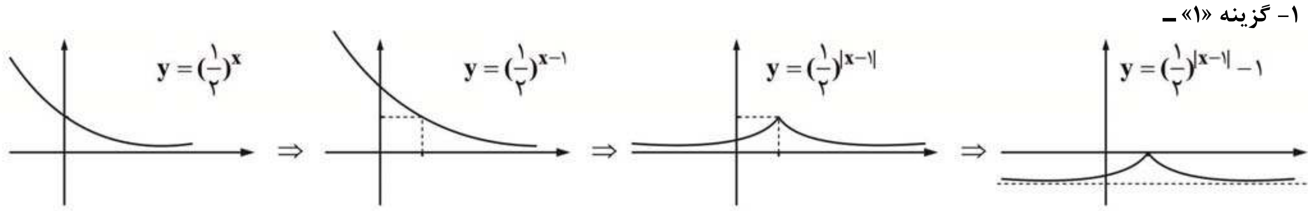
ریاضی ۲

۱- گزینه «۱» ـ



(جعفری) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ نمودار توابع نمایی)

۲- گزینه «۳» ـ ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم:

$$-x^{۲}+۵x-۶>۰ \Rightarrow x\in(۲,۳)$$

از طرف دیگر تابع $y=-x^{۲}+۵x-۶$ دارای نقطه ماکزیمم به طول $x=\frac{۵}{۲}$ و عرض $\frac{۱}{۴}$ است. در نتیجه تابع $f(x)$ دارای ماکزیمم به طول $x=\frac{۵}{۲}$ و عرض $\log\frac{۱}{۴}$ است.

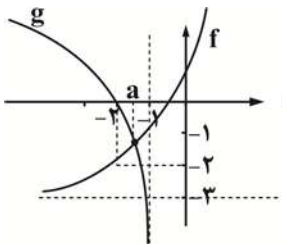
$$(y\le\frac{۱}{۴} \Rightarrow \log y\le\log\frac{۱}{۴}=-۲\log ۲=-۰/۶)$$

با توجه به اینکه $f(x)\le -۰/۶$، پس گزینه «۳» درست است.

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ نمودار توابع نمایی)

۳- گزینه «۴» ـ نمودار تابع دو واحد به سمت راست منتقل شده است، پس $a=-۲$ و دو واحد به سمت بالا رفته است، در نتیجه $b=۲$. بنابراین $b-a=۴$. (جعفری) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ نمودار توابع نمایی)

۴- گزینه «۳» ـ



$\Rightarrow a\in(-۲,-۱)$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ نمودار توابع نمایی و لگاریتمی)

۵- گزینه «۲» ـ ابتدا دامنه تابع را تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x-۳}{x+۲}>۰ \Rightarrow x<-۲ \text{ یا } x>۳$$

بنابراین گزینه «۱» رد می‌شود. از طرف دیگر داریم:

$$y=\frac{x-۳}{x+۲}=۱-\frac{۵}{x+۲}\begin{cases}x>۳ & y<۱ \Rightarrow \log y<۰\\ x<-۲ & y>۱ \Rightarrow \log y>۰\end{cases}$$

به این ترتیب گزینه‌های «۳» و «۴» نیز رد می‌شوند. (جعفری) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ نمودار توابع لگاریتمی)

۶- گزینه «۴» ـ

$$\frac{E_A}{E_B}=۵ \Rightarrow \log\frac{E_A}{E_B}=\log ۵=۰/۷ \Rightarrow \log E_A-\log E_B=۰/۷ \Rightarrow ۱۱/۸+۱/۵M_A-۱۱/۸-۱/۵M_B=۰/۷ \Rightarrow$$
$$۱/۵(M_A-M_B)=۰/۷ \Rightarrow M_A=۰/۴۶+M_B$$

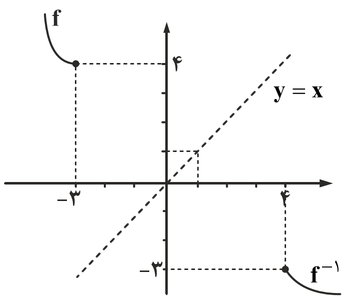
(جعفری) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ کاربرد توابع لگاریتمی)

۷- گزینه «۳» ـ

$$\xrightarrow{f(t)=۳A_۰} ۳A_۰=A_۰\times ۲^{۰/۰۵t} \Rightarrow ۳=۲^{۰/۰۵t} \Rightarrow ۰/۰۵t=\log_۲ ۳ \Rightarrow t=\frac{۱/۵۸}{۰/۰۵}=۳۱/۶$$

(جعفری) (فصل پنجم ـ درس سوم ـ کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی)

