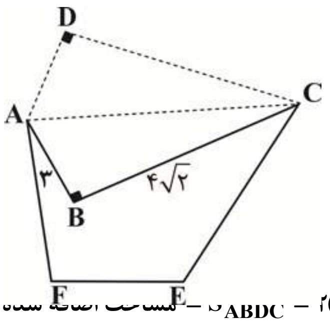
هندسه ۲



۱- گزینه «۴» ـ AC را محور بازتاب در نظر می گیریم، بازتاب مثلث ABC، مثلث ADC است و می‌دانیم:

$$AB = AD\ ,\ BC = CD$$

پس محیط دو ۵ ضلعی ABCEF و ADCEF باهم برابرند، میزان مساحت اضافه شده برابر است با:

$$\text{مساحت اضافه شده} = ۲S_{ABDC} = ۲(\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۴\sqrt{۲}) = ۱۲\sqrt{۲}$$

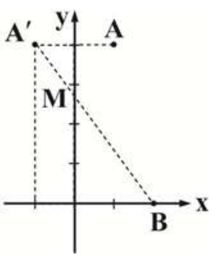
(فیروزی) (فصل دوم ـ کاربرد تبدیل‌ها) (متوسط)

۲- گزینه «۱» ـ قرینه A نسبت به محور y را نقطه A' می‌نامیم:

$$A(۱\ ,\ ۴) \ \rightarrow\ A'(-۱\ ,\ ۴)$$

از A' به B وصل می‌کنیم طبق قضیه هرون طول کوتاه‌ترین مسیر مذکور برابر است با طول مسیر $MA + MB$.

که طبق ویژگی‌های بازتاب داریم: $MA = MA'$

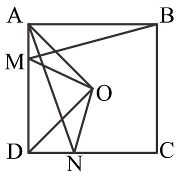


پس:

$$MA + MB = MA' + MB = A'B = \sqrt{(۲+۱)^۲ + (۰-۴)^۲} = \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

(فیروزی) (فصل دوم ـ کاربرد بازتاب) (دشوار)

۳- گزینه «۲» ـ فرض کنیم O مرکز مربع ABCD باشد. باتوجه به اینکه در هر مربع قطرها نیمساز زوایای نظیرشان هستند، داریم:

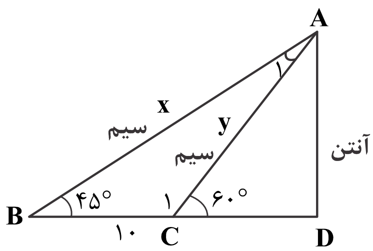


$$\left.\begin{matrix} OA = OD \\ AM = DN \\ O\hat{A}M = O\hat{D}N = ۴۵^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ \overset{\Delta}{OAM} \cong \overset{\Delta}{ODN} \ \Rightarrow \begin{cases} OM = ON \\ M\hat{O}N = ۹۰^\circ \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} \left.\begin{matrix} OA = OB \\ A\hat{O}B = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ B \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} A \\ \left.\begin{matrix} OA = OD \\ A\hat{O}D = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ A \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} D \\ \left.\begin{matrix} OM = ON \\ M\hat{O}N = ۹۰^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ M \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} N \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ \overset{\Delta}{BAM} \xrightarrow[\text{به مرکز } O]{\text{تحت دوران ۹۰ درجه}} \overset{\Delta}{ADN}$$

(گروه مؤلفان علـوی) (فصل دوم ـ تبدیل‌های هندسی و کاربردها ـ دوران) (متوسط)

۴- گزینه «۳» ـ



$$\hat{C}_۱ = ۱۸۰^\circ - ۶۰^\circ = ۱۲۰^\circ$$

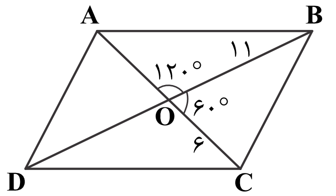
$$\hat{A}_۱ = ۱۸۰^\circ - (۱۲۰^\circ + ۴۵^\circ) = ۱۵^\circ$$

$$\frac{۱۰}{\sin ۱۵^\circ} = \frac{x}{\sin ۱۲۰^\circ} = \frac{y}{\sin ۴۵^\circ}$$

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{۱۰}{\sin ۱۵^\circ} = \dfrac{x}{\sin ۱۲۰^\circ} \ \Rightarrow\ \dfrac{۱۰}{\frac{۱}{۴۰}} = \dfrac{x}{\sqrt{\frac{۳}{۲}}} \ \Rightarrow\ x = ۲۰\sqrt{۳} \\ \dfrac{۱۰}{\sin ۱۵^\circ} = \dfrac{y}{\sin ۴۵^\circ} \ \Rightarrow\ \dfrac{۱۰}{\frac{۱}{۴}} = \dfrac{y}{\sqrt{\frac{۲}{۲}}} \ \Rightarrow\ y = ۲۰\sqrt{۲} \end{matrix}\right\} \Rightarrow\ x + y = ۲۰(\sqrt{۳} + \sqrt{۲})$$

