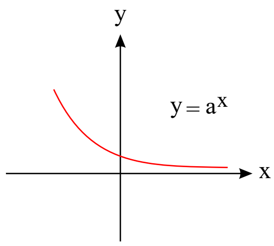
پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۲ تابع $y = a^x$ به‌ازای $۰ < a < ۱$ اکیداً نزولی است و به صورت



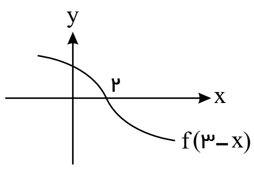
است و به‌ازای $a = ۰$ و $a = ۱$ تابع ثابت و درنتیجه هم صعودی و هم نزولی است پس برای آنکه تابع داده شده نزولی باشد باید:

$$۰ \leq \frac{۳m+۱}{۴} \leq ۱ \rightarrow ۰ \leq ۳m+۱ \leq ۴ \rightarrow -۱ \leq ۳m \leq ۳ \rightarrow \frac{-۱}{۳} \leq m \leq ۱$$

که در این بازه، اعداد صحیح صفر و یک قرار دارند.

۲ - گزینه ۲ f اکیداً صعودی و $y = ۳ - x$ اکیداً نزولی است، پس ترکیب آن‌ها یعنی $f(۳-x)$ اکیداً نزولی است. چون $f(۱) = ۰$ است، $x = ۱$ صفر تابع $f(x)$ و $x = ۲$ صفر تابع $f(۳-x)$ است.

پس به‌طور نمادین تابع $f(۳-x)$ به‌صورت مقابل است.



$$g(x) = \sqrt{\frac{x-۴}{f(۳-x)}} \Rightarrow \frac{x-۴}{f(۳-x)} \geq ۰$$

$\Longrightarrow$

x	−∞		۲		۴		+∞
x−۴		−		−	۰	+	
f(۳−x)		+	۰	−		−	
$\frac{x-۴}{f(۳-x)}$		−	ت ن	+	۰	−	

$۲ < x \leq ۴ \Rightarrow$ اعداد صحیح : ۳ و ۴

۳ - گزینه ۱ باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x - ۱$ برابر با ۳ می‌باشد، پس: $p(۱) = ۳$

باقی‌ماندهٔ $p(x)$ بر $x + ۱$ برابر با -۲ می‌باشد، پس: $p(-۱) = -۲$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x + ۲$ برابر است با $f(-۲)$، بنابراین:

$$f(-۲) = p(-۱) - ۲p(۱) + ۴ + ۶k = -۲ - ۶ + ۴ + ۶k = ۰ \Rightarrow ۶k = ۴ \Rightarrow k = \frac{۲}{۳}$$

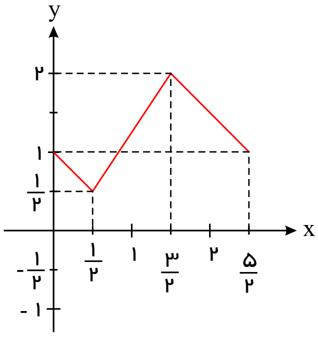
۴ - گزینه ۳ با توجه به مراحل زیر داریم:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{۳ واحد به چپ}]{x \to x+۳} y_۱ = f(x+۳) \xrightarrow[\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ها}]{x \to -x} y_۲ = f(-x+۳) \xrightarrow[\text{انقباض افقی با ضریب ۲}]{x \to ۲x} y_۳ = f(-۲x+۳)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} y_۴ = -f(-۲x+۳) \xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{۱}{۲}} y_۵ = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} y_۶ = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳) + ۱$$

با انجام مراحل بالا نمودار $y = -\frac{۱}{۲}f(-۲x+۳) + ۱$ به صورت زیر است.



