حسابان

۱- گزینه «۲» ـ چون تابع نمایی است پس باید $m^۲ - ۴ = ۰$ شود.

$$m^۲ - ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۲ \Rightarrow f(x) = (\frac{۳}{۲})^x \rightarrow \text{نمایی صعودی} \\ m = -۲ \Rightarrow f(x) = (-\frac{۱}{۲})^x \rightarrow \text{غیر نمایی} \end{cases}$$

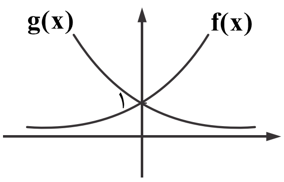
$$f(x) = (\frac{۳}{۲})^x \Rightarrow f(۱) = \frac{۳}{۲}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ تابع نمایی)

۲- گزینه «۲» ـ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{۲^x(۲^x + ۱)}{۲^x + ۱} = ۲^x$$

تابع $f(x) = ۲^x$ یک تابع نمایی و صعودی اکید و تابع $g(x) = (\frac{۲}{\pi})^x$ یک تابع نمایی نزولی اکید است. تمام توابع نمایی به‌صورت a^x از نقطه $A(۰, ۱)$ عبور می‌کنند.



(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ تابع نمایی)

۳- گزینه «۱» ـ

$$p(x) = \frac{۲x - x^۲}{x - ۱} = \frac{x(۲ - x)}{x - ۱} > ۰$$

x	$-\infty$		۰		۱		۲		$+\infty$
p(x)		+	۰	−	تن	+	۰	−	

$$p(x) > ۰ \Rightarrow x \in (-\infty, ۰) \cup (۱, ۲)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ دامنه تابع لگاریتمی)

۴- گزینه «۲» ـ تابع مورد نظر یک انتقال یک واحدی به سمت چپ تابع لگاریتمی است پس:

$$x + b = ۰ \xrightarrow{x=-۱} b - ۱ = ۰ \Rightarrow b = ۱$$

از طرفی تابع از مبدأ مختصات عبور کرده است.

$$f(۰) = ۰ \Rightarrow ۰ = a + \log_۲(۰ + ۱) = ۰ \Rightarrow a = ۰$$

پس تابع موردنظر $f(x) = \log_۲(x + ۱)$ است.

$$c = f(۳) = \log_۲(۳ + ۱) = \log_۲ ۴ = ۲$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ نمودار لگاریتم)

۵- گزینه «۲» ـ

$$\log_۲ x - \log_۲(x^۲ + ۱) = -۱ \Rightarrow \log_۲(\frac{x}{x^۲ + ۱}) = -۱$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x^۲ + ۱} = ۲^{-۱} \Rightarrow \frac{x}{x^۲ + ۱} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x^۲ + ۱ = ۲x \Rightarrow x^۲ - ۲x + ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$\log_{\sqrt{x+۱}}(x + ۱۵) = \log_{\sqrt{۲}} ۱۶ = \log_{۲^{\frac{۱}{۲}}} ۲^۴ = ۸$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم ـ قوانین لگاریتم)

۶- گزینه «۴» ـ

$$(0/2)^{-x+3} \le (0/2)^{2x^2} \Rightarrow 2x^2 \le -x+3 \Rightarrow 2x^2+x-3 \le 0 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le x \le 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول ـ نامعادله نمایی)

۷- گزینه «۳» ـ حد خواسته شده $\frac{1}{2}$ برابر مشتق $\tan x$ است.

$$\frac{1}{2}(\tan x)' = \frac{1}{2}(1+\tan^2 x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{2\cos^2 x}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق توابع مثلثاتی)

۸- گزینه «۳» ـ تابع $f(x) = x[x]$ در نقاط صحیح به غیر از $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است، پس f روی $\mathbb{Z} - \{0\}$ ناپیوسته است، ضمناً $f(x)$ در $x = 0$ مشتق‌ناپذیر است، برای xهای غیر صحیح مشتق تابع $x[x]$ برابر $[x]$ است.

