ریاضی ۲

۱- گزینه «۳» ـ شرط داشتن حد در یک نقطه آن است که حد چپ و حد راست تابع در آن نقطه با هم برابر باشند.

برای $x<۰$ داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{۱-۲\sin x\cos x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x-\cos x}{\sqrt{\sin^۲ x+\cos^۲-۲\sin x\cos x}}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x-\cos x}{|\sin x-\cos x|}$$

وقتی که از سمت xهای کوچک‌تر از صفر به صفر نزدیک می‌شویم، داریم: $\cos x>\sin x$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰^-}\frac{\sin x-\cos x}{\cos x-\sin x}=-۱$$

در تمامی گزینه‌ها مقدار a عدد صحیح می‌باشد، بنابراین می‌توانیم نتیجه بگیریم a عدد صحیح هست و داریم:

$$\lim_{x\to ۰^+}[x+a]=\lim_{x\to ۰^+}[x]+a=\lim_{x\to ۰^+}[x]+\lim_{x\to ۰^+}a=۰+a=-۱\Rightarrow a=-۱$$

(الله دادی) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ شرط وجود حد در یک نقطه)

۲- گزینه «۲» ـ از روی شکل درمی‌یابیم که:

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{۳f(x)-۵}{[x]-۲f(x)}=\frac{۳\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)-\lim\limits_{x\to ۲^+}۵}{\lim\limits_{x\to ۲^+}[x]-۲\lim\limits_{x\to ۲^+}f(x)}=\frac{۳\times ۲-۵}{۲-۲\times ۲}=\frac{۱}{-۲}=\frac{-۱}{۲}$$

(الله دادی) (فصل ششم ـ درس دوم ـ حد و پیوستگی ـ تعیین حد یک نقطه از روی نمودار تابع و محاسبه حد توابع)

۳- گزینه «۳» ـ عبارت «الف» نادرست می‌باشد، اگر $f(x)=[x]$ و $f(x)=[-x]$ هر دوی این نقاط در $x=۱$ حد ندارند. امـا $f+g$ در $x=۱$ دارای حد می‌باشد. عبارت «ب» و عبارت «ج» صحیح می‌باشد. عبارت «د» نادرست می‌باشد، تابع رادیکال در نقاطی که ریشه زیر رادیکـال هسـتند، حد ندارد. (الله دادی) (فصل ششم ـ حد و پیوستگی ـ حد مجموع دو تابع، حد توابع رادیکالی و جزء صحیح)

۴- گزینه «۳» ـ شرط پیوستگی $f(x)$ در $x=۲$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^-}f(x)=f(۲)\Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|-x^۲-x+۶|}{۲-x}$$

عبارت داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

		-۳		۲	
$-x^۲-x+۶$	$-$		$+$		$-$

بنابراین برای $x>۲$، عبارت $-x^۲-x+۶$ یک عبارت منفی است و باید با علامت منفی از قدرمطلق خارج شود.

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{|-x^۲-x+۶|}{(۲-x)}=\frac{x^۲+x-۶}{۲-x}=\frac{(x+۳)\overset{-۱}{\cancel{(x-۲)}}}{\cancel{(۲-x)}}=-x-۳=-۲-۳=-۵$$

بنابراین $f(۲)=a=-۵$.

$$\lim_{x\to ۲^-}۲a[x]+b=-۱۰\lim_{x\to ۲^-}[x]+\lim_{x\to ۲^-}b=-۵$$

$$-۱۰\times ۱+b=-۵\Rightarrow b=۵\qquad a+b=۰$$

(الله دادی) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ پیوستگی تابع در یک نقطه)

۵- گزینه «۳» ـ نقاط $(۰,-۱)$ و $(۳,۱)$ روی نمودار قراردارند، کافی است بررسی کنیم این دو نقطه در کدام تابع صدق می‌کنند:

$$\log(x+۱)\xrightarrow{(۰,-۱)}\log(۰+۱)\neq -۱$$

$$\log\frac{x+۱}{۴}+۱\xrightarrow{(۰,-۱)}\log\frac{۱}{۴}+۱\neq -۱$$

$$\log_۲\frac{x+۱}{۴}+۱\xrightarrow{(۰,-۱)}\log_۲ ۲^{-۲}+۱=-۱\xrightarrow{(۳,۱)}\log_۲ ۱+۱=۱$$

$$\log_۲(x+۱)\xrightarrow{(۰,-۱)}\log_۲ ۱\neq -۱$$

(الله دادی) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ توابع‌نمایی و لگاریتمی ـ نمودار توابع لگاریتمی)

