(فصل اول)

راهبردهای حل مسئله

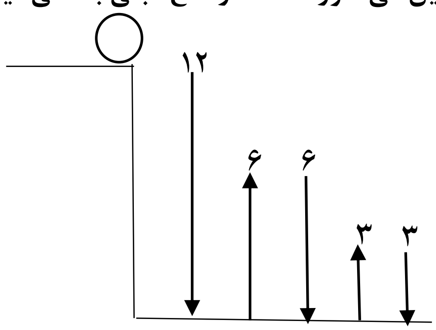
چگونه مسئله را حل کنیم؟ ۱) فهمیدن مسئله ۲) انتخاب راهبرد مناسب ۳) حل مسئله ۴) بازگشت به عقب

انواع راهبرد : ۱) رسم شکل ۲) الگو سازی (جدول نظام دار) ۳) حذف حالت های نامطلوب ۴) الگو یابی

۵)حدس و آزمایش ۶) زیر مسئله ۷) حل مسئله ساده تر ۸) روش های نمادین

راهبرد رسم شکل : برای حل بعضی از مسایل می توان با رسم یک شکل ساده آن را حل کرد.

مثال: توپی از ارتفاع ۱۲ متری به پایین پرتاب شده است. توپ هر بار که به زمین می خورد نصف ارتفاع قبلی بالا می آید. توپ به از سومین باری که به زمین می خورد چند متر حرکت کرده است؟



۱۲+۶+۶+۳+۳ =۳۰

راهبرد الگو سازی : برای حل بعضی از مسایل می توان همه حالت های ممکن را در یک جدول نظام دار نوشت.

مثال : حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۴۸ شده است. بیشترین حاصل جمع چند است؟

مجموع دو عدد	عدد دوم	عدد اول
۱+۴۸=۴۹	۴۸	۱
۲۶	۲۴	۲
۱۹	۱۶	۳
۱۶	۱۲	۴
۱۴	۸	۶

راهبرد حذف حالت های نامطلوب : برای حل بعضی از مسایل در یک جدول نظام دار همه حالت های ممکن را نوشته و حالت هایی که با توجه به صورت مسئله نادرست است (حالت های نامطلوب) کنار می گذاریم.

مثال : حاصل ضرب سه عدد طبیعی ۶۰ و حاصل جمع آن ها ۱۸ شده است بزرگترین عدد کدام است؟

مجموع اعداد	عدد سوم	عدد دوم	عدد اول
✗ ۱+۲+۳۰=۳۳	۳۰	۲	۱
✗ ۲۴	۲۰	۳	۱
✗ ۲۰	۱۵	۴	۱
✓ ۱۸	۱۲	۵	۱
✗ ۱۷	۱۰	۶	۱

راهبرد الگویابی : در بعضی از مسایل که الگو یا رابطه ی خاصی بین شکل ها یا اعداد باشد از الگویابی استفاده می کنیم.

(فصل اول)

راهبردهای حل مسئله

مثال : سه عدد بعدی هر الگو را بنویسید؟ (الگو عددی)

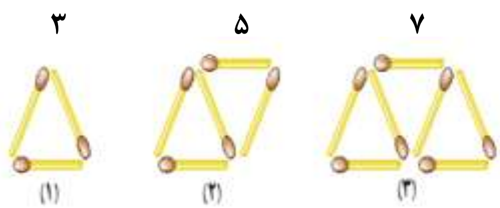
الگو : اعداد طبیعی سه بار در خودش ضرب

۲۱۶، و ۱۲۵، و ۶۴، و ۲۷ و ۸ و ۱

الگو : اعداد سه تا سه تا اضافه شده

۱۹، و ۱۶، و ۱۳، و ۱۰ و ۷ و ۴

مثال : شکل هفتم دارای چند چوب کبریت است؟ (الگو هندسی)



الگو : اعداد دو تا دو تا اضافه شده است : ۱۵ و ۱۳ و ۱۱ و ۹ و ۷ و ۵ و ۳

راهبرد حدس و آزمایش : در بعضی از مسایل می توان با یک روش منطقی راه حل مسئله را حدس زد سپس حدس خود را بررسی تا به جواب مسئله نزدیک شویم.

مثال: در یک مزرعه ۱۶ مرغ و گاو است. اگر تعداد پاهای آن ها ۴۲ باشد در این مزرعه چند گاو و چند مرغ است؟

حدس و آزمایش	تعداد گاو	تعداد مرغ
۱۶+۳۲=۴۸ ✗	۸	۸
۲۰+۲۴=۴۴ ✗	۶	۱۰
۲۲+۲۰=۴۲ ✓	۵	۱۱

راهبرد زیر مسئله : بعضی از مسایل پیچیده و چند مرحله را می توان به چند زیر مسئله تبدیل کرد.

مثال : علی ۴۲۰۰ تومان پول دارد. او می خواهد ۱۱ خودکار و با باقی مانده پولش مداد بخرد. قیمت هر خودکار ۳۰۰ تومان و قیمت هر مداد ۱۲۰ تومان است. علی چند مداد می تواند بخرد و چند تومان برایش باقی می ماند؟

الف) پول خرید خودکار : (زیر مسئله اول) $۱۱ \times ۳۰۰ = ۳۳۰۰$

ب) باقی مانده پول : (زیر مسئله دوم) $۴۲۰۰ - ۳۳۰۰ = ۹۰۰$

ج) تعداد خرید مداد و باقی مانده پول : (زیر مسئله سوم) ۶۰ تومان باقیمانده پول $۹۰۰ \div ۱۲۰ \simeq ۷$ مداد

راهبرد حل مسئله ساده تر : برای حل بعضی از مسایل می توان ابتدا مسئله ی ساده تری که با مسئله اصلی در ارتباط است حل کنیم.

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)\times\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)\times\left(۱-\frac{۱}{۴}\right)\times ... \times\left(۱-\frac{۱}{۱۰۰}\right)=$$

ابتدا حاصل هر پرانتز را به دست می آوریم :

$$۱-\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲} \qquad ۱-\frac{۱}{۳}=\frac{۲}{۳}$$

$$۱-\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴} \qquad ۱-\frac{۱}{۱۰۰}=\frac{۹۹}{۱۰۰}$$

$$\frac{۱}{\cancel{۲}}\times\frac{\cancel{۲}}{\cancel{۳}}\times\frac{\cancel{۳}}{\cancel{۴}}\times ... \times\frac{\cancel{۹۹}}{۱۰۰}=\frac{۱}{۱۰۰}$$

راهبرد روش های نمادین : بعضی از مسایل را می توان با استفاده از نمادهای جبری (معادله) یا مدل سازی هندسی حل کرد.

(فصل اول)

راهبردهای حل مسئله

مثال : افشین برای خرید ۴ کتاب ۱۵۰۰۰ تومان به فروشنده داد و ۶۰۰ تومان پس گرفت. قیمت هر کتاب چند تومان است؟

برای حل این مسئله رابطه ی مقابل را می نویسیم : $۴ \times \bigcirc + ۶۰۰ = ۱۵۰۰۰$

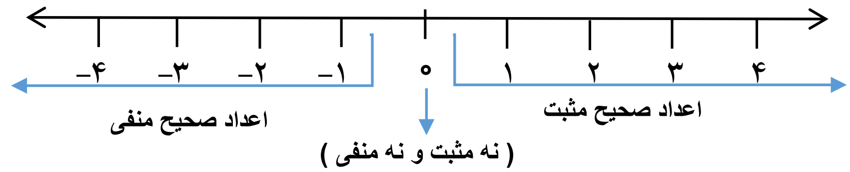
سپس جواب را حدس می زنیم :

قیمت کتاب	حدس و آزمایش
۲۰۰۰	$(۴ \times ۲۰۰۰) + ۶۰۰ = ۸۶۰۰$ ✗
۲۵۰۰	$(۴ \times ۲۵۰۰) + ۶۰۰ = ۱۰۶۰۰$ ✗
۳۰۰۰	$(۴ \times ۳۰۰۰) + ۶۰۰ = ۱۲۶۰۰$ ✗
۳۵۰۰	$(۴ \times ۳۵۰۰) + ۶۰۰ = ۱۴۶۰۰$ ✗
۳۶۰۰	$(۴ \times ۳۶۰۰) + ۶۰۰ = ۱۵۰۰۰$ ✓

(فصل دوم)

عددهای صحیح

اعداد صحیح : اعداد صحیح از سه دسته اعداد تشکیل شده اند : (اعداد مثبت و عدد صفر و اعداد منفی)



نکته : مجموعه اعداد صحیح را با حرف انگلیسی Z نشان می دهند : $Z = \{\dots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \dots\}$

نکته : عددی (غیر از صفر) علامت نداشته باشد علامت آن مثبت است : $+۷ = ۷$

نکته : در محور اعداد صحیح هر چه به سمت راست (مثبت ها) حرکت کنیم عدد بزرگتر و هر چه به سمت چپ (منفی ها) حرکت کنیم عدد کوچکتر می شود.

مثال : در جای خالی علامت مناسب (<=>) قرار دهید.

$۹ > ۰$ $\qquad$ $۰ > -۸$ $\qquad$ $-۱۲ > -۱۸$ $\qquad$ $-۶ < ۴$

قرینه اعداد صحیح : هر گاه علامت عددی را تغییر دهیم قرینه آن عدد حاصل می شود. مانند : $+۵ \xrightarrow{\text{قرینه}} -۵$

نکته : قرینه ی قرینه ی هر عدد برابر با خود آن عدد است : $-۲ \xrightarrow{\text{قرینه}} +۲ \xrightarrow{\text{قرینه}} -۲$

نکته : اگر قبل از پرانتز علامت منفی باشد به معنی قرینه آن عدد است.

مثال : تساوی های زیر را کامل کنید. $-\left(\overset{-۴}{-(\cancel{+۴})}\right) = +۴$ $\qquad$ $\underset{}{\overset{\text{علامت مثبت تاثیری ندارد}}{+(+۱۰)}} = ۱۰$ $\qquad$ $-(+۷) = -۷$

نکته : اگر تعداد منفی عددی زوج باشد علامت آن عدد مثبت می شود و اگر تعداد منفی فرد باشد علامت عدد منفی می شود.

مثال : تساوی های زیر را کامل کنید.

تعداد منفی ها ۶ تا (زوج) = علامت مثبت

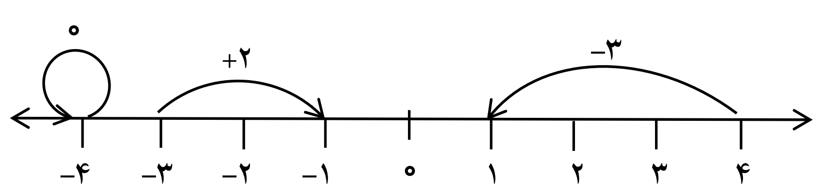
$$-\left\{-\left[-\left(+\left(-۳\frac{-۱}{-۲}\right)\right)\right]\right\} = \frac{۷}{۲}$$

تعداد منفی ها ۳ تا (فرد) = علامت منفی

$$-\{+(-(-۳))\} = -۳$$

حرکت روی محور اعداد : جابه جایی از یک نقطه به نقطه دیگر را حرکت روی محور می گویند. اگر جهت حرکت به سمت راست باشد علامت عدد مثبت و اگر جهت حرکت به سمت چپ باشد علامت عدد منفی می شود.

مثال : برای هر حرکت روی محور یک عدد صحیح بنویسید.



(فصل دوم)

عددهای صحیح

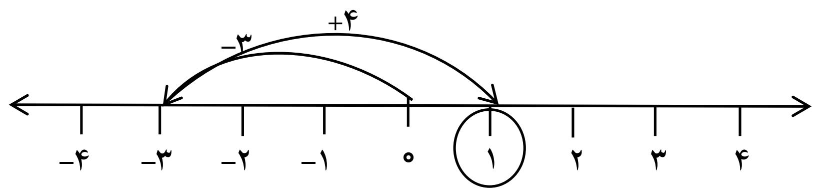
جمع اعداد صحیح : برای جمع اعداد صحیح از روش های زیر استفاده می کنیم :

الف) مختصر نویسی : دو عدد را با علامتشان بدون پرانتز کنار هم می نویسیم. اگر دو عدد هم علامت باشند دو عدد را جمع و اگر مختلف العلامت باشند دو عدد را کم می کنیم و برای جواب علامت عدد بزرگتر را قرار می دهیم.

مانند : $(+۸) + (+۶) = +۸ + ۶ = +۱۴$ $\qquad$ $(-۱۲) + (+۸) = -۱۲ + ۸ = -۴$

ب) محور اعداد : با توجه به اعداد و علامت آن ها روی محور حرکت کرده انتهای حرکت دوم جواب حاصل جمع را نشان می دهد.

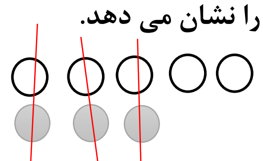
مانند :



$(-۳) + (+۴) = +۱$

ج) دایره توپر و توخالی : برای عدد منفی دایره توپر و برای عدد مثبت دایره توخالی قرار داده و هر دایره توپر و توخالی همدیگر را خنثی می کنند. دایره های باقیمانده جواب حاصل جمع را نشان می دهد.

مانند :



$(+۵) + (-۳) = +۲$

د) جدول ارزش مکانی : دو عدد را با توجه به ارزش مکانی آن ها در جدول قرار داده و گسترده هر عدد را کنار جدول نوشته و اعداد را ستونی جواب می دهیم. **مانند :**

$$-۱۰۰ - ۲۰ - ۸$$
$$+۲۰۰ + ۷۰ + ۳$$
$$\overline{+۱۰۰ + ۵۰ - ۵ = +۱۴۵}$$

ی	د	ص
۸	۲	۱-
۳	۷	۲+

$(-۱۲۸) + (+۲۷۳) = +۱۴۵$

تفریق اعداد صحیح : تفریق را به جمع تبدیل می کنیم. به این صورت که عدد اول را نوشته و عدد دوم را قرینه می کنیم.

مانند : $(-۲۷) - (+۱۹) = (-۲۷) + (-۱۹) = -۴۶$ $\qquad$ $۱۶ - (-۸) = (+۱۶) + (+۸) = +۲۴$

حل مسئله اعداد صحیح : الف) اگر در مسئله ای دمای یک شهر را خواسته باشد بین دو عدد علامت جمع می گذاریم.

مثال : دمای شهر زاهدان ۱۲ درجه بالای صفر و دمای سراوان ۷ درجه سردتر از زاهدان است. دمای شهر سراوان چند درجه است؟

$$(+۱۲) + (-۷) = +۵$$

ب) اگر در مسئله ای سردی یا گرمی هوا را خواسته باشد بین دو عدد علامت تفریق می گذاریم.

مثال : دمای مشهد ۸ درجه بالای صفر و دمای اصفهان ۶ درجه زیرصفر است. دمای اصفهان چند درجه سردتر از شیراز است؟

$$(-۶) - (+۸) = (-۶) + (-۸) = -۱۴$$

(فصل دوم)

عددهای صحیح

ج) اگر در مسئله ای اختلاف دمای دو شهر را خواسته باشد بین دو عدد علامت تفریق می گذاریم.

مثال : دمای بیرجند ۶ درجه زیر صفر و دمای بندر عباس ۱۳ درجه بالای صفر است. اختلاف دمای دو شهر چند درجه است؟

$$(+۱۳) - (-۶) = (+۱۳) + (+۶) = +۱۹$$

د) اگر در مسئله ای میانگین دمای دو شهر را خواسته باشد بین دو عدد علامت جمع قرار داده و در آخر جواب را بر تعداد اعداد تقسیم می کنیم.

مثال : حداکثر دمای هوای کرمان ۱۸ درجه بالای صفر و حداقل دمای هوا ۴ درجه بالای صفر است. میانگین دمای هوای این شهر چند درجه است؟

$$(+۱۸) + (+۴) = +۲۲ \div ۲ = +۱۱$$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح : در ضرب و تقسیم اعداد صحیح ابتدا ضرب علامت ها را انجام می دهیم سپس با توجه به علامت بین آن ها دو عدد را ضرب یا تقسیم می کنیم.

قاعده ضرب علامت های دو عدد :

مثبت = مثبت × مثبت   منفی = منفی × مثبت   مثبت = منفی × منفی   منفی = مثبت × منفی

مثال : حاصل ضرب و تقسیم های زیر انجام دهید؟

$(-۱۸) \times (-۸) = +۱۴۴$ $(+۲۴) \div (+۸) = +۳$ $(-۱۲) \times (+۴) = -۴۸$

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

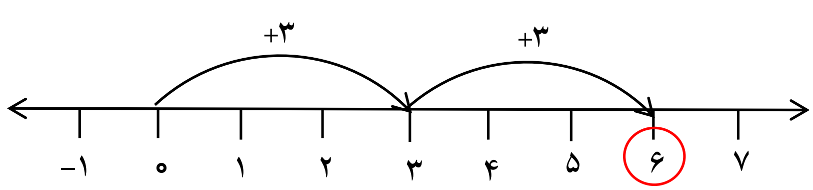
$$(-۲۰) \div [۸ - (+۱۳)] = (-۲۰) \div [\overset{-۵}{\cancel{۸ + (-۱۳)}}] = +۴$$

$$(\overset{-۱۲}{\cancel{-۶ + ۱۲ - ۱۸}}) \times (-۵) = +۶۰$$

$$[\overset{-۲۸}{\cancel{(-۷) \times ۴}}] \div (+۲) = -۱۴$$

ضرب اعداد صحیح به کمک محور اعداد : نقطه شروع بردارها از صفر و انتهای بردار آخر حاصل ضرب را نشان می دهد.

مثال : به کمک محور و حرکت انجام شده یک عبارت جمع و یک عبارت ضرب بنویسید؟



جمع : $(+۳) + (+۳) = +۶$

ضرب : $۲ \times (+۳) = +۶$

(فصل سوم)

جبر و معادله

متغیر : حروف انگلیسی که نشان دهنده ی عددی است که تغییر می کند.

ضریب : به عددی که کنار متغیر باشد و بین آن ها علامتی نباشد یا علامت ضرب باشد. ضریب می گویند.

مثال : ضریب و متغیر هر عبارت را مشخص کنید؟

$\frac{c}{۲}$ ضریب = $\frac{۱}{۲}$ متغیر = c

ab ضریب =۱ متغیر = ab

$-۴x$ ضریب = -۴ متغیر = x

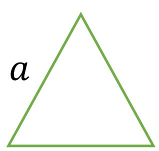
یک جمله ای جبری : عبارت جبری که از دو قسمت عدد (ضریب) و متغیر تشکیل شده باشد. **مانند :** $۵xy$

چند جمله ای جبری : اگر بین عبارت های جبری علامت جمع و تفریق باشد تشکیل چند جمله ای می دهد.

مانند : $a - b + ۷$ (دارای سه جمله) $x + ۲y$ (دارای دو جمله)

مثال : الف) محیط مثلث متساوی الاضلاع که ضلع آن a باشد را به صورت عبارت جبری بنویسید؟

$p = a + a + a = ۳a$ محیط مستطیل



ب) محیط این مثلث را به ازای ضلع ۳ سانتی متر به دست آورید؟ $a = ۳ \Longrightarrow ۳ \times ۳ = ۹$

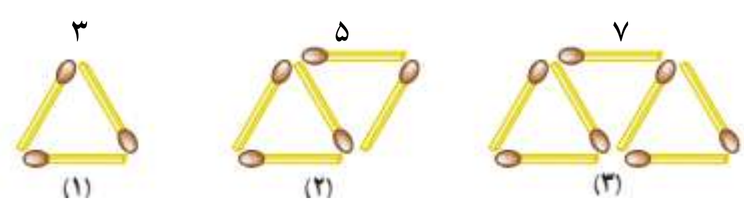
نکته : عبارت جبری در نوشتن فرمول های ریاضی و جمله ی n ام کاربرد دارد.

مثال : جمله ی n ام هر الگو عددی داده شده را بنویسید؟

$\overset{+۲}{-۴ , -۲} , ۰ , ۲ , ...$ جمله ی n ام : $۲n - ۶$

$\overset{+۳}{۳ , ۶} , ۹ , ...$ جمله ی n ام : $۳n$

مثال : جمله ی n ام و جمله ی بیست و دوم الگوی هندسی زیر را بنویسید؟



$\overset{+۲}{۳ , ۵} , ۷ , ...$ جمله ی n ام : $۲n + ۱$

$n = ۲۲ \Longrightarrow (۲ \times ۲۲) + ۱ = ۴۵$

عبارت جبری متشابه : عبارتی که متغیر های آن (حروف انگلیسی) کاملا شبیه هم باشند. **مانند :** $(۳ab \;, ۲ba)$, $(۵x \;, -۴x)$

عبارت جبری نا متشابه : عبارتی که متغیرهای آن شبیه هم نباشند. **مانند :** $(۳bc \;, ۲b)$

ساده کردن عبارت های جبری : جملات متشابه را جدا کرده سپس مانند جمع و تفریق اعداد صحیح آن ها را جواب داده با این تفاوت که حروف کنار اعداد نوشته می شود.

(فصل سوم)

جبر و معادله

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$۱a + ۲b - ۶ + ۳a - ۴b = ۴a - ۲b - ۶ \qquad -۴x + ۲y + ۱۰x = ۶x + ۲y$$

ضرب عدد در عبارت جبری : اگر عددی قبل از پرانتز باشد و بین آن ها علامتی نباشد آن عدد در تمام جملات پرانتز ضرب می کنیم.

مثال : عبارت جبری زیر را ساده کنید.

$$۲(۳a - ۲b) - (a + ۳b) = ۶a - ۴b - a - ۳b = ۵a - ۷b$$

مقدار عددی عبارت جبری : به جای حروف اعداد داده شده را قرار می دهیم سپس جواب می دهیم.

مثال : مقدار عددی هر عبارت را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

$$(x = ۱ \ , \ \ y = -۲) \qquad ۵x - ۲xy + ۷$$

$$۵(۱) - ۲(۱)(-۲) + ۷ = ۵ + ۴ + ۷ = ۱۶$$

x	-۳	۲
$۳x - ۱$	$(۳ \times -۳) - ۱ = -۱۰$	$(۳ \times ۲) - ۱ = ۵$

نکته : در محاسبه مقدار عددی اگر عبارت جبری قابل ساده شدن بود ابتدا عبارت را ساده سپس مقدار عددی را به دست می آوریم.

مثال : مقدار عددی عبارت زیر را به ازای $a = -۲$ و $b = ۳$ به دست آورید.

$$۳(a - ۲b) + ۲(-۲a - b) = ۳a - ۶b - ۴a - ۲b = -a - ۸b = -۱(-۲) - ۸(۳) = ۲ - ۲۴ = -۲۲$$

معادله : معادله یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از اعداد به یک تساوی درست تبدیل می شود.

نکته : هر معادله از سه قسمت تشکیل شده است : ۱) ضریب (عدد کنار متغیر) ۲) مجهول (متغیر) ۳) معلوم (عدد بدون متغیر)

نکته : برای حل معادله مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) مجهول ها را به طرف چپ و عددهای معلوم را به طرف راست انتقال می دهیم. (عددی که انتقال داده شود علامت آن عوض می شود)

۲) عددهای مجهول با هم و عددهای معلوم را با هم جواب می دهیم.

