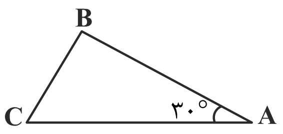
هندسه

۱- گزینه «۴» ـ



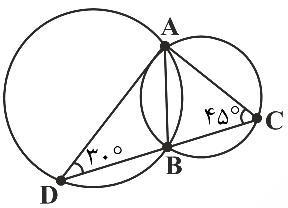
$$\text{قضیه سینوس‌ها در } ABC: \frac{BC}{\sin\hat{A}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}} \Rightarrow \frac{BC}{\sin ۳۰°}=\frac{\sqrt{۲}BC}{\sin\hat{B}}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{B}=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\hat{B}=۴۵° \Rightarrow \hat{C}=۱۸۰°-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰°-(۳۰°+۴۵°)=۱۰۵° \\ \hat{B}=۱۳۵° \Rightarrow \hat{C}=۱۸۰°-(\hat{A}+\hat{B})=۱۸۰°-(۳۰°+۱۳۵°)=۱۵°\end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{C}=۱۵° \text{ یا } ۱۰۵°$$

(علوی) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه سینوس‌ها) (آسان)

۲- گزینه «۳» ـ



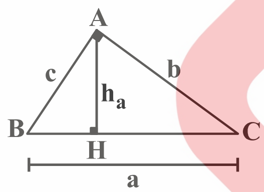
$$\left.\begin{array}{l}\text{قضیه سینوس ها در } \overset{\Delta}{ABD}: \frac{AB}{\sin ۳۰°}=۲R_{\overset{\Delta}{ABD}} \\ \text{قضیه سینوس ها در } \overset{\Delta}{ABC}: \frac{AB}{\sin ۴۵°}=۲R_{\overset{\Delta}{ABC}}\end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow[\text{را بر هم تقسیم می کنیم.}]{\text{طرفین دو تساوی}} \frac{\frac{AB}{\sin ۳۰°}}{\frac{AB}{\sin ۴۵°}}=\frac{۲R_{\overset{\Delta}{ABD}}}{۲R_{\overset{\Delta}{ABC}}} \Rightarrow \frac{R_{\overset{\Delta}{ABD}}}{R_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\frac{\sin ۴۵°}{\sin ۳۰°}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۲}$$

$$\frac{\text{مساحت دایره بزرگ تر}}{\text{مساحت دایره کوچک تر}}=\frac{\pi R^۲_{\overset{\Delta}{ABD}}}{\pi R^۲_{\overset{\Delta}{ABC}}}=\left(\frac{R_{\overset{\Delta}{ABD}}}{R_{\overset{\Delta}{ABC}}}\right)^۲=(\sqrt{۲})^۲=۲$$

(علوی) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه سینوس‌ها) (متوسط)

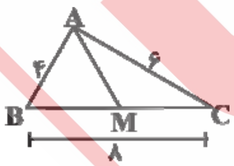
۳- گزینه «۳» ـ



$$\left.\begin{array}{l}\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=\frac{b^۲+c^۲}{b^۲c^۲}=\frac{a^۲}{b^۲c^۲}=\frac{۱}{(\frac{bc}{a})^۲} \\ S_{ABC}=\frac{a\times h_a}{۲}=\frac{c\times b}{۲} \Rightarrow h_a=\frac{bc}{a}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{c^۲}=\frac{۱}{h_a^۲}$$

(علوی) (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه) (متوسط)

۴- گزینه «۳» ـ کوچک‌ترین میانه، میانه وارد بر بزرگ‌ترین ضلع است. با استفاده از قضیه میانه‌ها داریم:



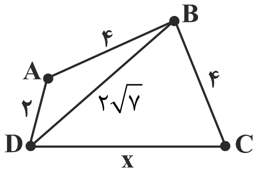
$$AB^۲+AC^۲=۲AM^۲+\frac{BC^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۶^۲+۴^۲=۲AM^۲+\frac{۸^۲}{۲} \Rightarrow AM^۲=۱۰$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{۱۰}$$

