هندسه ۳

۱- گزینه «۳» ــ ابتدا معادله سهمی را به شکل استاندارد می‌نویسیم.

$$x^۲ - ۴x = -۲y + ۱$$

۴ واحد به دو طرف برابری اضافه می‌کنیم.

$$x^۲ - ۴x + ۴ = -۲y + ۱ + ۴$$

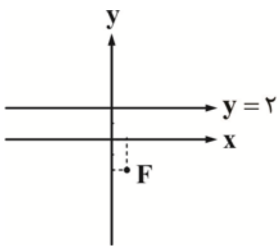
$$(x-۲)^۲ = -۲(y - \frac{۵}{۲})$$

یعنی فرم کلّی سهمی به شکل $(x-h)^۲ = -۴a(y-k)$ که $h = ۲$ و $k = \frac{۵}{۲}$ و $-۴a = -۲$ که یعنی $a = \frac{۱}{۲}$ است. در این سهمی معادله خط هادی به‌صورت $y = k + a$ است. در نتیجه:

معادله خط هادی : $y = \frac{۵}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۳$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس سوم)

۲- گزینه «۲» ــ بنابر تعریف مکان هندسی مورد نظر یک سهمی به کانون $F(۱, -۲)$ و خط هادی $y = ۲$ است. این نقطه و خط را در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. از شکل متوجه می‌شویم سهمی افقی است و دهانه آن به سمت پائین است. یعنی معادله آن به شکل $(x-h)^۲ = -۴a(y-k)$. اکنون می‌نویسیم:



کانون : $F = \begin{vmatrix} h = ۱ \\ k - a = -۲ \end{vmatrix}$

خط هادی : $y = k + a = ۲$

به‌دست می‌آید $h = ۱$، $k = ۰$ و $a = ۲$. در نهایت معادله سهمی را می‌نویسیم:

$$(x-۱)^۲ = -۸y$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس سوم)

۳- گزینه «۳» ــ فاصله کانونی دیش از برابری زیر به‌دست می‌آید:

فاصله کانونی دیش $= \frac{(\text{قطر دهانه دیش})^۲}{۱۶ \times (\text{عمق دیش})}$

اکنون می‌نویسیم:

فاصله کانونی دیش $= \frac{(۶۴)^۲}{۱۶ \times ۳۲} = ۸$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ درس سوم)

۴- گزینه «۲» ـ در سهمی $y^{۲} = ۸x$ رأس نقطه $s(۰ , ۰)$ و دهانه رو به راست است $۴a = ۸$، پس $a = ۲$.

بنابراین کانون آن به‌صورت $F = (h + a , k) = (۲ , ۰)$ است.

چون خط $y = -۲$ موازی محور این سهمی است، در نتیجه بازتاب این پرتوی نوری از کانون آن می‌گذرد. اگر نقطه برخورد خط $y = -۲$ و سهمی را M بنامیم به‌دست می‌آید.

$$\begin{cases} y = -۲ \\ y^{۲} = ۸x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow M = (\frac{۱}{۲} , -۲)$$

خط مورد نظر، خط گذرنده از M و F است:

$$m_{FM} = \frac{y_M - y_F}{x_M - x_F} = \frac{-۲ - ۰}{\frac{۱}{۲} - ۲} = \frac{-۲}{-\frac{۳}{۲}} = \frac{۴}{۳}$$

$$\text{معادله خط } FM : y - ۰ = \frac{۴}{۳}(x - ۲) \Rightarrow ۴x - ۳y = ۸$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم)

۵- گزینه «۲» ـ ابتدا معادله سهمی را به فرم استاندارد می‌نویسیم.

$$x^{۲} + mx = ۴y - m \Rightarrow x^{۲} + mx + \frac{m^{۲}}{۴} = ۴y - m + \frac{m^{۲}}{۴}$$

یعنی $(x + \frac{m}{۲})^{۲} = ۴(y - \frac{۴m - m^{۲}}{۱۶})$.