۳) حاصل عددهای معلوم را بر حاصل عددهای مجهول تقسیم می کنیم.

مثال : معادله های زیر را جواب دهید.

$$-۶ + x = ۲x + ۵$$

$$\overset{-x}{\cancel{x - ۲x}} = \overset{۱۱}{\cancel{۵ + ۶}}$$

$$x = \frac{۱۱}{-۱} = -۱۱$$

$$x = -۱۱$$

$$۲x + ۳ = -۷$$

$$۲x = \overset{-۱۰}{\cancel{-۷ - ۳}}$$

$$x = \frac{-۱۰}{۲} = -۵$$

$$x = -۵$$

ضریب متغیر معلوم

$$-۵x = ۱۰$$

$$x = \frac{۱۰}{-۵} = -۲$$

$$x = -۲$$

(فصل سوم)

جبر و معادله

نکته : اگر در معادله پرانتز وجود داشته باشد اول پرانتز را از بین برده سپس معادله را حل می کنیم. **مانند :**

$$۳(x-۱)=۲(۲x+۳) \Longrightarrow ۳x-۳=۴x+۶ \Longrightarrow \overset{-x}{\cancel{۳x-۴x}}=\overset{۹}{\cancel{۶+۳}} \Longrightarrow x=\frac{۹}{-۱} \Longrightarrow x=-۹$$

نکته : در معادلات کسری ابتدا مخرج را با استفاده از (ب.م.م) مخرج ها از بین می بریم سپس معادله را حل می کنیم. **مانند :**

ابتدا (ب.م.م) مخرج یعنی عدد ۶ را در دو طرف معادله ضرب کرده تا با مخرج ساده و مخرج از بین برود :

$$۶\times\left(\frac{x}{۲}-\frac{۲}{۳}\right)=\left(\frac{۱}{۶}\right)\times ۶ \Longrightarrow ۳x-۴=۱ \Longrightarrow ۳x=\overset{۵}{\cancel{۱+۴}} \Longrightarrow x=\frac{۵}{۳} \Longrightarrow x=\frac{۵}{۳}$$

مثال : آیا $x=-۳$ جواب معادله $\frac{x+۱}{۵}=\frac{x-۲}{۳}$ است؟چرا؟ در معادله به جای x عدد ۳- قرار می دهیم اگر دو طرف تساوی برابر شد جواب داده شده درست است :

$$\frac{-۳-۲}{۳}=\frac{-۳+۱}{۵} \Longrightarrow \frac{-۵}{۳}=\frac{-۲}{۵} \Longrightarrow \text{طرفین وسطین} \Longrightarrow -۲۵\neq -۶$$

پس جواب درست نیست

حل مسئله به کمک معادله : ابتدا خواسته مسئله را با متغیری مانند x در نظر گرفته سپس با توجه به صورت مسئله عبارت های کلامی را به عبارت جبری تبدیل کرده تا مسئله تشکیل شود.

مثال : از پنج برابر عددی نه واحد کم کرده ایم حاصل ۷۶ شده است.آن عدد چند است؟

عدد مورد نظر را x فرض می کنیم :

$$۵x-۹=۷۶ \Longrightarrow ۵x=\overset{۸۵}{\cancel{۷۶+۹}} \Longrightarrow ۵x=۸۵ \Longrightarrow x=\frac{۸۵}{۵} \Longrightarrow x=۱۳$$

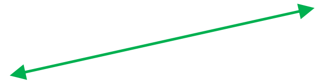
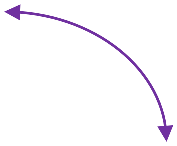
مثال : حسین برای خرید سه دفتر ۱۰۰۰۰ تومان به فروشنده داد و ۱۹۰۰ تومان پس گرفت.قیمت هر دفتر چند تومان است؟

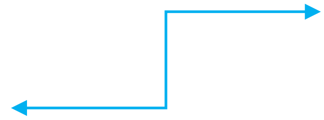
قیمت دفتر را x فرض می کنیم :

$$۳x+۱۹۰۰=۱۰۰۰۰ \Longrightarrow ۳x=\overset{۸۱۰۰}{\cancel{۱۰۰۰۰-۱۹۰۰}} \Longrightarrow ۳x=۸۱۰۰ \Longrightarrow x=\frac{۸۱۰۰}{۳} \Longrightarrow x=۲۷۰۰$$

(فصل چهارم)

هندسه و استدلال

انواع خط : الف) خط راست  ب) خط خمیده (منحنی) 

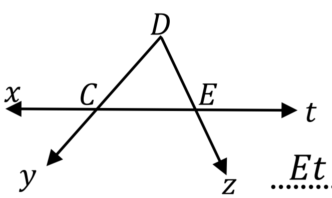
ج) خط شکسته 

خط راست : خطی است که ابتدا و انتها ندارد و خط را با حروف کوچک انگلیسی نام گذاری می کنند :

پاره خط : خطی است (خط راست) که از دو طرف بسته (محدود) باشد و پاره خط را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنند :

نیم خط : خطی است (خط راست) که از یک طرف بسته و از یک طرف باز باشد و نیم خط را از طرفی که بسته است با حرف بزرگ و طرفی که باز است با حرف کوچک نام گذاری می کنند :

مثال : با توجه به شکل مقابل جاهای خالی را کامل کنید :



نام یک خط : .... xt نام دو پاره خط : .... DC .. و .. .. CE نام دو نیم خط : ..... Cy و .... Et

نکته : برای به دست آوردن تعداد پاره خط روی یک خط راست از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\text{تعداد پاره خط ها} = \frac{\text{یکی کمتر} \times \text{تعداد نقاط}}{۲}$$

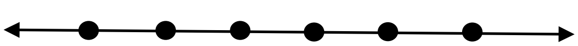
مثال : روی یک خط ۱۰ نقطه قرار داشته باشند تعداد پاره خط چند تاست؟ $\text{پاره خط } ۴۵ = \frac{۱۰ \times ۹}{۲}$

نکته : الف) برای به دست آوردن تعداد نیم خط ها اگر نقاط روی یک خط قرار داشته باشند از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$۲ \times \text{تعداد نقاط} = \text{تعداد نیم خط ها}$$

ب) اگرنقاط روی یک نیم خط قرار داشته باشند فقط تعداد نقاط را می شماریم.

مثال : تعداد نیم خط های شکل مقابل چند تاست؟

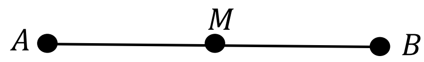


$\text{نیم خط } ۱۲ = ۲ \times ۶$

(فصل چهارم)

هندسه و استدلال

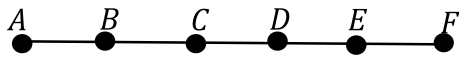
مثال : اگر نقطه ی M وسط پاره خط AB قرار داشته باشد. ۴ رابطه ی درست برای این پاره خط ها بنویسید؟



$AM = \frac{۱}{۲}AB \qquad AB = ۲MB \qquad AM + MB = AB$

$AM = MB$

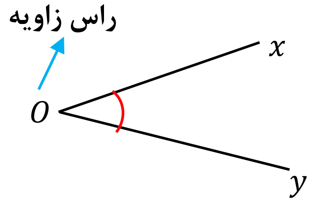
مثال : پاره خط AF به پنج قسمت مساوی تقسیم شده است. جاهای خالی را کامل کنید :



$AC = \frac{۲}{۵} AF \qquad BE - CE = BC$

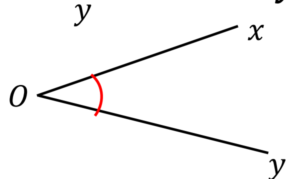
$BC + CD + DF = BF \qquad DE = \frac{۱}{۴} AE$

زاویه : از برخورد دو نیم خط در یک نقطه زاویه تشکیل می شود و به نقطه ی برخورد راس زاویه می گویند.

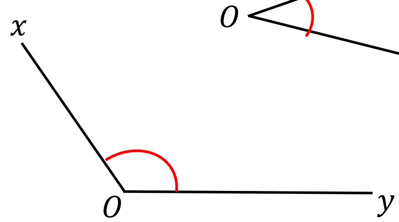


نام گذاری زاویه : الف) با یک حرف انگلیسی (حرف راس نوشته می شود) : $\hat{O}$

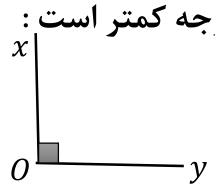
ب) با سه حرف انگلیسی (حرف راس وسط نوشته می شود) : $x\hat{o}y$ یا $y\hat{o}x$



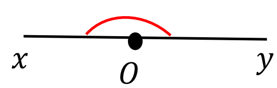
انواع زاویه : ۱) زاویه تند یا حاده : اندازه ی آن از ۹۰ درجه کمتر است :



۲) زاویه راست یا قائمه : اندازه ی آن ۹۰ درجه است :

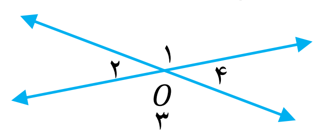


۳) زاویه باز یا منفرجه : اندازه ی آن از ۹۰ درجه بیشتر و از ۱۸۰ درجه کمتر است :

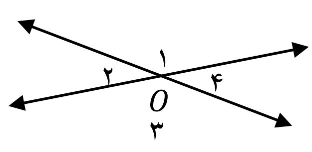


۴) زاویه نیم صفحه : اندازه ی آن ۱۸۰ درجه است :

دو زاویه متقابل به راس : دو زاویه ای که راس مشترک دارند و اضلاع آن در امتداد هم باشند :



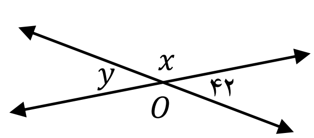
نکته : زاویه های روبه رو در متقابل به راس برابر و زاویه های مجاور مکمل (۱۸۰درجه) هستند :



$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۳ \quad , \quad \hat{O}_۲ = \hat{O}_۴$

$\hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰ \quad , \quad \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰$

مثال : با توجه به شکل داده شده اندازه ی زاویه ها را بنویسید.



$\hat{x} =$ ۱۳۸ درجه

$\hat{y} =$ ۴۲ درجه

(فصل چهارم)

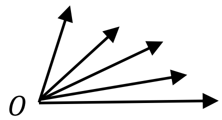
هندسه و استدلال

نکته : برای به دست آوردن تعداد زاویه ها در یک شکل از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\text{تعداد زاویه ها} = \frac{\text{تعداد نیم خط ها} \times \text{یکی کمتر}}{۲}$$

مثال : در شکل مقابل چند زاویه وجود دارد.

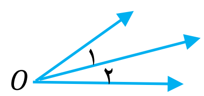
$$\text{تعداد زاویه ها} = \frac{۵ \times ۴}{۲} = ۱۰$$



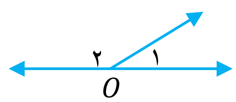
دو زاویه متمم : دو زاویه ای که مجموع آن ها ۹۰ درجه باشد. مانند : $\hat{A} = ۳۷ \quad , \quad \hat{B} = ۵۳$

دو زاویه مکمل : دو زاویه ای که مجموع آن ها ۱۸۰ درجه باشد. مانند : $\hat{C} = ۴۷ \quad , \quad \hat{D} = ۱۳۳$

دو زاویه مجاور : دو زاویه ای که راس و یک ضلع مشترک داشته باشند. مانند : $\hat{O}_۱ \quad , \quad \hat{O}_۲$



دو زایه مجانب : دو زاویه ی مجاوری که مجموع آن ها ۱۸۰ درجه باشد. مانند : $\hat{O}_۱ \quad , \quad \hat{O}_۲$

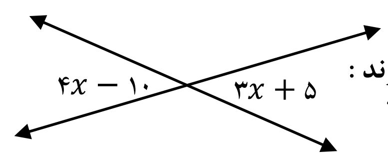


مثال : با توجه به هر شکل اندازه ی زاویه های خواسته شده را بنویسید.

دو زاویه متقابل به راس برابرند :

$\hat{x} = ۱۵$ درجه

$$۴x - ۱۰ = ۳x + ۵$$
$$۴x - ۳x = ۵ + ۱۰$$
$$x = ۱۵$$

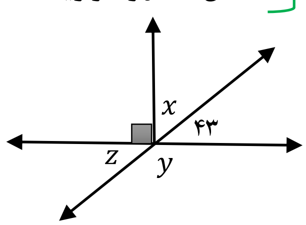


در شکل زیر :
- زاویه ۴۳ و $\hat{x}$ متمم اند و
- زاویه ۴۳ و $\hat{z}$ متقابل به راس اند و
- زاویه $\hat{z}$ و $\hat{y}$ مکمل اند

$\hat{x} = ۴۷$ درجه

$\hat{y} = ۱۳۷$ درجه

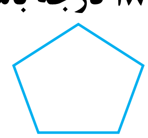
$\hat{z} = ۴۳$ درجه



انواع چند ضلعی ها : ۱) چند ضلعی محدب ۲) چند ضلعی مقعر ۳) چند ضلعی منتظم

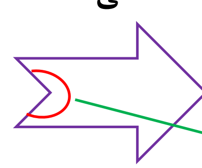
چند ضلعی محدب : چند ضلعی که تمام زاویه های آن کمتر از ۱۸۰ درجه باشد.

مانند :

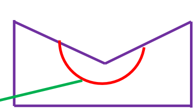


چند ضلعی مقعر : چند ضلعی که حداقل یکی از زاویه های آن از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد.

مانند :



زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه

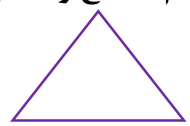
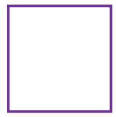


زاویه بزرگتر از ۱۸۰ درجه

(فصل چهارم)

هندسه و استدلال

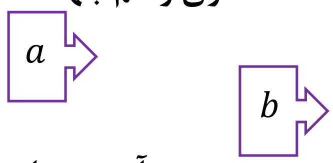
چند ضلعی منتظم : چند ضلعی که تمام اضلاع و تمام زاویه های آن برابر باشند.

مانند : مثلث متساوی الاضلاع  مربع 

انواع تبدیلات هندسی : ۱) انتقال ۲) تقارن ۳) دوران

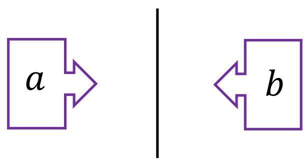
انتقال : وقتی شکلی را در صفحه انتقال دهیم تصویر به دست آمده مساوی و هم جهت شکل اولیه است.

مانند : $a \xrightarrow{\text{انتقال}} b$



تقارن : وقتی قرینه یک شکل را نسبت به یک خط پیدا کنیم تصویر به دست آمده مساوی آن ولی جهت آن تغییر می کند.

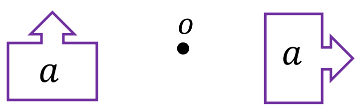
مانند : $a \xrightarrow{\text{تقارن}} b$



دوران : در دوران یک شکل باید مرکز دوران و جهت دوران و مقدار درجه مشخص شود.

مانند : $a \xrightarrow{\text{دوران}} b$

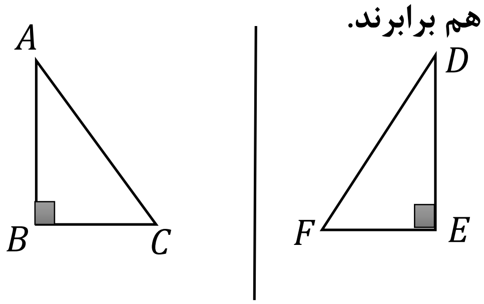
دوران ۱۸۰ درجه نسبت به نقطه



شکل های مساوی (هم نهشت) : اگر شکلی را با یک یا چند تبدیل (انتقال و تقارن یا دوران) در صفحه بر شکل دیگر منطبق کنیم. آن دو شکل با هم مساوی (هم نهشت) هستند.

نکته : دردو شکل هم نهشت اجزای متناظر دو شکل (اضلاع و زاویه ها) با هم برابرند.

مثال : دو مثلث زیر هم نهشت هستند :



الف) نوع تبدیل را مشخص کنید. (تقارن)

ب) هم نهشتی دو مثلث را به زبان ریاضی بنویسید. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

ج) اجزای متناظر دو مثلث را کامل کنید.

$\hat{A} = \hat{D}$ $\qquad AB = DE$

$\hat{C} = \hat{F}$ $\qquad AC = DF$

$\hat{B} = \hat{E}$ $\qquad BC = EF$

(فصل پنجم)

شمارنده ها و اعداد اول

شمارنده ها یا مقسوم علیه های یک عدد : اعدادی که عدد داده شده بر آن ها بخش پذیر باشد.

نکته : اولین شمارنده ی هر عدد یک و آخرین شمارنده ی هر عدد خود آن عدد است.

مثال : شمارنده های اعداد ۹ و ۲۴ و ۴۲ را بنویسید.

شمارنده ۹ = {۱ , ۳ , ۹}   شمارنده ۲۴ = {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۲ , ۲۴}   شمارنده ۴۲ = {۱ , ۲ , ۳ , ۶ , ۷ , ۱۴ , ۲۱ , ۴۲}

عدد اول : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که فقط دو شمارنده داشته باشد عدد اول است.

نکته : عدد اول فقط بر یک و خودش بخش پذیر است.

نکته : تنها عدد زوج که اول باشد عدد ۲ است.

نکته : ترتیب اعداد اول به صورت مقابل است :

اعداد اول = {$\underbrace{۲ , ۳ , ۵ , ۷}_{\text{اعداد اول یک رقمی}}$, ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹ , ...}

عدد مرکب : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که بیش از ۲ شمارنده داشته باشد عدد مرکب است.

نکته : هر عددی طبیعی که بتوان برای آن ضربی غیر از یک نوشت آن عدد مرکب است.

نکته : تمام اعداد زوج (غیر از ۲) مرکب هستند.

نکته : عدد یک نه اول است و نه مرکب. (چون عدد یک فقط یک شمارنده دارد)

نکته : تمام اعداد طبیعی (غیر از یک) حداقل یک شمارنده اول دارند.

مثال : الف) مجموع سومین و هفتمین عدد اول چند است؟   ۵ + ۱۷ = ۲۲

ب) اختلاف بزرگترین و کوچکترین عدد اول دو رقمی چند است؟   ۹۷ − ۱۱ = ۸۶

ج) مجموع دو عدد اول ۲۵ شده است. آن دو عدد اول کدامند؟   ۲۵ = ۲ + ۲۳ (چون مجموع اعداد فرد شده یکی از اعداد باید زوج باشد)

د) از ۱ تا ۲۰ چند عدد مرکب وجود دارد؟ از ۱ تا ۲۰ تعداد اعداد ۲۰ تاست که (۸ عدد اول) و (عدد یک نه اول و نه مرکب

را کم می کنیم :   ۱۱ = ۹ − ۲۰

تجزیه اعداد : برای به دست آوردن شمارنده های اول یک عدد آن را تجزیه می کنیم.

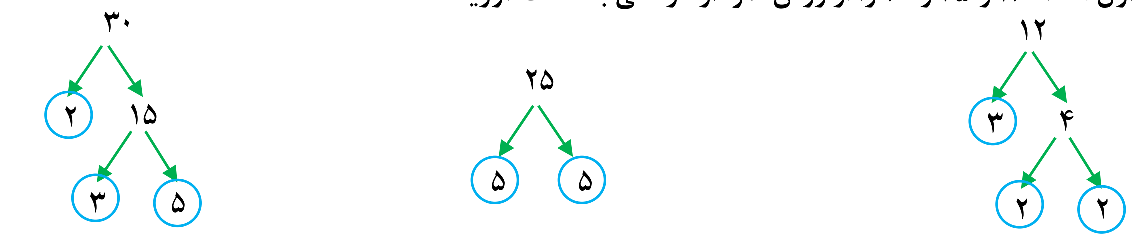
نکته : یکی از روش های تجزیه (نمودار درختی) است که در این روش برای هر عدد یک ضرب بزرگتر از یک نوشته تا وقتی که دیگر نتوان برای عدد یک ضرب نوشت نمودار ادامه پیدا می کند.

نکته : اعداد که نتوان برای آن ها ضربی نوشت جزو شمارنده های اول آن عدد است.

(فصل پنجم)

شمارنده ها و اعداد اول

مثال : شمارند های اول اعداد ۱۲ و ۲۵ و ۳۰ را از روش نمودار درختی به دست آورید.



$۱۲ = ۲ \times ۲ \times ۳$ $\qquad$ $۲۵ = ۵ \times ۵$ $\qquad$ $۳۰ = ۲ \times ۳ \times ۵$

نکته : برای ساده کردن کسرها می توان اعداد را تجزیه کرد سپس شمارنده های مشترک دو عدد را خط زد.

مثال : کسرهای زیر را ساده کنید.

$$\frac{۲۴}{۶۰} = \frac{\cancel{۲ \times ۲} \times ۲ \times \cancel{۳}}{\cancel{۲ \times ۲} \times \cancel{۳} \times ۵} = \frac{۲}{۵}$$

$$\frac{۱۲}{۱۸} = \frac{\cancel{۲} \times ۲ \times \cancel{۳}}{\cancel{۲} \times \cancel{۳} \times ۳} = \frac{۲}{۳}$$

مثال : بزرگترین شمارنده مشترک (ب . م .م) دو عدد ۱۲ و ۳۰ را از روش نوشتن شمارنده ها به دست آورید.

شمارنده ۱۲ $= \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۱۲\}$ $\qquad$ شمارنده ۳۰ $= \{۱ , ۲ , ۳ , ۵ , ۶ , ۱۰ , ۱۵ , ۳۰\}$ $\qquad$ مشترک ۲۴ و ۳۰ $= \{۱ , ۲ , ۳ , ۶\}$

$(۱۲ , ۳۰) = ۶$ ⟵ پرانتز نشانه (ب.م.م) دو عدد است

روش به دست آوردن بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد (از روش تجزیه) : مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) دو عدد را تجزیه می کنیم

۲) دو عدد را به صورت ضرب شمارنده های اول می نویسیم

۳) عدد های مشترک با کمترین تکرار را در هم ضرب می کنیم

مثال : بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد ۴۸ و ۲۰ را از روش تجزیه به دست آورید.

$(۲۰ , ۴۸) = ۲ \times ۲ = ۴$ $\qquad$ $۴۸ = \underline{۲ \times ۲} \times ۲ \times ۲ \times ۳$ $\qquad$ $۲۰ = \underline{۲ \times ۲} \times ۵$

(شمارنده مشترک دو عدد ۲ است و کمترین تکرار هم ۲ بار است)

نکاتی درباره (ب.م.م) اعداد :

۱) از (ب.م.م) اعداد برای ساده کردن کسرها استفاده می شود.

