

حسابان ۱

۱- گزینه «۲» -

$$\left. \begin{aligned} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) &= \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) &= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}$$

(تندرو) (فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا) (آسان)

۲- گزینه «۱» -

$$\cos \theta + \cos \theta = 1 \Rightarrow 2 \cos \theta = 1 \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{انتهای } \theta \text{ در ربع چهارم}} \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cot \theta = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

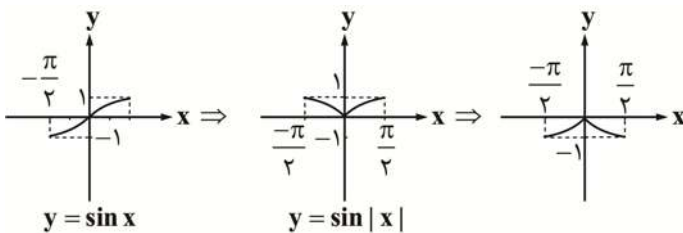
(تندرو) (فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا) (متوسط)

۳- گزینه «۲» -

$$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} \sin\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3}$$

(تندرو) (فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا) (متوسط)

۴- گزینه «۳» -



(تندرو) (فصل چهارم - درس سوم - توابع مثلثاتی) (متوسط)

۵- گزینه «۴» -

$$-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 3 \Rightarrow \underbrace{-4 \leq 3 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 2}_{f(x)}$$

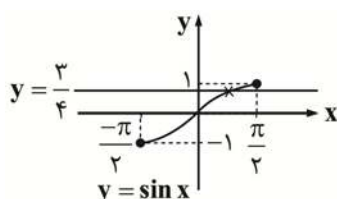
$$\Rightarrow R_f = [-4, 2]$$

(تندرو) (فصل چهارم - درس سوم - توابع مثلثاتی) (آسان)

۶- گزینه «۲» -

$$2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{3}{8} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{8}$$

از روش هندسی کمک می‌گیریم. همان‌طور که دیده می‌شود، نمودار $y = \frac{3}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ فقط یک نقطه برخورد دارند.



(تندرو) (فصل چهارم - درس سوم - توابع مثلثاتی) (متوسط)

$$\begin{aligned}\cos 285 &= \cos(270 + 15) = \sin 15 \\ \sin 255 &= \sin(270 - 15) = -\cos 15 \\ \sin 525 &= \sin 165 = \sin(180 - 15) = \sin 15 \\ \sin 105 &= \sin(90 + 15) = \cos 15\end{aligned}$$

$$A = \frac{\sin 15 + \cos 15}{\sin 15 - \cos 15} \cdot \frac{\tan 15 + 1}{\tan 15 - 1} = \frac{1/\sqrt{3} + 1}{1/\sqrt{3} - 1} = \frac{1/\sqrt{3} + 1}{-1/\sqrt{3} + 1} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \cdot \frac{1 + \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = -\frac{(1 + \sqrt{3})^2}{1 - 3} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + 3}{2} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

(کتاب همراه علوی) (فصل چهارم - درس دوم - نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا) (متوسط)

۸- گزینه «۱» - روش اول: نقطه (۰, ۲) روی نمودار واقع شده است، بنابراین:

$$(0, 2) \Rightarrow 2 = a \sin \pi \left(\frac{1}{4} + 0 \right) \Rightarrow 2 = a \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow 2 = a \times 1 \Rightarrow a = 2$$

$$y = 2 \sin \pi \left(\frac{1}{4} + bx \right) \Rightarrow y = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + b\pi x \right) \Rightarrow y = 2 \cos(b\pi x)$$

اما (۱, -۲) نقطه مینیمم تابع است، لذا:

$$-2 = 2 \cos(b\pi(1)) \Rightarrow \begin{matrix} -1 \\ \downarrow \\ \cos \pi \end{matrix} = \cos(b\pi) \Rightarrow \pi = b\pi \Rightarrow b = 1$$

$$a \cdot b = 2 \times 1 = 2$$

روش دوم: می‌دانیم دوره تناوب تابع داده شده، برابر $T = 2$ می‌باشد، بنابراین:

$$T = \left| \frac{2\pi}{b\pi} \right| \Rightarrow 2 = \frac{2}{|b|} \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

