ریاضیات گسسته

۱- گزینه «۳» ـ می‌دانیم تعداد کل داده‌ها با مجموع فراوانی داده‌ها برابر است. بنابراین:

$$۶ - x + ۸ + ۱۰ + x + y = ۴۰ \Rightarrow y = ۱۶$$

اکنون می‌توان نوشت:

$$\text{درصد فراوانی فیلم‌های اکشن}: \frac{\text{فراوانی فیلم های اکشن}}{\text{تعداد کل داده ها}} \times ۱۰۰ = \frac{۱۶}{۴۰} \times ۱۰۰ = ۴۰٪$$

(هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل سوم ـ درصد فراوانی نسبی)

۲- گزینه «۴» ـ می‌توان نوشت:

$$\bar{x} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵}{۵} \, , \, ۲\bar{x} = \frac{x_۶ + x_۷ + \cdots + x_{۱۲}}{۷}$$

بنابراین

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_۵ = ۵\bar{x} \, , \, x_۶ + x_۷ + \cdots + x_{۱۲} = ۱۴\bar{x}$$

درنتیجه:

$$x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{۱۲} = ۵\bar{x} + ۱۴\bar{x} = ۱۹\bar{x}$$

می‌دانیم میانگین ۱۲ داده مورد نظر برابر ۱۵۲ است. یعنی $\frac{۱۹}{۱۲}\bar{x} = ۱۵۲$ پس $\bar{x} = ۹۶$ (کتاب همراه علوی) (آمار و احتمال ـ فصل سوم ـ میانگین)

۳- گزینه «۱» ـ

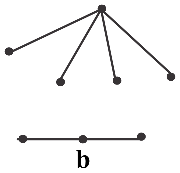
$$P(\text{فقط یک مهره سفید}) = (\underline{\text{یک مهره سفید}} \text{ و } \underline{\text{۲ مهره از بقیه}}) = \frac{\binom{۵}{۲} \times \binom{۵}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}} = \frac{۱۰ \times ۵}{۱۲ \times ۱۰} = \frac{۵}{۱۲}$$

(نصیری) (پایه دهم ـ احتمال)

۴- گزینه «۲» ـ با توجه به داده‌ها مشخص است که کمترین مقدار برآورد میانگین براساس نمونه‌ای از اندازه ۳ برابر $۲ = \frac{۱+۲+۳}{۳}$ و بیشترین این مقدار برابر $۵ = \frac{۴+۵+۶}{۳}$ است. پس اختلاف بین این دو مقدار برابر $۳ = ۲ - ۵$ است. (هویدی) (آمار و احتمال ـ فصل چهارم ـ میانگین براساس نمونه)

۵- گزینه «۲» ـ می‌دانیم اگر γ عدد احاطه‌گری یک گراف باشد $\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ که در آن n تعداد راس‌ها و Δ ماکزیمم درجه گراف است. در این گراف $n = ۱۴$ و $\Delta = ۵$، پس $\gamma \geq \left\lceil \frac{۱۶}{۴} \right\rceil$ یعنی $\gamma \geq ۳$. اکنون باید بررسی کنیم آیا با سه رأس می‌توان کل رئوس را احاطه کرد یا نه. برای احاطه کردن a رأس b را انتخاب می‌کنیم. رأس d هم e،f و g را احاطه می‌کند. برای احاطه شدن j هم i را انتخاب می‌کنیم. نتیجه اینکه با انتخاب b، d و i رئوس a، b، c، d، e، f، g ، h، i و j احاطه می‌شود. این در حالی است که هنوز رئوس n، k، l، m احاطه نشده‌اند. پس γ نمی‌تواند برابر ۳ باشد. برای احاطه شدن این رئوس کافی است n را انتخاب کنیم. پس $\{b , d , i , n\}$ یک $\gamma-$ مجموعه است و عدد احاطه‌گری برابر ۴ است. (هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ عدد احاطه‌گری)