۲) (ب.م.م) هر عدد با یک برابر با یک است : $(۱۲ , ۱) = ۱$

۳) (ب.م.م) هر عدد با خودش همان عدد می شود : $(۱۵ , ۱۵) = ۱۵$

۴) (ب.م.م) دو عدد اول مختلف یک می شود : $(۵ , ۱۳) = ۱$

۵) اگر دو عدد بر هم بخش پذیر باشند (ب.م.م) آن دو عدد برابر با عدد کوچکتر می شود : $(۶ , ۱۸) = ۶$

۶) (ب.م.م) دو عدد متوالی (پشت سر هم) همواره یک است : $(۳۲ , ۳۳) = ۱$

(فصل پنجم)

شمارنده ها و اعداد اول

مضرب های طبیعی یک عدد : اگر یک عدد را به ترتیب در اعداد طبیعی ضرب کنیم مضارب آن عدد به دست می آید.

مثال : مضارب طبیعی اعداد ۸ و ۱۵ را بنویسید.

مضارب ۱۵ = {۱۵ , ۳۰ , ۴۵ , ۶۰, ...}

۸ × ۱ ، ۸ × ۲ ، ۸ × ۳ ، ۸ × ۴

مضارب ۸ = {۸ , ۱۶ , ۲۴ , ۳۲ , ...}

نکته : اولین مضرب طبیعی هر عدد خودعدد و آخرین مضرب آن مشخص نیست.

مثال : الف) هفتمین مضرب عدد ۱۲ چند است؟ ۷ × ۱۲ = ۸۴

ب) آیا ۱۴۲ مضرب عدد ۳ است؟ چرا؟ خیر . چون اگر ۱۴۲ را بر ۳ تقسیم کنیم باقیمانده تقسیم صفر نمی شود.

ج) سه مضرب مشترک ۵ و ۷ را بنویسید؟ {۳۵ , ۷۰ , ۱۰۵}

مثال) کوچکترین مضرب مشترک (ک . م .م) دو عدد ۶ و ۱۵ را از روش نوشتن مضرب های دو عدد به دست آورید.

مضارب ۱۵ = {۱۵ , ۳۰ , ۴۵ , ۶۰ , ...}

مضارب ۶ = {۶ , ۱۲ , ۱۸ , ۲۴ , ۳۰ , ۳۶ , ۴۲ , ۴۸ , ۵۴ , ۶۰, ...}

۳۰ = [۶ , ۱۵] ← کروشه نشانه (ک.م.م) دو عدد است

مشترک ۶ و ۱۵ = {۳۰ و ۶۰ و ۹۰ , ...}

روش به دست آوردن کوچکترین مضرب مشترک دو عدد (ازروش تجزیه) : مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) دو عدد را تجزیه می کنیم

۲) دو عدد را به صورت ضرب شمارنده های اول می نویسیم

۳) عدد های مشترک با بیشترین تکرار و عددهای غیر مشترک را در هم ضرب می کنیم

مثال : بزرگترین شمارنده مشترک دو عدد ۶۰ و ۷۲ را از روش تجزیه به دست آورید.

[۶۰ , ۷۲] = ۲ × ۲ × ۲ × ۳ × ۳ × ۵ = ۳۶۰

۷۲ = ۲ × ۲ × ۲ × ۳ × ۳

۶۰ = ۲ × ۲ × ۳ × ۵

(شمارنده مشترک دو عدد ۲ و ۳ است و بیشترین تکرار ۲ سه بار و ۳ دو بار است)

نکاتی درباره (ک.م.م) اعداد :

۱) از (ک.م.م) اعداد برای مخرج مشترک کسرها استفاده می شود.

۲) (ک.م.م) هر عدد با یک برابر با خود عدد است : ۱۲ = (۱۲ ,۱)

۳) (ک.م.م) هر عدد با خودش همان عدد می شود : ۱۵ = (۱۵ , ۱۵)

۴) (ک.م.م) دو عدد اول مختلف برابر با حاصل ضرب آن دو می شود : ۶۵ = (۵ , ۱۳)

۵) اگر دو عدد بر هم بخش پذیر باشند (ک.م.م) آن دو عدد برابر با عدد بزرگتر می شود : ۱۸ = (۶ , ۱۸)

(فصل ششم)

سطح و حجم

حجم : مقدار فضایی که یک جسم اشغال می کند حجم نام دارد و حجم را با حرف v نشان می دهند.

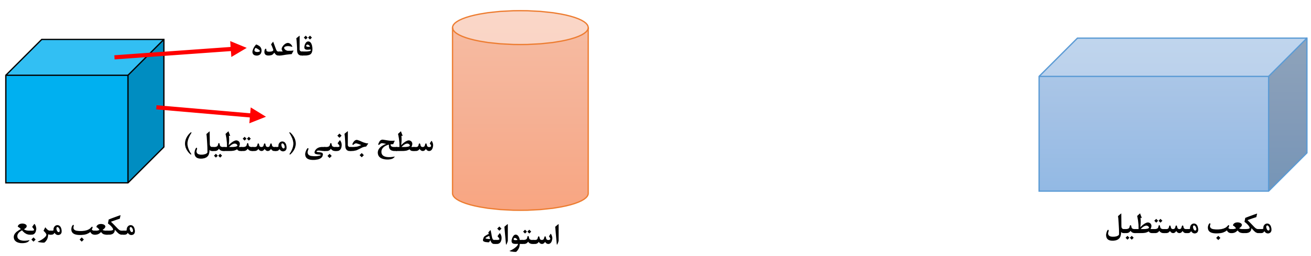
انواع حجم : ۱) حجم هندسی ۲) حجم غیر هندسی

حجم هندسی : دارای شکل ها و خواص مشخص و تعریف شده هستند.

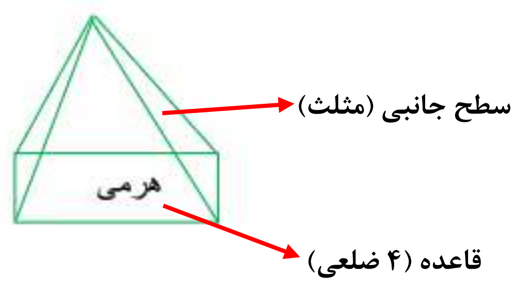
حجم غیر هندسی : دارای شکل ها و خواص مشخص و تعریف شده نیستند.

انواع حجم هندسی : ۱) حجم منشوری ۲) حجم مخروطی و هرمی ۳) حجم کروی

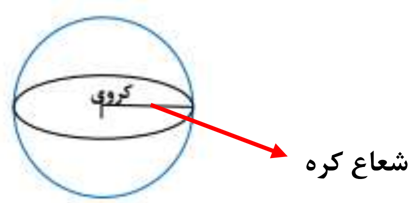
مشخصات حجم منشوری : دارای دو قاعده مساوی و سطح جانبی (کناری) از مستطیل تشکیل شده است :



مشخصات حجم مخروطی و هرمی : دارای یک قاعده (چند ضلعی) و سطح جانبی که از مثلث تشکیل شده در یک راس مشترک هستند:



مشخصات حجم کروی : گرد هستند. قاعده و زاویه ندارند :



(فصل ششم)

سطح و حجم

اجزای شکل های منشوری : **۱) قاعده :** دو سطح بالا و پایین را قاعده می گویند.

۲) وجه جانبی : به سطح اطراف (کناری) وجه جانبی می گویند.

۳) یال : از برخورد هر دو وجه یال به وجود می آید.

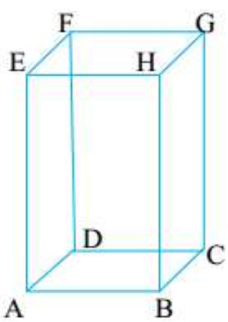
۴) راس : محل برخورد هر سه وجه یا محل برخورد یال ها را راس می گویند.

۵) ارتفاع : فاصله بین دو قاعده را ارتفاع می گویند.

نکته : برای تعداد یال یک شکل منشوری از رابطه مقابل استفاده می کنیم : ۳ × تعداد وجه = تعداد یال

نکته : برای تعداد راس یک شکل منشوری از رابطه مقابل استفاده می کنیم : ۲ × تعداد وجه = تعداد راس

مثال : با توجه به شکل داده شده به سوالات پاسخ دهید :



الف) تعداد قاعد و نام هر قاعده : دارای دو قاعده – $(ABCD\ , EFGH)$

ب) تعداد یال و نام دو یال را بنویسید : ۱۲ = ۳ × ۴ = تعداد یال – (EH, HB)

ج) تعداد راس و نام سه راس را بنویسید : ۸ = ۲ × ۴ = تعداد راس – (E, B, H)

د) تعداد کل وجه ها و تعداد وجه جانبی : تعداد کل وجه ها ۶ وجه – تعداد وجه جانبی ۴ وجه

ه) تعداد ارتفاع و نام دو ارتفاع را بنویسید : تعداد ارتفاع ۴ تا – $(AE - HB)$

مثال : در یک منشور ۱۰ پهلو :

تعداد وجه : ۱۰ وجه   تعداد راس : ۲۰ = ۲ × ۱۰   تعداد یال : ۳۰ = ۳ × ۱۰   تعداد قاعده : ۲ تا

رابطه حجم منشوری : برای به دست آوردن حجم منشوری از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

رابطه به صورت کلامی : **ارتفاع × مساحت قاعده = حجم منشور**

رابطه به صورت جبری : $$v = s \times h$$

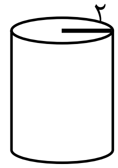
(فصل ششم)

سطح و حجم

مثال : حجم هر شکل را به دست آورید.

مساحت دایره

$v = s \times h$



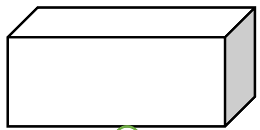
۲

ارتفاع (h) ۵

$v = (۲ \times ۲ \times ۳/۱۴) \times ۵ = ۶۲/۸$

مساحت مستطیل

$v = s \times h$



۳

۲

$v = (۲ \times ۳) \times ۶ = ۳۶$

ارتفاع (h) ۶

مثال : قاعده یک منشور سه پهلو مثلث قائم الزاویه که اضلاع قائم آن ۳ و ۴ سانتی متر است. اگر ارتفاع منشور ۸ سانتی متر باشد حجم منشور را به دست آورید.

$$v = s \times h \Longrightarrow v = \left(\frac{۳\times۴}{۲}\right) \times ۸ \Longrightarrow v = ۶ \times ۸ = ۴۸\ cm^۳$$

مثال : قاعده هر یک از منشورهای زیر از دید بالا چه شکلی است.

استوانه : دایره　　　مکعب : مربع　　　۵ پهلو : ۵ ضلعی　　　سه پهلو : مثلث

مساحت جانبی منشور : از مجموع سطح های جانبی منشور مساحت جانبی حاصل می شود :

رابطه به صورت کلامی : **ارتفاع × محیط قاعده = مساحت جانبی**

رابطه به صورت جبری : $\boldsymbol{s = p \times h}$

مثال : مساحت جانبی مکعب مستطیلی را به دست آورید که طول و عرض و ارتفاع آن به ترتیب ۵ و ۳ و ۴ سانتی متر باشد.

محیط مستطیل

$s_{\text{جانبی}} = p \times h \Longrightarrow s = [(۵ + ۳) \times ۲] \times ۴ \Longrightarrow s = ۶۴\ cm^۲$

مساحت کل منشور : از مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده مساحت کل منشور حاصل می شود :

رابطه به صورت کلامی : **مساحت دو قاعده + مساحت جانبی = مساحت کل**

رابطه به صورت جبری : $\boldsymbol{s}_{\text{کل}} = \boldsymbol{s}_{\text{جانبی}} + \boldsymbol{s}_{\text{دو قاعده}}$

مثال : شعاع قاعده استوانه ۳ سانتی متر و ارتفاع آن ۱۰ سانتی متر است. مساحت کل استوانه چند سانتی متر مربع است.

$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + s_{\text{دو قاعده}}$

$s_{\text{کل}} = ۱۸۸/۴ + ۵۶/۵۲$

$\boxed{s_{\text{کل}} = ۲۴۴/۹۲cm^۲}$

$s_{\text{قاعده}} = \pi r^۲$

$s_{\text{قاعده}} = ۳ \times ۳ \times ۳/۱۴ = ۲۸/۲۶$

$s_{\text{دو قاعده}} = ۲۸/۲۶ \times ۲ = ۵۶/۵۲cm^۲$

$s_{\text{جانبی}} = p \times h$

$s_{\text{جانبی}} = (۶ \times ۳/۱۴) \times ۱۰ = ۱۸۸/۴$

$s_{\text{جانبی}} = ۱۸۸/۴\ cm^۲$

(فصل هفتم)

توان و جذر

توان : اگر عددی چند بار در خودش ضرب شده باشد. برای مختصر نویسی از توان استفاده می شود.

مانند :

$\underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n\ \text{بار}} = a^{n}$ توان / پایه (a به توان n)

$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^{۴}$ توان / پایه (۳ به توان ۴)

نکته : هر عدد یا عبارتی که توان نداشته باشد توان آن یک است. عددی که توان آن یک باشد برابر با خود آن عدد است.

مانند : $x = x^{۱}$ $\qquad$ $۸^{۱} = ۸$

نکته : عدد یک به هر توانی که باشد. حاصل برابر با یک است.

مانند : $۱^{۲۰۰} = ۱$

نکته : هر عبارت یا عددی (غیر از صفر) به توان صفر باشد. حاصل برابر با یک است.

مانند : $a^{۰} = ۱$ $\qquad$ $۶^{۰} = ۱$

نکته : عدد منفی داخل پرانتز باشد علامت منفی به تعداد توان ضرب می شود. اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد منفی به توان مربوط نیست.

مانند : $-۴^{۲} = -(۴ \times ۴) = -۱۶$ $\qquad$ $(-۴)^{۲} = -۴ \times -۴ = ۱۶$

نکته : عدد کسری داخل پرانتز باشد صورت و مخرج به همان تعداد توان ضرب می شود. اگر عدد کسری داخل پرانتز نباشد فقط عددی به توان ضرب می شود که توان بالای آن قرار داشته باشد.

مانند : $\frac{۲}{۳^{۲}} = \frac{۲}{۳ \times ۳} = \frac{۲}{۹}$ $\qquad$ $\frac{۲^{۲}}{۳} = \frac{۲ \times ۲}{۳} = \frac{۴}{۳}$ $\qquad$ $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} = \frac{۴}{۹}$

نکته : عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل عددی منفی می شود.

مانند : $(-۳)^{۳} = -۲۷$ توان فرد $\qquad$ $(-۳)^{۴} = ۸۱$ توان زوج

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\frac{-۳^{۲} + ۱^{۸} - ۲^{۲}}{۶^{۲} \div ۲^{۲}} = \frac{-۹ + ۱ - ۴}{۳۶ \div ۴} = -\frac{۱۲}{۹} = -\frac{۴}{۳}$$

$$۴^{۳} - ۲^{۵} + ۹^{۰} = ۶۴ - ۳۲ + ۱ = ۳۳$$

(فصل هفتم)

توان و جذر

مجذور یا مربع یک عدد : به توان دوم هر عدد مجذور یا مربع آن عدد گفته می شود.

مانند : مربع عدد ۶ برابر است با : $۶^{۲} = ۳۶$

مکعب یک عدد : به توان سوم هر عدد مکعب آن عدد گفته می شود.

مانند : مکعب عدد ۶ برابر است با : $۶^{۳} = ۲۱۶$

مثال : الف) مجموع مربع ۵ و مکعب ۴ را به دست آورید. $۵^{۲} + ۴^{۳} = ۲۵ + ۶۴ = ۸۹$

ب) اختلاف مکعب و مجذور ۰/۳ را به دست آورید. $(۰/۳)^{۳} - (۰/۳)^{۲} = ۰/۰۲۷ - ۰/۰۹ = ۰/۰۶۳$

اولویت های ریاضی : اگر چند علامت ریاضی با هم باشند از اولویت ریاضی استفاده می شود :

۱) ابتدا داخل پرانتز جواب داده می شود و اگر چند پرانتز باشد از داخل ترین پرانتز جواب می دهیم.

۲) توان یا جذر　　　۳) ضرب و تقسیم　　　۴) جمع و تفریق

نکته : اگر از یک اولویت هر دو با هم باشند یعنی ضرب و تقسیم با هم باشند از علامتی زودتر استفاده می کنیم که به سمت چپ نزدیکتر باشد.

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$۵ - ۵ \times ۲^{۳} \div ۴ = ۵ - ۵ \times ۸ \div ۴ = ۵ - ۴۰ \div ۴ = ۵ - ۱۰ = -۵$$

$$۴ + ۳^{۲} - (۵^{۲} - ۲۴)^{۱۰} = ۴ + ۳^{۲} - (۲۵ - ۲۴)^{۱۰} = ۴ + ۳^{۲} - ۱^{۱۰} = ۴ + ۹ - ۱ = ۱۲$$

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند : $۴^{۷} \times ۴^{۳} = ۴^{۱۰}$　　　$a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند : $۱۲^{۷} \times ۳^{۷} = ۳۶^{۷}$　　　$a^m \times b^m = (ab)^m$

مثال : حاصل هر عبارت را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$\underline{۴^{۵}} \times ۱۲^{۷} \times \underline{۳^{۵}} = ۱۲^{۵} \times ۱۲^{۷} = ۱۲^{۱۲}$　　　$(۲/۵)^{۳} \times ۶^{۳} = (۲/۵ \times ۶)^{۳} = ۱۵^{۳}$

(فصل هفتم)

توان و جذر

مسعودزیرکاری

مثال : اگر $۱۰۲۴ = ۲^{۱۰}$ باشد حاصل $۲^{۱۲}$ و $۲^{۱۵}$ را به دست آورید.

$$۲^{۱۵} = ۲^{۱۰} \times ۲^{۵} = ۱۰۲۴ \times ۳۲ = ۳۲۷۶۸ \qquad ۲^{۱۲} = ۲^{۱۰} \times ۲^{۲} = ۱۰۲۴ \times ۴ = ۴۰۹۶$$

مثال : اگر $۵ = ۳^{a}$ باشد حاصل $۳^{a+۲}$ را به دست آورید.

$$۳^{a+۲} = ۳^{a} \times ۳^{۲} = ۵ \times ۹ = ۴۵$$

جذر یا ریشه دوم اعداد : در تساوی $\left[۹ = ۲^{(۳-)} \,,\, ۹ = ۳^{۲}\right]$ عدد ۹ را مجذور اعداد ۳ و ۳- می گویند. و اعداد ۳ و ۳- ریشه های دوم ۹ می گویند.

نکته : هر عدد دارای دو ریشه دوم است که یکی قرینه ی دیگری است.

مانند : ریشه های دوم عدد ۳۶ برابر است با : ۶ و ۶-

نکته : در جذر گیری فقط عدد مثبت آن در نظر گرفته می شود و جذر را با رادیکال ($\sqrt{\quad}$) نشان می دهند.

نکته : اعداد منفی جذر ندارند. چون مجذور هیچ عددی ؛ منفی نمی شود.

نکته : جذر اعداد صفر و یک برابر با خود آن اعداد است.

مثال : جذر اعداد زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{۴۹ \times ۲۵} = ۷ \times ۵ = ۳۵ \qquad \sqrt{\frac{۴}{۹}} = \frac{۲}{۳} \qquad \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

جذر تقریبی اعداد : برای به دست آوردن جذر تقریبی اعداد مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) ابتدا مشخص می کنیم عدد داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

۲) سپس عدد وسط دو عدد را مشخص کرده و مجذور آن را می نویسیم.

۳) سپس اگر مجذور عدد وسطی از عدد داده شده بیشتر بود ۴ عدد کمتر از عدد وسطی و اگر از عدد داده شده کمتر بود ۴ عدد بزرگتر از عدد وسطی را می نویسیم.

۴) داخل یک جدول مجذورهای ۴ عدد را نوشته سپس مجذور عددی که به عدد داده شده نزدیکتر بود همان جذر تقریبی عدد است.

نکته : برای این که بدانیم عدد داده شده بین کدام دو صحیح متوالی قرار دارد مجذور دو عددی را مشخص می کنیم که به عدد داده شده نزدیک باشد.

(فصل هفتم)

توان و جذر

مثال : مشخص عدد $\sqrt{۳۲}$ و $\sqrt{۸۳}$ بین کدام دو عدد قرار دارد و به کدام عدد نزدیکتر است.

$\sqrt{\cancel{۸۱}}^{\,۹} < \sqrt{۸۳} < \sqrt{\cancel{۱۰۰}}^{\,۱۰}$ (بین ۹ و ۱۰ که به ۹ نزدیکتر است)

$\sqrt{\cancel{۲۵}}^{\,۵} < \sqrt{۳۲} < \sqrt{\cancel{۳۶}}^{\,۶}$ (بین ۵ و ۶ که به ۶ نزدیکتر است)

مثال : جذر تقریبی عدد ۴۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$۶ \rightarrow ۶/۵ \leftarrow ۷$

$\sqrt{\cancel{۳۶}} < \sqrt{۴۷} < \sqrt{\cancel{۴۹}}$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$(۶/۵)^۲ = ۴۲/۲۵$

مرحله ۳

$۴۲/۲۵ < ۴۷$

چون مجذور عدد وسط کمتر از عدد شده مجذور

۴ عدد بزرگتر از عدد وسط را می نویسیم

مرحله ۴

عدد	۶/۶	۶/۷	۶/۸	۶/۹
مجذور عدد	۴۳/۵۶	۴۴/۸۹	۴۶/۲۴	۴۷/۶۱

$\sqrt{۴۷} \simeq ۶/۸$

مثال : جذر تقریب عدد ۶۶ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$۸ \rightarrow ۸/۵ \leftarrow ۹$

$\sqrt{\cancel{۶۴}} < \sqrt{۶۶} < \sqrt{\cancel{۸۱}}$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$(۸/۵)^۲ = ۷۲/۲۵$

مرحله ۳

$۷۲/۲۵ > ۶۶$

چون مجذور عدد وسط بیشتر از عدد شده مجذور

۴ عدد کوچکتر از عدد وسط را می نویسیم

مرحله ۴

عدد	۸/۱	۸/۲	۸/۳	۸/۴
مجذور عدد	۶۵/۶۱	۶۷/۲۴	۶۸/۸۹	۷۰/۵۶

$\sqrt{۶۶} \simeq ۸/۱$

نکته : یکی از کاربرد های جذر در مساحت شکل های هندسی مانند مربع و دایره است.

مثال : مساحت مربعی ۶/۲۵ شده است. طول یک ضلع مربع چند است.

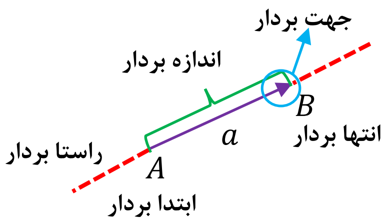
$\text{مساحت مربع} = \text{یک ضلع} \times \text{خودش} \Longrightarrow \sqrt{۶/۲۵} = ۲/۵ \longrightarrow$ یک ضلع مربع

مثال : مساحت دایره ای ۲۸/۲۶ شده است. شعاع دایره چند است.

