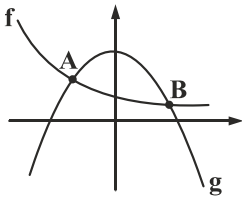


حسابان

۱- گزینه «۳» - نمودار دو تابع f و g را رسم می‌کنیم:



ملاحظه می‌کنید که دو تابع f و g در دو نقطه متقاطع‌اند. (نصیری) (پایه یازدهم - تابع نمایی - نمودار نمایی) (آسان)

۲- گزینه «۳» -

$$4^{2x-1} \geq \frac{1}{1024} \Rightarrow (2^2)^{2x-1} \geq 2^{-10} \Rightarrow 4x-2 \geq -10 \Rightarrow 4x \geq -8 \Rightarrow x \geq -2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع نمایی - نامعادله نمایی) (آسان)

۳- گزینه «۱» - برای محاسبه $f^{-1}(2)$ ، تابع f را برابر ۲ قرار می‌دهیم:

$$\log_3(x-1) = 2 \Rightarrow x-1 = 3^2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow f^{-1}(2) = 10$$

$$f(f^{-1}(2) - 6) = f(10 - 6) = f(4) = \log_3 3 = 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع لگاریتمی - مقدار تابع) (آسان)

۴- گزینه «۱» -

$$\log(\sqrt{x+1} + x + 5) = 1 \Rightarrow \sqrt{x+1} + x + 5 = 10 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 5 - x \Rightarrow x+1 = 25 - 10x + x^2 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 & \text{قابل قبول} \\ x=8 & \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

$$\log_3 \sqrt{3x} = \log_3 \sqrt{3 \times 3} = \log_3 3 = 1$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع لگاریتمی - معادله لگاریتمی) (متوسط)

۵- گزینه «۲» -

$$\log_3 x = t \Rightarrow t^2 + t - 30 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t=5 \\ t=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \log_3 x = 5 \Rightarrow x = 3^5 \\ \log_3 x = -6 \Rightarrow x = 3^{-6} \end{cases} \Rightarrow x_1 x_2 = 3^{-1} \Rightarrow m+1 = -1 \Rightarrow m = -2$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع لگاریتمی - معادله لگاریتمی) (ساده)

۶- گزینه «۲» -

$$f(t) = 4 \times 2^{-\frac{t}{2}} = 10 \Rightarrow 2^{-\frac{t}{2}} = 2^{-2} \Rightarrow t = 6$$

(نصیری) (پایه یازدهم - تابع نمایی - کاربرد تابع نمایی) (متوسط)

۷- گزینه «۴» - در نقاطی که خطوط مماس در آن‌ها موازی محور xهاست، مشتق برابر صفر است، پس در سه نقطه مشتق برابر صفر است.

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مفهوم) (آسان)

۸- گزینه «۳» -

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 3}{x^2 - 4} = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x+2} = 4 \xrightarrow{f(2)=3} f'(2) \times \frac{1}{4} = 4 \Rightarrow f'(2) = 16$$

$$g(x) = xf(x) \Rightarrow g'(x) = f(x) + xf'(x) \Rightarrow g'(2) = f(2) + 2f'(2) = 3 + 2 \times 16 = 35$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - تعریف و قوانین مشتق) (متوسط)

۹- گزینه «۲» -

$$f(1) = 2 + a \Rightarrow (1, 2+a) \in f$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \Rightarrow f'(1) = 4$$

$$\text{خط مماس: } y - (2+a) = 4(x-1) \xrightarrow{(2,4)} 4 - 2 - a = 4 \Rightarrow a = -6$$

$$f(-1) = -1 - 1 + a = -8$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - خط مماس) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» - در ریشه‌های ساده معادله $x^2 - 4 = 0$ مشتق ناپذیر است، پس این تابع در $x = 2$ و $x = -2$ مشتق ندارد.

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق پذیری) (آسان)

۱۱- گزینه «۱» -

$$f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^2 - 9) \sin \frac{\pi}{2x}}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) \sin \frac{\pi}{2x} = 6 \times \frac{1}{2} = 3$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - تعریف مشتق) (آسان)

۱۲- گزینه «۳» - تابع f در $x = 1$ پیوسته است. در همسایگی راست $x = 1$ داریم:

$$f(x) = (x-1)(-2) + \cos \pi x \Rightarrow f'(x) = -2 - \pi \sin \pi x \Rightarrow f'_+(1) = -2$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق یکطرفه) (آسان)

۱۳- گزینه «۲» - در همسایگی چپ $x = 3$ داریم:

$$g(x) = 9 - x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x \Rightarrow g'_-(3) = -6$$

به کمک نقطه $(3, 0)$ و شیب -6 معادله خط می نویسیم:

$$y - 0 = -6(x - 3) \Rightarrow y = 18 - 6x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - نیم‌ماس) (متوسط)

۱۴- گزینه «۳» - تابع f در $+2$ و -2 مشتق ندارد، اما خط مماس قائم دارد. (نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مماس قائم) (آسان)

۱۵- گزینه «۴» - تابع در $x = 0$ پیوسته و در $x = 2$ ناپیوسته است. ضمناً تابع در $x = 0$ مشتق ندارد ($f'_+(0) \neq f'_-(0)$) و همچنین در $x = 3$ مشتق پذیر نیست، پس طول نقاط گوشه‌ای تابع $x = 0$ و $x = 3$ است. (نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - نقاط گوشه‌ای) (متوسط)

۱۶- گزینه «۴» - درون قدرمطلق اول منفی و درون سایر قدرمطلق‌ها مثبت می‌شود، پس در همسایگی $x = -\frac{1}{2}$ داریم:

$$f(x) = -x(x+1)(x+2)(x+3) = -(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) \Rightarrow f'(x) = -(2x+3)(x^2 + 3x + 2) - (2x+3)(x^2 + 3x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = -(2x+3)(2x^2 + 6x + 2)$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = -(-1+3)(\frac{1}{2} - 3 + 2) = -2 \times \frac{-1}{2} = 1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق قدرمطلق‌ها) (متوسط)

۱۷- گزینه «۲» -

$$f(x) = \log(2x \times \frac{1}{x}) = \log 2 \Rightarrow f'(x) = 0$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - قوانین مشتق‌گیری) (آسان)

۱۸- گزینه «۱» -

$$f(4x - x^2) = g(2 - \sqrt{x}) \Rightarrow (4 - 2x)f'(4x - x^2) = \frac{-1}{2\sqrt{x}} g'(2 - \sqrt{x}) \xrightarrow{x=1} 2f'(3) = -\frac{1}{2} g'(1) \xrightarrow{g'(1)=4} f'(3) = -1$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق تابع مرکب - آهنگ لحظه‌ای) (متوسط)

۱۹- گزینه «۳» -

$$f(x) = \sin(f(x)) + x - 4 \Rightarrow f'(x) = (f'(x)) \cos(f(x)) + 1 \xrightarrow{x=0} f'(0) = f'(0) \cos(f(0)) + 1$$

$$\Rightarrow f'(0) = f'(0) \cos(\pi) + 1 \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{2}$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق تابع مرکب) (متوسط)

۲۰- گزینه «۴» -

$$y = \sin^2 x + \tan x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cos x + \cos x = \sin 2x + \cos x$$

$$y'' = 2 \cos 2x - \sin x$$

$$(y')^2 + (y'')^2 = \sin^2 2x + \cos^2 2x + \cos^2 x + \sin^2 x = 1 + \cos^2 x$$

(نصیری) (پایه دوازدهم - مشتق - مشتق تابع مثلثاتی) (متوسط)