۸- گزینه «۱» ـ بخشی از نمودار f^{-1} را رسم کردیم. همان‌طور که می‌بینیم:



$$\lim_{x\to ۴^+} f^{-1}(x) = -۳\ ,\ \lim_{x\to ۴^-} f^{-1}(x) = \text{موجود نیست}$$

همچنین:

$$\lim_{x\to (-۳)^-} f(x) = ۴\ ,\ \lim_{x\to ۲} f(x) = \text{موجود نیست}$$

بنابراین تنها یکی از حدود درست محاسبه شده بود. (جعفری) (فصل ششم ـ درس اول ـ فرایندهای حدی)

۹- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}^-} \frac{[\log(\sin x)]}{[-x^۲]} = \frac{[\log ۱^-]}{[-\frac{\pi^۲}{۴}]} = \frac{[۰^-]}{-۳} = \frac{-۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۰- گزینه «۲» ـ

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x) = \lim_{x\to ۰^+} a^{[-x]} - ۲ = a^{-۱} - ۲ = \frac{۱}{a} - ۲$$

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲^{-x}\sqrt{(۲^x-۱)^۲}}{۱-۲^{-x}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۲^{-x}\,|۲^x-۱|}{۱-۲^{-x}} = \frac{۲^{-x}(۱-۲^x)}{۱-۲^{-x}} = \frac{۲^{-x}-۱}{-(۲^{-x}-۱)} = -۱$$

$$\Rightarrow\ \frac{۱}{a} - ۲ = -۱ \ \Rightarrow\ a = ۱$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۱- گزینه «۲» ـ نکته: اگر x به‌سمت صفر برود، می‌توانیم از روابط هم‌ارزی زیر استفاده کنیم:

$\boxed{۱}$ $(۱+x)^n \sim ۱+nx \ \Rightarrow\ \sqrt[n]{۱+x} \sim ۱+\frac{x}{n}$

$\boxed{۲}$ هر چند جمله‌ای هم‌ارز جمله‌ای است که کمترین توان را دارد.

با توجه به نکات گفته شده، داریم:

$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{(۱+\sqrt{۲}x)^۴ - \sqrt{۲x+۱}}{\sqrt{x^۴+x^۳+x^۲}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱+۴\sqrt{۲}x-۱-x}{\sqrt{x^۲}} = \frac{(۴\sqrt{۲}-۱)x}{-x} = -۴\sqrt{۲}+۱$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۲- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to ۱} \frac{\sqrt{۳-x}-\sqrt{x+۱}}{\sqrt{۳+x}-۲} \times \frac{\sqrt{۳-x}+\sqrt{x+۱}}{\sqrt{۳-x}+\sqrt{x+۱}} \times \frac{\sqrt{۳+x}+۲}{\sqrt{۳+x}+۲} = \lim_{x\to ۱} \frac{(۳-x-x-۱)(\sqrt{۳+x}+۲)}{(۳+x-۴)(\sqrt{۳-x}+\sqrt{x+۱})} = \lim_{x\to ۱} \frac{۲(۱-x)(\sqrt{۳+x}+۲)}{(x-۱)(\sqrt{۳-x}+\sqrt{x+۱})} = -۲\sqrt{۲}$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۳- گزینه «۳» ـ طبق نکته گفته شده در سوال ۱۱ داریم:

$$\lim_{x\to ۰} \frac{a\sqrt{۱-۲x}-b\sqrt{۱-x}}{\sqrt{۱-۶x}-۱} = \lim_{x\to ۰} \frac{a(۱-x)-b(۱-\frac{۱}{۲}x)}{۱-۳x-۱} = \lim_{x\to ۰} \frac{(a-b)+(-a+\frac{b}{۲})x}{-۳x} = ۱ \Rightarrow \begin{cases} a-b=۰ \ \Rightarrow\ a=b \\ -a+\frac{b}{۲} = -۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ a=b=۶ \ \Rightarrow\ ab=۱۲$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۴- گزینه «۴» ـ با توجه به این‌که تابع در $x=۱$ تعریف نشده، اما دارای حد است، پس $x=۱$ باید ریشه صورت نیز باشد:

$$۱^۳+a(۱)^۲+b=۰ \Rightarrow a+b=-۱\ (*)$$

$x^۳+ax^۲+b$ حاصل‌ضرب دو عامل است که یکی $x-۱$ است، برای پیدا کردن عامل دیگر داریم:

$$\begin{array}{l|l} x^۳+ax^۲+b & x-۱ \\ \cline{2-2} \underline{-x^۳+x^۲} & x^۲+(a+۱)x+a+۱ \\ (a+۱)x^۲+b & \\ \underline{-(a+۱)x^۲+(a+۱)x} & \\ (a+۱)x+b & \\ \underline{-(a+۱)x+a+۱} & \\ a+b+۱ & \end{array} \Rightarrow f(x)=\frac{x^۳+ax^۲+b}{x-۱}=x^۲+(a+۱)x+a+۱$$

$$\xrightarrow{f(۱)=-۳} ۱+(a+۱)+a+۱=-۳ \Rightarrow ۲a+۳=-۳ \Rightarrow a=-۳ \xrightarrow{(*)} b=۲ \Rightarrow b-a=۵$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۵- گزینه «۳» ـ

$$\lim_{x\to\frac{۷\pi}{۴}} \frac{۱+\tan^۳x+۳\tan x+۳\tan^۲x}{۱+\tan^۳x}=\lim_{x\to\frac{۷\pi}{۴}} \frac{(۱+\tan x)^۳}{(۱+\tan x)(۱+\tan^۲x-\tan x)}=\lim_{x\to\frac{۷\pi}{۴}} \frac{(۱+\tan x)^۲}{۱+\tan^۲x-\tan x}=۰$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۶- گزینه «۱» ـ

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{[x]}{|x-۳|}\left(\frac{۱}{x+۲}-\frac{۲}{۳x+۱}\right)=\lim_{x\to ۳^-} \frac{۲}{-(x-۳)}\left(\frac{x-۳}{(x+۲)(۳x+۱)}\right)=\lim_{x\to ۳^-} \frac{۲}{-(x+۲)(۳x+۱)}=\frac{-۱}{۲۵} \Rightarrow -۲۵a=۱$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۷- گزینه «۲» ـ بررسی موارد:

«آ»: نادرست است. زیرا $x=۲$ جزء دامنه تابع است، اما حد تابع در این نقطه موجود نیست.

«ب»: درست است. زیرا تابع در $x=۱$ دارای حد راست و چپ نیست.

«پ»: درست است. می‌دانیم توابع جزء صحیح در نقاطی که داخل جزء صحیح، عدد صحیح شود، دارای حد نیست، در بازه $-۲\le x\le ۲$، هر دو تابع فقط به‌ازای $x=۰$ عدد صحیح می‌شوند، پس تعداد نقاطی که در آن حد ندارند روی بازه داده شده، برابر است.

«ت»: نقاط $۲\le x<۳$ جزء دامنه تابع داده شده نیستند، بنابراین تابع در نقطه $x=۳$ دارای حد چپ و درنتیجه دارای حد نیست.

(جعفری) (فصل ششم ـ دروس اول و دوم ـ حد)

۱۸- گزینه «۲» ـ فرض می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۲} f(x)=L_۱\ ,\ \lim_{x\to -۲} g(x)=L_۲$$

در این‌صورت داریم:

$$\begin{cases} \dfrac{-L_۱}{L_۲+۲}=۱ \Rightarrow L_۱+L_۲=-۲ \\ \dfrac{L_۱-L_۲}{۲}=-۱ \Rightarrow L_۱-L_۲=-۲ \end{cases} \Rightarrow L_۱=-۲\ ,L_۲=۰ \Rightarrow \lim_{x\to -۲} \frac{g(x)}{f^۲(x)+۳}=\frac{L_۲}{L_۱^۲+۳}=۰$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۱۹- گزینه «۴» ـ

$$\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-} [\sin x]=[(-۱)^+]=-۱\ ,\quad \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-} [\cos x]=[۰^-]=-۱$$

$$\sqrt{۱+\sin^۴x-۲\sin^۲x}=\sqrt{(۱-\sin^۲x)^۲}=\sqrt{\cos^۴x}=\cos^۲x \Rightarrow \lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \frac{\sin^۲x[\sin x]-\cos^۲x[\cos x]+۱}{\sqrt{۱+\sin^۴x-۲\sin^۲x}}$$

$$=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \frac{-\sin^۲x+\cos^۲x+۱}{\cos^۲x}=\lim_{x\to \frac{۳\pi}{۲}^-} \frac{\cos^۲x-۱+\cos^۲x+۱}{\cos^۲x}=\lim \frac{۲\cos^۲x}{\cos^۲x}=۲$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)

۲۰- گزینه «۱» ـ چون تابع در $x = ۲$ حد نداشته اما دارای حد راست است، پس ۲ ریشه زیر رادیکال است:

$$۲ - ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow a = \frac{۳}{۲}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۳ \Rightarrow b = ۳$$

در نتیجه:

$$۲a + b = ۶$$

(جعفری) (فصل ششم ـ درس دوم ـ محاسبه حد توابع)