از طرفی چون $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ ، بنابراین به‌ازای $b = \pm 1$ داریم:

$$y = a \sin \pi \left(\frac{1}{4} + bx \right) = a \sin \left(\frac{\pi}{4} + b\pi x \right) = a \cos(b\pi x) = a \cos(\pm \pi x) \Rightarrow y = a \cos \pi x$$

اما نقطه (۰, ۲) روی نمودار واقع شده است، بنابراین:

$$(0, 2) \Rightarrow 2 = a \cos 0 \Rightarrow 2 = a \times 1 \Rightarrow a = 2$$

لذا: $a \cdot b = 2 \times 1 = 2$ (سراسری ریاضی - ۹۲) (فصل چهارم - درس سوم - توابع مثلثاتی) (دشوار)

$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \xrightarrow{\alpha \text{ در ربع دوم است}} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{8}}{3}$$

$$\cos \beta = \frac{2}{3} \xrightarrow{\beta \text{ در ربع چهارم است}} \sin \beta = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha = \left(\frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \right) + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3} \times -\frac{\sqrt{8}}{3} \right) = \frac{2}{9} + \frac{\sqrt{40}}{9} = \frac{2}{9} (1 + \sqrt{10})$$

(تندرو) (فصل چهارم - درس چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» -

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}$$

$$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$$

(تندرو) (فصل چهارم - درس چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا) (متوسط)

۱۱- گزینه «۳» -

$$\begin{aligned} \sin x \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \sin(\pi + x) \sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) &= \sin x \cos x (-\sin x) (-\cos x) \\ &= \frac{1}{4} (\underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} \times \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x}) = \frac{1}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4x}{2}\right) = \frac{1 - \cos 4x}{8} = \frac{1 - a}{8} \end{aligned}$$

(آزاد ریاضی - ۸۸) (فصل چهارم - درس چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا) (دشوار)

۱۲- گزینه «۴» -

$$\cos 5^\circ \left(\frac{\sin 7^\circ}{\cos 7^\circ} + \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} \right) = \cos 5^\circ \left(\frac{\sin 7^\circ \cos 1^\circ + \sin 1^\circ \cos 7^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ} \right)$$

$$\cos 5^\circ \left(\frac{\sin 8^\circ}{\cos 7^\circ \cos 1^\circ} \right) = \sin 4^\circ \left(\frac{\cos 1^\circ}{\sin 2^\circ \cos 1^\circ} \right)$$

$$\frac{2 \sin 2^\circ \cos 2^\circ}{\sin 2^\circ} = 2 \cos 2^\circ$$

(سراسری ریاضی - ۸۵) (فصل چهارم - درس چهارم - روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا) (دشوار)

۱۳- گزینه «۴» - وجود یا عدم وجود حد در یک نقطه، به خود نقطه مربوط نمی‌شود بلکه به همسایگی (محدوف) آن نقطه مربوط می‌شود.

(تندرو) (فصل پنجم - درس اول - مفهوم حد) (آسان)

۱۴- گزینه «۴» -



(تندرو) (فصل پنجم - درس اول - همسایگی) (آسان)

۱۵- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) \text{ (وجود ندارد)}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

(تندرو) (فصل پنجم - درس اول - مفهوم حد) (آسان)

۱۶- گزینه «۴» -

$$\left. \begin{aligned} 2x + 3 < 1 &\Rightarrow 2x < -2 \Rightarrow x < -1 \\ x - 1 < 2x + 3 &\Rightarrow -4 < x \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\cap} -4 < x < -1$$

(تندرو) (فصل پنجم - درس اول - همسایگی) (متوسط)

۱۷- گزینه «۴» -

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x-2} \text{ (وجود ندارد)}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} [x] = -1$$

(تندرو) (فصل پنجم - درس دوم - حدود یک طرفه) (متوسط)

۱۸- گزینه «۱» -

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 - 1 = 0$$

(تندرو) (فصل پنجم - درس دوم - حدود یک طرفه) (آسان)

۱۹- گزینه «۲» -

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-1}{|x-1|} = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ (وجود ندارد)}$$

(تندرو) (فصل پنجم - درس دوم - حدود یک طرفه) (متوسط)

۲۰- گزینه «۱» -

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} ([x] + 3a) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a - x) \Rightarrow 2 + 3a = a - 2 \Rightarrow a = -2$$

(تندرو) (فصل پنجم - درس دوم - حدود یک طرفه) (متوسط)