حسابان

۱- گزینه «۴» - تابع مورد نظر یک تابع نمایی به فرم a^x با شرط $a>1$ است. پس:

$$m^2-4m+3=0\Rightarrow\begin{cases}m=1\Rightarrow f(x)=2^x\\ m=3\Rightarrow f(x)=(\frac{2}{3})^x\end{cases}$$

بنابراین $m=1$ قابل قبول است و $f(x)=2^x$ خواهد بود پس $f(1+m)$ برابر $f(2)$ یعنی ۴ خواهد بود. (نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ تابع نمایی) (آسان)

۲- گزینه «۴»-

$$(1+\sqrt{2})^{x^3}<(1+\sqrt{2})^{4x}\xrightarrow{1+\sqrt{2}>1}x^3<4x\Rightarrow\underbrace{x(x^2-4)}_{p(x)}<0$$

x		-2		0		2	
$p(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$$p(x)<0\Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ نامعادله نمایی) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$\log_b a=A\Rightarrow A+\frac{1}{A}=\frac{10}{3}\Rightarrow\frac{A^2+1}{A}=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 3A^2-10A+3=0\Rightarrow A=3,\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\log_b a=3\Rightarrow a=b^3\Rightarrow B=\frac{2}{3}+6=\frac{20}{3}\\ \log_b a=\frac{1}{3}\Rightarrow b=a^3\Rightarrow B=6+\frac{2}{3}=\frac{20}{3}\end{cases}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ لگاریتم) (متوسط)

۴- گزینه «۳» -

$$\log_3(\log_2(1-\log_2 x))=-2\Rightarrow\log_2(1-\log_2 x)=\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow 1-\log_2 x=2^{\frac{1}{9}}\Rightarrow\log_2 x=1-\sqrt[9]{2}\Rightarrow x=2^{1-\sqrt[9]{2}}$$

$$\Rightarrow x\times 2^{1+\sqrt[9]{2}}=2^{1-\sqrt[9]{2}}\times 2^{1+\sqrt[9]{2}}=2^2=4$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ لگاریتم) (متوسط)

۵- گزینه «۳» -

$$\begin{cases}2\log a+\log b=3\\ 3\log a+2\log b=5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log a=1\\ \log b=1\end{cases}\Rightarrow a=b=1\Rightarrow\frac{a}{b}=1$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ لگاریتم) (آسان)

۶- گزینه «۳» -

$$\log_4 7=A\Rightarrow\frac{1}{2}\log_2 7=A\Rightarrow\log_2 7=2A$$

$$\log_{28}\sqrt{7}=\frac{\log\sqrt{7}}{\log 28}=\frac{\frac{1}{2}\log 7}{2\log 2+\log 7}=\frac{\frac{1}{2}\log_2 7}{2+\log_2 7}=\frac{\frac{1}{2}\times 2A}{2+2A}=\frac{A}{2(1+A)}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ لگاریتم) (متوسط)

۷- گزینه «۲» -

$$ax+c=0\xrightarrow{x=-4}-4a+c=0\Rightarrow c=4a$$

$$f(0)=0\Rightarrow a+\log_2 c=0\Rightarrow\log_2 c=-a\Rightarrow c=2^{-a}\Rightarrow 2^a\times c=1$$

$$\xrightarrow{c=4a}2^a\times 4a=1\Rightarrow a\times 2^a=\frac{1}{4}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ نمودار لگاریتم) (متوسط)

۸- گزینه «۱» -

$$\begin{cases}\log E_1=11/8+1/5M_1\\ \log 10E_1=11/8+1/5M_2\end{cases}\xrightarrow{-}\log 10E_1-\log E_1=1/5(M_2-M_1)$$

$$\Rightarrow\log\frac{10E_1}{E_1}=1/5(M_2-M_1)\Rightarrow M_2-M_1=\frac{1}{1/5}=\frac{2}{3}$$

(نصیری) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ کاربرد لگاریتم) (متوسط)

۹- گزینه «۱» -

$$f(x)=ax+b\Rightarrow xf(x)=ax^2+bx$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{xf(x)-4}{x-2}=8\Rightarrow\begin{cases}2f(2)=4\\ f(2)+2f'(2)=8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4a+2b=4\\ 2a+b+2a=8\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}4a+2b=4\\ 4a+b=8\end{cases}\xrightarrow{-}a=3,b=-4\Rightarrow f(x)=3x-4\Rightarrow f(1)=-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ تعریف مشتق) (متوسط)

۱۰- گزینه «۲» - تابع f در $x=4$ پیوستگی راست دارد زیرا:

$$f(4)=-1,\ \lim_{x\to 4^+}[-\frac{4}{x}]\tan\frac{\pi}{x}=[-\frac{4}{4^+}]=-1$$

در همسایگی راست $x=4$ براکت را به عدد تبدیل می‌کنیم. سپس مشتق تابع $f(x)$ را حساب می‌کنیم.

$$f(x)=-\tan\frac{\pi}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{\pi}{x^2}(1+\tan^2\frac{\pi}{x})\Rightarrow f'_+(4)=\frac{\pi}{8}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ توابع مثلثاتی و مشتق‌پذیری) (دشوار)