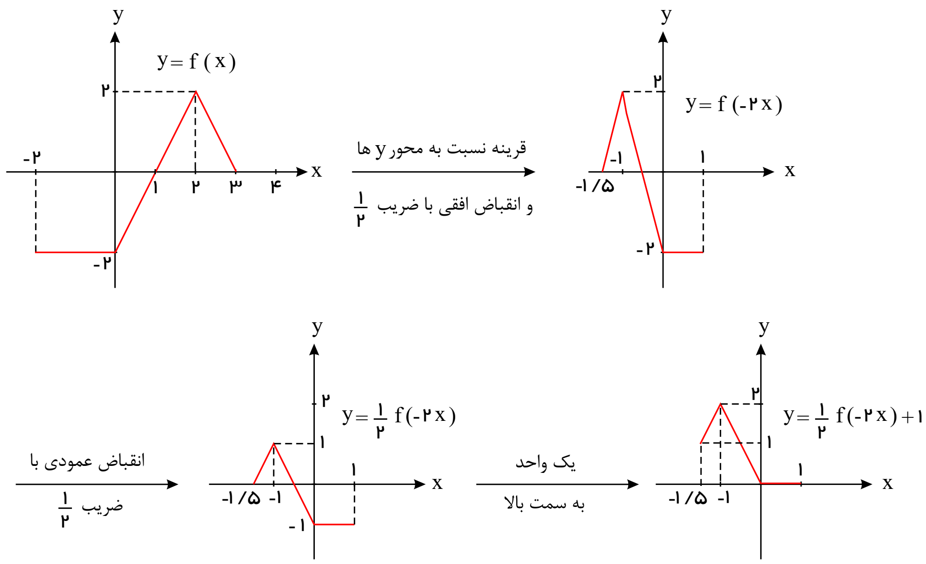
۵ - گزینه ۳ به‌ترتیب اعمال موردنظر داریم:

$$f(x)=x^2 \xrightarrow{\text{۴ واحد انتقال به طرف } x \text{های منفی}} f_1(x)=(x+4)^2$$
$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ها}} f_2(x)=-(x+4)^2 \xrightarrow{\text{دو برابر کردن عرض نقاط}} f_3(x)=-2(x+4)^2$$
$$\xrightarrow{\text{۳ واحد انتقال به طرف } y \text{های منفی}} f_4(x)=-2(x+4)^2-3=-2(x^2+8x+16)-3=-2x^2-16x-35$$

۶ - گزینه ۳ اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a)\leq f(b)$، آنگاه $a\geq b$ است. پس داریم:

$$f(x-3)\leq f(3x+7)\Rightarrow x-3\geq 3x+7\Rightarrow -7-3\geq 3x-x\Rightarrow 2x\leq -10\Rightarrow x\leq -5$$

۷ - گزینه ۲ ابتدا نمودار را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم تا نمودار تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید. سپس با انجام انتقال و انقباض، نمودار تابع $y=\frac{1}{2}f(-2x)+1$ را به دست می‌آوریم:



پس دامنهٔ تابع $y=\frac{1}{2}f(-2x)+1$ برابر با $[-1/5,1]$ و برد آن $[0,2]$ است که اشتراک آن‌ها بازهٔ $[0,1]$ می‌شود.

۸ - گزینه ۱ چون $P(x)$ بر $2x-1$ بخش‌پذیر است پس $P(\frac{1}{2})=0$ است.

$$P(\frac{1}{2})=2(\frac{1}{16})+a(\frac{1}{8})+2(\frac{1}{4})-\frac{3}{2}=0\Rightarrow \frac{1}{8}+\frac{a}{8}+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=0\Rightarrow 1+a+4-12=0\Rightarrow a=7$$

بنابراین $P(x)=2x^4+7x^3+2x^2-3x$ است. اکنون برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ آن بر $x+2$ کافی است که $P(-2)$ را حساب کنید.

$$P(-2)=2(16)+7(-8)+2(4)-3(-2)=32-56+8+6=-10$$

۹ - گزینه ۴ با نوشتن رابطهٔ تقسیم داریم:

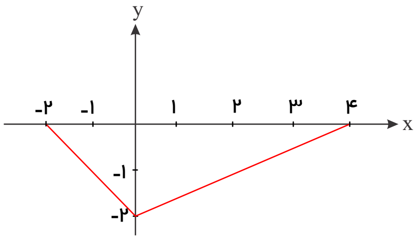
$$p(x)=(x^2-4)q(x)+3x+2 \quad (1)$$

برای یافتن باقی‌مانده $p(x+3)$ بر $x+5$ داریم:

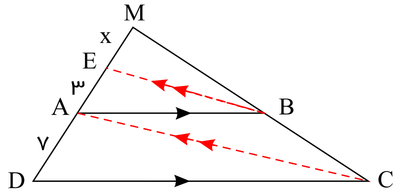
$$x+5=0\Rightarrow x=-5\Rightarrow \text{باقی‌مانده}=p(-5+3)=p(-2)$$

$$x=-2\xrightarrow{(1)} p(-2)=(4-4)q(-2)+3(-2)+2=0-6+2=-4$$

۱۰ - گزینه ۳ برای رسم $y=-2f(-\frac{x}{2})$، در نمودار $y=f(x)$ طول نقاط را -2 برابر کرده و سپس عرض نقاط را -2 برابر می‌کنیم.



۱۱ - گزینه ۲ کافی است دو بار از قضیهٔ تالس استفاده کنیم:



$$\begin{cases} M\overset{\Delta}{A}C : BE \| AC \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MB}{BC} \\ M\overset{\Delta}{D}C : AB \| CD \xrightarrow{\text{تالس}} \dfrac{MA}{AD} = \dfrac{MB}{BC} \end{cases} \Rightarrow \dfrac{ME}{AE} = \dfrac{MA}{AD}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{۳} = \frac{x+۳}{۷} \Rightarrow ۷x = ۳x + ۹ \Rightarrow ۴x = ۹ \Rightarrow x = ۲/۲۵$$

درنتیجه: $MD = ۲/۲۵ + ۳ + ۷ = ۱۲/۲۵$

۱۲ - گزینه ۲

$$y = \frac{۴x+۱}{x-۲} \in Z \Rightarrow \text{باید} \quad : x-۲ | ۴x+۱ \xrightarrow{x-۲|x-۲} x-۲ | ۴x+۱-۴(x-۲)$$

$$\Rightarrow x-۲|۹ \Rightarrow x-۲ \in \{-۹,-۳,-۱,۱,۳,۹\} \xrightarrow{+۲} x \in \{-۷,-۱,۱,۳,۵,۱۱\}$$

چون قرار است نقطهٔ مورد نظر در ربع دوم باشد بایستی $x < ۰$ و $y > ۰$ باشد.

$x = -۱ \rightarrow y = \dfrac{۴x+۱}{x-۲} = ۱ \rightarrow$ در ربع دوم است.

$x = -۷ \rightarrow y = \dfrac{۴x+۱}{x-۲} = \dfrac{-۲۷}{-۹} = ۳ \rightarrow$ در ربع دوم است.

۱۳ - گزینه ۲ سعی کنیم $a^۲$ را حذف کنیم:

$$\left.\begin{matrix} d|۳a-۱ \xrightarrow{\times a} d|۳a^۲ - a \\ d|a^۲+a \xrightarrow{\times ۳} d|۳a^۲+۳a \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۴a$$

حال سعی می‌کنیم a را حذف کنیم:

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} d|۴a \xrightarrow{\times ۳} d|۱۲a \\ d|۳a-۱ \xrightarrow{\times ۴} d|۱۲a-۴ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۴$$

پس $d \in \{۱,۲,۴\}$ و مجموع مقادیر مختلف می‌شود: $۱+۲+۴ = ۷$.

