



هم کلاسی
Hamkelasi.ir

جزوه آموزش

ریاضی

دعای انسان

فصل اول

عبارت های جبری

درس اول : اتحاد

درس دوم : تجزیه

درس سوم : عبارت های گویا

درس اول : اتحاد

اتحاد : یک تساوی از عبارت های جبری که به ازای تمام مقادیر متغیرها برقرار است .

اتحاد مربع دو جمله ای : اولی به توان دو ، دو برابر اولی در دومی ، دومی به توان دو .

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

مثال : با استفاده از اتحادها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(2x + 1)^2 =$

ب) $(3a - \frac{1}{2})^2 =$

ج) $(2 - 3x)^2 =$

د) $(x + \sqrt{3})^2 =$

ه) $(x^2 + \frac{1}{4})^2 =$

مثال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) $(\dots + 1)^2 = 4x^2 + \dots + 1$

ب) $(2a - \dots)^2 = \dots - \dots + \frac{1}{4}$

ج) $(\dots - \dots)^2 = 16 - \dots + 3x^2$

د) $(\dots + \sqrt{5})^2 = 9x^2 + \dots + \dots$

ه) $(x^2 + 2)^2 = \dots + \dots + \dots$

مثال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $99^p =$

ب) $52^p =$

ج) $1003^p =$

د) $101^p =$

ه) $49^p =$

اتحاد مزدوج : اولی به توان دو ، منهای دومی به توان دو .

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(x - 4)(x + 4) =$

ب) $(a - \sqrt{3})(a + \sqrt{3}) =$

ج) $(2 - 4x)(2 + 4x) =$

د) $(x^p + \frac{1}{p})(x^p - \frac{1}{p}) =$

ه) $(\sqrt{3}x + 1)(\sqrt{3}x - 1) =$

مثال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) $(\dots + 1)(\dots - 1) = 4x^p - \dots$

ب) $(\sqrt{2a} + \dots)(\sqrt{2a} - \dots) = \dots - \frac{1}{4}$

ج) $(\dots - \dots)(\dots + \dots) = 16 - 3x^p$

د) $(\mu x - \sqrt{\delta})(\dots + \sqrt{\delta}) = \dots - \dots$

ه) $(x^p + \mu)(x^p - \mu) = \dots - \dots$

مثال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $99 \times 101 =$

ب) $52 \times 48 =$

ج) $(\sqrt{\delta} - 2)(\sqrt{\delta} + 2) =$

د) $1005 \times 995 =$

ه) $67 \times 73 =$

اتحاد جمله مشترک : مشترک به توان دو ، مجموع غیر مشترک در مشترک ، ضرب غیر مشترک .

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(2x - 1)(2x + 4) =$

ب) $(a + \frac{1}{p})(a - \frac{1}{\mu}) =$

ج) $(2a + 3)(2a + 5) =$

د) $(x^p + \frac{\mu}{\delta})(x^p - \frac{p}{\delta}) =$

ه) $(\mu + 2x)(\mu + 5x) =$

مثال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) $(\dots + 1)(\dots - 3) = 14x^p - \dots - 3$

ب) $(px + \frac{1}{p})(px + \dots) = \dots - \dots + \frac{1}{q}$

ج) $(\mu x - \dots)(\mu x + \dots) = 9x^p - \dots - 5$

د) $(a - \frac{p}{\mu})(a + \frac{\mu}{p}) = \dots - \dots - \dots$

ه) $(x^p + \mu)(x^p + \nu) = \dots + \dots + \dots$

مثال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $98 \times 101 =$

ب) $53 \times 55 =$

ج) $102 \times 103 =$

د) $1005 \times 998 =$

ه) $69 \times 73 =$

اتحاد چاق و لاغر : اولی به توان سه ، دومی به توان سه.

$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$$

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(px-1)(14x^p+px+1) =$

ب) $(a+\mu)(a^p-\mu a+9) =$

ج) $(pa+5)(14a^p-10a+25) =$

د) $(x^p+\frac{1}{p})(x^p-\frac{1}{p}x^p+\frac{1}{14}) =$

و) $(\mu + \nu x)(9 - 4x + 4x^2) =$

مثال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) $(\dots + 1)(x^2 - \dots + \dots) = x^3 + \dots$

ب) $(\nu x + \frac{1}{\mu})(\dots - \dots + \dots) = \dots + \frac{1}{\lambda}$

ج) $(\mu x - \dots)(\dots + \dots + 4) = \dots - \dots$

د) $(\dots - \dots)(a^2 + \dots + \frac{9}{4}) = \dots - \dots$

و) $(\dots + \mu)(x^2 + \mu x^2 + \dots) = \dots + \dots$

اتحاد مکعب دو جمله ای : اولی به توان سه ، سه برابر مربع اولی در دومی ، سه برابر مربع دومی در اولی ، دومی به توان سه .

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

مثال : با استفاده از اتحاد ها ، حاصل عبارت های زیر را بیابید .

الف) $(2a + 1)^3 =$

ب) $(ax - 1)^3 =$

ج) $(\nu - 4x)^3 =$

د) $(x + \frac{1}{\mu})^3 =$

و) $(x^2 + \nu)^3 =$

مثال : جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

الف) $(\dots + 1)^3 = \lambda x^3 + \dots + \dots + 1$

ب) $(pa - \dots)^p = \dots - \dots + \dots - \frac{1}{\lambda}$

ج) $(\dots - \dots)^p = \dots - \dots + \dots - x^p$

د) $(\dots + \frac{1}{\mu})^p = p\mu x^p + \dots + \dots$

ه) $(x^p + p)^p = \dots + \dots + \dots + \dots$

مثال : حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بیابید .

الف) $99^p = (100 - 1)^p =$

ب) $52^p =$

ج) $39^p =$

د) $101^p =$

ه) $69^p =$

تمرین

حاصل اتحاد های زیر را بیابید .

$(\mu x + p)^p =$

$(pa - \frac{1}{p})^p =$

$(1 - \mu x)^p =$

$(\mu x + \sqrt{p})^p =$

$(px^p + \frac{1}{p})^p =$

$$(x - 5)(x + 5) =$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) =$$

$$(\mu - \kappa x)(\mu + \kappa x) =$$

$$(x^p + \frac{1}{\delta})(x^p - \frac{1}{\delta}) =$$

$$(\sqrt{p}x + \mu)(\sqrt{p}x - \mu) =$$

$$(px - 5)(px + 4) =$$

$$(a + \frac{\kappa}{\mu})(a - \frac{1}{\mu}) =$$

$$(\mu a + \mu)(\mu a + 5) =$$

$$(x^p + \frac{\mu}{p})(x^p + \frac{p}{\mu}) =$$

$$(1 - px)(1 + 4x) =$$

$$(\mu x - p)(9x^p + 4x + 4) =$$

$$(a + 4)(a^p + 4a + 14) =$$

$$(\mu a + \mu)(4a^p - 4a + 9) =$$

$$(x^m + \frac{1}{\kappa})(x^{\zeta} - \frac{1}{\kappa}x^m + \frac{1}{14}) =$$

$$(\mu + \frac{1}{p}x)(9 - \frac{\mu}{p}x + \frac{1}{\kappa}x^p) =$$

$$(\mu a + \mu)^m =$$

$$(ax + \nu)^p =$$

$$(\delta - \mu x)^p =$$

$$\left(x + \frac{1}{p}\right)^p =$$

$$(x^p - 1)^p =$$

۱. جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید .

$$(\dots + \delta)^p = x^p + \dots + \nu \delta$$

$$(\mu a - \dots)^p = \dots - \dots + \frac{1}{\nu}$$

$$(\dots - \dots)^p = \nu - \dots + \nu x^p$$

$$(\dots + \nu)(\dots - \nu) = \nu x^p - \dots$$

$$(\sqrt{\delta a} + \dots)(\sqrt{\delta a} - \dots) = \dots - \frac{1}{q}$$

$$(\dots - \dots)(\dots + \dots) = \nu - x^p$$

$$(\dots + 1)(\dots - \nu) = \nu x^p - \dots - \nu$$

$$\left(x + \frac{1}{p}\right)(x + \dots) = \dots - \dots + 1$$

$$(\nu x - \dots)(\nu x + \dots) = \nu x^p - \dots - \nu$$

$$(\dots + 1)(\nu x^p - \dots + \dots) = \nu x^p + \dots$$

$$(\mu x - \dots)(\dots + \dots + \nu \delta) = \dots - \dots$$

$$(\dots - \dots)(a^p + \dots + \frac{1}{q}) = \dots - \dots$$

$$(\dots + 1)^n = \dots x^n + \dots + \dots + 1$$

$$(\dots - \dots)^n = \dots - \dots + \dots - \frac{1}{\dots}$$

$$(\dots - \dots)^n = \dots - \dots + \dots - x^n$$

۲. حاصل عبارت های زیر را به کمک اتحاد بدست آورید .

$$98^n =$$

$$53^n =$$

$$53 \times 47 =$$

$$1004 \times 996 =$$

$$97 \times 101 =$$

$$52 \times 54 =$$

$$98^n =$$

$$51^n =$$

درس دوم : تجزیه

تجزیه : عبارت است از تبدیل یک عبارت جبری به حاصل ضرب عبارت های ساده تر .

به کمک فاکتورگیری : در صورتی که همه عبارات دارای عدد یا حروف مشترکی باشند ، حروف مشترک با کمترین توان و عدد مشترک را به عنوان فاکتور مشترک نوشته و جلوی آن پرانتزی باز می کنیم و تک تک عبارات را بر فاکتور مشترک تقسیم کرده و به ترتیب درون پرانتز می نویسیم .

مثال : عبارات زیر را تجزیه کنید . (توجه : جواب ها ممکن است هنوز به طور کامل تجزیه نشده باشند)

الف) $۳x^۵ + ۲x^۲ =$

ب) $۲a^۳ + ۴a^۴ + ۸a^۵ =$

ج) $x^۷ + x^۵ =$

د) $۵x^۴ + ۱۰x =$

ه) $۳x^۲ + ۱۲x + ۶x^۳ =$

به کمک اتحاد مزدوج : در صورتی که دو جمله ای غیر قابل فاکتور گیری داشته باشیم که حرف آن مربع باشد و بین جملات منفی باشد ، از اتحاد مزدوج برای تجزیه استفاده می شود .

مثال : عبارات زیر را تجزیه کنید .

الف) $x^۲ - ۴۹ =$

ب) $۴x^۳ - x =$

ج) $۳x^۲ - ۱۲ =$

د) $x^۴ - ۱۶ =$

ه) $۴x^۵ - ۲۵x^۳ =$

به کمک اتحاد چاق و لاغر : در صورتی که دو جمله ای غیر قابل فاکتور گیری داشته باشیم که حرف آن مکعب باشد از اتحاد چاق و لاغر برای تجزیه استفاده می شود .

مثال : عبارات زیر را تجزیه کنید .

الف) $x^۳ - ۱۲۵ =$

ب) $x^۶ - ۱ =$

ج) $۳x^۳ - ۲۴ =$

د) $x^۶ + ۱ =$

ه) $۲۷x^۵ - ۸x^۳ =$

به کمک اتحاد جمله مشترک : در صورتی که سه جمله ای غیر قابل فاکتور گیری داشته باشیم که شکلی شبیه $ax^۲ + bx + c$ داشته باشد از اتحاد جمله مشترک برای تجزیه استفاده می کنیم .

