightarrow ۱+b+d=۲ \Rightarrow ۱-\frac{۳}{۲}+d=۲ \Rightarrow d=\frac{۵}{۲}$$

$$f(۰)=d=\frac{۵}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی) (آسان)

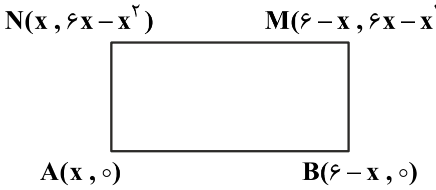
۱۹- گزینه «۱» ـ

$$۲x+۳y=۶ \Rightarrow y=\frac{۶-۲x}{۳} \Rightarrow A=۳x(\frac{۶-۲x}{۳}) \Rightarrow A=۶x-۲x^۲ \Rightarrow A'=۶-۴x=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow A_{max}=۶\times\frac{۳}{۲}-۲\times\frac{۹}{۴}=\frac{۱۸}{۲}-\frac{۹}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه‌سازی) (آسان)

۲۰- گزینه «۲» ـ طول نقطه A را x در نظر می‌گیریم، در این صورت مختصات رئوس مستطیل به‌صورت زیر خواهد بود:



طول و عرض مستطیل را محاسبه می‌کنیم:

$$AB = 6 - x - x = 6 - 2x$$
$$|AN| = 6x - x^2$$

اکنون تابعی برای مساحت مستطیل می‌نویسیم:

$$S_{MNAB} = (6 - 2x)(6x - x^2)$$

حال نقاط بحرانی را به‌دست می‌آوریم، دقت کنید که $0 \le x \le 3$ است.

$$S' = -2(6x - x^2) + (6 - 2x)(6 - 2x) = -12x + 2x^2 + 36 - 24x + 4x^2 = 6x^2 - 36x + 36 = 6(x^2 - 6x + 6)$$
$$S' = 0 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$$

با توجه به اطلاعات مسئله $x = 3 - \sqrt{3}$ قابل قبول است.

$$S_{max} = 2(\sqrt{3})(6) = 12\sqrt{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بهینه‌سازی) (دشوار)

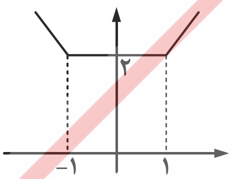
۲۱- گزینه «۳» ـ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم:

$$f'(x) = 3\left(\sqrt[3]{x} + \frac{x}{3\sqrt[3]{x^2}}\right) - 4 = 4\sqrt[3]{x} - 4 \ge 0 \Rightarrow x \ge 1$$

در بازه $[1, +\infty)$ تابع f صعودی اکید است، پس در بازه $(1, +\infty)$ نیز صعودی اکید خواهد بود.

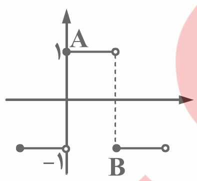
(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی) (متوسط)

۲۲- گزینه «۳» ـ در تابع ثابت f' برابر صفر است. تابع f گلدانی شکل است.



ملاحظه می‌کنید که تابع در بازه $(-1, 1)$ ثابت و مقدار مشتق برابر صفر است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ یکنوایی) (آسان)

۲۳- گزینه «۳» ـ نمودار تابع f را ببینید:

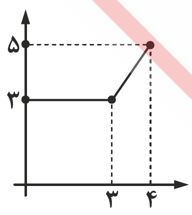


دو نقطه A و B را به‌عنوان دو نقطه اکسترمم متوالی در نظر می‌گیریم:

$$A(0, 1), B(1, -1)$$
$$|AB| = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم نسبی) (متوسط)

۲۴- گزینه «۴» ـ نمودار تابع را در بازه داده شده رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که بیش‌ترین مقدار تابع برابر ۵ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ اکسترمم‌های مطلق) (آسان)

۲۵- گزینه «۳» ـ در نقاطی که f' محور xها را قطع می‌کنند، نقطه بحرانی f می‌باشد. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ کاربرد مشتق ـ بحرانی) (آسان)