$\text{مساحت دایره} = \text{شعاع} \times \text{شعاع} \times ۳/۱۴ \Longrightarrow \text{شعاع} \times \text{شعاع} = \frac{۲۸/۲۶}{۳/۱۴} = ۹ \Longrightarrow \sqrt{۹} = ۳ \longrightarrow$ شعاع دایره

(فصل هشتم)

بردار و مختصات

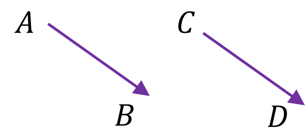


بردار : پاره خط جهت داری است که دارای ابتدا ، انتها ، و راستا باشد.

نکته : بردار را با دو حرف یا با یک حرف نام گذاری می کنند : $\left(\overrightarrow{AB}\right.$ **یا** $\left.\vec{a}\right)$

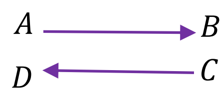
دو بردار مساوی : دو بردار در صورتی مساویند که : هم اندازه ، هم جهت و هم راستا باشند.

مانند : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$



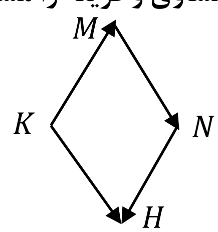
دو بردار قرینه : دو بردار در صورتی قرینه اند که : هم اندازه ، هم راستا ولی خلاف جهت یکدیگر باشند.

مانند :



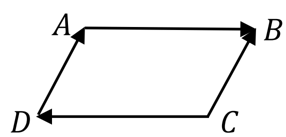
نکته : حاصل جمع هر بردار با قرینه خودش برابر با صفر است : $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = ۰\right)$

مثال : در هر شکل بردارهای مساوی و قرینه را مشخص کنید.



بردارهای مساوی $\left(\overrightarrow{KH}, \overrightarrow{MN}\right)$:

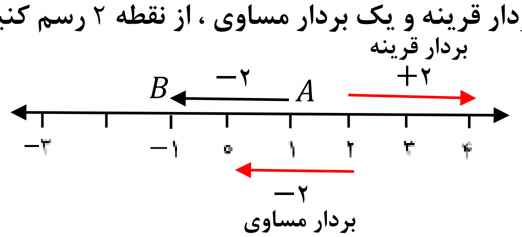
بردارهای قرینه $\left(\overrightarrow{KM}, \overrightarrow{NH}\right)$:



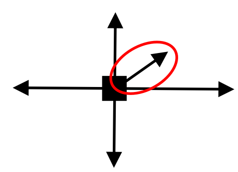
بردارهای مساوی $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{CB}\right)$:

بردارهای قرینه $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$:

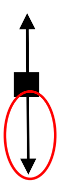
مثال : با توجه به بردار رسم شده زیر یک بردار قرینه و یک بردار مساوی ، از نقطه ۲ رسم کنید.



مثال : با توجه به نیروهای وارده شده به هر شکل ، جسم به کدام سمت حرکت می کند؟چرا؟



چون نیرو های دیگر همدیگر را خنثی می کنند



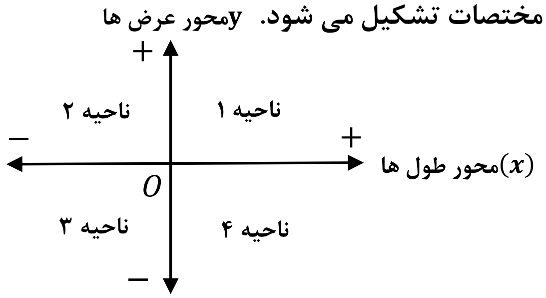
چون نیرو وارده شده بیشتر است

دستگاه مختصات : از عمود شدن دو محور اعداد ، دستگاه مختصات تشکیل می شود.

(محور افقی ، محور طول ها (x) نام دارد)

(محور عمودی ، محور عرض ها (y) نام دارد)

(نقطه برخورد دو محور ، مبدا مختصات (O) نام دارد)



(فصل هشتم)

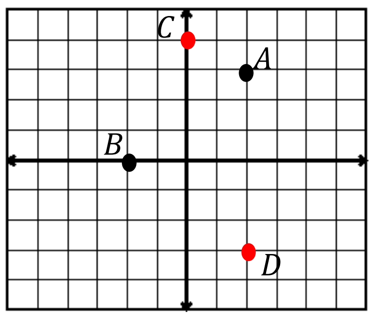
بردار و مختصات

نکته : برای دست آوردن مختصات نقاط از مبدا مختصات اول طول (افقی) و بعد عرض (عمودی) را می شماریم.

نکته : مختصات نقطه و بردار را به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ نشان می دهند. که عدد بالا طول و عدد پایین عرض مختصات نام دارد.

نکته : نقاطی که روی محور طول ها قرار داشته باشند عرض آن ها صفر و نقاطی که روی محور عرض ها قرار داشته باشند طول

آن ها صفر است.



مثال : با توجه به دستگاه مختصات مقابل :

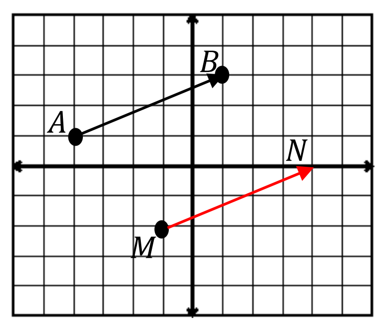
الف) مختصات نقاط A و B را بنویسید. $B = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۰ \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$

ب) نقاط $C = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۴ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات نشان دهید.

نکته : برای به دست آوردن مختصات یک بردار از ابتدا بردار اول طول بعد عرض را می شماریم.

نکته : برای نوشتن جمع برای یک بردار از رابطه ی (انتها بردار = اندازه بردار + ابتدا بردار) استفاده می کنیم.

مثال : با توجه به دستگاه مختصات زیر :



الف) مختصات نقاط A و B را بنویسید. $B = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $A = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$

ب) مختصات بردار $\overrightarrow{AB}$ را بنویسید. $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix}$

ج) جمع متناظر بردار $\overrightarrow{AB}$ را بنویسید. $A + \overrightarrow{AB} = B \Longrightarrow \begin{bmatrix} -۴ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۵ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix}$

د) نقطه M را با بردار انتقال $\overrightarrow{AB}$ به نقطه N منتقل کرده و مختصات نقطه N را بنویسید. $N = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix}$

مثال : الف) اگر مختصات $A = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix}$ باشد مختصات نقطه B چند است.

$$A + \overrightarrow{AB} = B \Longrightarrow \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ \\ -۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

ب) اگر مختصات $C = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۷ \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$ باشد. مختصات بردار $\overrightarrow{CD}$ چند است.

$$C + \overrightarrow{CD} = D \Longrightarrow \begin{bmatrix} -۳ \\ -۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ ۶ \end{bmatrix}$$

(فصل هشتم)

بردار و مختصات

نکته : قرینه هر بردار نسبت به محور طول ها ، عرض قرینه می شود.

مانند : $\vec{a} = \begin{bmatrix} -۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور طول ها}} \vec{\acute{a}} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$

نکته : قرینه هر بردار نسبت به محور عرض ها ، طول قرینه می شود.

مانند : $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۵ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض ها}} \vec{\acute{a}} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$

نکته : قرینه هر بردار نسبت به مبدا مختصات ، طول و عرض قرینه می شوند.

مانند : $\vec{a} = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۴ \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدا مختصات}} \vec{\acute{a}} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۴ \end{bmatrix}$

جمع و تفریق مختصات : طول با طول و عرض با عرض جمع و تفریق می شوند.

مثال : حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ \\ ۷ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۶ \\ ۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳-۱+۶ \\ ۲+۷-۱۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۵ \\ ۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵+۲ \\ ۷-۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

مثال : مقدار x و y را در مختصات های زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} -۸ \\ ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۲ \\ -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -۸+x=-۲ \Rightarrow x=۶ \\ ۳+y=-۶ \Rightarrow y=-۹ \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} ۲x \\ -۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۳ \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ۲x-۳=۵ \Rightarrow ۲x=۸ \Rightarrow x=۴ \\ -۴-y=-۶ \Rightarrow -y=-۲ \Rightarrow y=۲ \end{cases}$$

(فصل نهم)

آمار و احتمال

علم آمار : جمع آوری اطلاعات عددی و بررسی ، تجزیه ، تحلیل اطلاعات را علم آمار می گویند.

داده آماری : اطلاعات عددی را داده آماری می گویند.

انواع نمودار :

۱) نمودار ستونی : برای مقایسه تعداد و مشخص کردن کمترین و بیشترین داده آماری استفاده می شود.

۲) نمودار خط شکسته : برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص کاربرد دارد.

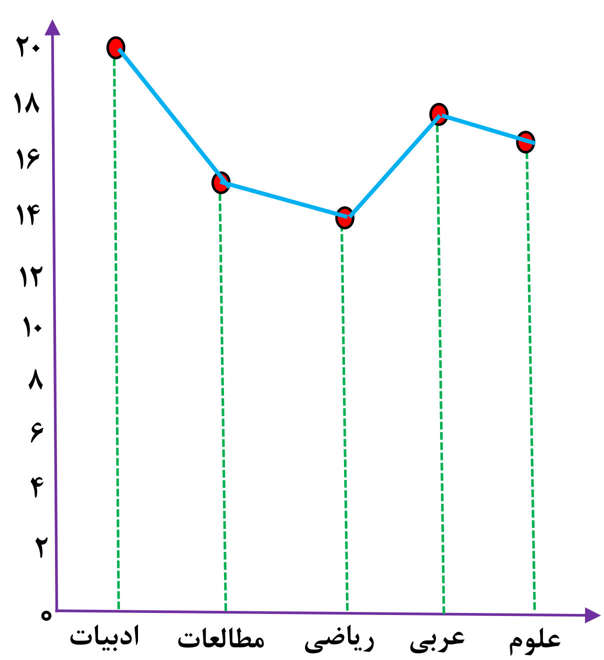
۳) نمودار تصویری : برای مقایسه داده های تقریبی کاربرد دارد.

۴) نمودار دایره ای : برای نشان دادن نسبت داده ها به کل و سهم هر بخش کاربرد دارد.

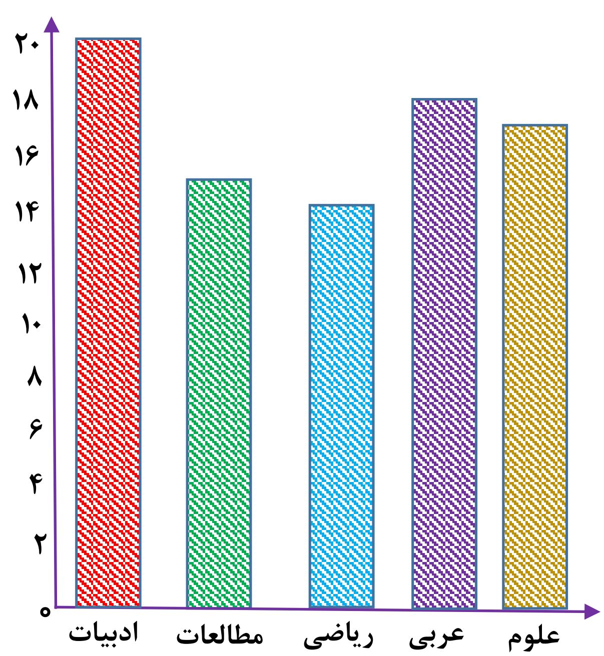
مثال : نمودار میله ای و خط شکسته جدول زیر را رسم کنید.

نام درس	ادبیات	مطالعات	ریاضی	عربی	علوم
نمره درس	۲۰	۱۵	۱۴	۱۸	۱۷

(نمودار خط شکسته)



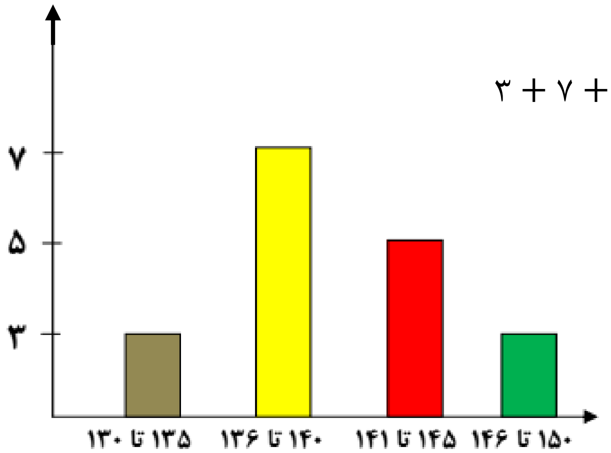
(نمودار میله ای یا ستونی)



(فصل نهم)

آمار و احتمال

مثال : با توجه به نمودار میله ای (نمودار قد دانش آموزان یک کلاس) به سوالات پاسخ دهید :



الف) کل کلاس چند نفر است؟ ۱۸ نفر   ۳ + ۷ + ۵ + ۳ = ۱۸

ب) قد چند نفر از ۱۴۰ سانتی متر بیشتر است؟ ۸ نفر

ج) قد چند نفر از ۱۴۶ سانتی متر کمتر است؟ ۱۵ نفر

د) قد چند نفر بین ۱۳۰ تا ۱۴۰ سانتی متر است؟ ۱۰ نفر

نکته : برای داده ها می توان از چوب خط استفاده کرد که اگر تعداد داده ها زیاد بود در دسته های ۵ تایی قرار می گیرند.

مثال : جدول زیر را کامل کنید : (تعداد نمرات بالا یک کلاس در درس ها)

نام	احسان	علی	محمد	حامد	حسین
چوب خط	///	𝍸 //	𝍸 ////	𝍸 𝍸	////
تعداد	۳	۷	۹	۱۰	۴

مثال : جمعیت چند دبیرستان شهر زاهدان به صورت زیر است :

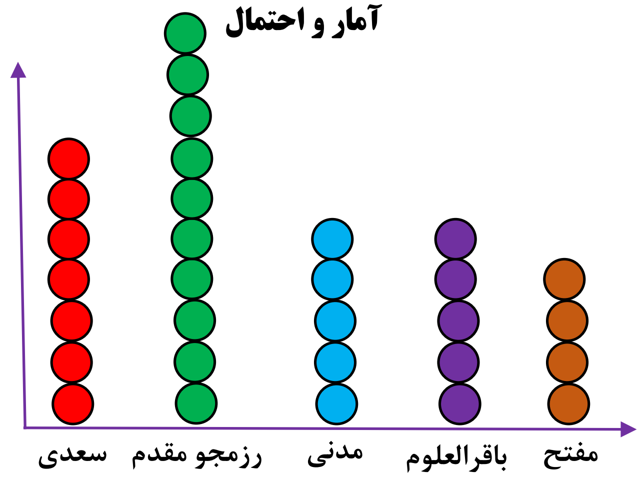
الف) جدول زیر را کامل کنید :

نام دبیرستان	سعدی	شهید رزمجو مقدم	شهید مدنی	باقر العلوم	مفتح
تعداد دانش آموز	۷۲۷	۱۱۴۰	۵۲۳	۴۸۰	۳۵۷
گرد شده با تقریب کمتر از ۱۰۰	۷۰۰	۱۰۰۰	۵۰۰	۵۰۰	۴۰۰

ب) با انتخاب هر ۱۰۰ نفر با نماد نمودار تصویری جدول را رسم کنید :

(فصل نهم)

آمار و احتمال



مثال : جدول زیر تعداد کتاب امانت گرفته شده دانش آموزان دبیرستان است.

الف) جدول داده شده را کامل کنید :

نوع کتاب	مذهبی	داستانی	علمی	کمک درسی	سایر موارد
تعداد	۳۹۰	۲۱۰	۸۱۰	۴۰۰	۱۹۰
درصد تقریبی	٪۲۰	٪۱۰	۴۰٪	۲۰٪	۱۰٪
کسر تقریبی با مخرج ۱۰	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$	$\frac{۴}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۱}{۱۰}$

کل کتاب ها $۲۰۰۰ \simeq ۱۹۰۰$

مذهبی $۲۰٪ = \frac{۲۰}{۱۰۰} = \frac{۴۰۰}{۲۰۰۰}$

مذهبی $\frac{۲}{۱۰} = \frac{۲۰}{۱۰۰}$

ب) نمودار دایره ای جدول را رسم کنید : یک دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و با توجه به صورت کسر هر قسمت را رنگ می زنیم.

احتمال : برای اندازه گیری شانس رخ دادن یک اتفاق ، از یک عدد استفاده می کنیم که احتمال رخ دادن آن اتفاق نام دارد.

نکته : احتمال رخ دادن یک اتفاق از رابطه ی به دست می آید :

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت ها}}$$

(فصل نهم)

آمار و احتمال

نکته : احتمالی که رخ دادن آن غیر ممکن باشد با عدد صفر نشان می دهند.

مانند : احتمال آمدن عدد ۷ در پرتاب یک تاس.

نکته : احتمال ممکن را با عدد کسری بین صفر تا یک نشان می دهند.

مانند : احتمال آمدن " رو " در پرتاب یک سکه.

نکته : احتمال حتمی را با عدد یک نشان می دهند.

مانند : احتمال آمدن فصل بهار بعد از فصل زمستان.

مثال : در هر یک از موارد زیر تعداد کل حالت و همه حالت های ممکن را بنویسید.

الف) ماه های زمستان **تعداد کل حالت : ۳ حالت** **همه ی حالت های ممکن : (دی ، بهمن ، اسفند)**

ب) زدن پنالتی در فوتبال **تعداد کل حالت : ۲ حالت** **همه ی حالت های ممکن : (گل شدن ، گل نشدن)**

ج) عدد های زوج طبیعی کمتر از ۱۰ **تعداد کل حالت : ۴حالت** **همه ی حالت های ممکن :** $\{۲ , ۴ , ۶ , ۸\}$

مثال : در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را به دست آورید. $\text{اعداد تاس} = \{۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵ , ۶\} \Longrightarrow \text{کل حالت ها} = ۶$

الف) احتمال آمدن مضرب ۳ : $\text{مضرب ۳} = \{۳ , ۶\} \Longrightarrow \text{حالت مطلوب} = ۲ \Longrightarrow \text{احتمال} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$

ب) احتمال آمدن اعداد کوچکتر از ۴ : $\text{اعداد کوچکتر از ۴} = \{۱ , ۲ , ۳\} \Longrightarrow \text{حالت مطلوب} = ۳ \Longrightarrow \text{احتمال} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

ج) احتمال آمدن اعداد اول : $\text{اعداد اول} = \{۲ , ۳ , ۵\} \Longrightarrow \text{حالت مطلوب} = ۳ \Longrightarrow \text{احتمال} = \frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

مثال : در یک کیسه ۴ مهره قرمز ، ۲ مهره زرد و ۳ مهره سفید است. یک مهره را تصادفاً بیرون می آوریم :

الف) احتمال بیرون آمدن مهره قرمز : $\text{حالت مطلوب} = ۴ \Longrightarrow \text{احتمال} = \frac{۴}{۹}$ $\text{کل حالت ها} = ۴ + ۲ + ۳ = ۹$

ب) احتمال بیرون نیامدن مهره سفید : $\text{حالت مطلوب} = ۴ + ۲ = ۶ \Longrightarrow \text{احتمال} = \frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$

ج) اگر این بیرون آوردن یک مهره را ۳۰۰ بار تکرار کنیم انتظار دارید چند بار مهره سفید بیرون بیاید :

$\text{احتمال مهره سفید} = \frac{۳}{۹} = \frac{۱}{۳}$ $۳۰۰ \times \frac{۱}{۳} = ۱۰۰$ بار

سال هشتم

(فصل اول)

عددهای صحیح و گویا

یادآوری اعداد صحیح : اعداد صحیح از سه دسته تشکیل شده است : (اعداد مثبت و عدد صفر و اعداد منفی)

نکته : اعداد صحیح را با حرف انگلیسی Z نمایش می دهند : $Z = \{\cdots, -۲, -۱, ۰, ۱, ۲, \cdots\}$

جمع و تفریق اعداد صحیح : ابتدا اعداد را مختصر کرده سپس اگر هم علامت باشند دو عدد را جمع و اگر مختلف العلامت باشند دو عدد را کم می کنیم و برای جواب علامت عدد بزرگتر را می گذاریم.

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

$$۱۰ - ۸۳ + (+۶) - \big(-(-۹)\big) = ۱۰ - ۸۳ + ۶ - ۹ = -۷۶$$

$$[(-۱۸) + (+۱۲)] - (-۷) = -۱۸ + ۱۲ + ۷ = ۱$$

ضرب و تقسیم اعداد صحیح : ابتدا علامت ها را در هم ضرب کرده سپس اعداد را با توجه به علامت بین آن ها ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید؟

$$(-۸) \times [۱۲ \div (+۴)] = (-۸) \times (+۳) = (-۲۴)$$

$$[(-۶) \times (+۴)] \div (-۳) = (-۲۴) \div (-۳) = ۸$$

اولویت های ریاضی : ۱) داخل مجموعه یا کروشه یا پرانتز ۲) توان و جذر

۳) ضرب و تقسیم (از چپ به راست) ۴) جمع و تفریق

مثال : حاصل عبارت زیر با توجه به ترتیب عملیات به دست آورید؟

$$۴ - ۴ \times ۳^۲ \div ۶ - (۹ \div ۳^۲) = ۴ - ۴ \times ۹ \div ۶ - ۱ = ۴ - ۳۶ \div ۶ - ۱ = ۴ - ۶ - ۱ = -۳$$

نکته : برای جمع اعداد یک سری منظم از رابطه های زیر استفاده می کنیم :

$$\text{مجموع اعداد} = \frac{\text{عدد اول} + \text{عدد آخر}}{۲} \times \text{تعداد اعداد}$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{\text{عدد اول} - \text{عدد آخر}}{\text{فاصله اعداد}} + ۱$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$۳ + ۶ + ۹ + \cdots + ۲۰۴ = ۷۰۳۸ \quad \text{تعداد اعداد} = \frac{۲۰۴ - ۳}{۳} + ۱ = ۶۷ + ۱ = ۶۸ \quad \text{مجموع اعداد} = \frac{۲۰۴ + ۳}{۲} \times ۶۸ = ۲۰۷ \times ۳۴ = ۷۰۳۸$$

نکته : برای جمع اعداد یک سری منظم که یک در میان مثبت و منفی باشند ابتدا دو به دو اعداد جواب می دهیم.

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\overset{-۲}{\cancel{۱۰ - ۱۲}} + \overset{-۲}{\cancel{۱۴ - ۱۶}} + \cdots + \overset{-۲}{\cancel{۱۰۲ - ۱۰۴}} = ۲۴ \times -۲ = -۴۸$$

$$\text{تعداد اعداد} = \frac{۱۰۴ - ۱۰}{۲} + ۱ = ۴۷ + ۱ = ۴۸ \qquad ۴۸ \div ۲ = ۲۴$$

(فصل اول)

سال هشتم

عددهای صحیح و گویا

اعداد گویا : هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

نکته : اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند : $\quad Q=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\,a\,,b\in Z,b\neq ۰\right\}$

جمع و تفریق اعداد گویا (اعداد کسری) : ابتدا اعداد را مختصر کرده سپس مخرج مشترک می گیریم. که بهترین مخرج همان (ک.م.م) مخرج ها می باشد.