۱۱- گزینه «۳» -

$$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+ax\Rightarrow f'(x)=x^3-x+a$$

$$f'(\cos\alpha)=0\Rightarrow\cos^3\alpha-\cos\alpha+a=0$$

$$\Rightarrow a=\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)=\cos\alpha\sin^2\alpha$$

$$f''(a)=f''(\cos\alpha\sin^2\alpha)=3(\cos\alpha\sin^2\alpha)^2-1=3\cos^2\alpha\sin^4\alpha-1$$

$$=3(\sin\alpha\cos\alpha)^2\sin^2\alpha-1=\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha\sin^2\alpha-1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق مثلثاتی) (دشوار)

۱۲- گزینه «۴» - $f(x)$ در $x=2$ پیوسته است.

$$f(2)=\lim_{x\to 2^-}f(x)=1+a,\ \lim_{x\to 2^+}f(x)=b\times(-3)\times 4=-12b$$

$$1+a=-12b\Rightarrow a+12b=-1\qquad(1)$$

مشتق چپ و راست $f(x)$ در $x=2$ برابر است.

$$x\to 2^-\Rightarrow f(x)=x-1+a\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow f_-(2)=1$$

$$x\to 2^+\Rightarrow f(x)=-3bx^2\Rightarrow f'(x)=-6bx\Rightarrow f'_+(2)=-12b$$

$$f'_-(2)=f'_+(2)\Rightarrow -12b=1\Rightarrow b=-\frac{1}{12}\xrightarrow{(1)}a=0\Rightarrow a+b=\frac{-1}{12}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق‌پذیری) (متوسط)

۱۳- گزینه «۴»- راه اول:

$$f(x)=y=\frac{x^3+1}{x^3-1}\Rightarrow x^3y-y=x^3+1\Rightarrow x^3=\frac{y+1}{y-1}$$

$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{\frac{y+1}{y-1}}\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

$$\Rightarrow(f^{-1})'(x)=\frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{3\sqrt[3]{(\frac{x+1}{x-1})^2}}\Rightarrow(f^{-1})'(0)=-\frac{2}{3}$$

راه دوم:

$$f(x)=0\Rightarrow x=-1$$

$$f'(x)=\frac{-2}{(x^3-1)^2}(3x^2)\Rightarrow f'(-1)=\frac{-3}{2}\Rightarrow(f^{-1})'(0)=\frac{-2}{3}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق‌گیری) (دشوار)

۱۴- گزینه «۱»-

$$g^{-1}(1+f(3x-1))=x^3+1\Rightarrow 1+f(3x-1)=g(x^3+1)$$

$$\Rightarrow 3f'(3x-1)=3x^2g'(x^3+1)\xrightarrow{x=1}f'(2)=g'(2)\Rightarrow\frac{f'(2)}{g'(2)}=1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ مشتق تابع مرکب) (متوسط)

۱۵- گزینه «۲» -

$$f'(x)=\frac{\frac{-7}{(x+1)^2}}{3\sqrt[3]{(\frac{x+8}{x+1})^2}}+\frac{1}{(3+x)^2}\cos\frac{\pi}{3+x}$$

$$\Rightarrow f'(0)=\frac{-7}{12}+\frac{1}{18}=\frac{-21+2}{36}=\frac{-19}{36}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ آهنگ لحظه‌ای) (متوسط)

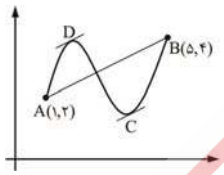
۱۶- گزینه «۱» - نقطه M را به صورت $M(x,x^3)$ در نظر می‌گیریم.

$$d=|OM|=\sqrt{x^2+x^6}$$

$$d'=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\Rightarrow d'(1)=\frac{8}{2\sqrt{2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ آهنگ تغییر) (متوسط)

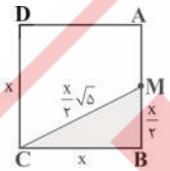
۱۷- گزینه «۳» - شیب خط واصل AB برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس جواب‌های معادله $f'(x)=\frac{۱}{۲}$ تعداد نقاطی است که آهنگ لحظه‌ای تابع $f(x)$ برابر آهنگ متوسط تابع در بازه $[۱,۵]$ را نشان می‌دهد.



با توجه به نمودار در دو نقطه C و D خط مماس بر تابع موازی پاره‌خط AB است.

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ آهنگ تغییر) (دشوار)

۱۸- گزینه «۳» -



$$CM=\sqrt{x^۲+\frac{x^۲}{۴}}=\frac{x}{۲}\sqrt{۵}$$

محیط را $f(x)$ فرض می‌کنیم.

$$f(x)=x(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۵}}{۲})=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}x\Rightarrow f'(x)=\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ آهنگ تغییر) (متوسط)

۱۹- گزینه «۲» - آهنگ لحظه‌ای این تابع در وسط بازه برابر آهنگ متوسط است.

$$m=\frac{-۳+۵}{۲}=۱$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ آهنگ تغییر) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» ـ

$$S=S_{ABC}=\frac{۱}{۲}bc\sin\hat{A}=\frac{۱}{۲}\times۲\times۴\times\sin\alpha=۴\sin\alpha$$

$$S(\alpha)=۴\sin\alpha\Rightarrow S'(\alpha)=۴\cos\alpha\Rightarrow S'(\frac{\pi}{۴})=۲\sqrt{۲}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم ـ فصل چهارم ـ آهنگ تغییر) (متوسط)