۶- گزینه «۱» ـ

$$۹^{x-۱}-۳^{۲x-۱}=-۲\times ۲۷^{x-۲}\Rightarrow ۳^{۲x-۲}-۳^{۲x-۱}=-۲\times ۳^{۳x-۶}\Rightarrow ۳^{۲x-۲}\cancel{(۱-۳)}=\cancel{-۲}\times ۳^{۳x-۶}\Rightarrow ۲x-۲=۳x-۶\Rightarrow x=۴$$

$$\left.\begin{array}{l}\log_۳ ۴+a=۲\\ \log_۳ ۹=۲\end{array}\right\}\Rightarrow ۹=۴+a\Rightarrow a=۵$$

(الله دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ توابع‌نمایی و لگاریتمی ـ معادلات نمایی و لگاریتم یک عدد)

۷- گزینه «۴» ـ

$$f(x)=a+۳^{bx+۲} \Rightarrow f(۲)=۲ \Rightarrow a+۳^{۲b+۲}=۲$$

$$f(۰)=۱۰ \Rightarrow a+۳^{۰+۲}=۱۰ \Rightarrow a=۱$$

$$۱+۳^{۲b+۲}=۲ \Rightarrow ۳^{۲b+۲}=۱ \Rightarrow ۳^{۲b+۲}=۳^{۰} \Rightarrow ۰=۲b+۲ \Rightarrow b=-۱$$

$$a+b=۰$$

(الله دادی) (فصل پنجم ـ توابع‌نمایی و لگاریتمی ـ نمودار توابع نمایی)

۸- گزینه «۳» ـ در تابع $y=\log_b a$، باید داشته باشیم؛ $b\neq ۱ , b>۰ , a>۰$

		-۱		۶	
$-x^۲+۵x+۶$	$-$		$+$		$-$

$$-x^۲+۵x+۶>۰ \Rightarrow x=\frac{-۵\pm\overset{۷}{\sqrt{\cancel{۲۵+۲۴}}}}{-۲} \Rightarrow \begin{cases}+۶\\-۱\end{cases} \Rightarrow \text{I) } (-۱,۶)$$

		۰		$\frac{۳}{۲}$	
	$+$		$-$		$+$

$$x^۲-\frac{۳}{۲}x>۰ \Rightarrow x(x-\frac{۳}{۲})>۰ \Rightarrow \text{II) } (-\infty,۰)\cup(\frac{۳}{۲},+\infty)$$

$$x^۲-\frac{۳}{۲}x\neq ۱ \Rightarrow x^۲-\frac{۳}{۲}x-۱\neq ۰ \Rightarrow x=\frac{\frac{۳}{۲}\pm\sqrt{\frac{۹}{۴}+۴}}{۲}=\frac{\frac{۳}{۲}\pm\frac{۵}{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases}۲\\-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

$$\text{III) } x\neq -\frac{۱}{۲},۲$$

از اشتراک III و II و I داریم:

$$[(-۱,۶)\cap[(-\infty,۰)\cup(\frac{۳}{۲},+\infty)] \Rightarrow (-۱,۰)\cup(\frac{۳}{۲},۶)-\{-\frac{۱}{۲},۲\}$$

(الله دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ توابع‌نمایی و لگاریتمی ـ تابع لگاریتم)

۹- گزینه «۲» ـ

$$f(x)=\frac{\sqrt{(x-۳)^۲}-۱}{-x^۲+۶x-۸}=\frac{|x-۳|-۱}{-x^۲+۶x-۸}$$

چون وقتی‌که از xهای بیشتر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شویم، عبارت $(x-۳)$ منفی است، بنابراین با علامت منفی از قدرمطق خارج می‌گردد:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x-۳|-۱}{-x^۲+۶x-۸}=\frac{۳-x-۱}{-x^۲+۶x-۸}=\frac{۲-x}{-x^۲+۶x-۸}=\frac{(۲-x)}{(۲-x)(x-۴)}=\frac{-۱}{۲}$$

هم‌چنین وقتی‌که ازxهای کوچکتر از ۴ به ۴ نزدیک می‌شود $(x-۳)$ مثبت است، بنابراین خود عبارت از داخل قدر مطلق خارج می‌شود.