(فیروزی) (فصل سوم ـ قضیه سینوس‌ها) (متوسط)

۵- گزینه «۱» ـ چون در متوازی‌الاضلاع قطرها همدیگر را نصف می‌کنند، پس داریم:



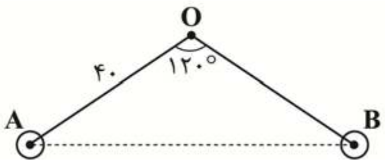
$$OB = \frac{۲۲}{۲} = ۱۱ \, , \, OC = \frac{۱۲}{۲} = ۶$$

پس طول ضلع کوچک‌تر برابر است با:

$$BC^{۲} = ۶^{۲} + ۱۱^{۲} - ۲(۶)(۱۱) \times \cos ۶۰^\circ = ۳۶ + ۱۲۱ - \cancel{۲}(۶)(۱۱)(\frac{۱}{\cancel{۲}}) = ۳۶ + ۱۲۱ - ۶۶ = ۹۱ \Rightarrow BC = \sqrt{۹۱}$$

(فیروزی) (فصل سوم ـ قضیه کسینوس‌ها) (متوسط)

۶- گزینه «۲» ـ

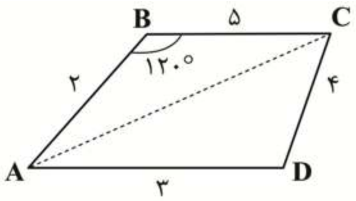


$$AB^{۲} = OA^{۲} + OB^{۲} - ۲OA \times OB \times \cos ۱۲۰^\circ =$$

$$۴۰^{۲} + ۴۰^{۲} - ۲ \times ۴۰ \times ۴۰ \times (-\frac{۱}{۲}) = ۴۰^{۲}(۲+۱) \Rightarrow AB = ۴۰\sqrt{۳}$$

(فیروزی) (فصل سوم ـ قضیه کسینوس‌ها) (آسان)

۷- گزینه «۳» ـ AC را از دو راه حساب می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l} AC^{۲} = AB^{۲} + BC^{۲} - ۲AB \times BC \cos ۱۲۰^\circ \\ AC^{۲} = AD^{۲} + DC^{۲} - ۲AD \times DC \cos D \end{array}\right\} \Rightarrow ۲^{۲} + ۵^{۲} - ۲ \times ۲ \times ۵ \cos ۱۲۰^\circ = ۳^{۲} + ۴^{۲} - ۲ \times ۳ \times ۴ \times \cos D$$

$$۴ + ۲۵ - ۲۰(-\frac{۱}{۲}) = ۹ + ۱۶ - ۲۴ \cos D$$

$$\cos D = \frac{۲۵ - ۳۹}{۲۴} = -\frac{۱۴}{۲۴} = -\frac{۷}{۱۲} = -۰/۵۸$$

(فیروزی) (فصل سوم ـ قضیه کسینوس‌ها) (دشوار)

۸- گزینه «۲» ـ

$$a^{۲}(۱ - \sin^{۲} \hat{B}) + b^{۲} \sin^{۲} \hat{A} = ۴ \Rightarrow a^{۲} - a^{۲} \sin^{۲} \hat{B} + b^{۲} \sin^{۲} \hat{A} = ۴ \quad (۱)$$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \Rightarrow a \sin \hat{B} = b \sin \hat{A} \quad (۲)$$

$$(۱), (۲) \Rightarrow a^{۲} = ۴ \xrightarrow{a>۰} a = ۲$$

(کتاب همراه علوی) (فصل سوم ـ قضیه سینوس‌ها) (دشوار)

۹- گزینه «۳» ـ

$$\frac{a}{\sin a} = ۲R$$

$$\max(a) = ۱ \times ۲R \, , \, \max(a) = ۲ \times ۸ = ۱۶$$

(کتاب همراه علوی) (فصل سوم ـ قضیه سینوس‌ها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ـ کوچک‌ترین میانه، میانه وارد بر بزرگ‌ترین ضلع است. یعنی m_b را به‌دست می‌آوریم:

$$a^{۲} + c^{۲} = ۲m_b^{۲} + \frac{b^{۲}}{۲} \Rightarrow \sqrt{۷}^{۲} + ۳^{۲} = ۲m_b^{۲} + \frac{۴^{۲}}{۲} \Rightarrow ۱۶ = ۲m_b^{۲} + ۸ \Rightarrow m_b^{۲} = ۴ \Rightarrow m_b = ۲$$

(فیروزی) (فصل سوم ـ روابط طولی در مثلث ـ قضیه کسینوس‌ها) (آسان)