مثال : عبارات زیر را تجزیه کنید .

الف) $x^۲ + ۵x + ۶ =$

ب) $۴x^۲ + ۴x + ۱ =$

ج) $x^۲ - x - ۱۲ =$

د) $۲۵x^۲ - ۲۰x + ۴ =$

ه) $x^۶ + x^۳ - ۶ =$

تمرین

۱. عبارات های زیر را تجزیه کنید .

$۵x^۵ + ۲x^۳ =$

$۲a^۵ + ۴a^۴ + ۸a^۳ =$

$x^۹ + x^۵ =$

$۷x^۶ + ۱۴x =$

$۳x^۵ + ۱۲x^۳ + ۶x =$

$x^۳ - ۶۴ =$

$$۴x^{\Delta} - x^{\text{م}} =$$

$$۶x^{\text{پ}} - ۲۴ =$$

$$x^{\text{ف}} - ۱ =$$

$$۴x^{\wedge} - ۲\Delta x^{\zeta} =$$

$$x^{\text{م}} - ۶۴ =$$

$$x^{\zeta} - ۸۱ =$$

$$۲x^{\text{م}} - ۵۴ =$$

$$x^{\zeta} + ۸ =$$

$$۲۷x^{\Delta} + ۸x^{\text{پ}} =$$

$$x^{\text{پ}} + ۷x + ۱۰ =$$

$$۴x^{\text{پ}} + ۱۲x + ۹ =$$

$$x^{\text{پ}} - x - ۲۰ =$$

$$۹x^{\text{پ}} - ۳۰x + ۲۵ =$$

$$x^{\text{ف}} + ۲x^{\text{پ}} + ۱ =$$

درس سوم : عبارت های گویا

چند جمله ای : عبارتی متشکل از اعداد و حروف لاتین که توان حروف ، اعداد طبیعی باشند را چند جمله ای می نامند .

نتیجه : عبارت هایی که رادیکال روی حروف لاتین قرار بگیرد ، چند جمله ای نخواهد بود .

عبارت گویا : عبارت کسری که پس از ساده شدن ، صورت و مخرج چند جمله ای باشد را ، عبارت گویا می نامند .

مثال : کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند ؟

$$\sqrt{2x+x^3} \quad \frac{\sqrt{2x+x^3}}{x-1} \quad \frac{3x-5x^2+1}{x-4} \quad a^3+2a^2-\sqrt{2} \quad \sqrt{t^2}+2t^3$$

مقادیری که به ازای آنها عبارت گویا تعریف نمی شود : اگر عددی را به جای حرف لاتین در مخرج قرار دهیم و حاصل مخرج صفر شود ، عبارت گویا به ازای این عدد تعریف نخواهد شد .

اگر مخرج عبارت ساده نبود ابتدا آن را تجزیه کرده و سپس عددی که مخرج صفر کند می یا بییم .

مثال : عبارات گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نمی شوند ؟

الف) $\frac{3x-5x^2+1}{x-4}$

ب) $\frac{1}{3x-1}$

ج) $\frac{3x-5}{x^2-16x^2} =$

د) $\frac{3}{4x-8}$

ه) $\frac{x+1}{9x^2+18x+8}$

و) $\frac{2a+3a^2}{a^2+2a-15}$

ساده کردن عبارت های گویا : برای ساده کردن عبارت های گویا لازم است ابتدا صورت و مخرج آن را با روش هایی که آموختیم تجزیه کنیم و سپس عبارت های مشابه صورت و مخرج را حذف کنیم .

هشدار !!! : فقط در صورتی که بین عبارت ها در صورت و مخرج ، ضرب وجود داشته باشد ، می توان عبارت را ساده کرد و در غیر این صورت ساده کردن درست نیست .

به طور مثال : تساوی $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2} = \frac{3x}{-2}$ غلط است و تساوی درست $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+1}{x-2}$ است .

مثال : عبارت های زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید .

الف) $\frac{4x^2 - 9}{4x^2 + 10x + 6} =$

ب) $\frac{x^2 - x}{x - 1} = \frac{x(x^2 - 1)}{x - 1} =$

ج) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - 9} =$

د) $\frac{x^2 - 8x}{2x^2 - 8x + 8} =$

ه) $\frac{x^6 - 1}{x^6 - 1} =$

جمع و تفریق عبارت های گویا : برای جمع و تفریق عبارت های گویا باید ابتدا مخرج مشترک بگیریم ، (یعنی عبارتی که مضرب همه مخرج ها باشد) ، سپس همانند جمع و تفریق اعداد گویا عمل می کنیم .

مثال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

الف) $\frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} =$

ب) $\frac{1}{x^2 - 4} + \frac{1}{x^2 + 2x} =$

$$ج) \frac{2x+3}{2x-2} - \frac{5}{x^2-1} =$$

$$د) \frac{x+2}{x^2-4x+4} - \frac{x+3}{x^2-4} - \frac{5}{x-2} =$$

تمرین

۱. کدام یک از عبارت های زیر گویا هستند؟

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$\frac{5x^2+1}{x-4}$$

$$\frac{b^3+2a}{3\sqrt{2}}$$

۲. عبارات گویای زیر به ازای چه مقادیری تعریف نمی شوند؟

$$\frac{1}{x^2+4}$$

$$\frac{-5}{x^6-16x^4}$$

$$\frac{3x^2+2x}{x^2+2x+1}$$

$$\frac{x+1}{9x^2-18x+8}$$

۳. عبارت های زیر را به ساده ترین شکل ممکن بنویسید.

$$\frac{9x^2-4}{9x^2-3x-6} =$$

$$\frac{x^5 - 8x^2}{x - 2} =$$

$$\frac{x^2 + 4x + 4}{x^2 - 4} =$$

$$\frac{x^2 - 4x^2}{x^2 - 4x + 4} =$$

۴. حاصل عبارت های زیر را به دست آورید .

$$\frac{x}{x+1} - 1 =$$

$$\frac{2}{x^2 - 9} + \frac{2}{x^2 + 3x} =$$

$$\frac{x+3}{x^2 - 6x + 9} - \frac{x+2}{x^2 - 9} + \frac{5}{x-3} =$$

فصل دوم

معادله درجه دوم

درس اول : مفهوم معادله

درس دوم : حل معادله درجه دوم

درس سوم : معادلات گویا

درس اول : مفهوم معادله

معادله : به یک تساوی از عبارت های جبری که فقط به ازای مقادیر خاصی درست باشد ، معادله گفته می شود و به آن مقادیر جواب معادله یا ریشه معادله می گویند .

معادله ای که پس از ساده شدن به صورت $ax+b=0$ در آید را معادله درجه اول می نامند که با روش حل آن آشنا هستیم.

سوال : بدون حل معادله $5(x+2) = 7x - 4$ بگویید آیا $x=3$ جواب معادله است ؟ $x=7$ چطور ؟

مسئله : در یک طرف کفه ترازویی ۳ کیلو سیب و در طرف دیگر آن ۴ کمپوت آناناس کاملاً هم وزن به علاوه یک وزنه ۱ کیلویی قرار دارد ، معادله ای برای یافتن وزن هر کمپوت بنویسید و آن را حل کنید .

مسئله : سن پدر علی ۳ برابر سن علی است . ۱۰ سال پیش سن پدرش از دو برابر سن فعلی علی ۵ سال بیشتر بود . به کمک معادله سن علی را بیابید .

مسئله : عددی وجود دارد که اگر از ۵ برابرش ۴ را کم کنیم از ۳ برابر خودش ۲ واحد بیشتر می شود به کمک معادله آن عدد را بیابید .

مسئله : طول مستطیلی از عرض آن ۳ واحد بیشتر است ، اگر مساحت آن ۲۳۸ باشد ، به کمک معادله ، طول و عرض مستطیل را بیابید .

تمرین

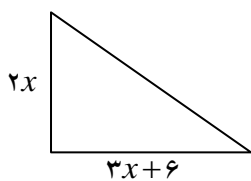
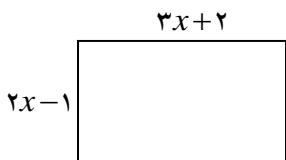
۱. حاصل جمع سه عدد طبیعی متوالی ۴۲ است. به کمک معادله، آن سه عدد را بیابید.

۲. به کمک معادله عددی را بیابید که اگر دو برابر آن را از ۳ کم کنیم، حاصل پنج برابر آن عدد شود.

۳. طول مستطیلی ۳ برابر عرض آن است، اگر محیط آن ۲۴ باشد به کمک معادله، طول و عرض مستطیل را بیابید.

۴. پدری ۳۸ سال و پسرش ۸ سال دارد. به کمک معادله حساب کنید پس از چند سال سن پدر سه برابر سن پسرش خواهد شد.

۵. مساحت دو شکل زیر برابر هستند. به کمک معادله طول وتر مثلث را بیابید.



درس دوم : حل معادله درجه دوم

معادله درجه دوم : معادله ای که پس از ساده شدن به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ در آید را معادله درجه دوم می نامند .

روش اول : تجزیه

در این روش عبارت را به کمک فاکتور گیری ، اتحاد مزدوج ، اتحاد مربع و یا اتحاد جمله مشترک تجزیه می کنیم و از این نکته استفاده می کنیم " هرگاه حاصل ضرب دو عبارت صفر شود حداقل یکی از آنها صفر است " و تک تک عبارات حاصل را برابر صفر قرار داده و ریشه ها را می یابیم .

مثال : معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید .

الف) $5x^2 - 20x = 0$

ب) $25x^2 + 10x + 1 = 0$

ج) $4t^2 - 9 = 0$

د) $9x^2 + 9x + 2 = 0$

ه) $x^2 - x - 12 = 0$

مثال : معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن ۳ و ۴ باشد .

روش دوم : مربع کامل

$$A^2 = a \Rightarrow \begin{cases} A = a \\ A = -a \end{cases} \quad \text{الف) اگر عبارت مربع باشد داریم :}$$

$$x^2 + bx + c = 0 \Rightarrow \overset{\text{توان 2}}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} - \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c = 0 \quad \text{ب) اگر عبارت مربع نبود به روش مقابل آن را مربع می کنیم :}$$

$\xrightarrow{\text{نصف}}$ $\xrightarrow{\text{منفی ثابت}}$

توجه : در صورتی که x^2 ضریب غیر از یک داشته باشد باید تمام جملات را بر آن ضریب تقسیم کنیم .

مثال : معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید .

الف) $(2x-1)^2 = 4$

ب) $x^2 + 4x = 12$

ج) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

ج) $(3x+1)^2 = 0$

د) $x^2 + 2x + 3 = 0$

ه) $a^2 + 3a - 10 = 0$

روش سوم: روش کلی (روش دلتا)

در این روش ابتدا ضرایب a, b, c را که در معادله به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ است مشخص می‌کنیم.

سپس مبین معادله یعنی $\Delta = b^2 - 4ac$ را حساب می‌کنیم.

سپس به کمک فرمول $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ ریشه‌ها را می‌یابیم.

مثال: معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

الف) $2x^2 - 5x + 2 = 0$

ب) $x^2 + 4x - 12 = 0$

ج) $9x^2 + 3x - 2 = 0$

د) $x^2 + 2x + 3 = 0$

ه) $a^2 + 3a - 10 = 0$

مسئله: برای یک عکس ۵ در ۱۲ می‌خواهیم یک قاب عکس بسازیم به طوری که مساحت قاب عکس ۱۲۶ شود و عکس دقیقاً در وسط

قاب قرار بگیرد. به کمک معادله، طول و عرض قاب عکس را بیابید.