مثال : حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید؟

$$-\frac{۴}{۵}+\frac{۱}{۱۲}-\frac{۳}{۱۰}=\frac{-۴۸+۵-۱۸}{۶۰}=-\frac{۶۱}{۶۰}=-۱\frac{۱}{۶۰}$$

$$\left(+\frac{۳}{۴}\right)-\left(+\frac{۵}{۱۲}\right)=\frac{۳}{۴}-\frac{۵}{۱۲}=\frac{۹-۵}{۱۲}=\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۳}$$

ضرب اعداد گویا : ابتدا در ضرب اعداد را ساده کرده سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می کنیم.

مثال : حاصل ضرب های زیر را به دست آورید؟

$$\frac{\cancel{۷}^{۱}}{\cancel{۸}_{۴}}\times\frac{\cancel{۲}^{۱}}{\cancel{۷}_{۱}}\times\left(-\frac{۲}{۳}\right)=\frac{۱}{\cancel{۴}_{۲}}\times\left(-\frac{\cancel{۲}^{۱}}{۳}\right)=\left(-\frac{۱}{۶}\right)$$

$$\left(+\frac{\cancel{۳}^{۱}}{۵}\right)\times\left(+\frac{۲}{\cancel{۲۱}_{۷}}\right)=\frac{۲}{۳۵}$$

تقسیم اعداد گویا : تقسیم به ضرب تبدیل می شود یعنی کسر اولی را در معکوس کسر دوم ضرب کرده و حاصل را به دست می آوریم.

مثال : حاصل تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$\frac{\frac{۳}{۷}}{-\frac{۴}{۵}}=-\frac{۱۵}{۲۸}$$

$$\left(-\frac{۷}{۸}\right)\div\left(-\frac{۱۴}{۱۵}\right)=\left(-\frac{\cancel{۷}^{۱}}{۸}\right)\times\left(-\frac{۱۵}{\cancel{۱۴}_{۲}}\right)=\frac{۱۵}{۱۶}$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید؟

$$\left(-\frac{۲}{۵}\right)\div\left[\left(+\frac{۳}{۴}\right)+\left(-\frac{۷}{۱۰}\right)\right]=\left(-\frac{۲}{۵}\right)\div\left(\frac{۱۵-۱۴}{۲۰}\right)=\left(-\frac{۲}{\cancel{۵}_{۱}}\right)\times\left(+\cancel{۲۰}^{۴}\right)=(-۸)$$

نکته : نوشتن عددی گویا بین هر دو عدد گویا به چند روش است که دو روش کاربردی آن :

۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم

۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال : بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{۳}{۴}\ \text{و}\ \frac{۴}{۵}\Rightarrow\frac{۱۵}{۲۰}\ \text{و}\ \frac{۱۶}{۲۰}\Rightarrow\frac{۴۵}{۶۰}<\frac{۴۸}{۶۰}\Rightarrow\frac{۴۵}{۶۰}<\frac{۴۶}{۶۰}<\frac{۴۷}{۶۰}<\frac{۴۸}{۶۰}$$

روش دوم

$$\frac{۳}{۴}<\frac{۷}{۹}<\frac{۱۱}{۱۴}<\frac{۴}{۵}$$

روش اول

(فصل دوم)

عددهای اول

شمارنده (مقسوم علیه) یک عدد : به اعدادی که عدد داده شده برآن ها بخش پذیر باشد. شمارنده های آن عدد می گویند.

مانند : شمارنده های عدد ۱۲ = {۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۶ , ۱۲}

عدد اول : هر عدد طبیعی بزرگتر از یک که فقط دو شمارنده (یک و خودش) داشته باشد. عدد اول نام دارد.

مانند : ۱۱ عدد اول = {۱ , ۱۱}   ۲ عدد اول = {۱ , ۲}

نکته : اعداد اول به ترتیب عبارتند از :   اعداد اول = {۲ , ۳ , ۵ , ۷ , ۱۱ , ۱۳ , ۱۷ , ۱۹ , ... }

عدد مرکب : هر عدد طبیعی که بیش از دو شمارنده داشته باشد. عدد مرکب نام دارد.

مانند : ۱۵ عدد مرکب = {۱ , ۳ , ۵ , ۱۵}   ۴ عدد مرکب = {۱ , ۲ , ۴}

نکته : هر عدد مرکب را می توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگتر از یک نوشت :   ۱۵ عدد مرکب = ۳ × ۵

نکته : عدد یک نه اول است و نه مرکب است. (چون فقط یک شمارنده دارد)

مضارب طبیعی یک عدد : اگر یک عدد را در اعداد طبیعی به ترتیب ضرب کنیم. مضارب طبیعی آن عدد حاصل می شود.

مثال : الف) مضارب طبیعی عدد ۸ را بنویسید؟   ۸ مضارب طبیعی = {۸ , ۱۶ , ۲۴ , ۳۲ , ... }

ب) هشتمین مضرب ۱۳ چند است؟   ۱۰۴ = ۸ × ۱۳

نکته : اعداد طبیعی به سه دسته (اعداد اول – اعداد مرکب–عدد یک) تقسیم بندی می شوند.

دو عدد متباین (نسبت به هم اول) : اگر (ب.م.م) (بزرگترین شمارنده ی مشترک) دو عدد یک شود آن دو عدد متباین هستند.

مانند : ۱ = (۱۸ , ۲۵)   ۱ = (۱۴ , ۱۵)

نکته : اعداد طبیعی زیر همواره نسبت به هم اول هستند :

الف) دو عدد پشت سر هم :   ۱ = (۲۱ , ۲۲)   **ب) هر عدد با عدد یک :**   ۱ = (۱۴ , ۱)

ج) دو عدد اول متفاوت :   ۱ = (۵ , ۱۳)

نکته : اگر عددی اول باشد تمام مضارب آن غیر از خودش مرکب هستند :   ۱۱ مضارب طبیعی = {۱۱ (اول) , ۲۲ , ۳۳ , ... (مرکب)}

نکته : اگر عددی مرکب باشد تمام مضارب آن مرکب هستند :   ۶ مضارب طبیعی = {۶ , ۱۲ , ۱۸ , ... (مرکب)}

سال هشتم

(فصل دوم)

عددهای اول

تعیین عددهای اول (روش غربال) : در این روش مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) عدد یک را خط می زنیم. (چون عدد یک نه اول است و نه مرکب)

۲) تمام مضارب عدد ۲ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۳) تمام مضارب عدد ۳ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۴) تمام مضارب عدد ۵ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۵) تمام مضارب عدد ۷ (غیر از خودش) را خط می زنیم.

۶) به همین ترتیب مضارب اعداد اول را تا جایی خط می زنیم که مربع (توان دوم) آن عدد اول از بزرگترین عدد داده شده بزرگتر باشد.

مثال : روش غربال از ۱ تا ۳۰ را به کار ببرید؟ آخرین عدد اولی که مضارب آن خط می خورد عدد ۵ است. چون مربع عدد ۷ عدد ۴۹ می شود که از عدد ۳۰ بزرگتر است.

~~۱~~ , ۲ , ۳ , ~~۴~~ , ۵ , ~~۶~~ , ۷ , ~~۸~~ , ~~۹~~ , ~~۱۰~~ , ۱۱ , ~~۱۲~~ , ۱۳ , ~~۱۴~~ , ~~۱۵~~ , ~~۱۶~~ , ۱۷ , ~~۱۸~~ , ۱۹ , ~~۲۰~~ , ~~۲۱~~ , ~~۲۲~~ , ۲۳ , ~~۲۴~~ , ~~۲۵~~ , ~~۲۶~~ , ~~۲۷~~ , ~~۲۸~~ , ۲۹ , ~~۳۰~~

نکته : در خط زدن مضارب مرکب اعداد اول اولین مضربی که خط می خورد مربع آن عدد اول است.

مثال : اولین مضرب عدد ۷ در روش غربال خط می خورد چند است؟ $۷^۲ = ۴۹$

نکته : برای این که بدانیم در روش غربال عددی چند بار خط می خورد باید آن عدد را تجزیه کرد عوامل اول آن عدد تعداد را نشان می دهد.

مثال : در روش غربال ۱ تا ۲۰۰ اعداد ۲۷ و ۳۵ و ۴۲ چند بار خط می خورند؟

$۴۲ = ۲ \times ۳ \times ۷$ (سه بار خط می خورد) $۳۵ = ۵ \times ۷$ (دو بار خط می خورد) $۲۷ = ۳^۳$ (یک بار خط می خورد)

شناخت اعداد اول و مرکب : برای تشخیص اول بودن یا مرکب بودن یک عدد آن عدد را براعداد اول کوچکتر از جذرش تقسیم می کنیم. اگر بر هیچ کدام بخش پذیر نبود اول در غیر این صورت مرکب است.

مثال : آیا عدد ۱۱۹ اول است؟ یا مرکب؟ ابتدا جذر تقریبی عدد ۱۱۹ را می گیریم : $\sqrt{۱۱۹} \simeq ۱۰/۹$

پس عدد ۱۱۹ را بر اعداد اول کمتر از ۱۰ (۲ و ۳ و ۵ و۷) تقسیم می کنیم. چون بر عدد ۷ بخش پذیر است. پس عدد ۱۰۳ مرکب است.

مثال : با چند بار تقسیم می توان فهمید عدد ۱۵۱ اول است یا مرکب؟ $\sqrt{۱۵۱} \simeq ۱۲/۲$

باید بخش پذیر را بر اعداد اول کمتر از ۱۲ (۲ و ۳ و ۵ و ۷ و ۱۱) بررسی کنیم. چون بر هیچ یک بخش پذیر نیست پس با ۵ بار تقسیم می توان فهمید عدد ۱۵۱ اول است.

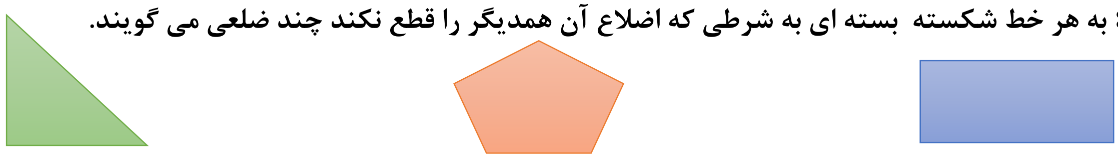
سال هشتم

(فصل سوم)

چند ضلعی ها

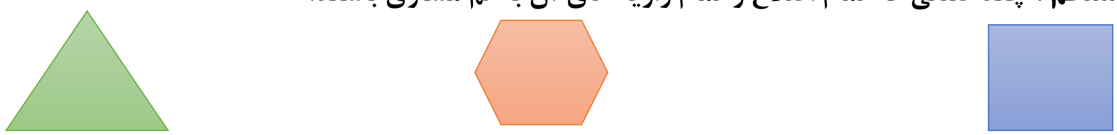
چند ضلعی : به هر خط شکسته بسته ای به شرطی که اضلاع آن همدیگر را قطع نکند چند ضلعی می گویند.

مانند :



چند ضلعی منتظم : چند ضلعی که تمام اضلاع و تمام زاویه های آن با هم مساوی باشند.

مانند :



چهار ضلعی منتظم　　　　شش ضلعی منتظم　　　　سه ضلعی منتظم

چند ضلعی محدب : چند ضلعی که تمام زاویه های آن از ۱۸۰ درجه کمتر باشد.

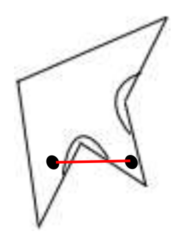
مانند :

چند ضلعی مقعر : چند ضلعی که حداقل یکی از زاویه های آن از ۱۸۰ درجه بیشتر باشد.

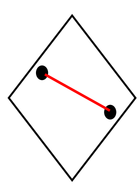
مانند :

نکته : اگر در یک چند ضلعی دو نقطه دلخواه انتخاب کنیم و آن دو نقطه را با یک خط راست به هم وصل کنیم اگر قسمتی از خط بیرون از چند ضلعی قرار گرفت آن چند ضلعی مقعر است. اگر تمام خط داخل چند ضلعی قرار گرفت چند ضلعی محدب است.

مانند :



چند ضلعی مقعر



چند ضلعی محدب

مرکز تقارن : اگر دوران ۱۸۰ درجه شکلی حول یک نقطه از شکل روی خود شکل قرار گیرد آن شکل مرکز تقارن دارد.

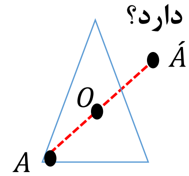
نکته : برای این که بدانیم شکلی مرکز تقارن دارد یا نه . نقطه ای در وسط شکل به عنوان مرکز تقارن در نظر گرفته سپس از شکل نقاطی به دلخواه انتخاب کرده به مرکز تقارن وصل و به همان اندازه ادامه می دهیم اگر نقطه حاصل روی شکل قرار گرفت آن شکل مرکز تقارن دارد. در غیر این صورت آن شکل مرکز تقارن ندارد.

(فصل سوم)

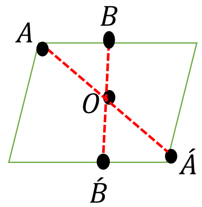
سال هشتم

چند ضلعی ها

مثال : کدام یک از چند ضلعی های زیر مرکز تقارن دارد؟



مرکز تقارن ندارد



مرکز تقارن دارد

نکته : در چند ضلعی منظم اگر تعداد اضلاع زوج باشد مرکز تقارن دارد و اگر فرد باشد مرکز تقارن ندارد.

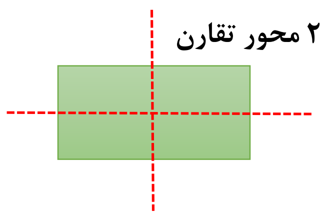
به طور مثال : ۸ ضلعی منتظم مرکز تقارن دارد ولی ۷ ضلعی منتظم مرکز تقارن ندارد.

محور تقارن (خط تقارن) : خطی است که اگر کاغذ را تا کنیم همه نقاط شکل روی هم قرار می گیرند.

نکته : خط تقارن خطی است که چند ضلعی را به دو قسمت مساوی تقسیم کند.

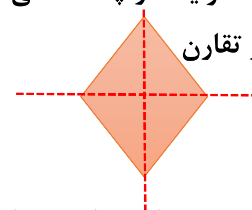
مثال : هر یک از چند ضلعی های زیر چند محور تقارن دارد؟

۲ محور تقارن



محور تقارن ندارد

۲ محور تقارن

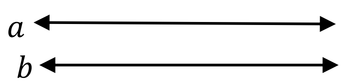


نکته : چند ضلعی های منتظم به تعداد اضلاع محور تقارن دارند.

به طور مثال : ۶ ضلعی منتظم ۶ محور تقارن و مثلث متساوی الاضلاع (۳ ضلعی منتظم) ۳ محور تقارن دارد.

دو خط موازی : دو خطی که هر چه آن ها را امتداد دهیم همدیگر را قطع نکنند و فاصله بین دو خط تغییر نکند دو خط موازی می گویند.

مانند : $a \parallel b$ علامت موازی بودن

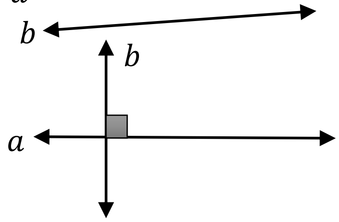


دو خط متقاطع : دو خطی که موازی نباشند یعنی دو خطی که همدیگر را در نقطه ای قطع کنند دو خط متقاطع می گویند.

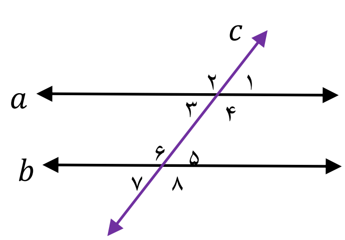
مانند : $a \nparallel b$ علامت متقاطع بودن

دو خط عمود بر هم : دو خط متقاطعی که زاویه بین دو خط ۹۰ درجه باشد.

مانند : $a \perp b$ علامت عمود بودن



نکته : اگر دو خط موازی را خطی قطع کند (مورب باشد) ۸ زاویه حاصل می شود. ۴ زاویه تند مساوی و ۴ زاویه باز مساوی.



$(a \parallel b\ ,\text{مورب } c) \Longrightarrow \begin{cases} \hat{۱} = \hat{۳} = \hat{۵} = \hat{۷} & \text{۴ زاویه تند} \\ \hat{۲} = \hat{۴} = \hat{۶} = \hat{۸} & \text{۴ زاویه باز} \end{cases}$

دو زاویه تند و باز مکمل اند : $\hat{۱} + \hat{۲} = ۱۸۰$ درجه

سال هشتم

(فصل سوم)

چند ضلعی ها

مثال : در هر شکل مقدار x را به دست آورید؟

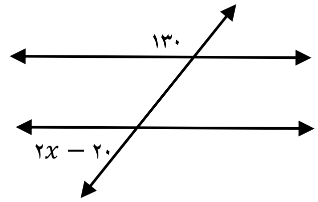
زاویه تند با باز مکمل است :

$$۲x - ۲۰ + ۱۳۰ = ۱۸۰$$

$$۲x + ۱۱۰ = ۱۸۰$$

$$۲x = ۷۰$$

$$x = ۳۵$$

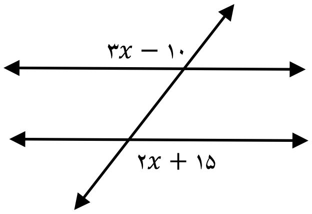


زاویه های باز با هم برابرند :

$$۳x - ۱۰ = ۲x + ۱۵$$

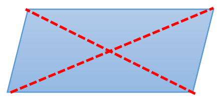
$$۳x - ۲x = ۱۵ + ۱۰$$

$$x = ۲۵$$



انواع چهار ضلعی ها : ۱) متوازی الاضلاع ۲) مستطیل ۳) مربع ۴) لوزی ۵) ذوزنقه

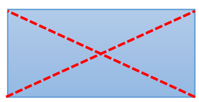
متوازی الاضلاع : چهار ضلعی است که اضلاع روبه رو موازی و مساویند.



خواص متوازی الاضلاع : ۱) اضلاع روبه رو موازی و مساویند ۲) زاویه های روبه رو مساویند

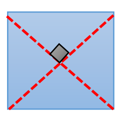
۳) قطرهای متوازی الاضلاع همدیگر را نصف می کنند ۳) زاویه های مجاور (کنارهم) مکمل اند

مستطیل : متوازی الاضلاعی است که زاویه قائمه داشته باشد.



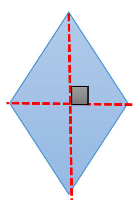
خواص مستطیل : ۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد ۲) دو قطر مستطیل برابرند

مربع : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابر و زاویه قائمه داشته باشد.



خواص مربع : ۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد ۲) دو قطر مربع برابرند

۳) قطرهای مربع عمود منصف یکدیگرند



لوزی : متوازی الاضلاعی است که چهار ضلع آن برابر است.

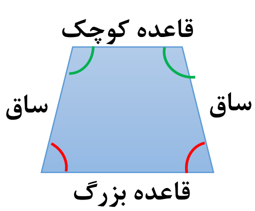
خواص لوزی : ۱) تمام خواص متوازی الاضلاع را دارد ۲) قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگرند

ذوزنقه : چهار ضلعی است که فقط دو ضلع موازی دارد.

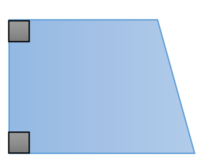
انواع ذوزنقه : ۱) ذوزنقه متساوی الساقین ۲) ذوزنقه قائم الزاویه

خواص ذوزنقه متساوی الساقین : ۱) دو ساق آن برابرند ۲) دو زاویه مجاور قاعده برابرند

۳) دو زاویه مجاور ساق مکمل اند



خواص ذوزنقه قائم الزاویه : ۱) دارای زاویه قائمه است

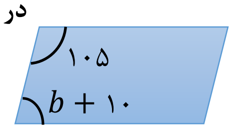


(فصل سوم) **سال هشتم**

چند ضلعی ها

مثال : در هر شکل مقادیر مجهول را به دست آورید؟

در متوازی الاضلاع زاویه های مجاور مکمل اند :



$b + ۱۰ + ۱۰۵ = ۱۸۰ \Rightarrow b + ۱۱۵ = ۱۸۰ \Rightarrow b = ۶۵$

در مستطیل اضلاع روبه رو برابرند :

$۶a - ۱۰ = ۴a + ۸$

$۶a - ۴a = ۱۰ + ۸$

$۲a = ۱۸ \Rightarrow a = ۹$

نکته : مجموع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است.

نکته : مجموع زاویه های داخلی چند ضلعی از رابطه ی $(n-۲)\times ۱۸۰$ حاصل می شود.

نکته : اندازه ی یک زاویه ی چند ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{(n-۲)\times ۱۸۰}{n}$ حاصل می شود.

مثال : الف) مجموع زاویه های داخلی ۱۰ ضلعی منتظم را به دست آورید؟

$(۱۰-۲)\times ۱۸۰ = ۸ \times ۱۸۰ = ۱۴۴۰$

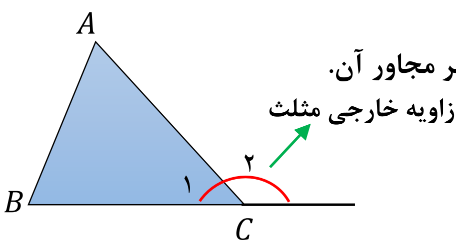
ب) اندازه ی یک زاویه ی داخلی ۱۵ ضلعی منتظم را به دست آورید؟

$\frac{(۱۵-۲)\times \cancel{۱۸۰}^{\,۱۲}}{{}_{۱}\,\cancel{۱۵}} = ۱۳ \times ۱۲ = ۱۵۶$

زاویه خارجی : اگر یکی از اضلاع چند ضلعی محدب را در همان راستا امتداد دهیم در بیرون از چند ضلعی زاویه ای تشکیل می شود که به آن زاویه خارجی چند ضلعی می گویند.

نکته : در هر مثلث اندازه ی زاویه ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیر مجاور آن.

به طور مثال :



$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{C}_۱ + \hat{C}_۲ = ۱۸۰ \text{ درجه} \\ \hat{C}_۲ = \hat{A} + \hat{B} \end{cases}$$

نکته : مجموع زاویه های خارجی هر چند ضلعی ۳۶۰ درجه است.

نکته : اندازه ی یک زاویه خارجی چند ضلعی منتظم از رابطه ی $\frac{۳۶۰}{n}$ حاصل می شود.

مثال : اندازه ی یک زاویه داخلی و خارجی ۱۲ ضلعی منتظم را به دست آورید؟ (اندازه زاویه داخلی و خارجی مکمل اند)

اندازه زاویه داخلی $۱۸۰ - ۳۰ = ۱۵۰$ اندازه زاویه خارجی $\frac{۳۶۰}{۱۲} = ۳۰$

نکته : چند ضلعی منتظمی برای کاشی کاری مناسب است که عدد ۳۶۰ بر اندازه ی یک زاویه داخلی آن چند ضلعی بخش پذیر باشد.