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{|x-۳|-۱}{-x^۲+۶x-۸}=\frac{x-۴}{(x-۴)(۲-x)}=\frac{۱}{۲-x}=\frac{-۱}{۲}$$

$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)+\lim_{x\to ۲^-}f(x)=\frac{-۱}{۲}+\frac{-۱}{۲}=-۱$$

(الله دادی) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ محاسبه حد توابع)

۱۰- گزینه«۳» ـ

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱-\sin^۳ x}{\sin x-۱}=\frac{(۱-\sin x)(۱+\sin^۲ x+\sin x)}{(\sin x-۱)}=-(۱+\sin^۲\frac{\pi}{۲}+\sin\frac{\pi}{۲})=-۳$$

(الله دادی) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ حدهای مثلثاتی)

۱۱- گزینه «۴» ـ در تابع g، دامنه به‌صورت اعداد صحیح و غیرصحیح تفکیک شده برای محاسبه حد تمامی نقاط تابع باید از ضابطه پایین $(x\notin\mathbb{Z})$ استفاده کنیم، زیرا برای $x=۰$ زمانی که عبارت $x \Rightarrow ۰$ مطرح می‌شود به معنای نزدیک شدن به نقطه صفر است و هیچ‌گاه در عمل به نقطه صفر نمی‌رسیم، پس $x \Rightarrow ۰$ به معنای اعداد غیرصحیح است.

$$\lim_{x\to ۰}g(x)=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۳f(x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{x}{۳|x|} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x}{۳|x|}=\frac{x}{۳x}=\frac{۱}{۳}\\[2mm] \lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x}{۳|x|}=\frac{x}{-۳x}=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

حد چپ و راست برابر نیستند، پس حد وجود ندارد. (الله دادی) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ شرط وجود حد)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x-۲}{x^۲+ax+b}=\frac{۱}{۵}\xrightarrow{x=۲}$$

چون صورت وقتی $x=۲$ برابر صفر است پس حتما مخرج هم صفر است، پس مخرج به‌صورت $(x-۲)(x-c)$. وقتی‌که $(x-۲)$ از صورت و مخرج حذف شوند، آن‌گاه در صورت ۱ باقی می‌ماند و درمخرج $(x-c)$ که این عدد برابر ۵ است.

$$۲-c=۵ \Rightarrow c=-۳$$

پس عبارت $x^۲+ax+b$ دارای دو ریشه $x=۲$ و $x=-۳$ می‌باشد و $۹-۳a+b=۰$ و $۴+۲a+b=۰$

$$-۹+۳a-b=۰$$
$$\underline{۴+۲a+b=۰}$$
$$-۵+۵a=۰ \Rightarrow a=۱$$
$$-۹+۳-b=۰ \Rightarrow b=-۶$$
$$a-b=۱-(-۶)=۷$$

(الله دادی) (فصل ششم ـ درس دوم ـ حد و پیوستگی ـ حذف عامل صفرشونده)

۱۳- گزینه «۴» ـ

$$\log_{(۱+\sqrt{۳})}(۴+۲\sqrt{۳})^۲=\log_{(۱+\sqrt{۳})}((۱+\sqrt{۳})^۲)^۲=\log_{(۱+\sqrt{۳})}(۱+\sqrt{۳})^۴=۴\log_{(۱+\sqrt{۳})}(۱+\sqrt{۳})=۴$$

(الله دادی) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی ـ ویژگی های لگاریتم)

۱۴- گزینه «۳» ـ

$$\log_{۱۰}۱۰^{۲۳/۸}=۱۱/۸+۱/۵M \Rightarrow ۱۰^{۱۱/۸+۱/۵M}=۱۰^{۲۳/۸} \Rightarrow ۱۰^{۱۱/۸}\times ۱۰^{۱/۵M}=۱۰^{۲۳/۸}$$
$$\Rightarrow ۱۰^{۱۲}=۱۰^{۱/۵M} \Rightarrow ۱/۵M=۱۲ \Rightarrow M=۸$$

(الله دادی) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی ـ کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی)

۱۵- گزینه «۲» ـ

$$x^۲\le |x| \Rightarrow \begin{cases} x>۰ \Rightarrow x^۲\le x \Rightarrow x^۲-x\le ۰ \Rightarrow x(x-۱)\le ۰ \Rightarrow x\in[۰,۱] \\ x<۰ \Rightarrow x^۲\le -x \Rightarrow x^۲+x\le ۰ \Rightarrow x(x+۱)\le ۰ \Rightarrow x\in[-۱,۰] \end{cases}$$

اجتماع دو حالت $x\in[-۱,۱]$

$$x^۲>|x|\begin{cases} x>۰ \Rightarrow x^۲>x \Rightarrow x^۲-x>۰ \Rightarrow x(x-۱)>۰ \Rightarrow x\in(-\infty,۰)\cup(۱,+\infty) \\ x<۰ \Rightarrow x^۲>-x \Rightarrow x^۲+x>۰ \Rightarrow x(x+۱)>۰ \Rightarrow x\in(-\infty,-۱)\cup(۰,+\infty) \end{cases}$$