تمرین

۱. معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $4x^2 - 16x^2 = 0$

ب) $16x^2 - 4x - 6 = 0$

ج) $x^2 + 5x + 4 = 0$

۲. معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $(x-1)^2 = 25$

ب) $x^2 + 4x = 0$

ج) $9x^2 - 9x - 10 = 0$

۳. معادلات زیر را به روش کلی حل کنید.

الف) $3x^2 + x - 6 = 0$

ب) $x^2 + 4x + 4 = 0$

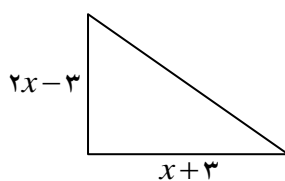
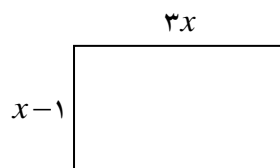
ج) $x^2 - 2x - 3 = 0$

۴. معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن -2 و 3 باشد.

۵. عددی وجود دارد که اگر در خودش ضرب شود از خودش 12 واحد بیشتر می شود، به کمک معادله این عدد را بیابید.

۶. به کمک معادله عددی طبیعی بیابید که حاصل ضرب عدد قبل و بعد از آن 24 شود.

۷. مساحت دو شکل زیر برابر هستند. به کمک معادله طول و عرض مستطیل را بیابید.



درس سوم : معادلات گویا

حل معادلات گویا : ابتدا همه عبارات را به یک سمت تساوی آورده و با جمع و تفریق کردن عبارات آن را به یک کسر تبدیل می کنیم . سپس فقط صورت کسر را مساوی صفر قرار داده و جواب ها را به دست می آوریم . از بین جواب های بدست آمده فقط آنهایی قابل قبول هستند که مخرجی را صفر نکنند .

مثال : معادلات زیر را حل کنید .

$$\text{الف) } \frac{x-2}{x-5} + \frac{x-1}{x+4} = \frac{x^2-6x+5}{x^2-x-20}$$

$$\text{ب) } \frac{x-2}{x-4} = \frac{x+1}{x+3}$$

$$\text{ج) } \frac{24}{10+x} + 1 = \frac{24}{10-x}$$

$$\text{د) } \frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} = 1 - \frac{y-1}{3-y}$$

$$e) \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{1+x}{x} = \frac{x-1}{x-2}$$

مثال : به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{a}{a-x} + \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x}$ دارای جواب $x=2$ است .

مثال : گلدان نقره ای داریم که نسبت وزن نقره به مس آن ۸ است . استاد قلم کار این گلدان را ذوب و پس از افزودن ۱۰۰ گرم مس به آن ، گلدان جدیدی می سازد که $\frac{4}{5}$ وزن آن نقره است . وزن گلدان قبل از ذوب شدن چقدر بوده است ؟

مثال : دو چاپگر تعدادی تراکت را ۴ ساعت چاپ می کنند ، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند ، چاپگر قدیمی تر این کار را ۳ ساعت دیرتر از چاپگر جدید تمام می کند . هر کدام به تنهایی در چند ساعت این کار را تمام می کنند ؟

مثال : یک کیک بین تعدادی میهمان به مقدار مساوی تقسیم شد و یک نفر به مهمانان اضافه شد و کیک را دوباره تقسیم کردند و اینبار به هر یک $\frac{1}{6}$ کمتر رسید . در ابتدا مهمانان چند نفر بوده اند ؟

تمرین

۱. معادلات زیر را حل کنید.

الف)
$$\frac{2y+2}{2x-2} - \frac{5}{y^2-1} = \frac{2y-3}{2x+2}$$

ب)
$$\frac{k}{2-k} + \frac{2}{k} = 5$$

ج)
$$2 + \frac{5}{3x-1} = \frac{-2}{(3x-1)^2}$$

۲. به ازای چه مقدار a ، معادله $\frac{1}{t-1} + \frac{(1+t^2)^2 + 13}{k} = \frac{3t}{t+1}$ دارای جواب $x = -2$ است.

۳. اگر بخواهیم ۲۰۰ کیلو گرم محلول آب نمک ۴ درصد را به محلول ۸ درصد تبدیل کنیم ، چند کیلو گرم نمک باید اضافه کنیم ؟

۴. دو کارگر کاری را ۱۸ روزه انجام می دهند ، اگر هر کدام به تنهایی کار کنند ، کارگر اول این کار را ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم تمام می کند . هر کدام به تنهایی در چند روز این کار را تمام می کنند ؟

۵. با ۱۲۰۰ تومان می توان تعدادی اسباب بازی مشابه خرید و با ۱۰۰ تومان تخفیف با همان پول ۴ اسباب بازی بیشتر می توان خرید . قیمت اسباب بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است ؟

فصل سوم

تابع

درس اول : مفهوم تابع

درس دوم : ضابطه تابع

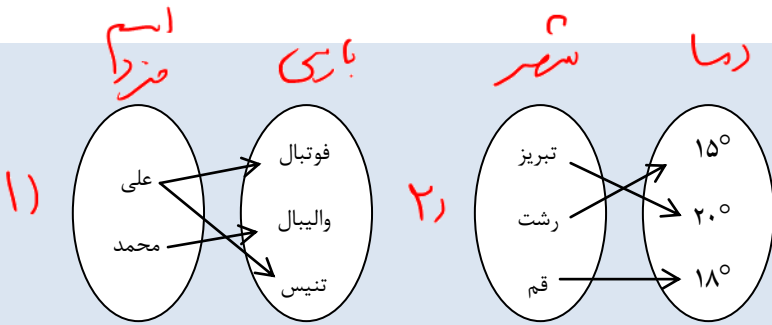
درس سوم : تابع خطی و نمودار آن

درس چهارم : تابع درجه دوم نمودار آن

درس اول : مفهوم تابع

مسئله جزوه

به ارتباط هر دو مجموعه داده شده زیر توجه کنید :



سوال : در ارتباط دو مجموعه دوم آیا یک شهر می تواند هم زمان دارای دو دمای مختلف باشد ؟ در ارتباط دو مجموعه اول آیا یک شخص می تواند هم زمان به دو ورزش علاقه مند باشد ؟

تابع : رابطه ای است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مولفه های اول یکسان نباشد . (مولفه اول را متغیر مستقل و مولفه دوم را متغیر وابسته می نامند)

هر تابع را می توان به روش های مختلفی بیان کرد : نمودار پیکانی ، جدولی ، زوج مرتبی ، نمودار مختصاتی و توصیفی

نمایش پیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی												
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
x	y															
1	2															
2	3															
3	4															
4	5															
5	6															
		$f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$	<p>f رابطه ای است که به هر عضو مجموعه A={1,2,3,4,5} توان چهارم آن را نسبت می دهد</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>6</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	1	2	2	3	3	4	4	5	5	6
x	y															
1	2															
2	3															
3	4															
4	5															
5	6															
		$f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,6)\}$	<p>f = { (شنا, علی) و (فوتبال, رضا) و (شنا, رضا) و (والیبال, آرش) و (کشتی, حمید) و (تیراندازی, علی) }</p>													

تشخیص تابع

۱) زوج مرتبی : زمانی تابع است که مولفه های اول یکسان نباشند ، اگر بودند ، مولفه های دوم نیز یکسان باشند .

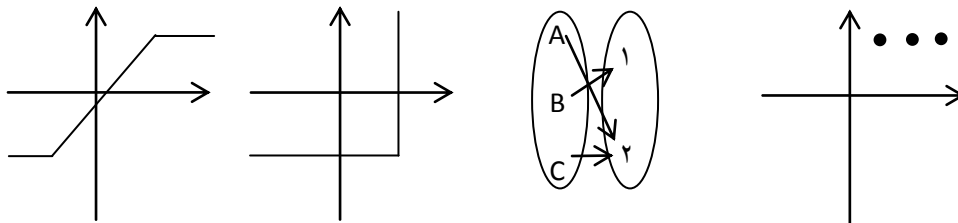
۲) نمودار پیکانی : زمانی تابع است که از هر عضو مجموعه اول ، فقط یک پیکان خارج شود .

۳) نمودار مختصاتی : زمانی تابع است که هر خط عمودی نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند .

مثال : هرگاه $f = \{(3, a^2 - 2a), (5, b^2 - 1), (3, 3), (a+6, 36), (5, 26)\}$ تابع باشد ، $a+b$ را بیابید ؟

$$a^2 - 2a = 3 \rightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \rightarrow (a-3)(a+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$$

مثال : چند تا از نمودار های زیر تابع هستند ؟



مثال : کدام رابطه یک تابع است ؟

$$f = \{(-1, 2), (3, -1), (3, 2)\} \quad g = \{(\sqrt{2}, 2), (1, 1), (3, -2)\} \quad h = \{(1, -4), (3, -1)\}$$

مثال : کدام رابطه یک تابع نیست ؟

الف) رابطه ای که به هر شخص روز تولد آن را نسبت می دهد . تابع است زیرا امری متعین دارد

ب) رابطه ای که به هر شخص نمره ریاضی ترم اول آن را نسبت می دهد . تابع است

ج) رابطه ای که به هر کشور زبان رسمی آن را نسبت می دهد . تابع است

د) رابطه ای که به هر کالا قیمت آن را نسبت می دهد . تابع نیست زیرا یک کلامی تواند چندین قیمت داشته باشد

تمرین

رسم

* ۱. هرگاه $f = \{(2, x+y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x-y)\}$ تابع باشد $x^2 + y^2$ را بیابید.

$$\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$$

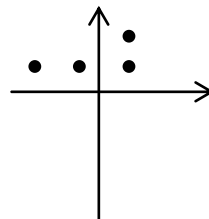
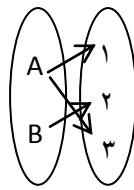
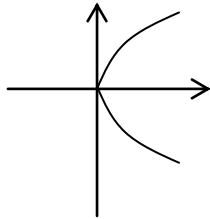
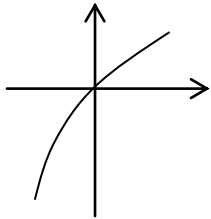
$$x+y=4$$

$$3+y=4 \rightarrow y=4-3=1$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \\ &= 2^2 + 1^2 \\ &= 4 + 1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$2x=6 \rightarrow x=\frac{6}{2}=3$$

۲. چند تا از نمودارهای زیر تابع هستند؟



۳. کدام رابطه یک تابع است؟

$$f = \{(-2, -1), (3, 2)\}$$

$$g = \{(-4, 2), (1, 4), (-2, -2)\}$$

$$h = \{(1, 2), (\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, 6)\}$$

۴. کدام رابطه یک تابع نیست؟

(الف) رابطه ای که به هر شخص علاقه او به مدل خودرو را نسبت می دهد.

(ب) رابطه ای که به هر شخص وزن آن را نسبت می دهد.

(ج) رابطه ای که به هر استان مرکز آن را نسبت می دهد.

(د) رابطه ای که به هر شهر نماینده آن را نسبت می دهد.