مثال : کدام یک از چند ضلعی های زیر برای کاشی کاری مناسب است؟

الف) ۸ ضلعی منتظم مناسب نیست $۳۶۰ \div \underbrace{۱۳۵}_{\text{یک زاویه ی داخلی ۸ ضلعی}} \simeq ۲/۶$

ب) ۶ ضلعی منتظم مناسب است $۳۶۰ \div \underbrace{۱۲۰}_{\text{یک زاویه ی داخلی ۶ ضلعی منتظم}} = ۳$

نکته : برای به دست آوردن تعداد قطرهای چند ضلعی از رابطه ی $\frac{n(n-۳)}{۲}$ استفاده می کنیم.

مثال : ۷ ضلعی دارای چند قطر است؟

$\frac{۷(۷-۳)}{۲} = \frac{۷\times ۴}{۲} = ۱۴$

سال هشتم

(فصل چهارم)

جبر و معادله

یک جمله ای جبری : عبارت جبری که از دو قسمت عدد (ضریب) و متغیر تشکیل شده باشد.

مانند : $۵xy$ $\qquad$ $\frac{a}{۳}$

چند جمله ای جبری : اگر بین عبارت های جبری علامت جمع و تفریق باشد تشکیل چند جمله ای می دهد.

مانند : (دارای سه جمله) $a-b+۷$ $\qquad$ (دارای دو جمله) $x+۲y$

عبارت جبری متشابه : عبارتی که متغیر های آن (حروف انگلیسی) و توان متغیرها کاملا مثل هم باشند.

مانند : $(۵xy\ ,-۴yx)\ ,\ \left(۳a^۳b^۲\ ,\frac{۲}{۳}a^۳b^۲\right)$

عبارت جبری نا متشابه : عبارتی که متغیرهای آن یا توان متغیرها شبیه هم نباشند.

مانند : $(۳bc\ ,۲b)\ ,\ (-۴x^۲y\ ,۵xy^۲)$

ساده کردن عبارت های جبری : جملات متشابه را جدا کرده سپس مانند جمع و تفریق اعداد صحیح آن ها را جواب داده با این تفاوت که حروف کنار اعداد نوشته می شود.

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$\underline{a^۲b}-\underline{۴ab}+\underline{۵ab}+\underline{۲a^۲b}-\underline{۴ab}=۳a^۲b-۳ab$$

$$-\underline{۴x}+۲y+\underline{۱۰x}=۶x+۲y$$

ضرب دو جمله ای : در ضرب دو جمله ای ضریب ها در هم و متغیرها در هم ضرب می شوند.

مانند : $۶ab\left(\frac{۲}{۳}c\right)=۴abc$ $\qquad$ $۵x(-۲x)=-۱۰x^۲$

ضرب یک جمله ای در چند جمله ای : یک جمله ای در تمام جملات چند جمله ای ضرب می شود.

مانند : $-۶a(۳a+b)=-۱۸a^۲-۶ab$

ضرب چند جمله ای در چند جمله ای : جملات پرانتز اول در تمام جملات پرانتز دوم ضرب می شود. سپس عبارت را ساده می کنیم.

مانند : $(۲x-y)(x+۳y)=۲x^۲+۶xy-xy-۳y^۲=۲x^۲+۵xy-۳y^۲$

نکته : اگر یک چند جمله ای داخل پرانتز و به توان ۲ باشد آن عبارت را به صورت ضرب دو پرانتز می نویسیم.

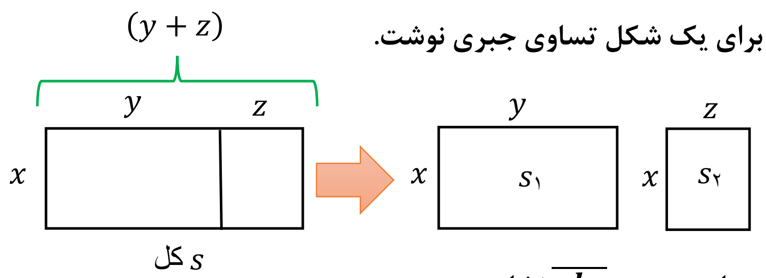
مانند : $(a+b)^۲=(a+b)(a+b)=a^۲+ab+ab+b^۲=a^۲+۲ab+b^۲$

سال هشتم **(فصل چهارم)**

جبر و معادله

نکته : با توجه به مساوی بودن مساحت در دو شکل می توان برای یک شکل تساوی جبری نوشت.

مثال : با توجه به شکل یک تساوی جبری بنویسید.



s کل $= s_۱ + s_۲ \Rightarrow x(y+z) = xy + xz$

نکته : یک عدد دو رقمی را به صورت $\overline{ab}$ و یک عدد سه رقمی را به صورت $\overline{abc}$ نشان می دهیم.

نکته : مقلوب عدد $\overline{ab}$ را به صورت $\overline{ba}$ نشان می دهیم. مثلا مقلوب عدد ۳۷ برابر با ۷۳ می شود.

نکته : مجموع هر عدد دو رقمی با مقلوب آن همواره مضرب ۱۱ می باشد :

$$\overline{ab} + \overline{ba} = ۱۰a + b + ۱۰b + a = ۱۱a + ۱۱b = ۱۱(a+b)$$

نکته : اختلاف هر عدد دو رقمی با مقلوب آن همواره مضرب ۹ می باشد :

$$\overline{ab} - \overline{ba} = ۱۰a + b - ۱۰b - a = ۹a - ۹b = ۹(a-b)$$

مقدار عددی عبارت جبری : به جای متغیرها اعداد داده شده را قرار می دهیم سپس با توجه به ترتیب انجام عملیات (اولویت) عبارت را جواب می دهیم.

مثال : مقدار عددی عبارت های جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده به دست آورید.

الف) $۵x - ۲xy + ۷ \qquad (x = ۱ \; , \; y = -۲) \qquad ۵(۱) - ۲(۱)(-۲) + ۷ = ۵ + ۴ + ۷ = ۱۶$

ب) $a^۲ + b^۲ - ۴ab \qquad (a = -۲ \; , \; y = ۲) \qquad (-۲)^۲ + ۲^۲ - ۴(-۲)(۲) = ۴ + ۴ + ۱۶ = ۲۴$

تجزیه عبارت جبری : (تبدیل به ضرب یا فاکتورگیری) مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱- ابتدا (ب.م.م) ضرایب را به دست می آوریم.

۲- حروف مشترک با توان کمتر را کنار (ب.م.م) ضرایب می نویسیم.

۳- تمام جملات عبارت را بر جمله ی مشترک تقسیم کرده و داخل پرانتز می نویسیم.

مثال : عبارت های زیر را به ضرب تبدیل کنید.

(ب.م.م) ضرایب

$$۱۰ab + ۱۵a = ۵a(۲b + ۳)$$

عامل مشترک

$$xyz - xz = xz(y - ۱)$$

$$\frac{x^۲y + xy^۲}{x^۳y^۲ + x^۲y^۳} = \frac{\cancel{xy}\cancel{(x+y)}}{\underset{xy}{\cancel{x^۲y^۲}}\cancel{(x+y)}} = \frac{۱}{xy}$$

سال هشتم

(فصل چهارم)

جبر و معادله

معادله : معادله یک تساوی جبری است که به ازای بعضی از اعداد به یک تساوی درست تبدیل می شود.

نکته : برای حل معادله مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) مجهول ها را به طرف چپ و عددهای معلوم را به طرف راست انتقال می دهیم. (عددی که انتقال داده شود علامت آن عوض می شود)

۲) عددهای مجهول با هم و عددهای معلوم را با هم جواب می دهیم.

۳) حاصل عددهای معلوم را بر حاصل عددهای مجهول تقسیم می کنیم.

مثال : معادله های زیر را جواب دهید.

$$4(x-2)=2x$$
$$4x-8=2x$$
$$\overset{2x}{\cancel{4x-2x}}=8$$
$$x=\frac{8}{2}=4 \Rightarrow x=4$$

$$-6+x=2x+5$$
$$\overset{-x}{\cancel{x-2x}}=\overset{11}{\cancel{5+6}}$$
$$x=\frac{11}{-1}=-11$$
$$x=-11$$

$$2x+3=-7$$
$$2x=\overset{-10}{\cancel{-7-3}}$$
$$x=\frac{-10}{2}=-5$$
$$x=-5$$

نکته : در معادلات کسری دو طرف معادله را در (ک.م.م) مخرج ها ضرب کرده تا تبدیل به معادله معمولی شود.

$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}=\frac{5}{6} \Rightarrow 12\times\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{5}{6}\right)\times 12 \Rightarrow -6x+9=10 \Rightarrow -6x=1 \Rightarrow x=-\frac{1}{6}$$

(ک.م.م) مخرج ها $[2,4,6]=12$

نکته : سه عدد متوالی را به صورت $(x, x+1, x+2)$ و سه عدد فرد یا زوج متوالی را به صورت $(x, x+2, x+4)$ نمایش می دهیم.

مثال : مجموع سه عدد زوج متوالی ۶۰ شده است. عدد بزرگتر چند است؟

$$x+(x+2)+(x+4)=60 \Rightarrow 3x+6=60 \Rightarrow 3x=54 \Rightarrow x=18 \Rightarrow \{18, 20, 22\}$$

مثال : به پنج برابر عددی هشت واحد اضافه کرده ایم حاصل از قرینه دو برابر آن عدد شش واحد کمتر است آن عدد چند است؟

$$5x+8=-2x-6 \Rightarrow 5x+2x=-6-8 \Rightarrow 7x=-14 \Rightarrow \boxed{x=-2}$$ آن عدد

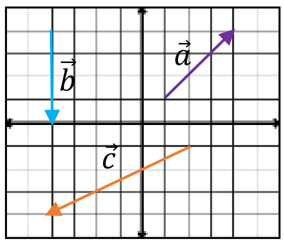
سال هشتم **(فصل پنجم)**

بردار و مختصات

بردار : خط راست جهت داری است. برای نام گذاری بردار از دو حرف بزرگ انگلیسی یا یک حرف کوچک انگلیسی استفاده می شود.

مختصات بردار : برای به دست آوردن مختصات یک بردار از ابتدا طول (جهت افقی) سپس عرض (جهت عمودی) رابه دست می آوریم.

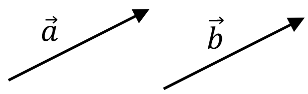
مثال : مختصات بردارهای زیر را بنویسید.



$\vec{a} = \begin{bmatrix} ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$ $\vec{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۴ \end{bmatrix}$ $\vec{c} = \begin{bmatrix} -۶ \\ -۳ \end{bmatrix}$

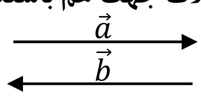
دو بردار مساوی (هم سنگ) : دو بردار در صورتی مساویند که : هم جهت و هم اندازه و موازی باشند.

مانند : $\vec{a} = \vec{b}$



دو بردار قرینه : دو بردار در صورتی قرینه هم هستند که : هم اندازه و موازی ولی خلاف جهت هم باشند.

مانند :

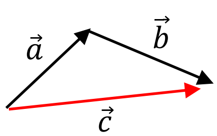


نکته : حاصل جمع هر بردار با قرینه اش برابر با بردار صفر است : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{o}$

جمع بردارها (برآیند بردارها) : برای جمع دو بردار از دو روش استفاده می شود :

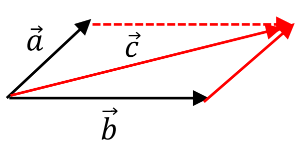
۱) روش مثلثی : اگر دو بردار پشت سر هم باشند از این روش استفاده می شود و در این روش برای برآیند بردارها از ابتدا بردار اولی به انتها بردار دومی رسم می شود.

مانند : تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



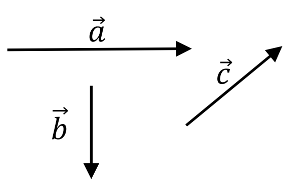
۲) روش متوازی الاضلاع : اگر دو بردار پشت سر هم نباشند از انتهای یکی از دو بردار مساوی بردار بعدی رسم کرده تا دو بردار پشت سرهم شوند و در آخر از ابتدا دو بردار به انتهای بردار جدید رسم می کنیم.

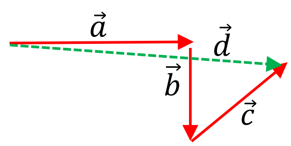
مانند : تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

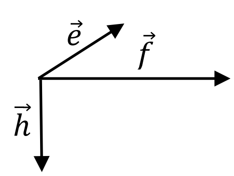


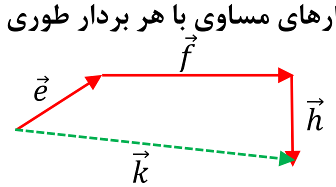
مثال : حاصل جمع بردارهای زیر را رسم کنید.

(بردارهای مساوی با هر بردار طوری رسم می کنیم که بردارها پشت سرهم باشند) :









تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$

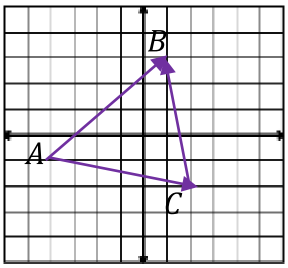
تساوی جبری : $\vec{e} + \vec{f} + \vec{h} = \vec{k}$

سال هشتم

(فصل پنجم)

بردار و مختصات

مثال : برای شکل زیر یک جمع برداری و یک جمع مختصاتی بنویسید.



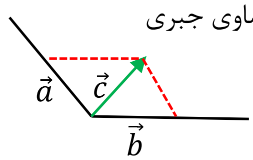
(در شکل دو بردار را طوری مشخص می کنیم که پشت سر هم باشند)

جمع برداری : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

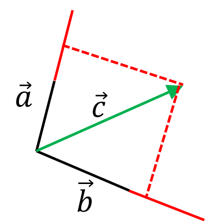
جمع مختصاتی : $\begin{bmatrix} ۶ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ \\ ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۴ \end{bmatrix}$

تجزیه بردارها : اگر بردار حاصل جمع را داشته باشیم از انتها آن بردار به موازات دو محور رسم کرده هر جا محور یا امتداد محور را قطع کرد انتهای دو بردار به دست می آید.

مثال : بردار $\vec{C}$ را در امتداد های رسم شده تجزیه کنید.



تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$



تساوی جبری : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

ضرب عدد در بردار : در ضرب عدد در بردار آن عدد هم در طول و هم در عرض ضرب می شود : $k \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kx \\ ky \end{bmatrix}$

مثال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$۲\begin{bmatrix} ۴ \\ -۱ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ ۱۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$$

$$-۵\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱۵ \\ -۱۰ \end{bmatrix}$$

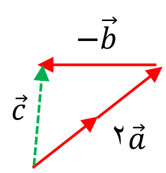
مثال : اگر $\vec{a} = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$ و $\vec{b} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c} = ۳\vec{a} - \vec{b}$ را به دست آورید.

$$\vec{c} = ۳\begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -۱ \\ ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ ۹ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ -۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

مثال : بردار خواسته شده را رسم کنید.

$۲\vec{a}$ در همان جهت $\vec{a}$) ۲ برابر بردار

$-\vec{b}$ درخلاف جهت $\vec{b}$) ۱ برابر بردار



$\vec{c} = ۲\vec{a} - \vec{b}$

معادله مختصاتی : برای حل معادلات مختصاتی همانند معادلات معمولی عمل می کنیم :

۱) مجهول ها در سمت چپ و مختصات ها را به سمت راست منتقل می کنیم.

۲) حاصل مجهول ها و مختصات ها را به دست می آوریم.

۳) طول و عرض مختصات را بر ضریب مجهول تقسیم می کنیم.

نکته : در حل معادله مختصاتی عدد های معلوم یا مجهول از یک طرف تساوی به طرف دیگر منتقل شود علامت آن ها قرینه می شود.

سال هشتم

(فصل پنجم)

بردار و مختصات

مثال : معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix} - ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow -۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۸ \\ ۴ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} ۸ \div -۲ \\ ۴ \div -۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$۵\vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ ۱۰ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \div ۵ \\ ۱۰ \div ۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$۳\vec{x} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۴ \end{bmatrix} + ۲x \Rightarrow \overset{\vec{x}}{\cancel{۳\vec{x} - ۲\vec{x}}} = \begin{bmatrix} -۳ \\ -۴ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۵ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

بردارهای واحد مختصات : به دو بردار $\vec{i} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۰ \end{bmatrix}$ (واحد طول) و $\vec{j} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ (واحد عرض) بردارهای واحد مختصات می گویند.

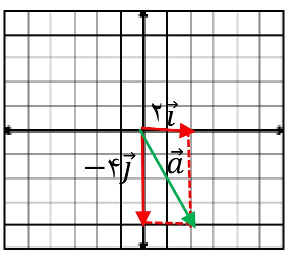
نکته : برای تبدیل یک بردار به برادر واحد مختصات کافی است عدد طول مختصات را ضریب $\vec{i}$ و عدد عرض مختصات را ضریب $\vec{j}$ قرار دهیم.

مثال : بردارهای زیر را بر حسب $\vec{i}$ و $\vec{j}$ بنویسید.

$$\vec{c} = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۰ \end{bmatrix} = ۴\vec{i} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۵ \end{bmatrix} = -۵\vec{j} \qquad \vec{a} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix} = -۳\vec{i} + ۲\vec{j}$$

مثال : مختصات بردار $\vec{a} = ۲\vec{i} - ۴\vec{j}$ را نوشته سپس بردار $\vec{a}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\vec{a} = ۲\vec{i} - ۴\vec{j} = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۴ \end{bmatrix}$$



مثال : اگر $\vec{a} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j}$ و $\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j}$ باشد. مختصات بردار $\vec{c} = \vec{a} - ۳\vec{b}$ را بنویسید.

$$\vec{a} = ۳\vec{i} - ۲\vec{j} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix}$$

$$\vec{b} = \vec{i} + ۲\vec{j} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} - ۳\vec{b} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ -۶ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ -۸ \end{bmatrix}$$

مثال : معادلات مختصاتی زیر را حل کنید.

$$۲\vec{x} + \begin{bmatrix} ۲ \\ -۳ \end{bmatrix} = ۳\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow ۲\vec{x} = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} ۱ \div ۲ \\ ۲ \div ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} + ۳\vec{i} = ۲\vec{x} - ۳\begin{bmatrix} ۱ \\ -۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \overset{-\vec{x}}{\cancel{\vec{x} - ۲\vec{x}}} = \begin{bmatrix} -۳ \\ ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۳ \\ ۰ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۶ \\ ۶ \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} -۶ \div -۱ \\ ۶ \div -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ \\ -۶ \end{bmatrix}$$

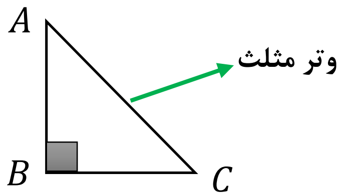
(فصل ششم)

سال هشتم

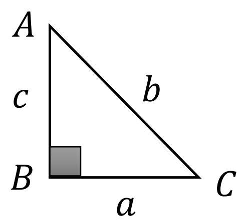
مثلث

مثلث قائم الزاویه : مثلثی است که دو ضلع آن بر هم عمود باشند. ضلع روبه رو به زاویه ۹۰ درجه وتر نام دارد.

نکته : وتر مثلث قائم الزاویه بزرگترین ضلع مثلث است.



رابطه فیثاغورس : این رابطه فقط در مثلث قائم الزاویه نوشته می شود :

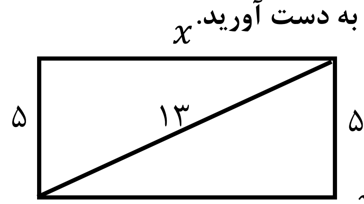


کلامی : $(\text{وتر})^۲ = (\text{یک ضلع})^۲ + (\text{ضلع دیگر})^۲$

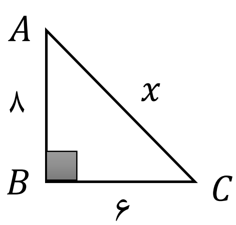
جبری : $b^۲ = a^۲ + c^۲$

نکته : اگر در مثلثی مجذور یک ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد. آن مثلث قائم الزاویه است. (عکس رابطه فیثاغورس)

مثال : در هر شکل مقدار x را به دست آورید.

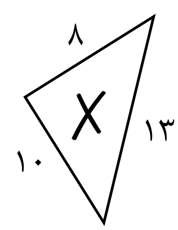


$$۱۳^۲ = x^۲ + ۵^۲$$
$$۱۶۹ = x^۲ + ۲۵$$
$$x^۲ = ۱۶۹ - ۲۵ = ۱۴۴$$
$$x = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

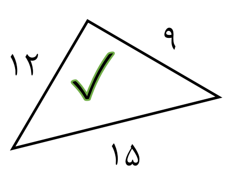


$$b^۲ = a^۲ + c^۲$$
$$x^۲ = ۶^۲ + ۸^۲$$
$$x^۲ = ۳۶ + ۶۴ = ۱۰۰$$
$$x = \sqrt{۱۰۰} = ۱۰$$

مثال : کدام یک از مثلث های زیر قائم الزاویه است؟ چرا؟



$$۱۳^۲ = ۱۰^۲ + ۸^۲$$
$$۱۶۹ = ۱۰۰ + ۶۴$$
$$۱۶۹ \neq ۱۶۴$$



$$۱۵^۲ = ۱۲^۲ + ۹^۲$$
$$۲۲۵ = ۱۴۴ + ۸۱$$
$$۲۲۵ = ۲۲۵$$

اعداد فیثاغورسی : اعدادی هستند که مربع ضلع بزرگتر با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشند.

نکته : بعضی از اعداد فیثاغورسی پرکاربرد عبارتند از :

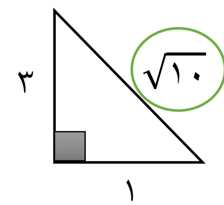
(۳ , ۴ , ۵) , (۶ , ۸ , ۱۰) , (۵ , ۱۲ , ۱۳) , (۹ , ۱۲ , ۱۵) , (۱۵ , ۲۰ , ۲۵)

رسم پاره خط به طول $\sqrt{a}$: ابتدا دو عدد مشخص کرده که مجموع مربعات آن دو عدد زیر رادیکال شود. سپس مثلث قائم الزاویه با این اضلاع رسم کرده وتر مثلث به اندازه ی همان عدد خواسته شده است.

سال هشتم **(فصل ششم)**

مثلث

مثال : پاره خطی به طول $\sqrt{۱۰}$ رسم کنید. ابتدا دو عدد پیدا کرده که مجموع مربعات آن دو عدد ۱۰ شود :



وتر مثلث جواب مسئله است

$$۳^۲ + ۱^۲ = ۹ + ۱ = ۱۰$$

شکل های همنهشت : اگر دو شکل را با یک یا چند تبدیل (انتقال و تقارن و دوران) بر یکدیگر منطبق کنیم. به طوری که کاملا یکدیگر بپوشانند آن دو شکل همنهشت هستند.