اشتراک دو حالت $(-\infty,-۱)\cup(۱,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+bx+c & -۱\le x\le ۱ \\ [x] & x<-۱ \text{ یا } x>۱ \end{cases}$$

تابع براکت در نقاط صحیح دامنه‌اش دارای ناپیوستگی است، بنابراین از بازه $(-۴,۲)$ تنها دو نقطه ۲– و ۳– دارای ناپیوستگی است و طبق صورت سوال تابع در این بازه هم دو نقطه ناپیوستگی دارد، بنابراین تابع در نقاط $x=\pm۱$ پیوسته است.

شرط پیوستگی در نقطه : $\lim_{x\to ۱^-}f(x)=\lim_{x\to ۱^+}f(x)=f(۱)$

$$x^۲+bx+c=۱ \Rightarrow ۱+b+c=۱ \Rightarrow b+c=۰ \Rightarrow b=-c$$

شرط پیوستگی در نقطه۱– : $۱-b+c=-۲ \Rightarrow -b+c=-۳$

$$x^۲+bx+x=-۲ \Rightarrow ۱-b+c=-۲ \Rightarrow ۲c=-۳ \Rightarrow c=\frac{-۳}{۲},b=\frac{۳}{۲} \Rightarrow b^۲+c^۲=۲\times\frac{۹}{۴}=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

(الله دادی) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ پیوستگی تابع در یک نقطه)

۱۶- گزینه «۴» ـ

$$\frac{۱}{۳}\log_{x-۲}(x+۱)^۳+\log_{(x-۲)}(x+۱)=\log_{(۱+\sqrt{۲})}(۱+\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow \log_{(x-۲)}(x+۱)+\log_{x-۲}(x+۱)=۲$$

$\log_{x-۲}(x+۱)^۲=۲ \Rightarrow (x-۲)^۲=(x+۱)^۲ \Rightarrow x+۱=x-۲ \Rightarrow$ غیرممکن

یا

$$x+۱=-x+۲ \Rightarrow ۲x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ ، $x-۲<۰$ بنابراین این جواب هم قابل قبول نیست.

(الله دادی) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی ـ معادلات لگاریتمی و ویژگی‌های لگاریتم)

۱۷- گزینه «۲» ـ حدهای چپ و راست را جداگانه حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x) = ۱+۲a\,,\ \lim_{x\to ۱^-} f(x) = a-۱ \xrightarrow{\text{فرض}} ۱+۲a-a+۱=-۱ \Rightarrow a=-۳$$

(سراسری ـ ۸۶) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ محاسبه حد چپ و راست)

۱۸- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} (x+a)[x] = (۲+a)[۲^+] = ۲(۲+a)$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^-} (x+a)[x] = (۲+a)[۲^-] = a+۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) - \lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۳ \Rightarrow ۲(۲+a)-(۲+a)=۳ \Rightarrow a+۲=۳ \Rightarrow a=۱$$

(سراسری تجربی ـ ۸۷) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ محاسبه حد چپ و راست)

۱۹- گزینه «۲» ـ

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \dfrac{۱}{a} \\ f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = ۱-\dfrac{a}{۴} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{a} = ۱-\frac{a}{۴} \Rightarrow \frac{۱}{a} = \frac{۴-a}{۴} \Rightarrow ۴ = ۴a-a^۲ \Rightarrow a^۲-۴a+۴=۰ \Rightarrow a=۲$$

(سراسری خارج از کشور تجربی ـ ۹۵) (فصل ششم ـ درس سوم ـ حد و پیوستگی ـ پیوستگی تابع در یک نقطه)

۲۰- گزینه «۳» ـ می‌دانیم: $\log_k a + \log_k b = \log_k ab$

$$a = \log_{۱۲} ۲ + \log_{۱۲}(۳\times۴) = \log_{۱۲} ۲ + ۱ = a \Rightarrow \log_{۱۲} ۲ = a-۱$$

$$\log_{۱۲} ۳ + \log_{۱۲} ۶ + \log_{۱۲} ۱۶ = \log_{۱۲}(۳\times۶\times۱۶) = \log_{۱۲}(۱۴۴\times۲) = \log_{۱۲} ۱۲^۲ + \log_{۱۲} ۲ = ۲+\log_{۱۲} ۲ = ۲+a-۱ = a+۱$$

(آزاد تجربی ـ ۸۳) (فصل پنجم ـ درس دوم ـ توابع نمایی و لگاریتمی ـ ویژگی‌های لگاریتم)