درس دوم: ضابطه تابع

بکار

ضابطه تابع: برخی اوقات یک تابع را می توان به صورت یک فرمول نمایش داد که به ازای هر x که دریافت می کند یک y تولید کند.

دامنه و برد تابع: در یک تابع به مجموعه مولفه های اول «دامنه» و به مجموعه مولفه های دوم «برد» می گویند.

تابع با دامنه A به مجموعه B را به صورت $f: A \rightarrow B$ نمایش می دهند.

$$f(x)$$

مثال: توابع زیر با دامنه A داده شده اند. مجموعه برد آنها را مشخص کنید.

$f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 3x^2 - 1$, $A = \{-1, \sqrt{2}, 2, 0, \frac{1}{2}\}$

$f(-1) = 3(-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$
 $f(\sqrt{2}) = 3(\sqrt{2})^2 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$
 $f(2) = 3(2)^2 - 1 = 3 \times 4 - 1 = 11$

$B = \{2, 5, 11, \frac{1}{2}\}$

$g: A \rightarrow B$
 $g(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$, $A = \{-2, 1, 2, 0, \frac{1}{2}\}$

$f: A \rightarrow B$
 $f(x) = 2\sqrt{x+1} - 1$, $A = \{-1, 3, 2, 0\}$

$f(-1) = 2\sqrt{-1+1} - 1 = 0 - 1 = -1$
 $f(3) = 2\sqrt{3+1} - 1 = 2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$
 $f(2) = 2\sqrt{2+1} - 1 = 2\sqrt{3} - 1$
 $f(0) = 2\sqrt{0+1} - 1 = 2 \times 1 - 1 = 2 - 1 = 1$

$g: A \rightarrow B$
 $g(x) = 1 - (x+2)^2$, $A = \{-3, -2, 1, \frac{1}{3}\}$

$B = \{-1, 3, 2\sqrt{3}-1, 1\}$

مثال: با توجه به جدول های داده شده ضابطه ای برای تابع بنویسید.

x	1	2	3	4	5
y	1	4	9	16	25

$f(x) = x^2$

x	1	2	3	4
y	1	3	9	27

$3^0=1, 3^1=3, 3^2=9, 3^3=27$

$f(x) = 3^x$

x	-2	-1	0	1	2
y	2	3	4	5	6

$f(x) = x + 4$

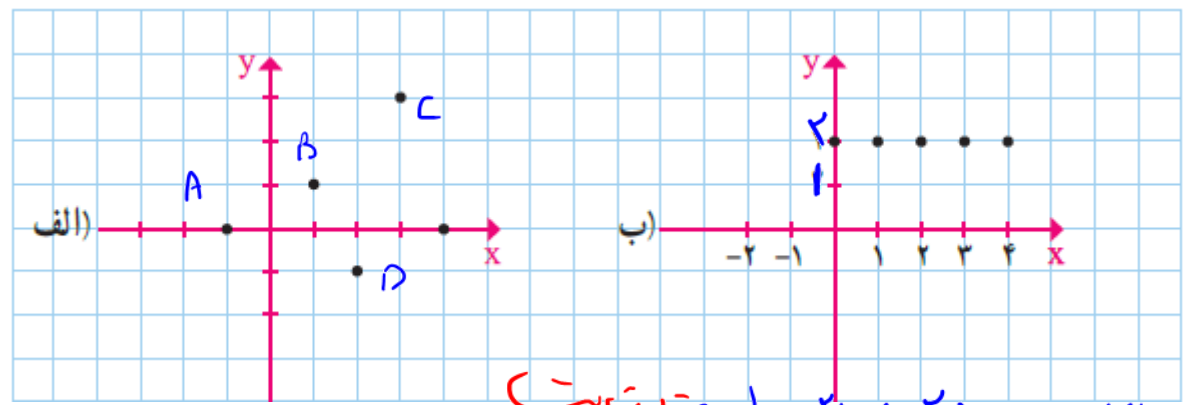
x	2	3	4	5	6
y	5	7	9	11	13

$f(x) = 2x + 1$

$2 \times 2 + 1 = 5, 2 \times 3 + 1 = 7$

$3 \times 2 + 1 = 7$

مثال: دامنه و برد را مشخص کنید و در صورت امکان یک ضابطه برای هر نمودار بنویسید.



الف)

$f = \{(-1, 0), (1, 1), (3, 3), (2, -1)\}$

دامنه $D = \{-1, 1, 2, 3\}$

برد $= \{0, 1, 3, -1\}$

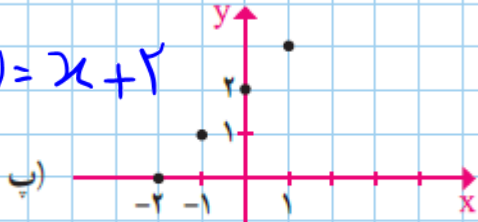
ب) $g = \{(0, 2), (1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2)\}$

$g(x) = 2$
 دامنه $D = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

برد $= \{2\}$

$$F = \{(-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

$$F(x) = x + 2$$



$$F = \{(-2, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 3)\}$$

$$F(x) = x$$

$$D = -1 \leq x \leq 4$$

$$\text{بر } -1 \leq y \leq 4$$

مثال: نمودار مختصاتی توابع زیر را رسم کنید.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

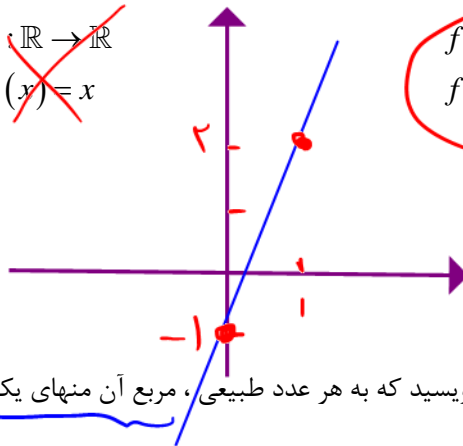
$$f(x) = 3x - 1$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = -2$$



$$D = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$\text{بر } \{0, 1, 2, 3\}$$

$$F(-1) = 3(-1) - 1 = -4$$

$$F(0) = 3(0) - 1 = -1$$

$$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{W}$$

$$F(x) = x^2 - 1$$

$$F(1) = 1^2 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$F(2) = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$D = \mathbb{N}$$

$$\text{بر } \mathbb{W}$$

تمرین

۱. توابع زیر با دامنه A داده شده اند. مجموعه برد آنها را مشخص کنید.

۱) $f: A \rightarrow B$, $f(x) = x^2 + x$, $A = \{-1, \sqrt{2}, 2, \frac{1}{2}\}$

۲) $g: A \rightarrow B$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$, $A = \{-2, 1, 2, \frac{1}{2}\}$

۳) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - 1$, $A = \{-1, 3, 5, 6\}$

۴) $g: A \rightarrow B$
 $g(x) = 2(x-3)^2$, $A = \left\{2, 1, 5, \frac{1}{2}\right\}$

۲. با توجه به جدول های داده شده ضابطه ای برای تابع بنویسید .

۱	۲	۳	۴	۵
۱۱	۲۱	۳۱	۴۱	۵۱

۰	۱	۲	۳	۴
۰	۱	۸	۲۷	۶۴

-۱	۰	۱	۲	۳
۴	۵	۶	۷	۸

۲	۳	۴	۵	۶
-۲	-۳	-۴	-۵	-۶

۳. نمودار مختصاتی توابع زیر را رسم کنید .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x + 1$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 2x$

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = 1$

۴. ضابطه تابعی را بنویسید که به هر عدد صحیح ، مکعب آن به اضافه ۲ را نسبت دهد .

درس سوم: تابع خطی و نمودار آن

تابع خطی: هر تابع که پس از ساده شدن به صورت $y = mx + h$ در آید را تابع خطی می نامند. که m شیب خط و h عرض از مبدأ (محل برخورد خط با محور عرض ها) نامیده می شود .

مثال : ضابطه تابع محیط مستطیل هایی که طول آنها ۳ واحد بیشتر از عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید . آیا تابع خطی است ؟

مثال : ضابطه تابع مساحت مستطیل هایی که طول آنها ۳ برابر عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید . آیا تابع خطی است ؟

مثال : هزینه ثابت تولید کالایی ۸ میلیون تومان است و به ازای هر کالای تولیدی ۲ میلیون تومان نیاز است . ضابطه تابع هزینه را بر حسب تعداد تولید بنویسید . آیا تابع خطی است ؟ هزینه تولید ۵۰ کالا چقدر است ؟

نوشتن معادله خط :

الف) با داشتن شیب و نقطه (x_1, y_1) از خط می توان معادله خط را به صورت مقابل نوشت : $y = m(x - x_1) + y_1$

ب) با داشتن دو نقطه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از خط ، می توان شیب خط را به صورت مقابل حساب کرد : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

سپس با فرمول قبل و انتخاب یکی از این نقاط ، معادله خط را نوشت .

مثال : معادله خطی را بنویسید که از نقطه $(-1, 2)$ گذشته و دارای شیب $m = -2$ باشد .

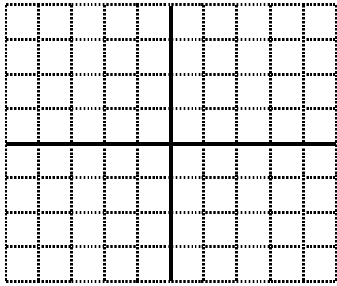
مثال : معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(-1, 8)$ ، $(2, 2)$ بگذرد .

مثال : معادله خطی را بنویسید که $f(2) = 3$ ، $f(1) = -2$ باشد . سپس مقدار $f(3)$ را بیابید .

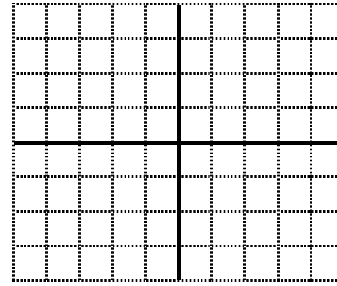
رسم تابع خطی : دو مقدار دلخواه برای x در نظر گرفته و دو مقدار برای y می یابیم . در این صورت مختصات دو نقطه از تابع بدست می آید که با مشخص کردن آنها در دستگاه مختصات و وصل کردن و امتداد دادن خط رسم می شود .

مثال : توابع خطی زیر را رسم کنید .

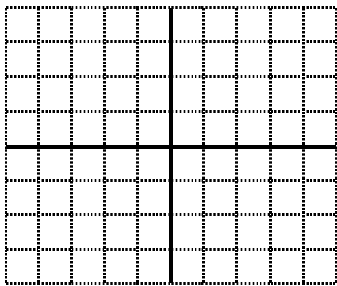
$$y = 2x - 3$$



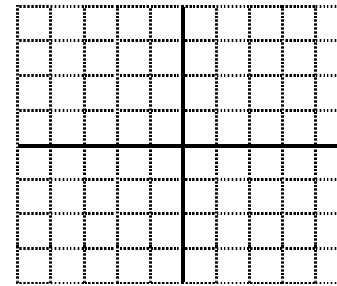
$$y = \frac{2}{3}x + 1$$



$$y + 3x = 2$$



$$y = \frac{-1}{2}x - 2$$



تمرین

۱. ضابطه تابع محیط مستطیل هایی که طول آنها ۳ برابر عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید. آیا تابع خطی است؟

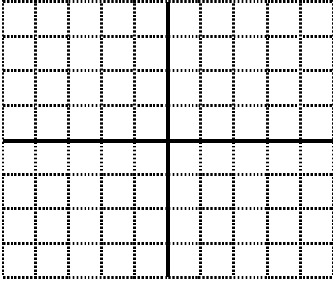
۲. ورودی ثابت یک باغ وحش برای اردوی دانش آموزی ۲۰ هزار تومان است و به ازای هر دانش آموز ۲ هزار تومان به این هزینه اضافه می شود. ضابطه تابع هزینه را بر حسب تعداد دانش آموزان بنویسید. آیا تابع خطی است؟ به ازای ۳۰ دانش آموز چند تومان باید پرداخت شود؟

۳. معادله خطی را بنویسید که از دو نقطه $(1, 5)$, $(-1, -1)$ بگذرد.