$$f(x) = x[x] \Rightarrow f'(x) = [x] \ ، \ x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری جزء صحیح‌ها)

۹- گزینه «۳» ـ

$$f(1) = 2 \Rightarrow A(1,2) \in f \ ، \ f'(x) = 2x \Rightarrow f'(1) = 2$$

خط مماس در A: $y-2 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x$

$$f(-2) = 5 \Rightarrow B(-2,5) \in f \ ، \ f'(-2) = -4$$

خط مماس در B: $y-5 = -4(x+2) \Rightarrow y = -4x-3$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -4x-3 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 0 = 2x-(-4x-3) \Rightarrow 6x = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -1$$

پس عرض نقطه برخورد ۱ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ محاسبه مشتق و خط مماس)

۱۰- گزینه «۲» ـ مشتق راست $f(x)$ در $x = 3$ مدنظر است. در همسایگی راست $x = 3$، عبارت داخل قدرمطلق مثبت است.

$$f(x) = \sin\frac{\pi}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-\pi}{x^2}\cos\frac{\pi}{x} \Rightarrow f'(3) = -\frac{\pi}{9}\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{18}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق تابع مثلثاتی)

۱۱- گزینه «۳» ـ تابع $y = \sqrt[3]{x^2(1-x)^2}$ در نقاط $x = 0$ و $x = 1$ نقطه بازگشتی دارند، پس جواب گزینه «۳» خواهد بود.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری رادیکال‌ها)

۱۲- گزینه «۳» ـ چون تک‌تک ضابطه‌ها چند جمله‌ای هستند پس کافی است مشتق‌پذیری f را در نقاط $x = 2$ و $x = 3$ بررسی کنیم:

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) \Rightarrow 4+2a+b = 8 \Rightarrow 2a+b = 4 \quad (1)$$

$$f(3) = \lim_{x\to 3} f(x) = 3c+d = 27 \quad (2)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x+a & 1 < x < 2 \\ 3x^2 & 2 \le x < 3 \\ c & x \ge 3 \end{cases}$$

$$f'_+(3) = f'_-(3) \Rightarrow c = 27 \xrightarrow{(2)} 3(27)+d = 27 \Rightarrow d = -54$$

$$f'_+(2) = f'_-(2) \Rightarrow 4+a = 12 \Rightarrow a = 8 \xrightarrow{(1)} 16+b = 4 \Rightarrow b = -12$$

$$a+b+c+d = 8-12+27-54 = -4-27 = -31$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق‌پذیری در بازه)

۱۳- گزینه «۱» ـ

$$y = (fog)(x) \Rightarrow y' = g'(x)f'(g(x)) \Rightarrow y'(۱) = g'(۱)f'(g(۱))$$

$$g'(x) = ۲x \quad ، \quad f'(x) = \sin^۲ \frac{\pi}{۲x}$$

$$y'(۱) = ۲\times ۱\times f'(۲) = ۲\times \sin^۲ \frac{\pi}{۴} = ۲\times (\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲ = ۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس دوم ـ مشتق مثلثاتی و ترکیب)

۱۴- گزینه «۳» ـ اگر نقطه موردنظر را c فرض کنیم:

$$f'(c) = \frac{f(۳) - f(-۱)}{۳ - (-۱)} \Rightarrow \frac{۱}{۲\sqrt{c+۱}} = \frac{۲ - ۰}{۴} \Rightarrow \sqrt{c+۱} = ۱ \Rightarrow c = ۰$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ درس سوم ـ آهنگ تغییر)