۱۴ - گزینه ۱ با توجه به فرض سؤال داریم:

$$|۳|A|A| + |\frac{۱}{۲}B| = ۳^۲|A|^۲|A| + (\frac{۱}{۲})^۳|B| = ۷۴ \Rightarrow ۹|A|^۳ + \frac{۱}{۸} \times ۱۶ = ۷۴ \Rightarrow ۹|A|^۳ = ۷۲ \Rightarrow |A|^۳ = ۸ \Rightarrow |A| = ۲$$

۱۵ - گزینه ۲ اگر ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیر باشند، تساوی $AB = BA$ برقرار می‌شود.

$$AB = BA \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -۲ & -۳ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -۲-۳a & ۴-۳b \\ ۳-۲a & -۶-۲b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۸ & ۱ \\ -۲a+۳b & -۳a-۲b \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{درایه‌های متناظر را برابر قرار می‌دهیم}} \begin{cases} -۲-۳a = -۸ \rightarrow -۳a = -۶ \rightarrow a = ۲ \\ ۴-۳b = ۱ \Rightarrow ۳b = ۳ \Rightarrow b = ۱ \end{cases}$$

$a + b = ۲ + ۱ = ۳$

۱۶ - گزینه ۳ از روی معادلهٔ دایره، مختصات مرکز را به‌دست می‌آوریم:

مرکز دایره : $O(-\dfrac{\frac{۴a}{۷}}{۲}, -\dfrac{b}{۲}) = (۲,-۱) \Rightarrow \begin{cases} a = -۷ \\ b = ۲ \end{cases}$

معادله دایره : $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۲y - ۷ = ۰$

شعاع دایره : $R = \dfrac{۱}{۲}\sqrt{(-۴)^۲ + ۲^۲ - ۴ \times (-۷)} = \dfrac{۱}{۲}\sqrt{۱۶+۴+۲۸} = \dfrac{\sqrt{۴۸}}{۲} = \dfrac{۴\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$

۱۷ - گزینه ۲ اگر a بر b بخش‌پذیر باشد آنگاه $a^۲$ بر $b^۲$ بخش‌پذیر است.

$$۷ \mid ۳n+۲ \xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۴۹ \mid ۹n^۲+۱۲n+۴$$

از طرفی طبق صورت سؤال می‌دانیم $۹n^۲-۹n+m$ نیز بر ۴۹ بخش‌پذیر است. می‌دانیم اختلاف دو عددی که بر ۴۹ بخش‌پذیر هستند نیز بر ۴۹ بخش‌پذیر است پس $(۹n^۲+۱۲n+۴)-(۹n^۲-۹n+m)$ بر ۴۹ بخش‌پذیر است یعنی $۲۱n+۴-m$ بر ۴۹ بخش‌پذیر است.

$$۴۹|۲۱n+۴-m$$

حال سعی می‌کنیم عامل n را حذف کنیم:

$$۷|۳n+۲ \xrightarrow{\text{مقسوم و مقسوم‌علیه را ضرب در ۷ می‌کنیم.}} ۴۹|۲۱n+۱۴$$

$$\begin{matrix} ۴۹|۲۱n+۴-m \\ ۴۹|۲۱n+۱۴ \end{matrix} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر ۴۹ بخش‌پذیر است.}} ۴۹|۱۰+m$$

از بین گزینه‌ها تنها اگر $m=-۱۰$ باشد، بخش‌پذیری برقرار است.

۱۸ - گزینه ۲

$$\left.\begin{matrix} d|۹a+۴ \xrightarrow{\times ۴} d|۳۶a+۱۶ \\ d|۴a-۵ \xrightarrow{\times ۹} d|۳۶a-۴۵ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۱۶+۴۵ \Rightarrow d|۶۱$$

پس: $d \in \{۱,۶۱\}$.