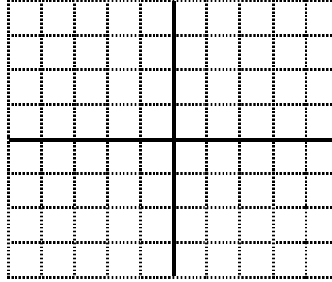
۴. معادله خطی را بنویسید که $f(-2) = 5$, $f(1) = -4$ باشد. سپس مقدار $f(0)$ را بیابید.

۵. توابع خطی زیر را رسم کنید.

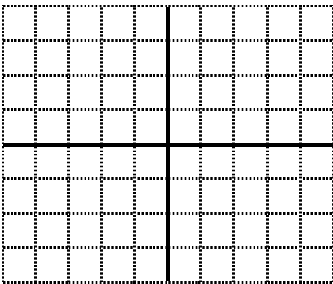
$$y = x - 3$$



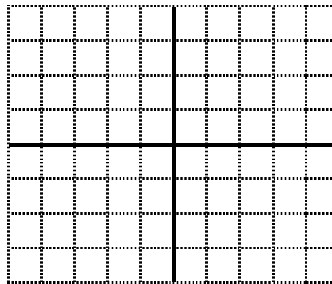
$$y = \frac{3}{5}x + 1$$



$$y - x + 4 = 0$$



$$y = \frac{-1}{3}x + 2$$



درس چهارم: تابع درجه دوم و نمودار آن

تابع درجه دوم (سهمی) : هر تابع که پس از ساده شدن به صورت $y = ax^2 + bx + c$ باشد را تابع درجه دوم می نامند . ($a \neq 0$)

مثال : ضابطه تابع مساحت مستطیل هایی که طول آنها ۳ واحد بیشتر از عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید . این تابع چه نوع تابعی است؟

مثال : قیمت فروش کالایی بر حسب تعداد فروش به صورت $y = 200 - 2x$ است . ضابطه در آمد حاصل از فروش x کالا را بنویسید . چه نوع تابعی داریم ؟ در آمد حاصل از فروش ۲۰ کالا چقدر است ؟

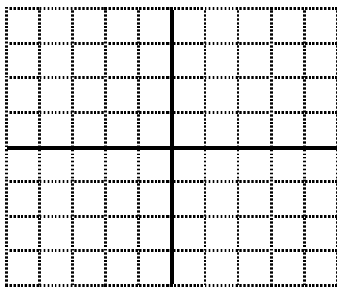
رسم تابع درجه دوم: سهمی $y = ax^2 + bx + c$ همواره به صورت $\sqrt{a > 0}$ یا $\wedge_{a < 0}$ است.

رأس سهمی: اگر مقدار $x_0 = \frac{-b}{2a}$ را یافته و درون تابع قرار دهیم نقطه (x_0, y_0) بدست آمده را رأس سهمی می نامند که در واقع در شکل \wedge مختصات پایین ترین نقطه و در شکل \wedge مختصات بالاترین نقطه است.

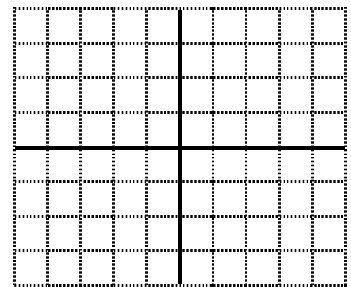
برای رسم سهمی ابتدا x_0 دو مقدار x در طرفین آن در نظر گرفته و با جایگذاری در تابع مقدار y آنها را می یابیم سپس با داشتن این سه نقطه تابع را رسم می کنیم.

مثال: مختصات رأس سهمی های زیر را مشخص کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

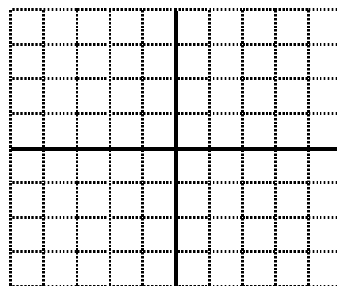
$$y = 2x^2 - 8x + 1$$



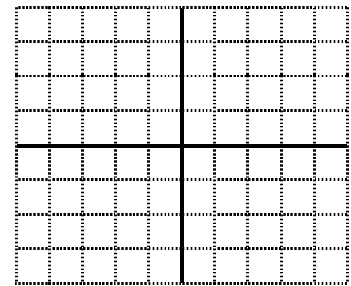
$$y = x^2 + 1$$



$$y = 2(x+1)^2 - 1$$



$$y = 3x - x^2$$



مثال: در تابع $y = 2x^2 + 4x + 3$ مینیمم (کمترین مقدار) تابع چقدر است؟

مثال: اگر تابع در آمد شرکتی $y = \frac{-1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه آن $y = 18x - 40$ باشد. ماکسیمم (بیشترین مقدار) سود چقدر

است؟

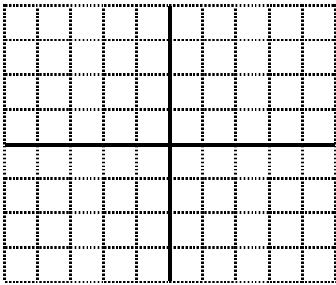
تمرین

۱. ضابطه تابع مساحت مستطیل هایی که طول آنها ۴ برابر عرض آنها است را بر حسب عرض آنها بنویسید. این تابع چه نوع تابعی است؟

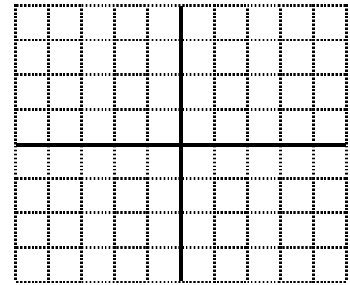
۲. قیمت فروش کالایی بر حسب تعداد فروش به صورت $y = 300 - x$ است. ضابطه در آمد حاصل از فروش x کالا را بنویسید. چه نوع تابعی داریم؟ در آمد حاصل از فروش ۵۰ کالا چقدر است؟

۳. مختصات رأس سهمی های زیر را مشخص کرده و نمودار آنها را رسم کنید.

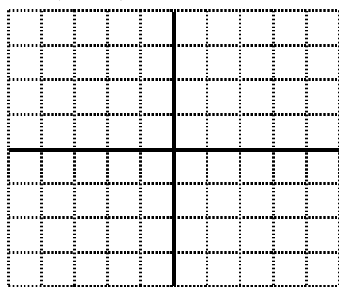
$$y = 2x^2 + 4x + 1$$



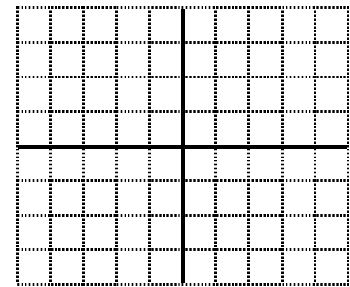
$$y = 2x^2 - 1$$



$$y = -2(x-2)^2 + 1$$



$$y = x - 2x^2$$



۴. در تابع $y = x^2 + x + 1$ مینیمم (کمترین مقدار) تابع چقدر است؟

۵. یک کالا به قیمت ۳۰۰ تومان به فروش می رسد. اگر تابع هزینه آن به صورت $y = x^2 + 50x + 200$ باشد. چند لامپ تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟

فصل چهارم

کار با داده های آماری

درس اول: گروه آماری داده ها

درس دوم: معیار های گرایش به مرکز

درس سوم: معیار های پراکنندگی

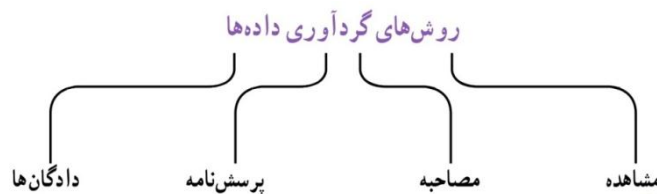
درس اول : گرد آوری داده ها

داده ها : داده ها واقعیت هایی درباره یک چیز هستند که در محاسبه ، استنباط یا برنامه ریزی به کار می روند.

واحد آماری : به هر یک از افراد یا چیزهایی می گویند که داده های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گرد آوری می شود .

جامعه آماری : مجموعه کل واحد های آماری را جامعه آماری می گویند .

نمونه : هر زیر مجموعه از جامعه آماری که با روش مشخصی انتخاب شده باشد را نمونه می نامند .



مشاهده : گرد آوری داده ها بدون نیاز به فرد پاسخگو . مانند شمارش تعداد وسایل نقلیه عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه گیری وزن محصولات یک باغ میوه .

مصاحبه : معمولاً بین دو نفر صورت می گیرد ، یکی مصاحبه گر و دیگری مصاحبه شونده . مانند مصاحبه با صاحب نظران در مورد عوامل افزایش ترافیک شهری .

پرسش نامه : مجموعه سوالات از پیش تعیین شده که توسط تعدادی پاسخ دهنده تکمیل می شود . مانند آمار گیری که هر ۱۰ سال یک بار در ایران انجام می شود .

دادگان : شامل مجموعه ای از اطلاعات ذخیره شده است . مانند استفاده از اطلاعات ثبت شده پلیس راهور در مورد تعداد مجروحین تصادفی در یک سال مشخص .

مثال : کدام روش جمع آوری داده ها برای موارد زیر مناسب تر است ؟

۱. میزان رضایت مشتری های یک بانک از نحوه برخورد کارمندان آن
۲. سن دانش آموزان پایه دهم مدرسه بر حسب ماه
۳. تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محور های خروجی شهر

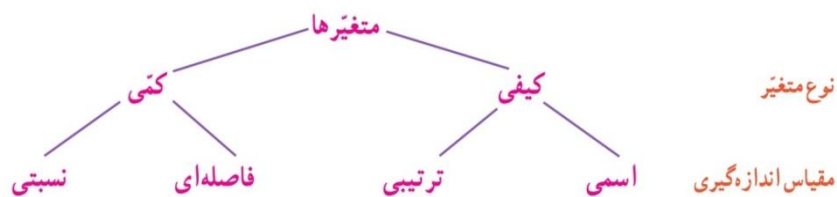
پارامتر : یک مشخصه عددی که توصیف کننده جنبه های خاص از یک جامعه است و فقط در صورتی که داده های کل جامعه در اختیار باشد ، قابل محاسبه است . مثلاً اگر داده های مربوط به تمام کارمندان دولت در دسترس باشد ، نسبت مردان به کل کارمندان یک پارامتر خواهد بود .