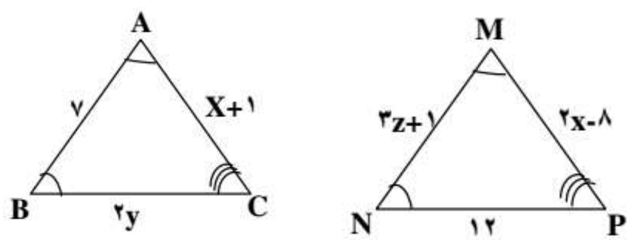
نکته : در دو شکل همنهشت اجزای متناظر دو مثلث (ظلع ها و زاویه ها) برابرند.

مثال : دو مثلث زیر همنهشت هستند. نوع تبدیل و مقدار x و y و z را به دست آورید. نوع تبدیل : انتقال

$\overline{AB} = \overline{MN}$ ، $۳z + ۱ = ۷$ ، $z = ۲$

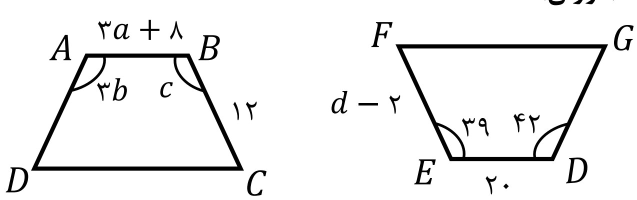
$\overline{AC} = \overline{MP}$ ، $x + ۱ = ۲x - ۸$ ، $x = ۹$

$\overline{BC} = \overline{NP}$ ، $۲y = ۱۲$ ، $y = ۶$



مثال : دو شکل زیر همنهشت هستند. الف) نوع تبدیل را بنویسید. (دوران)

ب) مقادیر مجهول را به دست آورید.



$\hat{B} = \hat{E}$ ، $C = ۳۹$

$\hat{A} = \hat{D}$ ، $۳b = ۴۲$ ، $b = ۱۴$

$\overline{BC} = \overline{EF}$ ، $d - ۲ = ۱۲$ ، $d = ۱۴$

$\overline{AB} = \overline{ED}$ ، $۳a + ۸ = ۲۰$ ، $a = ۴$

حالت های همنهشتی دو مثلث : دو مثلث دلخواه در سه حالت با یکدیگر همنهشت هستند :

۱) دو ضلع و زاویه بین برابر (ض زض) ۲) دو زاویه و ضلع بین برابر (زض ز) ۳) سه ضلع برابر (ض ض ض)

حالت های همنهشتی دو مثلث قائم الزاویه : دو مثلث قائم الزاویه در دو حالت با یکدیگر همنهشت هستند :

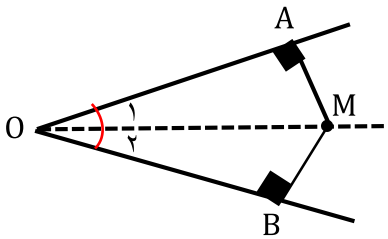
۱) وتر و یک ضلع (وض) ۲) وتر و یک زاویه تند (وز)

نکته : دو مثلث با سه زاویه برابر (ززز) همنهشت نیستند.

(فصل ششم)

مثلث

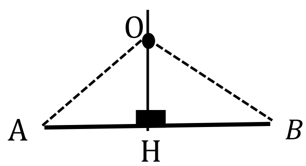
نکته : هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ (نیمساز OM)
$\hat{A} = \hat{B} =$ ۹۰ درجه
$OM = OM =$ ضلع مشترک

$\Longrightarrow \triangle OAM \cong \triangle OBM \Longrightarrow MA = MB$
(وز) (اجزای متناظر)

نکته : هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

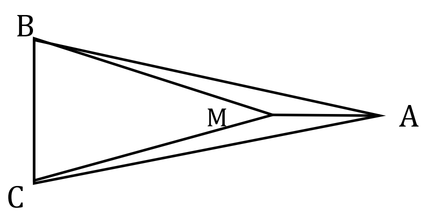


$AH = HB$ (عمود منصف OH)
$\hat{H}_1 = \hat{H}_2 =$ ۹۰ درجه
$OH = OH =$ ضلع مشترک

$\Longrightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Longrightarrow OA = OB$
(ض ز ض) (اجزای متناظر)

مثال : در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند. دلیل هم نهشتی دو مثلث AMC و AMB را بنویسید.

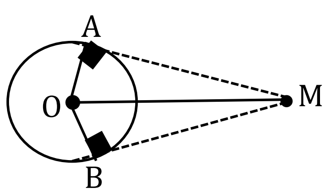
(جاهای خالی را کامل کنید)



$AB = AC$
$MB = MC$
$AM = AM$

$\Longrightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC$
(ض ض ض)

مثال : نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.



$OA = OB$ شعاع دایره
$\hat{A} = \hat{B} =$ ۹۰ درجه
$OM = OM =$ ضلع مشترک

$\Longrightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Longrightarrow MA = MB$
(و ض) (اجزای متناظر)

سال هشتم **(فصل هفتم)**

توان و جذر

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند : $۴^{۷} \times ۴^{۳} = ۴^{۱۰}$ $\qquad$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند : $۱۲^{۷} \times ۳^{۷} = ۳۶^{۷}$ $\qquad$ $a^m \times b^m = (ab)^m$

تقسیم اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

مانند : $\frac{۹^{۵}}{۹^{۳}} = ۹^{۲}$ $\qquad$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

مانند : $۲۰^{۸} \div ۴^{۸} = ۵^{۸}$ $\qquad$ $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

نکته : اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

مانند : $\underset{\text{تجزیه}}{۹^{۲}} \div \underset{\text{تجزیه}}{۲۷} = \overset{۳^{۴}}{\cancel{(۳^{۲})^{۲}}} \div ۳^{۳} = ۳$ $\qquad$ $\underset{\text{تجزیه}}{۴^{۸}} \times ۲^{۳} = \overset{۲^{۱۶}}{\cancel{(۲^{۲})^{۸}}} \times ۲^{۳} = ۲^{۱۹}$

نکته : اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

مانند : $۹^{۵} + ۹^{۵} + ۹^{۵} = ۳ \times ۹^{۵} = ۳ \times \underset{\text{تجزیه}}{\overset{۳^{۱۰}}{\cancel{(۳^{۲})^{۵}}}} = ۳^{۱۱}$ $\qquad$ $۲^{۶} + ۲^{۶} = ۲ \times ۲^{۶} = ۲^{۷}$

نکته : عدد منفی داخل پرانتز باشد علامت منفی به تعداد توان ضرب می شود. اگر عدد منفی داخل پرانتز نباشد منفی به تعداد توان ضرب نمی شود.

مانند : $-۴^{۲} = -(۴ \times ۴) = -۱۶$ $\qquad$ $(-۴)^{۲} = -۴ \times -۴ = ۱۶$

نکته : عدد منفی به توان زوج برسد حاصل عددی مثبت و اگر به توان فرد برسد حاصل عددی منفی می شود.

مانند : $(-۳)^{۳} = -۲۷$ توان فرد $\qquad$ $(-۳)^{۴} = ۸۱$ توان زوج

نکته : اگر عدد توان دار داخل پرانتز باشد و توان دیگر داشته باشد پایه را نوشته و توان ها را در هم ضرب می شود.

مانند : $((۲^{۲})^{۳})^{۴} = ۲^{۲۴}$ $\qquad$ $(۳^{۲})^{۲} = ۳^{۴}$

نکته : اگر عدد توان دار بدون پرانتز <u>نباشد</u> و توان دیگر داشته باشد پایه را نوشته و عبارت بالا را جواب می دهیم.

مانند : $۲^{۳^{۲}} = ۲^{۹}$ $\qquad$ $۳^{۲} = ۹$

سال هشتم **(فصل هفتم)**

توان و جذر

مثال : حاصل هر عبارت را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$۳^{۴} \times ۳^{۲} \div \underbrace{۲۷}_{\text{تجزیه}} = ۳^{۶} \div ۳^{۳} = ۳^{۳}$$

$$۴^{۷} \times ۲^{۳} \times (۰/۵)^{۷} = ۲^{۷} \times ۲^{۳} = ۲^{۱۰}$$

$$\frac{۴^{۷} \times ۳^{۸}}{۳^{۳} \times ۴^{۲}} = \frac{۴^{۷}}{۴^{۲}} \times \frac{۳^{۸}}{۳^{۳}} = ۴^{۵} \times ۳^{۵} = ۱۲^{۵}$$

$$\frac{۲۰^{۶}}{۵^{۲} \times ۴^{۶}} = \frac{۵^{۶}}{۵^{۲}} = ۵^{۴}$$

مثال : اگر $۳^{a} = ۵$ باشد حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$۲۷^{a} = (۳^{۳})^{a} = (۳^{a})^{۳} = ۵^{۳} = ۱۲۵$$

$$۳^{a+۲} = ۳^{a} \times ۳^{۲} = ۵ \times ۹ = ۴۵$$

$$۹^{۲a} = (۳^{۲})^{۲a} = (۳^{a})^{۴} = ۵^{۴} = ۶۲۵$$

$$۳^{a-۳} = ۳^{a} \div ۳^{۳} = ۵ \div ۲۷ = \frac{۵}{۲۷}$$

نکته : برای مقایسه اعداد توان باید پایه یا توان اعداد را برابر کنیم.

مثال : اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$۴ , ۲^{۳^{۲}} , ۲^{۳} , ۸^{۴} , (۲^{۳})^{۲} \Longrightarrow ۲^{۲}, ۲^{۹} , ۲^{۳} , ۲^{۱۲} , ۲^{۶} \Longrightarrow ۲^{۲} < ۲^{۳} < ۲^{۶} < ۲^{۹} < ۲^{۱۲}$$

جذر یا ریشه دوم اعداد : در تساوی $\left[(-۳)^{۲} = ۹ \ , \ ۳^{۲} = ۹\right]$ عدد ۹ را مجذور اعداد ۳ و ۳- می گویند. و اعداد ۳ و ۳- ریشه های دوم ۹ می گویند.

نکته : هر عدد دارای دو ریشه دوم است که یکی قرینه ی دیگری است.

مانند : ریشه های دوم عدد ۳۶ برابر است با : ۶ و ۶-

نکته : در جذر گیری فقط عدد مثبت آن در نظر گرفته می شود و جذر را با رادیکال $(\sqrt{})$ نشان می دهند.

نکته : اعداد منفی جذر ندارند. چون مجذور هیچ عددی ؛ منفی نمی شود.

نکته : جذر اعداد صفر و یک برابر با خود آن اعداد است.

مثال : جذر اعداد زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{\frac{۴۹ \times ۲۵}{۱۰۰}} = \frac{۷ \times ۵}{۱۰} = \frac{۷}{۲}$$

$$\sqrt{۰/۲۵} = ۰/۵$$

$$\sqrt{\sqrt{۱۶}} = \sqrt{۴} = ۲$$

سال هشتم

(فصل هفتم)

توان و جذر

جذر تقریبی اعداد : برای به دست آوردن جذر تقریبی اعداد مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) ابتدا مشخص می کنیم عدد داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

۲) سپس عدد وسط دو عدد را مشخص کرده و مجذور آن را می نویسیم.

۳) سپس اگر مجذور عدد وسطی از عدد داده شده بیشتر بود ۴ عدد کمتر از عدد وسطی و اگر از عدد داده شده کمتر بود ۴ عدد بزرگتر از عدد وسطی را می نویسیم.

۴) داخل یک جدول مجذورهای ۴ عدد را نوشته سپس مجذور عددی که به عدد داده شده نزدیکتر بود همان جذر تقریبی عدد است.

نکته : برای این که بدانیم عدد داده شده بین کدام دو صحیح متوالی قرار دارد مجذور دو عددی را مشخص می کنیم که به عدد داده شده نزدیک باشد.

مثال : مشخص عدد $\sqrt{۳۲}$ و $\sqrt{۸۳}$ بین کدام دو عدد قرار دارد و به کدام عدد نزدیکتر است.

$\overset{۹}{\cancel{\sqrt{۸۱}}} < \sqrt{۸۳} < \overset{۱۰}{\cancel{\sqrt{۱۰۰}}}$ (بین ۹ و ۱۰ که به ۹ نزدیکتر است)

$\overset{۵}{\cancel{\sqrt{۲۵}}} < \sqrt{۳۲} < \overset{۶}{\cancel{\sqrt{۳۶}}}$ (بین ۵ و ۶ که به ۶ نزدیکتر است)

مثال : جذر تقریبی عدد ۴۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$۶ \rightarrow ۶/۵ \leftarrow ۷$

$\overset{۶}{\cancel{\sqrt{۳۶}}} < \sqrt{۴۷} < \overset{۷}{\cancel{\sqrt{۴۹}}}$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$(۶/۵)^۲ = ۴۲/۲۵$

مرحله ۳

$۴۲/۲۵ < ۴۷$

چون مجذور عدد وسط کمتر از عدد شده مجذور ۴ عدد بزرگتر از عدد وسط را می نویسیم

مرحله ۴

عدد	**۶/۶**	**۶/۷**	**۶/۸**	**۶/۹**
مجذور عدد	**۴۳/۵۶**	**۴۴/۸۹**	**۴۶/۲۴**	**۴۷/۶۱**

$\sqrt{۴۷} \simeq ۶/۸$

مثال : جذر تقریب عدد ۱۲۷ را به دست آورید.

مرحله ۱

عدد وسط

$۱۱ \rightarrow ۱۱/۵ \leftarrow ۱۲$

$\cancel{\sqrt{۱۲۱}} < \sqrt{۱۲۷} < \cancel{\sqrt{۱۴۴}}$

مرحله ۲

مجذور عدد وسط

$(۱۱/۵)^۲ = ۱۳۲/۲۵$

مرحله ۳

$۱۳۲/۲۵ > ۱۲۷$

چون مجذور عدد وسط بیشتر از عدد شده مجذور ۴ عدد کوچکتر از عدد وسط را می نویسیم

(فصل هفتم)

سال هشتم

توان و جذر

مرحله ۴

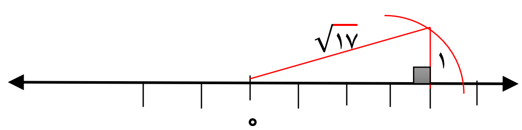
عدد	۱۱/۱	۱۱/۲	۱۱/۳	۱۱/۴
مجذور عدد	۱۲۳/۲۱	۱۲۵/۴۴	۱۲۷/۶۹	۱۲۹/۹۶

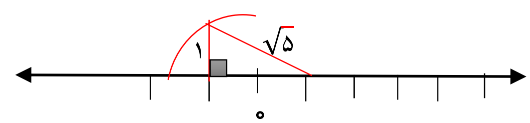
$\sqrt{۱۲۷} \simeq ۱۱/۲$

نمایش اعداد رادیکالی روی محور اعداد : برای نمایش این اعداد چهار مورد زیر را باید مشخص کنیم :

۱) مبدا حرکت ۲) تعداد حرکت ۳) جهت حرکت تعداد مثلث

مثال : اعداد $\sqrt{\mathbf{۱۷}}$ و $\sqrt{\mathbf{۵}}-\mathbf{۱}$ را روی محور اعداد نمایش دهید.





خواص ضرب و تقسیم رادیکال ها : در ضرب و تقسیم رادیکال ها می توان رادیکال را جدا از هم نوشت.

مثال : حاصل عبارت های زیر را به دست آورید.

$$\sqrt{\frac{۲۵}{۳۶}} = \frac{\sqrt{۲۵}}{\sqrt{۳۶}} = \frac{۵}{۶}$$

$$\sqrt{۹۰۰} = \sqrt{۹ \times ۱۰۰} = \overset{۳}{\cancel{\sqrt{۹}}} \times \overset{۱۰}{\cancel{\sqrt{۱۰۰}}} = ۳۰$$

نکته : در جمع و تفریق رادیکال ها نمی توان رادیکال را جدا از هم نوشت و جواب داد :

$$\sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b} \qquad \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

نکته : برای ساده کردن عدد زیر رادیکال می توان برای بعضی از اعداد یک ضرب نوشت به شرطی که یکی از دو عدد جذر دقیق داشته باشد.

مثال : اعداد زیر را به صورت ضرب یک عدد طبیعی در رادیکال بنویسید.

$$۳\sqrt{۴۸} = ۳\sqrt{۱۶ \times ۳} = ۱۲\sqrt{۳}$$

جذر ۴ ×

$$\sqrt{۲۰} = \sqrt{۴ \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

جذر ۲

سال هشتم

(فصل هشتم)

آمار و احتمال

علم آمار : جمع آوری اطلاعات (داده ها) و بررسی آن ها را آمار می گویند.

داده آماری : اطلاعات عددی را داده آماری می گویند.

انواع نمودار :

۱) نمودار ستونی : برای مقایسه تعداد و مشخص کردن کمترین و بیشترین داده آماری استفاده می شود.

۲) نمودار خط شکسته : برای نشان دادن تغییرات در یک مدت مشخص کاربرد دارد.

۳) نمودار تصویری : برای مقایسه داده های تقریبی کاربرد دارد.

۴) نمودار دایره ای : برای نشان دادن نسبت داده ها به کل و سهم هر بخش کاربرد دارد.

دامنه تغییرات : اختلاف بیشترین و کمترین داده آماری را دامنه تغییرات می گویند.

مثال : دامنه تغییرات داده های زیر را مشخص کنید :

$$\text{۱۰}\,,-\text{۶}\,,\text{۲۷}\,,\underset{}{\overset{\text{بیشترین}}{\text{۱۲}}}\,,-\text{۱۱}\,,\overset{\text{کمترین}}{\text{۸}} \quad\Longrightarrow \text{۲۷}-(-\text{۱۱})=\text{۲۷}+\text{۱۱}=\text{۳۸}$$

میانگین داده : از تقسیم مجموع داده ها بر تعداد داده ها میانگین حاصل می شود.

$$\text{میانگین}=\frac{\text{مجموع داده ها}}{\text{تعداد داده ها}} \Longrightarrow \bar{X}=\frac{s}{n}$$

مثال : میانگین داده های زیر را به دست آورید :

$$-\text{۴}\,,\text{۱۰}\,,\text{۱۳}\,,-\text{۱۸}\,,\text{۸}\,,\text{۱۵} \qquad \Longrightarrow \bar{X}=\frac{s}{n}=\frac{-\text{۴}+\text{۱۰}+\text{۱۳}-\text{۱۸}+\text{۸}+\text{۱۵}}{\text{۶}}=\frac{\text{۲۴}}{\text{۶}}=\text{۴}$$

مثال : الف) میانگین ۵ درس ۱۷/۵ شده است مجموع نرات چند است.

$$\bar{X}=\frac{s}{n}\Longrightarrow \text{۱۷/۵}=\frac{s}{\text{۵}}\Longrightarrow s=\text{۱۷/۵}\times\text{۵}=\text{۸۷/۵}$$

ب) میانگین ۱۴ و مجموع نمرات ۱۶۸ شده است. تعداد درس ها چند است.

$$\bar{X}=\frac{s}{n}\Longrightarrow \text{۱۴}=\frac{\text{۱۶۸}}{n}\Longrightarrow n=\frac{\text{۱۶۸}}{\text{۱۴}}=\text{۱۲}$$

سال هشتم

(فصل هشتم)

آمار و احتمال

نکته : میانگین جدول فراوانی از رابطه ی زیر حاصل می شود :

$$\text{میانگین} = \frac{\text{مجموع ستون}\left(\text{مرکز} \times \text{فراوانی}\right)}{\text{مجموع ستون فراوانی}}$$

جدول فراوانی : اگر تعداد داده های آماری زیاد باشد از جدول آماری استفاده می شود که شامل قسمت های زیر است :

۱) حدود دسته : از کمترین داده تا بیشترین داده تقسیم بندی می شود.

۲) فراوانی : به تعداد داده های هر دسته فراوانی می گویند.

۳) خط نشان : به تعداد فراوانی هر دسته خط می کشیم. (در دسته های ۵ تایی)

۴) مرکز (متوسط) دسته : دو عدد دسته جمع و حاصل را بر عدد ۲ تقسیم می کنیم.

۵) مرکز × فراوانی : اعداد مرکز و فراوانی هر دسته را در هم ضرب می کنیم.

مثال : نمرات ریاضی تعدادی از دانش آموزان به صورت زیر است :

۹ , ۸ , ۶/۵ , ۱۳/۵ , ۱۷/۲۵ , ۱۹ , ۱۱ , ۱۱ , ۱۰ , ۲/۷۵ , ۱۴/۲۵ ,۱۸/۵ ,۳/۵ ,۷/۲۵ ,۸ , ۱۴/۵

الف) جدول فراوانی داده شده را کامل کنید. و میانگین نمرات را با استفاده از جدول به دست آورید.

حدود دسته	فراوانی	خط نشان	مرکز دسته	فراوانی × مرکز
$۰ \leq x < ۴$	۲	//	$\frac{۰+۴}{۲} = ۲$	$۲ \times ۲ = ۴$
$۴ \leq x < ۸$	۲	//	$\frac{۴+۸}{۲} = ۶$	$۲ \times ۶ = ۱۲$
$۸ \leq x < ۱۲$	۶	//// /	$\frac{۸+۱۲}{۲} = ۱۰$	$۶ \times ۱۰ = ۶۰$
$۱۲ \leq x < ۱۶$	۳	///	$\frac{۱۲+۱۶}{۲} = ۱۴$	$۳ \times ۱۴ = ۴۲$
$۱۶ \leq x \leq ۲۰$	۳	///	$\frac{۱۶+۲۰}{۲} = ۱۸$	$۳ \times ۱۸ = ۵۴$
جمع	۱۶	ــــــ	ــــــ	۱۷۲

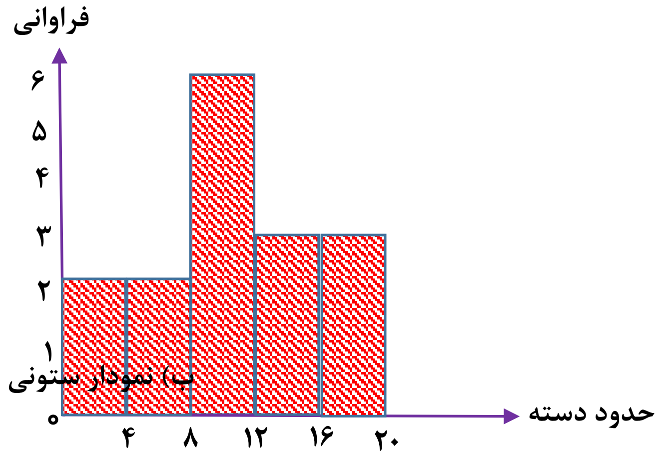
$$\text{میانگین} = \frac{۱۷۲}{۱۶} \simeq ۱۰/۷۵$$

سال هشتم

(فصل هشتم)

آمار و احتمال

ب) نمودار ستونی نمرات ریاضی را رسم کنید.



ب) نمودار ستونی نمرات ریاضی را رسم کنید.