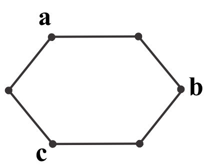
۶- گزینه «۲» ـ می‌دانیم $\gamma \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta + ۱} \right\rceil$ که در آن γ عدد احاطه‌گری، n مرتبه و Δ ماکزیمم درجه است. بنابراین $\gamma \geq \left\lceil \frac{۸}{۴+۱} \right\rceil$ یعنی $\gamma \geq ۲$ بنابراین حداقل عدد احاطه‌گری در گراف‌های با ویژگی فوق برابر ۲ است. باید نشان دهیم چنین گرافی وجود دارد. به سادگی می‌توان گراف زیر را رسم کرد که عدد احاطه‌گری آن ۲ است.



$$\underbrace{D = \{a , b\}}_{\text{مجموعه احاطه گری}} \qquad \gamma = ۲$$

(هویدی) (ریاضیات گسسته ـ فصل دوم ـ کران پایین برای γ)

۷- گزینه «۳» ــ ابتدا توجه کنید که مجموعه احاطه‌گر مینیمال با کمترین تعداد عضو مجموعه احاطه‌گر مینیمم است. پس تعداد عضوهای آن همان عدد احاطه‌گری است. در این گراف $\gamma = \left\lceil \frac{6}{3} \right\rceil = 2$. در بین مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمال این گراف $\{a , b , c\}$ یکی از مجموعه‌هایی است که بیشترین عضو را دارد. بنابراین پاسخ برابر است با: $2 + 3 = 5$



(هویدی) (ریاضیات گسسته ــ فصل دوم ــ C_n)

۸- گزینه «۴» ــ می‌دانیم در گراف p_n، $\gamma = \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil$. بنابراین در گراف p_8، $\gamma = \left\lceil \frac{8}{3} \right\rceil = 3$. از طرف دیگر به این مطلب توجه کنید اگر درجه رأسی برابر ۱ باشد خودش یا رأس مجاورش باید در مجموعه احاطه‌گر مینیمم باشد. اکنون با توجه به این مطلب حالت زیر به دست می‌آید. (رأس‌هایی را که با دایره مشخص کرده‌ایم را می‌خواهیم در مجموعه احاطه‌گر قرار دار دهیم.) (۱) در این حالت رئوس ۸،۷،۲،۱ احاطه می‌شوند. سایر رأس‌ها را نمی‌توان با یک رأس دیگر احاطه کرد. (۲) در این حالت رئوس ۸،۷،۶،۲،۱ احاطه می‌شود. پس در این حالت مجموعه $\{1 , 4 , 7\}$ احاطه‌گر مینیمم است. (۳) در این حالت مشابه حالت (۲) می‌توان مجموعه احاطه‌گر مینمم را $\{2 , 5 , 8\}$ در نظر گرفت. (۴) در این حالت رأس‌های ۸،۷،۶،۳،۲،۱ احاطه شده‌اند. برای احاطه شدن دو رأس دیگر می‌توان ۴ یا ۵ را انتخاب کرد. یعنی در این حالت دو مجموعه احاطه‌گر مینیمم $\{2 , 4 , 7\}$ و $\{2 , 5 , 7\}$ به دست می‌آید. بنابراین تعداد کل $\gamma-$ مجموعه‌ها در این گراف برابر ۴ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل دوم ــ احاطه‌گری در p_n)

۹- گزینه «۳» ــ تعداد ارقام زوج و فرد در عدد ۱۲۳۴۵۶۷۸ برابر است (۴ رقم زوج و ۴ رقم فرد دارد) پس دو حالت وجود دارد که در هر یک جایگشت رقم‌های زوج و فرد به صورت یکی در میان هستند:

ف ز ف ز ف ز ف ز

ز ف ز ف ز ف ز ف

در هر یک از این دو حالت، رقم‌های زوج $(2 , 4 , 6 , 8)$ را به $4!$ طریق و رقم‌های فرد $(1 , 3 , 5 , 7)$ را به $4!$ طریق می‌توانیم در جایگاه‌های مشخص شده قرار دهیم. بنابراین پاسخ برابر است با:

$2 \times 4! \times 4! = 1152$

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ یادآوری آنالیز ترکیبی)

۱۰- گزینه «۱» ــ از رأس A شروع می‌کنیم و یکی در میان آبی و قرمز رنگ می‌کنیم و یک بار هم با قرمز شروع می‌کنیم. پس کلا دو حالت برای رنگ کردن وجود دارد. (کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ یادآوری آنالیز ترکیبی)

۱۱- گزینه «۲» ــ تابع مورد نظر را f می‌نامیم. این تابع به صورت زیر است:

$f = \{(1 , 6) , (2 , \bigcirc) , (3 , \bigcirc) , (4 , \bigcirc)\}$

۲ انتخاب
۵ انتخاب نمی‌شود
۳ انتخاب
۳ انتخاب

در نتیجه تعداد توابع با ویژگی فوق برابر است با $2 \times 3 \times 3 = 18$ (هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ یادآوری آنالیز ترکیبی)

۱۲- گزینه «۴» ــ چون می‌خواهیم x_i عددی فرد باشد. پس قرار می‌دهیم $x_i = 2y_i + 1$ و چون x_i صحیح و نامنفی است، پس y_i هم صحیح و نامنفی است:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18 \Rightarrow (2y_1 + 1) + (2y_2 + 1) + (2y_3 + 1) + (2y_4 + 1) = 18$$
$$\Rightarrow 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 = 14 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 7$$

تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی این معادله برابر $\binom{10}{3} = 120$ است. پس پاسخ اولیه معادله برابر ۱۲۰ است.

(هویدی) (پایه دوازدهم ــ فصل سوم ــ معادله سیاله)

۱۳- گزینه «۲» ـ ارقام به کار رفته در عدد خواسته شده را دسته‌بندی می‌کنیم:

(۱) ارقام ۲ , ۱ , ۰ $\Rightarrow$ تعداد عدد های سه رقمی = ۲×۲×۱ = ۴

(۲) ارقام ۲ , ۲ , ۰ $\Rightarrow$ تعداد عدد های سه رقمی = ۲ (۲۰۲ , ۲۲۰)

(۳) ارقام ۲ , ۲ , ۱ $\Rightarrow$ تعداد عدد های سه رقمی $= \frac{۳!}{۲!} =$ ۳

(۴) ارقام ۲ , ۲ , ۲ $\Rightarrow$ تعداد عدد های سه رقمی = ۱

بنابراین تعداد عددهای سه رقمی برابر است با:

۴ + ۲ + ۳ + ۱ = ۱۰

(کتاب همراه علوی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ جایگشت با تکرار)

۱۴- گزینه «۱» ـ ابتدا دو جایگاه از چهار جایگاه را انتخاب می‌کنیم و در آن جایگاه‌ها رقم ۵ را قرار می‌دهیم. برای این انتخاب‌ها دو حالت پیش می‌آید:

حالت اول: رقم ۵ در هزارگان باشد: در این حالت برای دومین ۵ سه حالت وجود دارد. برای هر یک از دو جایگاه دیگر ۹ حالت وجود دارد. پس در این حالت ۳×۹^۲ عدد به دست می‌آید. ـــ $\frac{۱}{۵}$ حالت ها

حالت دوم: رقم ۵ در هزارگان نباشد در این حالت $۳ = \binom{۳}{۲}$ انتخاب برای قرار دادن رقم ۵ داریم. رقم هزارگان ۸ حالت و یک جایگاه باقی مانده ۹ حالت دارد. پس تعداد اعداد در این حالت برابر ۹×۸×۳ است. در نهایت تعداد عددهای مطلوب برابر است با:

$۳\times۹^۲ + ۳\times۸\times۹ = ۴۵۹$

(هویدی) (پایه دوازدهم ـ فصل سوم ـ جایگشت با تکرار)