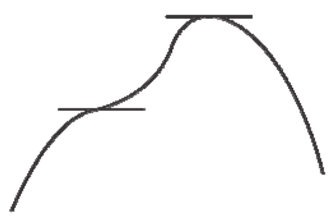
۱۵- گزینه «۳» ـ چون $f'(x)$ تابع خطی با شیب منفی است پس $f(x)$ تابعی درجه دوم با ضریب درجه دوم منفی است و همچنین $f'(x)$ در نقطه‌ای با طول مثبت، صفر است پس طول رأس سهمی مثبت است. با توجه به توضیحات فوق تابع $-۲x^۲ + ۴x$ می‌تواند $f(x)$ باشد.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نمودار مشتق)

۱۶- گزینه «۱» ـ تابع $f'(x)$ در فاصله $(-\infty , ۲)$ صعودی اکید است زیرا نمودار آن بالای محور xهاست. دقت کنید که f' در ۲- صفر می‌شود و مشکلی در صعودی اکید بودن f ایجاد نمی‌کند.

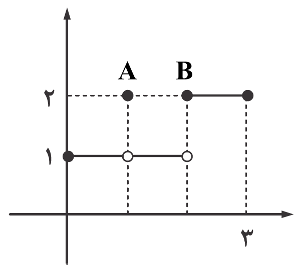
x	$-\infty$		-۲		۲		$+\infty$
f'		+	۰	+	۰	−	

یک نمودار تقریبی از $f(x)$ به‌صورت زیر خواهد بود.



(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ یکنوایی)

۱۷- گزینه «۲» ـ نمودار تابع را در فاصله $[۰ , ۳]$ رسم می‌کنیم.

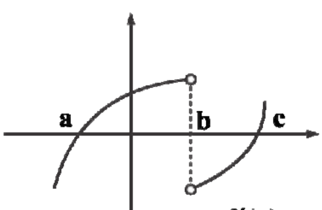


$$(۰ \le x < ۲ , x \ne ۱) \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۰ \Rightarrow y = ۱$$

$$۲ \le x \le ۳ \Rightarrow [\frac{x}{۲}] = ۱ \Rightarrow y = ۲$$

با توجه به نمودار هر دو نقطه A و B ماکزیمم نسبی $f(x)$ هستند. (نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ اکسترمم نسبی)

۱۸- گزینه «۱» ـ جدول تعیین علامتی برای f' تنظیم می‌کنیم:



$y = f'(x)$

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
f'		−	۰	+	ت ن	−	۰	+	

ملاحظه می‌کنید که $f'(a) = f'(c) = ۰$ است و همچنین $f'(b)$ وجود ندارد، پس تابع $f(x)$ در سه نقطه به طول‌های a، b و c بحرانی است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل پنجم ـ درس اول ـ نقاط بحرانی)

۱۹- گزینه «۳» ــ مشتق تابع و سپس نقاط بحرانی تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(x) = ۳x^۲ - ۱۲x = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \in [-۱ , ۲] \\ x = ۴ \notin [-۱ , ۲] \end{cases}$$

پس مجموعه نقاط بحرانی $\{۲ , ۱- , ۰\}$ است. حال مقادیر تابع را در نقاط بحرانی حساب می‌کنیم.

x	۰	−۱	۲
y	m	m − ۷	m − ۱۶

ماکزیمم تابع برابر m و مینیمم آن برابر $m - ۱۶$ خواهد بود.

$$m = ۸ \Rightarrow m - ۱۶ = -۸$$

(نصیری) (فصل پنجم ــ هندسه تحلیلی ــ هندسه)

۲۰- گزینه «۱» ــ اگر $M(x , (x-۳)^۲)$ فرض شود، آن‌گاه مساحت مثلث OMH برابر است با:

$$S = \frac{۱}{۲} \times x(x-۳)^۲ \Rightarrow S' = \frac{۱}{۲}((x-۳)^۲ + ۲x(x-۳)) = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(x-۳)(x-۳+۲x) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \Rightarrow S = ۲ \\ x = ۳ \Rightarrow S = ۰ \end{cases}$$

پس بیشترین مساحت $S = ۲$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم ــ فصل پنجم ــ درس دوم ــ بهینه‌سازی)