دو عددی که نسبت به هم اول نیستند یعنی ب.م.م آن‌ها بزرگ‌تر از یک است. پس $d=۶۱$ حال می‌خواهیم a را پیدا کنیم:

$$\begin{matrix} d|۹a+۴ \\ d|۴a-۵ \end{matrix} \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|۵a+۹ \text{ و } d|۴a-۵ \xrightarrow{\text{اختلاف نیز بر } d \text{ بخشپذیر است.}} d|a+۱۴$$

سپس $۶۱|a+۱۴$ دنبال کوچک‌ترین عدد سه رقمی هستیم پس ۶۱ را ضربدر دو می‌کنیم که عددی سه رقمی بسازیم:

$۲ \times ۶۱ = ۱۲۲ = a+۱۴ \to a = ۱۲۲-۱۴ = ۱۰۸ \to$ رقم یکانش ۸ است.

۱۹ - گزینه ۲ ابتدا $|A|$ را با استفاده از بسط حول ستون دوم محاسبه می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & -۲ \\ ۵ & -۱ & ۶ \\ ۲ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} = -۱ \times \begin{vmatrix} ۴ & -۲ \\ ۲ & ۱ \end{vmatrix} = -۱(۴+۴) = -۸$$

سپس با کمک رابطهٔ $|A^n| = |A|^n$ ، $(n \in \mathbb{N})$، داریم:

$$|A^۳| = |A|^۳ = (-۸)^۳ = -۲^۹$$

۲۰ - گزینه ۳

$$(۳a+۵, a^۲-۳a) = d \to \left\{\begin{matrix} d|۳a+۵ \xrightarrow{\times a} d|۳a^۲+۵a \\ d|a^۲-۳a \xrightarrow{\times ۳} d|۳a^۲-۹a \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)}$$

$$d|۱۴a \to \left\{\begin{matrix} d|۱۴a \xrightarrow{\times ۳} d|۴۲a \\ d|۳a+۵ \xrightarrow{\times ۱۴} d|۴۲a+۷۰ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(-)} \to d|۷۰ \to d|۲\times۵\times۷$$

در بین مقسوم‌علیه‌های طبیعی d، عدد ۷ بزرگ‌ترین مقدار اول می‌باشد.

۲۱ - گزینه ۳ جرم (۲) از جرم (۱) کمتر است.

$$F_۲ = F_۱ \to m_۱a_۱ = m_۲a_۲ \xrightarrow{m_۲<m_۱} a_۲ > a_۱$$

بنابراین در یک زمان یکسان:

$$\left\{\begin{matrix} \Delta t_۲ = \Delta t_۱ = \Delta t \\ \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a_۲\Delta t^۲ \\ \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a_۱\Delta t^۲ \end{matrix}\right. \to \Delta x_۲ > \Delta x_۱ \to (\text{بین } A \text{ و } O \text{ به هم می‌رسند.})$$

۲۲ - گزینه ۳ با توجه به نمودار، شیب خط مماس بر نمودار $x-t$ در لحظهٔ $t=۰$ برابر صفر است، پس $v_۰=۰$ است.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲}a(۶)^۲+۰-۸ \Rightarrow a=۱$$

$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow ۰ = \frac{۱}{۲}\times t^۲-۸ \Rightarrow t^۲=۱۶ \Rightarrow t=۴$ لحظه‌ای که متحرک از مبدأ عبور می‌کند.

$$v=at+v_۰ \Rightarrow v=۱\times۴+۰=۴\frac{m}{s}$$

۲۳ - گزینه ۳ سرعت متحرک در لحظهٔ صفر را $v_۰$ فرض می‌کنیم و سرعت متحرک در لحظه‌های $t=۴s$ و $t=۱۰s$ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به نمودار شتاب - زمان متحرک داریم:

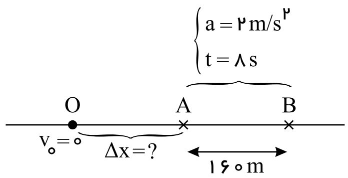
$$v = at + v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_4 = 4 \times 4 + v_0 = 16 + v_0 \\ v_{10} = -4 \times 6 + v_4 = -24 + 16 + v_0 = -8 + v_0 \end{cases}$$

