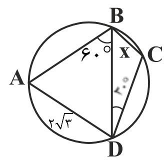
هندسه

۱- گزینه «۴» ـ

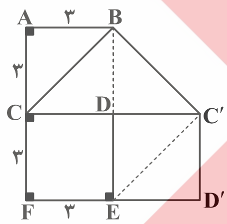


$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AD}{\sin 60^\circ}=2R\\[2mm] \dfrac{BC}{\sin 30^\circ}=2R\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{AD}{\sin 60^\circ}=\dfrac{BC}{\sin 30^\circ}\Rightarrow \dfrac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\dfrac{BC}{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow BC=2$$

(علوی) (رابطهٔ طولی در مثلث ـ قضیه سینوس‌ها) (متوسط)

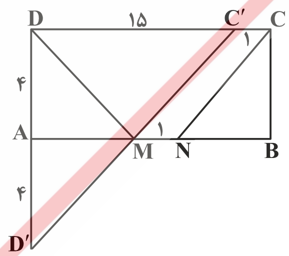
۲- گزینه «۲» ـ برای افزایش مساحت به کمک بازتاب‌های متوالی در مرحله اول C را نسبت به محور BD بازتاب می‌کنیم تا C' به‌دست آید، سپس D را نسبت به محور EC' بازتاب می‌کنیم تا D' به‌دست آید. مساحت شکل انتهایی برابر است با:



$$S=3\times3+3\times3+3\times3+\frac{1}{2}\times3\times3=31/5$$

(علوی) (کاربرد تبدیلات ـ مسئله هم‌پیرامونی) (آسان)

۳- گزینه «۱» ـ برای پیدا کردن کم‌ترین مقدار محیط ذوزنقه، C را با بردار $\overline{NM}$ انتقال می‌دهیم تا C' به‌دست آید، سپس D را نسبت به AB بازتاب می‌دهیم تا D' حاصل شود. محل تلاقی $C'D'$ با AB را M می‌نامیم و با بردار $\overline{C'C}$ انتقال می‌دهیم تا N ایجاد شود. مسیر DMNC کوتاه‌ترین مسیر است و داریم:



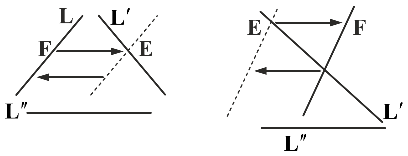
$$\overset{\Delta}{DD'C'}: D'C'^2=DD'^2+DC'^2=8^2+15^2=17^2\Rightarrow D'C'=17$$

$$\text{محیط ذوزنقه } DCNM = DC+CN+MN+DM=16+MC'+1+D'M$$

$$=17+D'C'=17+17=34$$

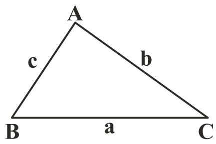
(علوی) (کاربرد تبدیلات ـ کاربرد تبدیل انتقال و بازتاب در پیدا کردن کوتاه‌ترین مسیر) (دشوار)

۴- گزینه «۲» ـ برای رسم پاره‌خط مطلوب، خط L را با برداری به طول k و موازی L'' انتقال می‌دهیم تا خط L' را در E قطع کند، سپس E را با برداری خلاف جهت قبلی انتقال می‌دهیم تا نقطه F روی L مشخص گردد. پاره‌خط EF پاره‌خط موردنظر است. دقت کنید که خط L را هم می‌توان به سمت راست و هم می‌توان به سمت چپ انتقال داد، پس مسئله دو جواب دارد.



(علوی) (کاربرد تبدیلات ـ کاربرد تبدیل انتقال) (متوسط)

۵- گزینه «۳» ـ



$$\text{قضیه سینوس‌ها}: \frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}\Rightarrow a\sin\hat{B}=b\sin\hat{A}\quad (1)$$

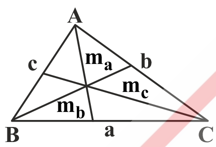
$$a^2\cos^2\hat{B}+b^2\sin^2\hat{A}=8\Rightarrow a^2(1-\sin^2\hat{B})+b^2\sin^2\hat{A}=8$$

$$\Rightarrow a^2-a^2\sin^2\hat{B}+b^2\sin^2\hat{A}=8\xrightarrow{(1)}$$

$$a^2-b^2\sin^2\hat{A}+b^2\sin^2\hat{A}=8\Rightarrow a^2=8\Rightarrow a=2\sqrt{2}$$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه سینوس‌ها) (متوسط)