آماره: یک مشخصه عددی که توصیف کننده جنبه های خاص از یک نمونه است و در صورتی امکان آمار گیری از کل جامعه وجود نداشته باشد از نمونه استفاده کرده و آماره را برای تخمین پارامتر محاسبه می کنیم. مثلاً اگر قرار باشد در استان خوزستان هندوانه های قابل برداشت از نظر کیفیت مزه (خوب یا بد) بررسی شود این کار در مورد تمام هندوانه ها امری نشدنی است بنابراین با انتخاب یک نمونه و بررسی آنها، نسبت هندوانه های خوب یک آماره خواهد بود.

متغیر: هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است مورد بررسی قرار بگیرد. که به دو دسته کلی کمی و کیفی دسته بندی می شود.

۱. کمی: متغیر هایی که مقدار عددی می گیرند.

۲. کیفی: متغیر هایی که صرفاً برای دسته بندی افراد یا اشیا به کار می روند و لزوماً مقدار عددی نمی گیرند.



نسبی	فاصله ای	ترتیبی	اسمی
این مقیاس برای متغیر هایی است که علاوه بر قابلیت مرتب سازی و اختلاف بیم مقادیر، نسبت نیز با معناست و اغلب متغیر های فیزیکی مانند نمره، وزن، قد و تعداد از این جمله هستند. در این مقیاس صفر مطلق و به معنای نبود ویژگی در شخص یا شی است.	این مقیاس برای متغیر هایی است که علاوه بر قابلیت مرتب سازی اختلاف بین داده ها نیز با معناست ولی نسبت معنایی ندارد و صفر آن قراردادی است، یعنی صفر به معنای نبود یک ویژگی در فرد یا شی نیست. مانند درجه حرارت در شهر های مختلف که دمای ۱۰ و ۲۰ درجه دارای اختلاف ۱۰ درجه هستند ولی نمی توان گفت دمای دومی دو برابر اولی است.	این مقیاس با الفاظ ضمن ایجاد افکیک بین افراد و اشیا، ارجحیت نیز قائل می شود. و این متغیر ها قابل مرتب سازی هستند ولی محاسبه اختلاف بین آنها بی معناست. مانند رتبه دانش آموزان یک کلاس که به اختلاف بین رتبه اول و سوم توجه نمی کنیم.	این مقیاس برای متغیر هایی است که شامل نام ها، برجسب ها و گروه ها می شود. در اینجا هیچ معیاری که با آن بتوان داده ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد وجود ندارد. مانند گروه خونی، کد دانش آموزی، جنسیت فرد، پلاک منازل و ماشین ها

مثال: نوع متغیر های زیر را مشخص کنید:

۱. محسن، محمود، محمد و میثم همگی اسامی مذکر هستند.
۲. احمد رتبه بیست و پنجم، رضا رتبه نوزدهم و صادق رتبه دهم را کسب کرده است و رتبه یک بالاترین رتبه است.
۳. دما بدن ماهی قزل آلاهی رودخانه هراز
۴. طول ماهی های قزل آلاهی رودخانه هراز

مثال : موضوعات زیر دارای چه مقیاسی هستند .

۱. مدت زمان پاسخ گویی به سوالات یک امتحان
۲. زمان اولین کلاس
۳. رشته تحصیلی
۴. مقیاس ارزیابی تحصیلی : ضعیف ، معمولی و خوب
۵. نمره آخرین آزمون (از ۱۰۰ امتیاز)
۶. سن دانش آموزان

درس دوم : معیار های گرایش به مرکز

میانگین : یک شاخص عددی است که متوسط داده ها را بیان می کند .
$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

مسأله : مدیر مدرسه ای بر اساس اطلاعات سال های گذشته می گوید که معمولاً خیرین به طور متوسط ۱۰ درصد درآمد سالانه خود را به این امر اختصاص می دهند . فرض کنید در آمد ماهیانه حضار در انجمن خیریه این مدرسه به صورت زیر باشد ، کمک خیرین امسال چقدر خواهد بود ؟

درآمد	نجمه	سبحان	رسول	حسنا	جوانه	احمد	آرمان
(میلیون ریال)	۴۰	۱۲	۲۸	۳۲	۳۰	۲۲	۲۵

حل : میانگین در آمد های ماهانه خیرین برابر است با :
$$\bar{X} = \frac{۲۵ + ۲۲ + ۳۰ + ۳۲ + ۲۸ + ۱۲ + ۴۰}{۷} = \frac{۱۸۹}{۷} = ۲۷$$

یعنی به طور متوسط درآمد ماهانه این افراد ۲۷ میلیون تومان است که در سال برابر است با : $۲۷ \times ۱۲ = ۳۲۴$

و ۱۰ درصد آن برابر است با $۳۲/۴$.

مثال : میانگین داده های ۵۰ و ۴۰ و ۳۰ و ۲۰ و ۱۰ چقدر است ؟

مثال : اگر میانگین داده های ۴۰ و x و ۱۰ برابر ۳۰ شود . مقدار x چقدر است ؟

دور افتاده: داده ای که با سایر داده ها تفاوت اساسی دارد. یعنی بسیار بزرگ تر یا بسیار کوچک تر از بقیه داده هاست.

به عنوان مثال اگر در مسأله قبل یک میلیارد در با درآمد ماهیانه ۱ میلیارد تومان به انجمن خیریه مدرسه بپیوندند میانگین درآمد ها تا حدود ۱۴۸ میلیون تومان در ماه بالا می رود که غیر واقعی به نظر می رسد زیرا این عدد به هیچ وجه بیان گر متوسط درآمد ها نیست.

میانه: شاخصی برای بدست آوردن متوسط داده ها که در واقع عدد وسط در بین داده های مرتب شده است و معمولاً در مواردی استفاده می شود که داده دور افتاده داشته باشیم.

نکته: اگر تعداد داده ها زوج باشد، عدد وسط نداریم و میانه برابر با میانگین دو داده وسط است.

مسأله: در مسأله خیرین، پس از ورود میلیارد، میانه را حساب کنید.

حل: داده ها را به صورت مرتب شده می نویسیم و میانه برابر است با: $\frac{28+30}{2} = 29$

۱۰۰۰	۴۰	۳۲	۳۰	۲۸	۲۵	۲۲	۱۲
------	----	----	----	----	----	----	----

مثال: میانه داده های ۱ و ۹۹ و ۶۸ و ۲ و ۸۶ و ۱۴ و ۱۰ و ۱۰ چقدر است؟

مثال: میانه داده های ۱ و ۹۹ و ۶۸ و ۲ و ۸۶ و ۱۴ و ۱۰ و ۱۱ چقدر است؟

درس سوم: معیارهای پراکندگی

معیارهایی چون میانگین و میانه به تنهایی نمی توانند اطلاعات کاملی در مورد داده ها به ما بدهند مخصوصاً در مورد مقایسه چند گروه که تقریباً دارای شاخص های مرکزی برابر هستند. بنابراین شاخصی را نیاز داریم که میزان پراکندگی داده ها را مشخص کند.

انحراف معیار: این شاخص میزان انحرافات داده ها از میانگین را نشان می دهد و با علامت « زیگما » نمایش داده می شود.

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

مسئله: از سه کلاس دهم در سه دبیرستان آزمونی گرفته شد و از هر کلاس ۱۰ نفر به تصادف انتخاب گردید که نمرات آزمون آنها به ترتیب زیر است.

(الف) {۶۵, ۷۵, ۷۳, ۵۰, ۶۰, ۶۴, ۶۹, ۶۲, ۶۷, ۸۵}

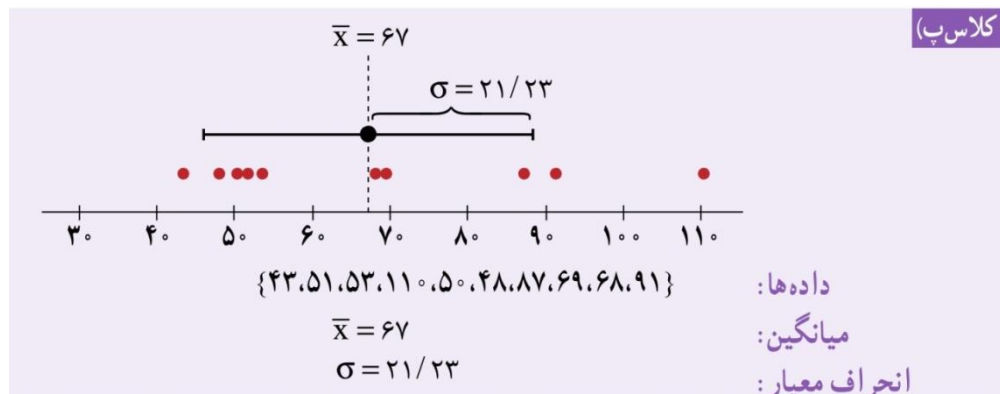
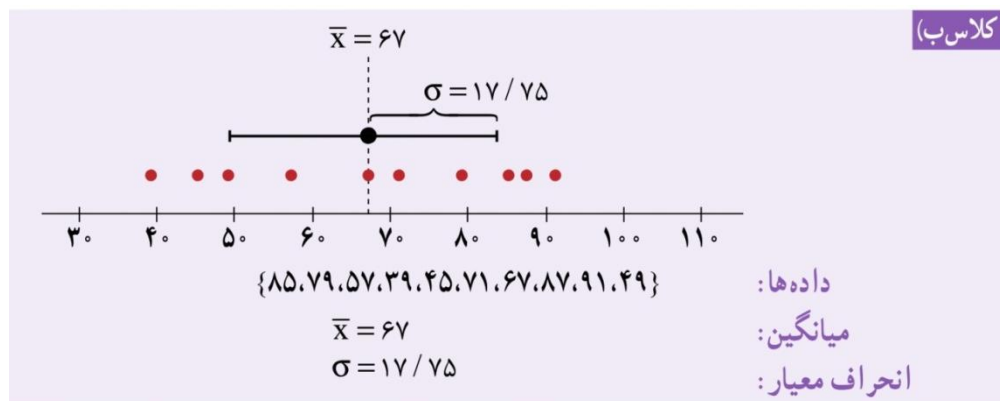
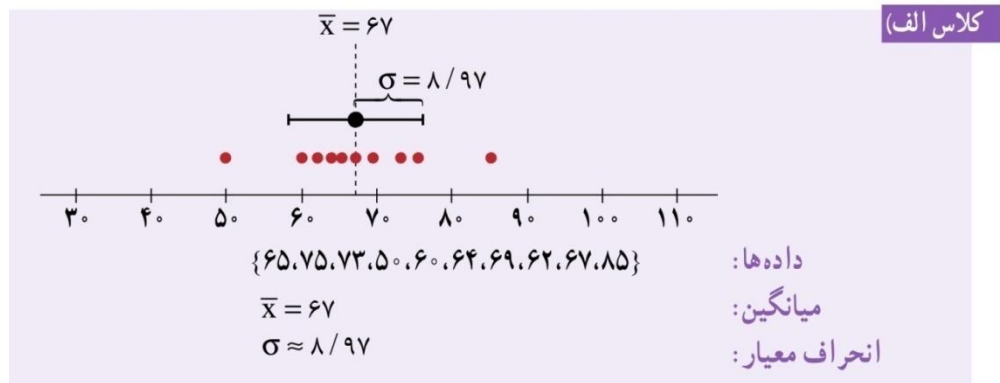
(ب) {۸۵, ۷۹, ۵۷, ۳۹, ۴۵, ۷۱, ۶۷, ۸۷, ۹۱, ۴۹}

(پ) {۴۳, ۵۱, ۵۳, ۱۱۰, ۵۰, ۴۸, ۸۷, ۶۹, ۶۸, ۹۱}

اگر قرار باشد والدینی فرزند بازیگوش خود را در یکی از این مدارس ثبت نام کند کدام را توصیه می کنید؟

اگر قرار باشد والدینی فرزند خود را به قصد شرکت در المپیاد، در یکی از این مدارس ثبت نام کند کدام را توصیه می کنید؟

حل: میانگین هر سه کلاس برابر ۶۷ است. پس معیار میانگین اطلاع دقیقی از تفاوت سه کلاس به ما نمی دهد ولی با محاسبه انحراف معیار سه کلاس داریم.