$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2} \times \Delta t$$

$$\Rightarrow \Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{16 + v_0 + v_0}{2} \times 4 + \frac{-8 + v_0 + 16 + v_0}{2} \times 6 = 56 + 10 v_0$$

$$\Rightarrow 156 = 56 + 10\, v_0 \Rightarrow 100 = 10 v_0 \Rightarrow v_0 = 10 \frac{m}{s}$$

۲۴ - گزینه ۲ در ابتدا با توجه به معلوم بودن زمان جابه‌جایی، شتاب و مقدار جابه‌جایی AB، سرعت در نقطه A را می‌یابیم



$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 + v_A t \rightarrow 160 = (\frac{1}{2})(2)(8)^2 + V_A(8) \rightarrow v_A = 12(\frac{m}{s})$$

حال با استفاده از معادلهٔ سرعت - جابه‌جایی (مستقل از زمان) بین دو نقطهٔ O و A داریم:

$$v_A^2 - v_0^2 = 2a(\Delta x) \xrightarrow{v_0 = 0} (12)^2 - 0 = (2)(2)\Delta x \rightarrow \Delta x_{OA} = 36m$$

۲۵ - گزینه ۱ جهت مثبت را برای هر متحرک به‌طور جداگانه همان جهت حرکت خودش فرض می‌کنیم.

$$\Delta x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 + v_{01} t = \frac{1}{2} \times 2t^2 + 10t = t^2 + 10t$$

$$\Delta x_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 + v_{02} t = \frac{1}{2} \times 4t^2 + 20t = 2t^2 + 20t$$

$$|\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 1125 \Rightarrow 3t^2 + 30t = 1125$$

$$\Rightarrow t^2 + 10t - 375 = 0 \Rightarrow t = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 375}}{1}$$

$$\Rightarrow t_1 = 15s\,,\ t_2 = -25s \Rightarrow t = 15s$$

۲۶ - گزینه ۴

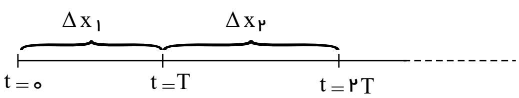
با نوشتن معادلهٔ جابه‌جایی برای ثانیهٔ اول و دو ثانیهٔ اول، می‌توان نسبت آنها را پیدا کرد.

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2$$

$$\begin{cases} t = 1s \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{1}{2} a \times 1^2 = \frac{1}{2} a \,(\text{ثانیهٔ اول}) \\ t = 2s \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{1}{2} a \times 2^2 = 2a \,(\text{دو ثانیهٔ اول}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{جابه‌جایی دو ثانیهٔ اول}}{\text{جابه‌جایی ثانیهٔ دوم}} = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_2 - \Delta x_1} = \frac{2a}{1/5a} = \frac{4}{3}$$

۲۷ - گزینه ۴



با استفاده از رابطهٔ سرعت متوسط متحرک داریم:

$$\frac{v_0 + \overbrace{v_0 + aT}^{v_1}}{2} = \frac{\Delta x_1}{T} \Rightarrow \Delta x_1 = v_0 T + \frac{aT^2}{2}$$

$$\frac{\overbrace{v_0 + aT}^{v_1} + \overbrace{v_0 + 2aT}^{v_2}}{2} = \frac{\Delta x_2}{T} \Rightarrow \Delta x_2 = v_0 T + \frac{aT^2}{2} + aT^2 = \Delta x_1 + aT^2$$

$$\Rightarrow \Delta x_n = \Delta x_1 + (n-1)aT^2$$

A متحرک $\Delta x_4 = \Delta x_1 + 3a_A T^2 \xrightarrow[\Delta x_1 = 25m]{\Delta x_4 = 45m} 3a_A T^2 = 20\, m \quad (1)$

B متحرک : $\Delta x_4 = \Delta x_1 + 3a_B T^2 \xrightarrow[\Delta x_4 = 40m]{\Delta x_1 = 15m} 3a_B T^2 = 25m \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

روش دوم:

بین لحظه‌های $t = 0$ و $t = T$: $\Delta x_A = \frac{1}{2}a_A T^2 + v_{0_A} T \quad (1)$

$$\Delta x_B = \frac{1}{2}a_B T^2 + v_{0_B} T \quad (2)$$

بین لحظه‌های $t = 3T$ و $t = 4T$: $\left.\begin{array}{l}\Delta x_A = \frac{1}{2}a_A T^2 + v_A T \\ v_A = a_A(3T) + v_0\end{array}\right\} \Delta x_A = \frac{1}{2}a_A T^2 + 3a_A T^2 + v_{0_A} T \quad (3)$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta x_B = \frac{1}{2}a_B T^2 + v_B T \\ v_B = a_B(3T) + v_0\end{array}\right\} \Delta x_B = \frac{1}{2}a_B T^2 + 3a_B T^2 + v_{0_B} T \quad (4)$$

$$\left.\begin{array}{l}(3) - (1) = 3a_A T^2 = 20 \\ (4) - (2) = 3a_B T^2 = 25\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_A}{a_B} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}$$

۲۸ - گزینه ۳ مبدأ را محل رها کردن گلوله‌ها فرض کردیم. زمان حرکت اولی t و دومی $(t - 2/5)$ می‌باشد؛ در این صورت با انتخاب جهت مثبت محور yها رو به پایین داریم:

$$y_1 - y_2 = 68/75 \Rightarrow \frac{1}{2}gt^2 - (\frac{1}{2}g(t - 2/5)^2) = 68/75 \Rightarrow 25t - 31/25 = 68/75 \Rightarrow 25t = 100 \Rightarrow t = 4s$$

۲۹ - گزینه ۲ ثانیهٔ سوم یعنی بازهٔ زمانی بین لحظه‌های $t_1 = 2s$ تا $t_2 = 3s$. با استفاده از رابطهٔ جابه‌جایی در t ثانیهٔ nام در حرکت با شتاب ثابت در مسیری مستقیم، داریم:

$$\Delta y_n = (n - 0/5)gt^2 + v_0 t \xrightarrow[v_0 = 0, a = g = 10m/s^2]{t = 1s, n = 3} \Delta y_3 = \frac{1}{2}(2 \times 3 - 1) \times 10 \times 1 + 0 \Rightarrow \Delta y_3 = 25m$$

بنابراین کار نیروی وزن برابر است با:

$$W_{mg} = mgh \Rightarrow W_{mg} = 1 \times 10 \times 25 \Rightarrow W_{mg} = 250J$$

۳۰ - گزینه ۳ از لحظهٔ رها شدن تا برخورد به زمین حرکت سقوط آزاد انجام شده و از لحظهٔ برخورد به سطح آب، صوت با سرعت ثابت بازمی‌گردد، اگر عمق چاه را h فرض کنیم.

$$\begin{array}{l} h = \frac{1}{2}gt_1^2 = 5t_1^2 \\ h = vt_2 = 300t_2 \end{array} \Rightarrow 5t_1^2 = 300t_2 \Rightarrow \begin{cases} t_1^2 = 60t_2 \\ t_1 + t_2 = 3/15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow t_1 + \frac{t_1^2}{60} = 3/15 \Rightarrow (t_1 - 3)(t_1 + 63) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_2 = 3(s) \\ t_1 = 0/15(s) \end{cases} \Rightarrow h = 300 \times \frac{15}{100} = 45(m)$$

۳۱ - گزینه ۳ با توجه به ضرایب استوکیومتری، غلظت یون H^+ با یون NO_2^- برابر است پس:

$$K = \frac{[H^+][NO_2^-]}{[HNO_2]} \Rightarrow K = \frac{4 \times 10^{-3} \times 4 \times 10^{-3}}{2 \times 10^{-1}}$$

$$\Rightarrow K = 8 \times 10^{-5} mol \cdot L^{-1}$$

۳۲ - گزینه ۴

با توجه به اینکه مقدار عددی ثابت یونش و غلظت اسید نزدیک به هم است نمی‌توان از تقریب استفاده کرد.