(علوی) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه میانه‌ها) (آسان)

۵- گزینه «۳» ـ



قضیه کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{ABD}$: $BD^{۲} = AB^{۲} + AD^{۲} - ۲AB\cdot AD\cdot\cos\hat{A}$

$$(۲\sqrt{۷})^{۲} = ۴^{۲} + ۲^{۲} - ۲\times۴\times۲\times\cos\hat{A}$$

$$\Rightarrow\ ۲۸ = ۱۶ + ۴ - ۱۶\cos\hat{A}\ \Rightarrow\ \cos\hat{A} = -\frac{۱}{۲}\ \Rightarrow\ \hat{A} = ۱۲۰^\circ$$

در چهارضلعی ABCD، عمودمنصف‌های اضلاع همرس‌اند، بنابراین این چهارضلعی محاطی است و زاویه‌های روبه‌رویش مکمل‌اند، پس:

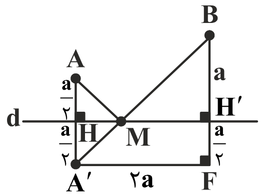
$$\hat{A} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ\ \Rightarrow\ ۱۲۰^\circ + \hat{C} = ۱۸۰^\circ\ \Rightarrow\ \hat{C} = ۶۰^\circ$$

قضیه کسینوس‌ها در $\overset{\Delta}{BCD}$: $BD^{۲} = BC^{۲} + DC^{۲} - ۲BC\cdot DC\cdot\cos\hat{C}\ \Rightarrow\ (۲\sqrt{۷})^{۲} = ۴^{۲} + x^{۲} - ۲\times۴\times x\times\cos۶۰^\circ$

$$\Rightarrow\ ۲۸ = ۱۶ + x^{۲} - ۴x\ \Rightarrow\ x^{۲} - ۴x - ۱۲ = ۰\ \Rightarrow\ (x-۶)(x+۲) = ۰\ \Rightarrow\ x = ۶$$

(علوی) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه کسینوس‌ها) (دشوار)

۶- گزینه «۱» ـ از حل مسئله هرون برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر استفاده می‌کنیم. بازتاب A نسبت به d را A' می‌نامیم. A' را به B وصل می‌کنیم تا خط d را در نقطه M قطع کند، AMB مسیر مطلوب است. در ادامه طول آن را محاسبه می‌کنیم:



$$\text{کوتاه‌ترین طول مسیر } AMB = AM + MB = A'M + MB = A'B$$

$$\overset{\Delta}{A'FB} : A'B^{۲} = A'F^{۲} + BF^{۲} = (۲a)^{۲} + (\frac{۳a}{۲})^{۲} = ۴a^{۲} + \frac{۹a^{۲}}{۴} = \frac{۱۶a^{۲} + ۹a^{۲}}{۴} = \frac{۲۵a^{۲}}{۴}$$

$$\Rightarrow\ A'B = \frac{۵a}{۲}$$

(علوی) (کاربرد تبدیل‌های هندسی) (متوسط)

۷- گزینه «۲» ـ

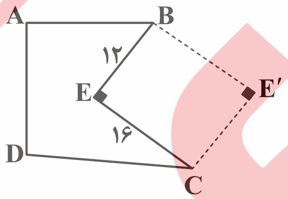
$$a^{۲}(۱ - \sin^{۲}\hat{B}) + b^{۲}\sin^{۲}\hat{A} = ۴\ \Rightarrow\ a^{۲} - a^{۲}\sin^{۲}\hat{B} + b^{۲}\sin^{۲}\hat{A} = ۴\quad (۱)$$

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}}\ \Rightarrow\ a\sin\hat{B} = b\sin\hat{A}\quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\ \Rightarrow\ a^{۲} = ۴\ \xrightarrow{a>۰}\ a = ۲$$

(کتاب همراه علوی) (روابط طولی در مثلث ـ قضیه سینوس‌ها) (دشوار)

۸- گزینه «۲» ـ اگر نقطه E را نسبت به BC قرینه کرده و E' را به‌دست آوریم، به اندازه مساحت چهارضلعی $EBE'C$ به مساحت اولیه اضافه می‌شود.