برای ثبت نام فرزند بازیگوش مدرسه ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن کمتر است زیرا سطح دانش این دانش آموزان نزدیک به هم است و در مقابل برای فرزندی که به قصد شرکت در المپیاد می خواهد مدرسه را انتخاب کند ، مدرسه ای بهتر است که پراکندگی نمرات در آن بیشتر باشد و این فرزند می تواند توانایی و تفاوت خود را به آسانی نشان دهد .

نکته : طبق یک قانون در آمار

۱. تقریباً ۹۹/۹ درصد داده ها بین سه برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند : $(\bar{X} - 3\sigma, \bar{X} + 3\sigma)$
۲. تقریباً ۹۶ درصد داده ها بین دو برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند : $(\bar{X} - 2\sigma, \bar{X} + 2\sigma)$
۳. تقریباً ۶۸ درصد داده ها بین یک برابر انحراف معیار از میانگین قرار دارند : $(\bar{X} - \sigma, \bar{X} + \sigma)$

مثال : در مثال خیرین در درس قبل ، به کمک جدول زیر مقدار انحراف معیار را قبل و بعد از ورود فرد میلیاردر بدست آورید .

مشاهدات		انحراف مشاهدات از میانگین		مربع انحراف مشاهدات از میانگین	
قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر	قبل از ورود میلیاردر	بعد از ورود میلیاردر
۴۰	۴۰				
۱۲	۱۲				
۲۸	۲۸				
۳۲	۳۲				
۳۰	۳۰				
۲۲	۲۲				
۲۵	۲۵				
	۱۰۰۰				

همان طور که دیدید انحراف معیار قبل و بعد از ورود میلیاردر اختلاف زیادی دارد و این به دلیل داده دور افتاده است . هرگاه داده دور افتاده داشته باشیم از شاخص پراکندگی دیگری به نام **دامنه میان چارکی** استفاده می کنیم .

دامنه میان چارکی : تفاضل چارک اول از چارک سوم را می گویند . (چارک اول در واقع میانه داده های قبل از چارک سوم میانه داده های بعد از میانه است)

مثال : جدول زیر را برای مثال خیرین مدرسه تکمیل کنید .

σ انحراف معیار	$IQR = Q_3 - Q_1$ دامنه میان چارگی	Q_3 چارک سوم	Q_2 چارک دوم	Q_1 چارک اول	
					درآمد ماهیانه اعضای خیریه
					درآمد بعد از ورود میلیاردر

تمرین :

جملات زیر را کامل کنید .

۱. و انواعی از معیار های گرایش به مرکز هستند .
۲. شما معمولاً نه تنها معدل یک مجموعه را می خواهید ، بلکه میزان تغییرات حوالی آن نقطه را هم نیاز دارید که آن معیار است .
۳. معیار پراکندگی که معمولاً با میانگین بیان می شود است .
۴. معیار پراکندگی که معمولاً با میانه بیان می شود است .
۵. آماری که بریا توصیف داده ها ، میانگین ، میانه ، انحراف معیار و دامنه میان چارگی به کار می رود ، نام دارد .
۶. ۵۰ درصد داده ها قبل از و ۵۰ درصد بعد از هستند .
۷. ۷۵ درصد داده ها قبل از و یا بعد از هستند .
۸. ۲۵ درصد داده ها قبل از و یا بعد از هستند .
۹. ۵۰ درصد داده ها بین و قرار دارند .

کار عملی :

نمرات درس فیزیک دانش آموزی در طول سال به صورت ۱۷ و ۱۹ و ۱۸ و ۷ و ۱۸ و ۱۹ است .

الف) میانه و میانگین را حساب کنید . کدام شاخص بیان گر متوسط نمرات این دانش آموز در درس فیزیک است ؟

ب) اگر برای جبران نمره ۷ اجازه دهند امتحان دیگری بدهد . چه نمره ای باید بگیرد تا میانگین نمرات او بیشتر از ۱۸ شود ؟

ج) انحراف معیار و دامنه میان چارگی را بیابید . کدام شاخص بهتری برای بیان میزان پراکندگی نمرات اوست ؟

فصل پنجم

نمایش داده ها

درس اول : نمودار های یک متغیره

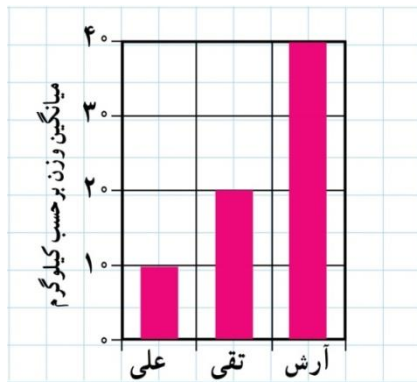
درس دوم : نمودار های چند متغیره

درس اول: نمودارهای یک متغیره

نمودار میله ای :

نموداری که محور افقی آن را داده ها و محور عمودی آن را فراوانی (تعداد تکرار) آن متغیرها، تشکیل می دهند و روی نقاط محور افقی میله های به ارتفاع فراوانی هر داده رسم می شود.

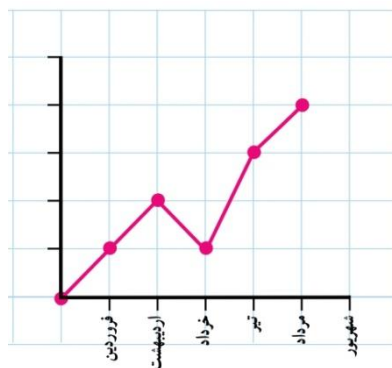
به طور مثال نمودار میله ای وزن آرش، تقی و علی به صورت زیر است.



نمودار چند ضلعی :

نموداری که محور افقی آن را داده ها و محور عمودی آن را فراوانی (تعداد تکرار) آن متغیرها، تشکیل می دهند و مختصات نقاط بدست آمده از داده و فراوانی آن، را به هم وصل می کند.

به طور مثال نمودار زیر مربوط به ۱۱ دانش آموز نیمه اولی و ماه های تولد آنهاست.

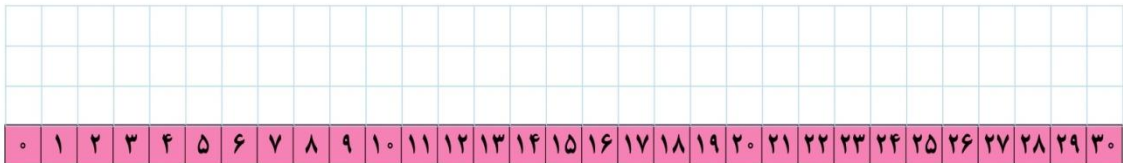
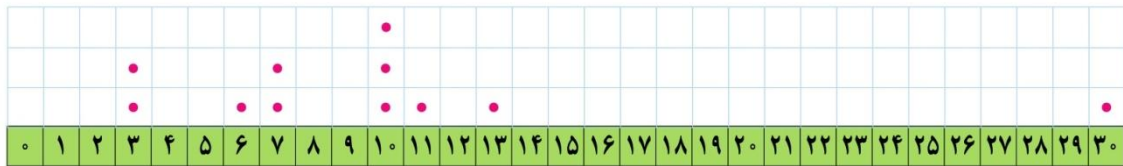


نمودار نقطه ای :

نموداری که روی هر داده به تعداد فراوانی آن داده نقطه قرار داده می شود.

به طور مثال نمودار زیر مربوط به امتیازات کسب شده توسط بازیکن (الف) است. نمودار نقطه ای بازیکن (ب) را شما رسم کنید.

۳	۳	۶	۷	۷	۱۰	۱۰	۱۰	۱۱	۱۳	۳۰	بازیکن الف
	۷	۸	۹	۹	۱۰	۱۰	۱۱	۱۱	۱۲	۱۳	بازیکن ب

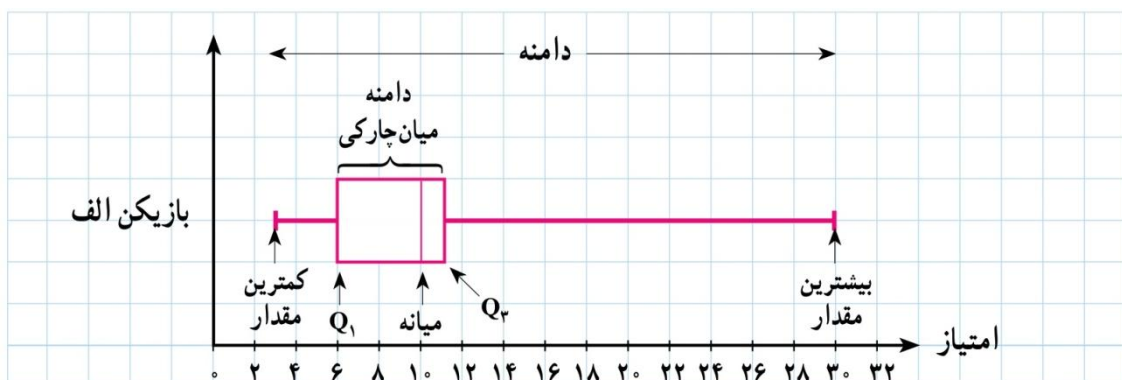


نمودار جعبه ای :

نموداری که یک مستطیل افقی با دو بازوی مستقیم در دو طرف آن است . که ابتدا و انتهای مستطیل ؛ چارک های اول و سوم و ابتدا و انتهای بازو ها کمترین و بیشترین داده را نمایش می دهد و درون مستطیل نیز میانه مشخص می شود .

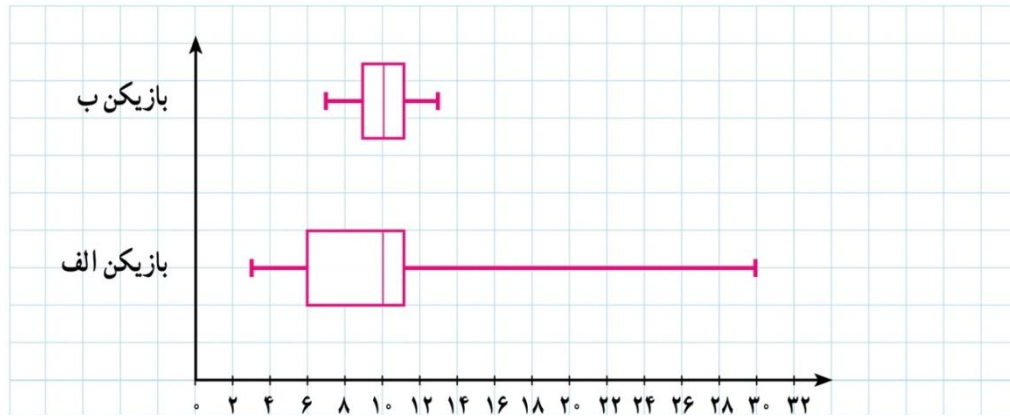
نکته : این نمودار به دلیل اینکه به سرعت امکان بررسی هم زمان شاخص مرکزی (میانه) و شاخص پراکندگی (دامنه میان چارکی) را امکان پذیر می کند ، می تواند وسیله خوبی برای مقایسه داده ها باشد .