$$K_a = \frac{\alpha^2 \cdot [HA]_{\text{اولیه}}}{1-\alpha} \Rightarrow 5 \times 10^{-4} = \frac{\alpha^2 \times 6 \times 10^{-3}}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{12} = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \Rightarrow 12\alpha^2 = 1-\alpha \Rightarrow 12\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (4\alpha - 1)(3\alpha + 1) = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{4}\checkmark\ ,\ \alpha = -\frac{1}{3}\times$$

۳۳ - گزینه ۴ HCl یکی از اسیدهای قوی است که ثابت یونش اسیدی بسیار بزرگ دارد.

اسیدهای قوی: $HNO_3, H_2SO_4, HCl, HBr, HI$

ترتیب قدرت اسیدی اسیدهای ضعیف در شرایط یکسان دما و غلظت:

$$HCN < H_2CO_3 < CH_3COOH < HCOOH < HF < HNO_2$$

۳۴ - گزینه ۲ بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ «۱»: نادرست است. برای کاهش میزان اسیدی بودن خاک به آن آهک می‌افزایند.

گزینهٔ «۳»: نادرست است. آشنایی با ویژگی‌ها و واکنش‌های میان اسیدها و بازها مدت‌ها پیش از شناخت ساختار آن‌ها انجام شد.

گزینهٔ «۴»: نادرست است. اغلب میوه‌ها دارای اسیدند و در آن‌ها $[H_3O^+] > [OH^-]$ است.

۳۵ - گزینه ۴

شمار مولکول‌های یونیده شده با شمار هرکدام از یون‌های H^+ و یا A^- برابر است.

$$\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده} = \text{شمار مولکول‌های یونیدەنشده} + \text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده} = 8 + 2 = 10$$

بنابراین، از ۱۰ مولکول HA حل‌شده، ۲ مولکول یونیده‌شده است.

$$\alpha = \frac{\text{شمار مولکول‌های یونیده‌شده}}{\text{شمار کل مولکول‌های حل‌شده}} = \frac{2}{10} = 0/2$$

۳۶ - گزینه ۳ با توجه به رابطهٔ درجهٔ یونش داریم:

$$\alpha = \frac{[H^+]}{[HA]_{\text{اولیه}}} \Rightarrow 0/3 = \frac{[H^+]}{0/1} \Rightarrow [H^+] = 0/03 mol \cdot L^{-1}$$

۳۷ - گزینه ۲ ترتیب قدرت اسیدی:

$$HNO_2 > HCOOH > CH_3COOH > H_2CO_3 > HCN$$

ثابت اسیدی H_2CO_3 برابر $4/5 \times 10^{-7}$ می‌باشد که عدد بین ثابت یونش CH_3COOH و HCN قرار دارد.

۳۸ - گزینه ۴ در گزینه‌های ۱ تا ۳، اسید قوی‌تر در سمت راست معادله قرار دارد، اما در گزینهٔ ۴ اسید قوی‌تر در سمت چپ معادله قرار گرفته است؛ بنابراین جهت پیشرفت واکنش گزینهٔ ۴ با سایر گزینه‌ها متفاوت است.

$$\text{قدرت اسیدی}: HCl > HF\ ,\ H_2SO_4 > HCN\ ,\ HNO_3 > HNO_2\ ,\ HBr > CH_3COOH$$

۳۹ - گزینه ۲ اتانول در آب تنها به‌صورت مولکولی حل می‌شود و یون هیدروکسید آزاد نمی‌کند؛ درنتیجه باز آرنیوس نیست.

۴۰ - گزینه ۲ K_2O, NH_3 و $NaOH$ در آب یون هیدروکسید ایجاد می‌کنند و خاصیت بازی دارند.

HNO_2 و CO_2 خاصیت اسیدی دارند.

$NaCl$ و C_2H_5OH خنثی هستند.