در این سهمی معادله محور تقارن $x = -\frac{m}{۲}$ است. در نتیجه:

$$-\frac{m}{۲} = ۱ \Rightarrow m = -۲$$

معادله سهمی را به‌ازای $m = -۲$ بازنویسی می‌کنیم.

$$(x - ۱)^{۲} = ۴(y + \frac{۳}{۴})$$

اکنون کانون این سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$F = \left| \begin{array}{l} h = ۱ \\ k + a = -\frac{۳}{۴} + ۱ = \frac{۱}{۴} \end{array} \right.$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم)

۶- گزینه «۳» ـ از شکل متوجه می‌شویم این سهمی از مبدأ مختصات می‌گذارد. پس مبدأ مختصات در این معادله صدق می‌کند:

$$y^۲ + ۴y = mx + n \xrightarrow{(۰,۰)} ۰ + ۰ = ۰ + n \Rightarrow n = ۰$$

همچنین از شکل متوجه می‌شویم رأس این سهمی نقطه $S = (\frac{۱}{۲}, -۲)$ است. دقت کنید که مختصات رأس سهمی در معادله سهمی صدق می‌کند.

$$۴ - ۸ = \frac{۱}{۲}m \Rightarrow m = -۸$$

$$۰ + ۰ = ۰ + n \Rightarrow n = ۰$$

در نهایت می‌نویسیم:

$$m + n = -۸ + ۰ = -۸$$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل دوم ـ درس سوم)

هندسه ۱ و ۲

۱- گزینه «۳» ـ چون $\angle B + \angle C = ۹۰^\circ$ پس $\angle A = ۹۰^\circ$. یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه است و $a^۲ = b^۲ + c^۲$. اکنون از فرض نتیجه می‌گیریم:

$$a^۲ + \underbrace{b^۲ + c^۲}_{a^۲} = ۳۲ \Rightarrow ۲a^۲ = ۳۲ \Rightarrow a^۲ = ۱۶$$

یعنی $a = ۴$. می‌دانیم در مثلث قائم‌الزاویه شعاع دایره محیطی برابر نصف وتر است. پس:

$$R = \frac{a}{۲} = ۲$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول)

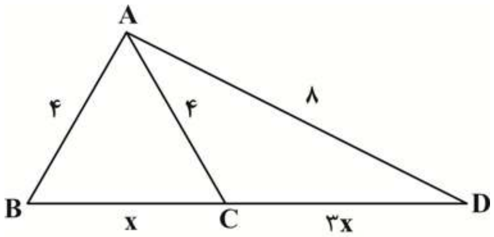
۲- گزینه «۱» ـ از قضیه سینوس‌ها در مثلث ABC نتیجه می‌شود.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{\sin ۳۰^\circ} = \frac{۳}{\sin B} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۳}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \sin B = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow \hat{B} = ۶۰^\circ \text{ یا } \hat{B} = ۱۲۰^\circ$$

چون $\hat{A} = ۳۰^\circ$ نتیجه می‌گیریم $\hat{C} = ۳۰^\circ$ یا $\hat{C} = ۹۰^\circ$. (هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس اول)

۳- گزینه «۳» ـ بنابر اطلاعات مسئله شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید. از قضیه استوارت به‌دست می‌آید.



$$AB^۲ \times CD + AD^۲ \times BC = BD(AC^۲ + BC \times CD)$$

یعنی:

$$۱۶ \times ۳x + ۶۴ \times x = ۴x(۱۶ + ۳x^۲)$$

چون $x \neq ۰$ می‌توان آن را از دو طرف برابری ساده کرد:

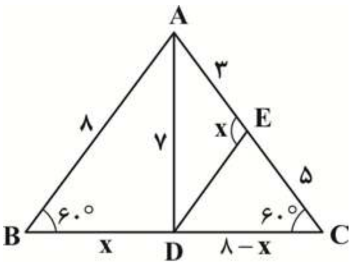
$$۴۸ + ۶۴ = ۴(۱۶ + ۳x^۲)$$

از این معادله به‌دست می‌آید $x = ۲$. اکنون می‌نویسیم:

$$\text{ABD محیط مثلث} = ۴ + ۸ + ۸ = ۲۰$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم)