به طور مثال در مسأله قبلی نمودار جعبه ای بازیکن الف به صورت زیر است :



مثال : اگر مجبور باشید از این دو بازیکن یکی را انتخاب کنید کدام را انتخاب می کنید ؟

حل : ابتدا نمودار جعبه ای هر دو را در یک دستگاه رسم می کنیم :



میانه هر دو بازیکن ۱۰ است و بازیکن (الف) دامنه امتیازات بزرگی دارد . گاهی این بازیکن ، امتیازاتی بسیار بیشتر از بازیکن (ب) می آورد و گاهی هم بسیار کمتر . بازیکن (ب) دامنه نسبتاً کوچکی دارد ولی ثبات بیشتری دارد و با توجه به میانه و دامنه میان چارکی معمولاً امتیازاتش از بازیکن (الف) بیشتر است . پس بازیکن (ب) را انتخاب می کنیم .

مثال : برای مجموعه داده های زیر نمودار جعبه ای بکشید .

$\frac{4}{8}, \frac{2}{5}, \frac{4}{1}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{25}, \frac{4}{75}, \frac{4}{95}, \frac{5}{1}$



کار عملی :

سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است :

۲۷ ۲۴ ۲۶ ۲۶ ۲۹ ۱۹ ۳۱ ۱۸ ۲۳ ۲۲ ۲۵ ۲۶ ۲۷ ۲۳ ۲۹ ۲۵ ۲۵ ۳۳ ۳۱ ۲۱ ۲۶ ۲۵

(الف) نمودار نقطه ای رسم کنید و مقدار میانه و میانگین را روی محور افقی مشخص کنید .

(ب) نمودار جعبه ای داده ها را بکشید .

(ج) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانگین است ، بیشتر است یا آنهایی که کمتر از میانگین است ؟

(د) تعداد بازیکنانی که سن آنها بیشتر از میانه است ، بیشتر است یا آنهایی که کمتر از میانه است ؟

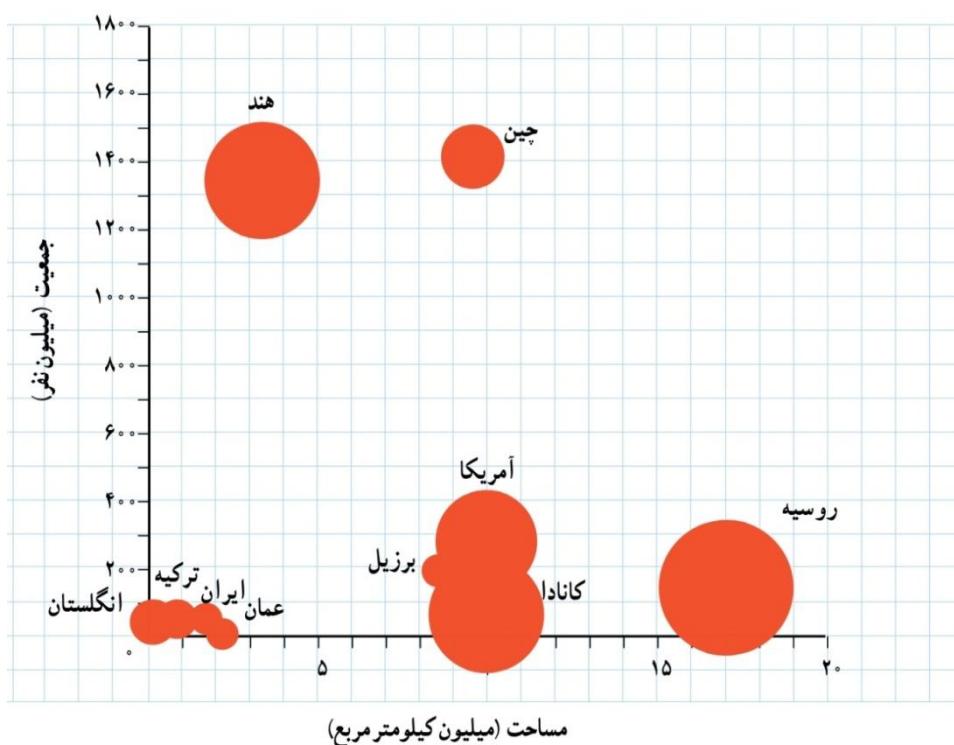
(ه) میانه و میانگین را مقایسه کنید . چه نتیجه ای می گیرید ؟

نمودار های چند متغیره

نمودار حبابی :

در این نمودار دو متغیر در محور افقی و عمودی نوشته و دایره هایی به این مختصات ها و با شعاع « جذر متغیر سوم » رسم می شود .
 به طور مثال نمودار حبابی داده های زیر با سه متغیر جمعیت و مساحت و درصد آب هر کشور رسم شده است که شعاع دایره ها برابر با جذر متغیر درصد آب است .

نام کشور	جمعیت	مساحت	آب ها (درصد)
ایران	۷۹,۲۰۰,۰۰۰	۱,۶۴۸,۱۹۵	۰/۷۰
آمریکا	۳۲۲,۳۶۹,۳۱۹	۹,۸۵۷,۳۰۶	۷/۱۰
انگلستان	۶۴,۷۱۶,۰۰۰	۲۴۲,۴۹۵	۱/۳۴
برزیل	۲۰۵,۳۳۸,۰۰۰	۸,۵۱۵,۷۶۷	۰/۱۶۵
ترکیه	۷۹,۴۶۳,۶۶۳	۸۱۴,۵۷۸	۱/۳۰
چین	۱,۳۷۶,۰۴۹,۰۰۰	۹,۵۹۶,۹۶۱	۲/۸۰
روسیه	۱۴۴,۱۹۲,۴۵۰	۱۷,۰۹۸,۲۴۲	۱۳
عمان	۳۰,۷۷۰,۳۷۵	۲,۱۴۹,۶۹۰	۰/۷۰
کانادا	۳۶,۰۴۸,۵۲۱	۹,۹۸۴,۶۷۰	۸/۹۲
هند	۱,۲۷۶,۲۶۷,۰۰۰	۳,۲۸۷,۲۶۳	۹/۶۰



کار عملی :

قد و وزن و نمره درس های ریاضی و ادبیات دانش آموزان کلاس را در یک جدول بنویسید و برای هر کدام از دسته های سه تایی زیر ، نمودار حبابی رسم کنید :

الف (قد ، وزن ، نمره ریاضی

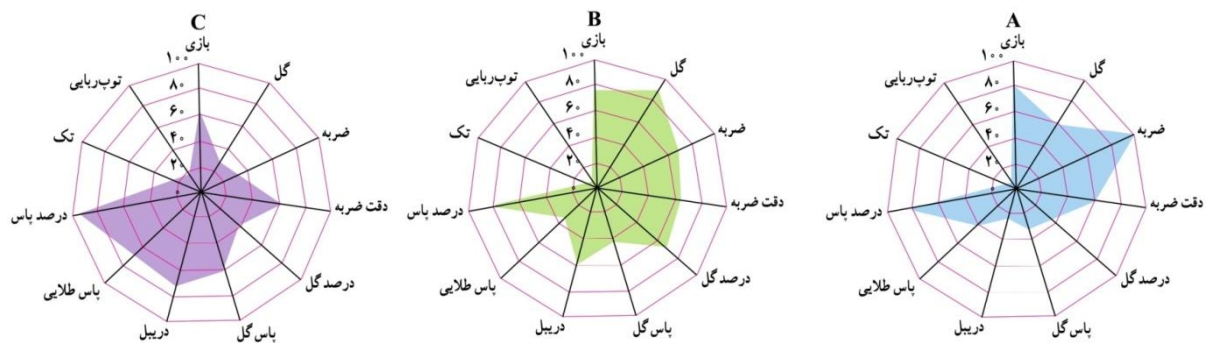
ب) قد ، وزن ، نمره ادبیات

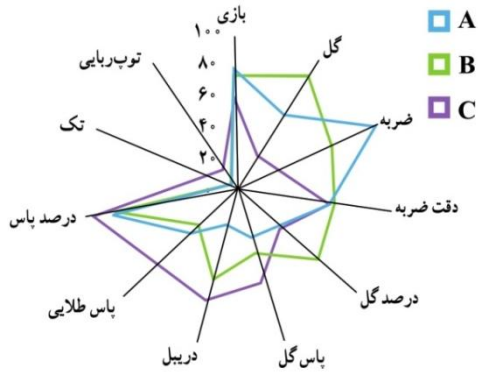
نمودار راداری :

نموداری که در آن متغیر ها بر روی محور های حول یک نقطه رسم شده نمایش داده می شوند که محور ها با هم زاویه مساوی دارند . و نسبت داده ها به بیشترین مقدار آن متغیر نمایش داده می شوند و در نهایت نقاط حاصل به هم وصل می شوند .

به طور مثال نمودار های زیر مربوط به نامزد های دریافت توپ طلا در سال ۲۰۱۳ برای سه بازیکن C, B, A است که نهایتاً توپ طلا به بازیکن A تعلق گرفت .

متغیر	A	B	C	بیشینه
تعداد بازی	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
گل زده	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
ضربه به سمت دروازه	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
دقت ضربه	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
ضربه های گل شده	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰
پاس گل	۰/۳۳	۰/۴۱	۰/۶	۱
دریبل	۱/۸۹	۴/۱۹	۵/۲	۷
پاس طولایی	۲/۰۵	۱/۵۸	۳/۶۶	۵
پاس های موفق	۷۶/۸	۸۵	۸۷/۸	۹۵
تکل	۰/۴۶	۰/۶۵	۱/۱۵	۶
توپ ربایی	۰/۳	۰/۳۴	۰/۸۹	۶





با رسم داده های مربوط به سه بازیکن در یک نمودار می توان

بهتر آنها را مقایسه کرد .

کدام بازیکن شایستگی بیشتری دارد ؟

کار عملی :

داده های زیر مربوط به شاخص های سلامت است ، نمودار راداری آن را رسم کنید .

متغیر	ایران	پاکستان	ترکیه	بیشینه
x_1 عمر مورد انتظار در بدو تولد	۳۰/۱	۲۹/۱	۲۳/۵	۳۸
x_2 نسبت متخصصان سلامت به ازای هر ۱۰ هزار نفر	۰/۹۳	۱/۴۴	۰/۴۳	۱/۶
x_3 نسبت ولادت ها به وسیله متخصصان سلامت	۷/۷۸	۵/۶	۲/۷۷	۸
x_4 نسبت جمعیت دارای دسترسی به شبکه فاضلاب	۴۴/۶	۴۹/۱	۴۷/۷	۷۵
x_5 شاخص آماری اجرای مقررات بین المللی سلامت	۱۴/۵	۲۸	۱۵/۳	۴۰