۶- گزینه «۴» ـ از قضیه میانه‌ها استفاده می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{l}b^2+c^2=2m_a^2+\dfrac{a^2}{2}\\[2mm] a^2+c^2=2m_b^2+\dfrac{b^2}{2}\\[2mm] a^2+b^2=2m_c^2+\dfrac{c^2}{2}\end{array}\right\}\xrightarrow[\text{را جمع می‌کنیم.}]{\text{طرفین تساوی‌ها}}$$

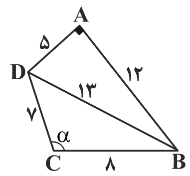
$$2(a^2+b^2+c^2)=2(m_a^2+m_b^2+m_c^2)+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$$

$$\xrightarrow{\div 2} a^2+b^2+c^2=(m_a^2+m_b^2+m_c^2)+\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)\Rightarrow$$

$$\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)=m_a^2+m_b^2+m_c^2\Rightarrow \frac{a^2+b^2+c^2}{m_a^2+m_b^2+m_c^2}=\frac{4}{3}$$

(کتاب همراه علوی با تغییر) (رابطهٔ طولی در مثلث ـ قضیه میانه‌ها) (دشوار)

۷- گزینه «۱» ـ



$$\overset{\Delta}{ABD}: BD=\sqrt{۵^۲+۱۲^۲}=۱۳$$

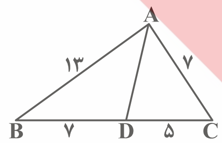
$$\overset{\Delta}{BCD} \text{ قضیه کسینوس‌ها در }: BD^۲=BC^۲+CD^۲-۲BC\times CD\times\cos\alpha$$

$$\Rightarrow ۱۶۹=۶۴+۴۹-۲\times۸\times۷\times\cos\alpha \Rightarrow$$

$$\cos\alpha=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow \alpha=۱۲۰^\circ \Rightarrow \sin\alpha=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

(کنکور با تغییر) (رابطه طولی در مثلث ـ قضیه کسینوس‌ها) (متوسط)

۸- گزینه «۳» ـ از قضیه استوارت استفاده می‌کنیم:



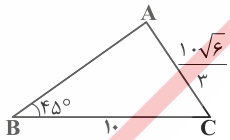
$$AB^۲\cdot CD+AC^۲\cdot BD=AD^۲\cdot BC+BD\cdot CD\cdot BC$$

$$۱۳^۲\times۵+۷^۲\times۷=AD^۲\times۱۲+۱۲\times۷\times۵$$

$$\Rightarrow ۸۴۵+۳۴۳=۱۲AD^۲=۴۲۰ \Rightarrow AD^۲=۶۴ \Rightarrow AD=۸$$

(کنکور با تغییر) (قضیه کسینوس‌ها ـ قضیه استوارت) (متوسط)

۹- گزینه «۴» ـ قضیه سینوس‌ها را برای مثلث ABC می‌نویسیم:



$$\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}=۲R$$

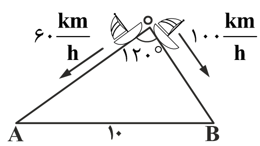
$$\Rightarrow \frac{\frac{۱۰\sqrt{۶}}{۳}}{\sin۴۵^\circ}=\frac{۱۰}{\sin\hat{A}}=\frac{AB}{\sin\hat{C}}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{A}=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\hat{A}\text{ حاده است.}} \hat{A}=۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۶۰^\circ+۴۵^\circ)=۱۸۰^\circ-۱۰۵^\circ=۷۵^\circ$$

(کتاب درسی) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه سینوس‌ها) (متوسط)

۱۰- گزینه «۳» ـ با توجه به نقطه شروع دو قایق و سرعت‌های ثابت، نیم ساعت بعد، مسافت طی شده توسط هر قایق محاسبه می‌شود:



$$OA=۶۰\times۰/۵=۳۰\ ,\ OB=۱۰۰\times۰/۵=۵۰$$

حال به کمک قضیه کسینوس‌ها می‌نویسیم:

$$AB^۲=OA^۲+OB^۲-۲OA\cdot OB\cdot\cos۱۲۰^\circ$$

$$=۹۰۰+۲۵۰۰-۲\times۳۰\times۵۰\times(-\frac{۱}{۲})=۴۹۰۰ \Rightarrow AB=۷۰\text{ km}$$

(کتاب درسی) (قضیه کسینوس‌ها ـ روابط طولی در مثلث) (آسان)