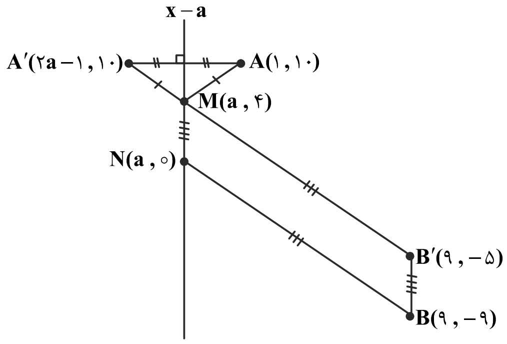
$$S_{\overset{\Delta}{BEC}} = S_{\overset{\Delta}{BE'C}}$$

$$= \frac{۱۶\times۱۲}{۲} = ۹۶$$

$$S_{\underset{\square}{BECE'}} = ۲\times۹۶ = ۱۹۲$$

(کتاب همراه علوی) (کاربرد تبدیل‌های هندسی) (ساده)

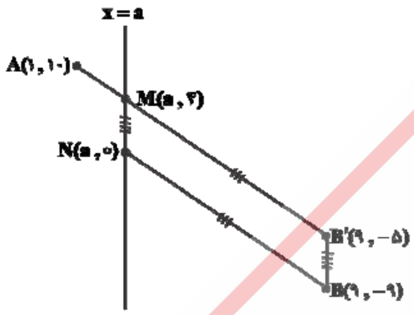
۹- گزینه «۱» ـ الف) اگر فرض کنیم A و B در یک طرف خط $x = a$ قرار داشته باشند، آن‌گاه برای محاسبه کم‌ترین اندازه خط شکسته $AMNB$ داریم:



$$AM + MN + NB = (A'M + MB') + MN$$
$$= A'B' + MN = A'B' + ۴ = \sqrt{(۲a - ۱۰)^۲ + ۱۵^۲} + ۴$$

عبارت بالا به ازای $a = ۵$ حداقل می‌گردد. به ازای این مقدار a نقاط A و B در دو طرف خط $x = ۵$ واقع می‌شوند که با فرض اولیه در تناقض است.

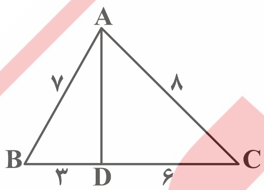
ب) اگر فرض کنیم A و B در دو طرف خط $x = a$ قرار داشته باشند، آن‌گاه برای محاسبه کمترین اندازه خط شکسته $AMNB$ داریم:



$$AM + MN + NB = (AM + MB') + MN$$
$$= AB' + MN = AB' + ۴$$
$$= \sqrt{(۹ - ۱)^۲ + (-۵ - ۱۰)^۲} + ۴$$
$$= \sqrt{۸^۲ + ۱۵^۲} + ۴ = ۱۷ + ۴ = ۲۱$$

(سراسری ـ ۹۹) (کاربرد تبدیل‌های هندسی) (دشوار)

۱۰- گزینه «۲» ـ



قضیه استوارت: $AB^۲ \times DC + AC^۲ \times BD = AD^۲ \times BC + BD \times DC \times BC$

$$\Rightarrow\ ۷^۲ \times ۶ + ۸^۲ \times ۳ = AD^۲ \times ۹ + ۳ \times ۶ \times ۹ \ \Rightarrow\ ۲۹۴ + ۱۹۲ = ۹AD^۲ + ۱۶۲$$
$$\Rightarrow\ ۳۲۴ = ۹AD^۲ \ \Rightarrow\ AD^۲ = ۳۶ \ \Rightarrow\ AD = ۶$$

(سراسری ـ ۹۸) (قضیه استوارت) (متوسط)