۴- گزینه «۲» ـ از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. در مثلث ABD بنابر قضیه کسینوس‌ها:



$$۴۹ = ۶۴ + x^{۲} - ۲ \times ۸ \times x \times \cos ۶۰^\circ$$

$$۴۹ = ۶۴ + x^{۲} - ۸x$$

$$x^{۲} - ۸x + ۱۵ = ۰$$

به‌دست می‌آید $x = ۳$ یا $x = ۵$. چون $BD < CD$، پس $x = ۳$. در نتیجه:

$$CD = ۸ - x = ۵$$

یعنی مثلث CDE متساوی‌الساقین $(CE = CD = ۵)$ با زاویه رأس ۶۰° است در نتیجه این مثلث متساوی‌الاضلاع است. زاویه AED، زاویه خارجی برای مثلث CDE است، پس:

$$x = \hat{C} + E\hat{D}C = ۶۰^\circ + ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس دوم)

۵- گزینه «۳» ـ بنابر روابط طولی در دایره می‌نویسیم:

$$\begin{cases} BB' \times AB = BD \times BM \\ CC' \times AC = CM \times CD \end{cases}$$

با تقسیم این برابری‌ها به‌دست می‌آید.

$$\frac{BB'}{CC'} \times \frac{AB}{AC} = \frac{BD \times BM}{CM \times CD} \xrightarrow{BM=CM} \frac{BB'}{CC'} \times \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad (۱)$$

بنابر قضیه نیمسازها $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$. اکنون در برابری (۱) قرار دهیم.

$$\frac{BB'}{CC'} \times \frac{BD}{CD} = \frac{BD}{CD} \Rightarrow BB' = CC'$$

یعنی $x - ۳ = ۲$. در نتیجه $x = ۵$. (سراسری ـ ۹۴) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس سوم)

۶- گزینه «۱» ـ از رابطه محاسبه مساحت به‌وسیله سینوس می‌نویسیم.

$$\frac{۱}{۲} AB \times AC \times \sin A = S$$

$$\frac{۱}{۲} \times ۶ \times AC \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۵\sqrt{۳}$$

به‌دست می‌آید $AC = ۱۰$. اکنون بنابر قضیه کسینوس‌ها طول ضلع BC را به‌دست می‌آوریم.

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB \times AC \times \cos A$$

$$BC^{۲} = ۳۶ + ۱۰۰ - ۲ \times ۶ \times ۱۰ \times (-\frac{۱}{۲})$$

$$BC^{۲} = ۱۹۶$$

یعنی $BC = ۱۴$. در نهایت می‌نویسیم:

$$\text{محیط مثلث } ABC = ۶ + ۱۰ + ۱۴ = ۳۰$$

(هویدی) (پایه یازدهم ـ فصل سوم ـ درس چهارم)

۷- گزینه «۴» ــ از دستور هرون مساحت مثلث را به‌دست می‌آوریم.

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\ ،\ p=\frac{a+b+c}{۲}=۱۴$$

$$S=\sqrt{۱۴(۱۴-۱۲)(۱۴-۹)(۱۴-۷)}$$

$$=\sqrt{۱۴\times۲\times۵\times۷}=۱۴\sqrt{۵}$$

بزرگترین ارتفاع را h می‌نامیم. این ارتفاع، ارتفاع وارد بر ضلع کوچک‌تر است (چون در هر مثلث، حاصلضرب طول هر ضلع در ارتفاع وارد بر آن مقدار ثابتی است) پس:

$$\frac{۱}{۲}h\times۷=۱۴\sqrt{۵}\ \Rightarrow\ h=\frac{۲\times۱۴\sqrt{۵}}{۷}=۴\sqrt{۵}$$

(هویدی) (پایه یازدهم ــ فصل سوم ــ درس چهارم ــ قضیه هرون)