احتمال یا اندازه گیری شانس : احتمال رخ دادن هر اتفاق از رابطه ی زیر به دست می آید :

$$\text{احتمال} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد کل حالت ها}}$$

نکته : احتمالی که رخ دادن آن غیر ممکن باشد با عدد صفر نشان می دهند.

نکته : احتمال ممکن را با عدد کسری بین صفر تا یک نشان می دهند.

نکته : احتمال حتمی را با عدد یک نشان می دهند.

مثال : در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را به دست آورید. اعداد تاس = {۱ ,۲ ,۳ ,۴ ,۵ ,۶} ⟸ کل حالت ها = ۶

الف) احتمال آمدن عدد زوج مضرب ۳ : اعداد زوج مضرب ۳ = {۶} ⟸ حالت مطلوب = ۱ ⟸ احتمال = $\frac{۱}{۶}$

ب) احتمال آمدن اعداد کوچکتر مساوی ۴ : اعداد کوچکتر مساوی ۴ = {۱ ,۲ ,۳ ,۴} ⟸ حالت مطلوب = ۴ ⟸ احتمال = $\frac{۴}{۶} = \frac{۲}{۳}$

ج) احتمال آمدن اعداد اول : اعداد اول = {۲ ,۳ ,۵} ⟸ حالت مطلوب = ۳ ⟸ احتمال = $\frac{۳}{۶} = \frac{۱}{۲}$

مثال : در یک کیسه ۴ مهره قرمز ، ۲ مهره زرد و ۳ مهره سفید است. یک مهره را تصادفاً بیرون می آوریم :

کل حالت ها = ۴ + ۲ + ۳ = ۹

الف) احتمال بیرون آمدن مهره قرمز : حالت مطلوب = ۴ ⟸ احتمال = $\frac{۴}{۹}$

ب) احتمال بیرون نیامدن مهره سفید : حالت مطلوب = ۴ + ۲ = ۶ ⟸ احتمال = $\frac{۶}{۹} = \frac{۲}{۳}$

سال هشتم

(فصل هشتم)

آمار و احتمال

نکته : مجموع احتمال ها در یک مسئله همواره عدد یک است. احتمال رخ دادن + احتمال رخ ندادن = ۱

مثال : احتمال آمدن رنگ سبز در یک چرخنده $\frac{۳}{۱۰}$ است. احتمال نیامدن رنگ سبز چند است.

احتمال رخ دادن − ۱ = احتمال رخ ندادن ⟸ احتمال رخ ندادن = ۱ − $\frac{۳}{۱۰}$ = $\frac{۷}{۱۰}$

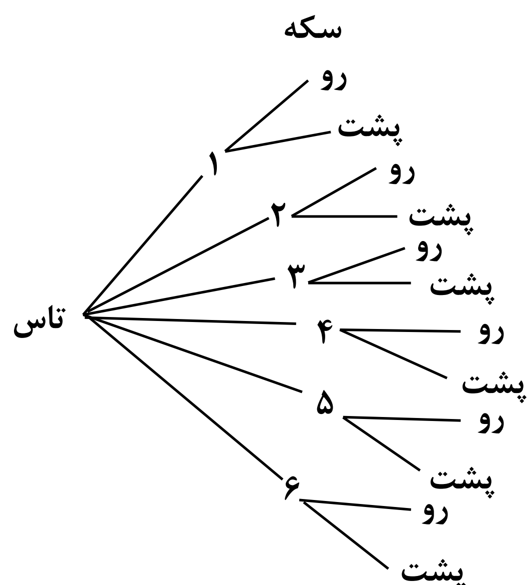
حالت های ممکن در یک پیشامد : برای به دست آوردن کل حالت ها می توان از جدول نظام دار یا نمودار درختی استفاده کرد.

مثال : یک سکه و یک تاس را با هم پرتاب می کنیم. تمام حالت های ممکن را به روش جدول نظام دار و نمودار درختی به دست آورید.

(جدول نظام دار)

تاس / سکه	۱	۲	۳	۴	۵	۶
رو	۱ – رو	۲ – رو	۳ – رو	۴ – رو	۵ – رو	۶– رو
پشت	۱ – پشت	۲ – پشت	۳ – پشت	۴ – پشت	۵ – پشت	۶ – پشت

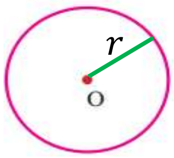
(نمودار درختی)



(فصل نهم)

دایره

دایره : به مجموعه نقاطی که از یک نقطه مشخص (مرکزدایره) ، به یک اندازه باشند.



نکته : دایره را اختصار به صورت $c(o\ , r)$ نشان می دهند.
دایره
شعاع
مرکز

اجزای دایره :

۱) شعاع دایره : فاصله ی مرکز دایره تا محیط دایره را شعاع و با حرف $\left(r \text{ یا } R\right)$ نشان می دهند.

۲) کمان دایره : فاصله ی ایجاد شده روی محیط دایره را کمان و با دو حرف و سه حرف نشان می دهند.

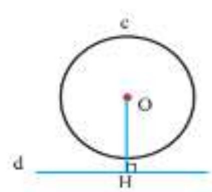
۳) وتر دایره : پاره خطی که دو نقطه ی روی محیط دایره را به هم وصل کند وتر و با دو حرف نشان می دهند.

۴) قطر دایره : پاره خطی است که دو نقطه ی روی محیط دایره را به هم وصل می کند و از مرکز دایره می گذرد. قطر را با دو حرف نشان می دهند.

نکته : بزرگترین وتر دایره ، قطر نام دارد. و قطر ۲ برابر شعاع است.

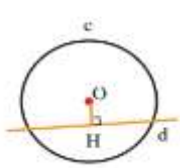
وضعیت خط و دایره : خط و دایره دارای سه وضعیت هستند :

۱) خط ممکن است بیرون از دایره باشد. در این حالت خط و دایره نقطه مشترک(برخورد) ندارند.



$r < \overline{OH}$ (رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

۲) خط ممکن است داخل دایره باشد. در این حالت خط و دایره دو مشترک(برخورد) دارند.

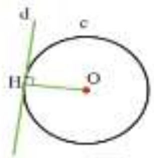


$r > \overline{OH}$(رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

(فصل نهم)

دایره

۳) خط ممکن است مماس (چسبیده) بر دایره باشد. در این حالت خط و دایره یک مشترک(برخورد) دارند.



$r = \overline{OH}$ (رابطه ی مقایسه شعاع با فاصله مرکز تا خط)

نکته : شعاع دایره در نقطه ی تماس بر خط مماس عمود است.

مثال : الف) شعاع دایره ۳ سانتی متر و فاصله ی مرکز تا خط ۵ سانتی متر است. خط و دایره چند نقطه ی مشترک دارند.

چون فاصله ی مرکز تا خط از شعاع دایره بیشتر است پس خط بیرون دایره قرار دارد و نقطه مشترکی ندارند.

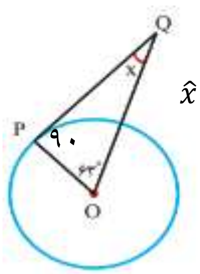
ب) قطر دایره ۶ سانتی متر و فاصله ی مرکز تا خط ۳ سانتی متر است. خط و دایره چند نقطه ی مشترک دارند.

قطر دو برابر شعاع دایره است پس شعاع دایره برابر با ۳ سانتی متر است. چون شعاع با فاصله ی مرکز تا خط برابر است پس خط و دایره یک نقطه ی مشترک دارند.

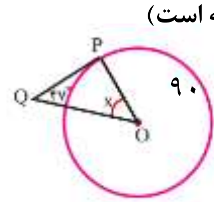
مثال : با توجه به هر شکل زاویه ی خواسته شده چند درجه است.

(شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود یعنی زاویه ی ۹۰ درجه تشکیل می دهد)

مجموع زاویه های داخلی هر مثلث ۱۸۰ درجه است)

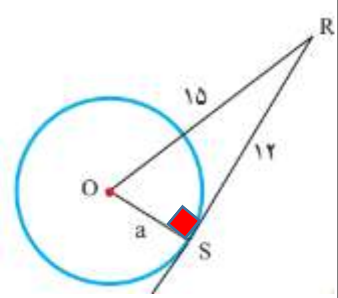


$\hat{x} = ۲۷^\circ$



$\hat{x} = ۴۳^\circ$

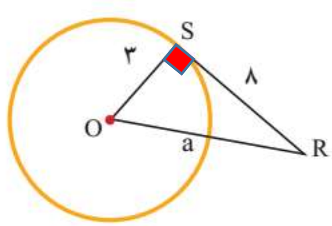
مثال : با توجه به هر شکل مقدار a را به دست آورید. (در مثلث قائم الزاویه برای اندازه ی ضلع مجهول از رابطه ی فیثاغورس استفاده می شود)



$$a^۲ = ۱۵^۲ - ۱۲^۲$$

$$a^۲ = ۲۲۵ - ۱۴۴ = ۸۱$$

$$a = \sqrt{۸۱} = ۹$$



$$a^۲ = ۸^۲ + ۳^۲$$

$$a^۲ = ۶۴ + ۹ = ۷۳$$

$$a = \sqrt{۷۳}$$

پیدا کردن مرکز دایره : ابتدا دو وتر غیر موازی رسم می کنیم. سپس عمودمنصف های آن دو وتر را رسم کرده که محل برخورد آن دو عمودمنصف مرکز دایره نام دارد.

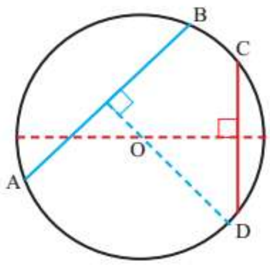
سال هشتم

(فصل نهم)

دایره

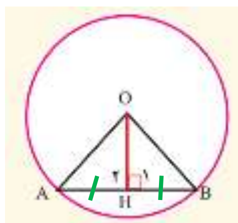
مثال : در یک دایره دلخواه مرکز دایره را با رسم دو وتر نشان دهید.

ابتدا دو وتر غیر موازی AB و CD را رسم می کنیم.



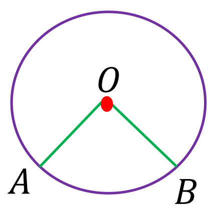
سپس عمود منصف آن دو را که با نقطه چین مشخص شده رسم می کنیم که محل برخورد دو عمودمنصف همان مرکز دایره است.

نکته : خطی که از مرکز بر وتر عمود باشد آن را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. و بر عکس خطی که از وسط وتر و مرکز دایره بگذرد ، بر وتر عمود است.



$$AH = BH$$

زاویه مرکزی : زاویه ای است که رأس آن مرکز دایره و دو ضلع آن شعاع دایره باشد.



$$\hat{O} = \overparen{AB}$$

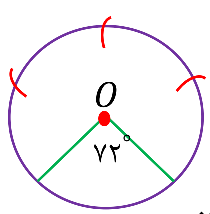
اندازه ی زاویه مرکزی : زاویه ی مرکزی برابر است با اندازه ی کمان روبه رو آن.

نکته : محیط دایره بر حسب درجه ۳۶۰ درجه است. و بر حسب سانتی متر $\left(۲\pi r \text{ یا } ۳/۱۴ \times \text{قطر}\right)$ می باشد.

نکته : اگر دو کمان مساوی باشند وترهای نظیر آن دو کمان نیز برابرند و برعکس.

تقسیم دایره به کمان های مساوی : ابتدا یک شعاع دایره رسم می کنیم سپس محیط دایره (۳۶۰ درجه) را بر تعداد کمان های خواسته شده تقسیم کرده ، نقاله را منطبق بر شعاع گذاشته و زاویه مورد نظر را مشخص می کنیم و در آخر دهانه ی پرگار را به اندازه ی وتر ایجاد شده باز کرده روی یکی از نقاط ایجاد شده روی محیط دایره گذاشته و متوالیاً کمان می زنیم.

مثال : یک دایره رسم کنید و آن را به ۵ کمان مساوی تقسیم کنید.



محاسبه طول یک کمان از دایره : برای محاسبه طول کمان از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه ی کمان}}{۳۶۰}$$

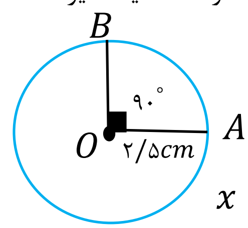
سال هشتم

(فصل نهم)

دایره

مثال : در هر شکل طول کمان AB چند سانتی متر است.

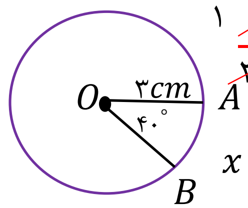
$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times ۳/۱۴ = ۵ \times ۳/۱۴ = ۱۵/۷$



$\frac{\cancel{۹۰}^{\,۱}}{\cancel{۳۶۰}_{\,۴}} = \frac{x}{۱۵/۷}$

$x = ۱۵/۷ \div ۴ \simeq ۴cm$

$\text{محیط دایره} = \text{قطر} \times ۳/۱۴ = ۶ \times ۳/۱۴ = ۱۸/۸۴$



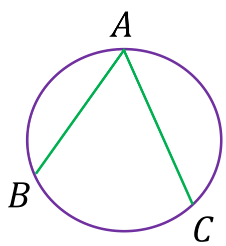
$\frac{\cancel{۴۰}^{\,۱}}{\cancel{۳۶۰}_{\,۹}} = \frac{x}{۱۸/۸۴}$

$x = ۱۸/۸۴ \div ۹ \simeq ۲/۱۰cm$

زاویه محاطی : زاویه ای است که رأس آن روی محیط دایره و دو ضلع آن وتر دایره باشد.

اندازه ی زاویه محاطی : زاویه محاطی برابر است با نصف اندازه ی کمان روبه رو آن.

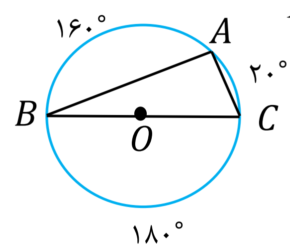
$\hat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$



نکته : زاویه های محاطی روبه رو به یک کمان برابرند.

نکته : اندازه ی زاویه ی محاطی روبه رو به قطر دایره ، ۹۰ درجه است.

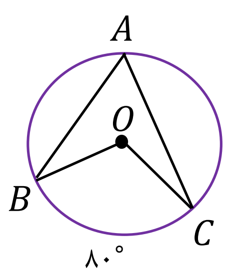
مثال : اندازه ی کمان و زاویه های خواسته شده را بنویسید.



زاویه محاطی روبه رو قطر

$\hat{A} = ۹۰^\circ$ $\quad \hat{B} = ۱۰^\circ$

$\overset{\frown}{AC} = ۲۰^\circ$ $\quad \hat{C} = ۸۰^\circ$



زاویه محاطی نصف کمان روبه رو

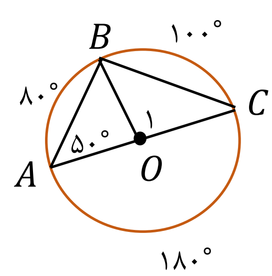
$\hat{A} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$

زاویه مرکزی برابر کمان روبه رو

$\widehat{BOC} = ۸۰^\circ$

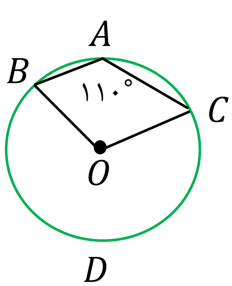
$\overset{\frown}{BAC} = ۳۶۰^\circ - ۸۰^\circ = ۲۸۰^\circ$

محیط دایره



$\overset{\frown}{BC} = ۱۰۰^\circ$ $\quad \hat{C} = ۴۰^\circ$

$\overset{\frown}{AB} = ۸۰^\circ$ $\quad \widehat{O_۱} = ۱۰۰^\circ$



$\overset{\frown}{BDC} = ۲۲۰^\circ$

$\overset{\frown}{BAC} = ۳۶۰^\circ - ۲۲۰^\circ = ۱۴۰^\circ$

$\hat{O} = ۱۴۰^\circ$

سال نهم

(فصل اول)

مجموعه ها

مجموعه : به دسته ای از اشیاء کاملا مشخص و دو به دو متمایز (غیر تکراری) مجموعه می گویند.

مثال : کدام یک از عبارات زیر مشخص کننده یک مجموعه است؟

الف) ۳ عدد زوج متوالی (مجموعه نیست)　　ب) ۴ گل زیبا (مجموعه نیست)　　ج) اعداد اول کمتر از ۱۰ (مجموعه است)

نکته : مجموعه را به صورت آکولاد $\{\ \ \}$ نشان می دهند و مجموعه را با حروف بزرگ انگلیسی نام گذاری می کنند.

نکته : به هر یک از اعداد و عبارت داخل مجموعه عضو می گویند و علامت عضو بودن به صورت $\in$ و علامت عضو نبودن به صورت $\notin$ می باشد.

نکته : تعداد عضو های هر مجموعه مانند A را به صورت $n(A)$ نشان می دهند.

مثال : با توجه به مجموعه ی A درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.

$A = \{۳ , \{۴ , ۵\} , ۶\}$　　$n(A) = ۴$ ✗　　$۳ \in A$ ✓　　$۴ \notin A$ ✓　　$\{۶\} \in A$ ✗

مجموعه تهی : مجموعه ای که دارای هیچ عضوی نباشد. علامت مجموعه تهی به صورت $\{\ \ \}$ یا $\emptyset$ می باشد.

مثال : کدام یک از مجموعه های زیر مجموعه تهی است؟

الف) اعداد طبیعی کمتر از ۴ $\{۱ , ۲ , ۳\}$　　ب) اعداد صحیح کمتر از صفر $\{\dots , -۳ , -۲ , -۱\}$　　ج) اعداد طبیعی بین ۴ و ۵ $\{\ \ \}$ ✓

دو مجموعه برابر : دو مجموعه A و B را برابر می گویند که هر عضو مجموعه A در مجموعه B و هر عضو مجموعه B در مجموعه A وجود داشته باشد. مانند دو مجموعه ی مقابل :

$A = \{۴ , ۳ , ۱\}$　و　$B = \left\{\sqrt{۹} , ۷^{۰} , \frac{۲۰}{۵}\right\}$

مثال : دو مجموعه ی زیر برابرند. مقدار x و y را به دست آورید؟

$\{x - ۷ , ۳\} = \{۴ , y\}$　　$x - ۷ = ۴ \Rightarrow x = ۱۱ , y = ۳$

زیر مجموعه : مجموعه A زیر مجموعه B است هر گاه هر عضو مجموعه A عضوی از مجموعه B باشد و آن را به صورت $A \subseteq B$ نشان می دهند. اگر A زیر مجموعه B نباشد آن را به صورت $A \nsubseteq B$ نشان می دهند.

نکته : اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه رابطه های مقابل همواره برقرار است :　$A \cap B = A$　و　$A \cup B = B$

نکته : برای پیدا کردن تعداد زیر مجموعه ها از رابطه ۲^n استفاده می کنیم. اگر تعداد زیر مجموعه را داشته باشیم و تعداد عضو را خواسته باشند عدد داده شده را تجزیه می کنیم.

مثال : الف) مجموعه ی $A = \{۱ , ۲ , \dots , ۱۰\}$ چند زیر مجموعه دارد؟　$n(A) = ۱۰ \Rightarrow ۲^n = ۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$ زیر مجموعه

ب) یک مجموعه دارای ۳۲ زیر مجموعه است. این مجموعه دارای چند عضو است؟　$۳۲ = ۲^۵ \Rightarrow$ ۵ عضو دارد

(فصل اول)

مجموعه ها

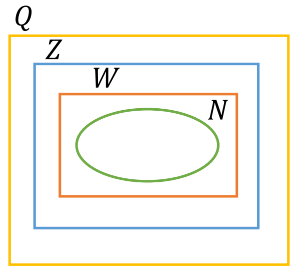
نمایش مجموعه ها : الف) مجموعه اعداد طبیعی : $N = \{۱ , ۲ , ۳ , \cdots\}$ ب) مجموعه اعداد حسابی : $W = \{۰ , ۱ , ۲ , \cdots\}$

ج) مجموعه اعداد صحیح : $Z = \{\cdots , -۲ , -۱ , ۰ , ۱ , ۲ , \cdots\}$ د) مجموعه اعداد طبیعی زوج : $E = \{۲ , ۴ , ۶ , \cdots\}$

ه) مجموعه اعداد طبیعی فرد : $O = \{۱ , ۳ , ۵ , \cdots\}$ و) مجموعه اعداد گویا : $Q = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in Z, b \neq ۰\right\}$

نمودار ون مجموعه ها : مجموعه ها را می توان داخل یک منحنی بسته ای نشان داد.

نکته : نمودار ون مجموعه اعداد ریاضی به صورت زیر است :



$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q$$

مثال : الف) عضوهای هر مجموعه را بنویسید؟

$$B = \{۲x - ۱ \mid x \in N, x \leq ۳\} = \{۱ , ۳ , ۵\}$$

$$\{۲(۱) - ۱ , ۲(۲) - ۱ , ۲(۳) - ۱\}$$

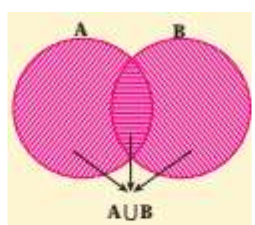
$$A = \{x \mid x \in Z, -۴ \leq x < ۲\} = \{-۴ , -۳ , -۲ , -۱ , ۰ , ۱\}$$

ب) صورت ریاضی هر مجموعه را بنویسید؟

$$D = \{۴ , ۸ , ۱۲ , \ldots\} = \{۴x \mid x \in N\}$$

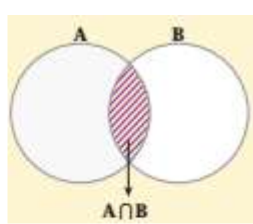
$$C = \{-۶ , -۵ , \ldots , ۳\} = \{x \mid x \in Z, -۷ < x < ۴\}$$

اجتماع دو مجموعه : اجتماع دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی است که حداقل در یکی از دو مجموعه A و B باشند و اجتماع دو مجموعه A و B را به صورت $A \cup B$ نمایش می دهند.



نمودار ون اجتماع دو مجموعه A و B

اشتراک دو مجموعه : اشتراک دو مجموعه A و B شامل همه عضوهایی که هم عضو A و هم عضو B باشند و اشتراک دو مجموعه A و B را به صورت $A \cap B$ نمایش می دهند.



نمودار ون اشتراک دو مجموعه A و B

سال نهم

(فصل اول)

مجموعه ها

تفاضل دو مجموعه : مجموعه $A-B$ (A منهای B) شامل همه عضوهایی است که عضو مجموعه A باشند ولی عضو مجموعه B نباشند.

نمودار ون تفاضل دو مجموعه A و B

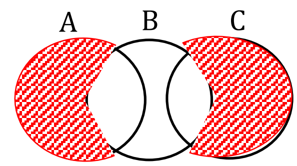
مثال : اگر مجموعه $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{x \mid x\in Z, -۲<x\le ۲\}$ و $C=\{x^۲+۱ \mid x\in A\}$ باشد. عضوهای هر مجموعه را بنویسید؟

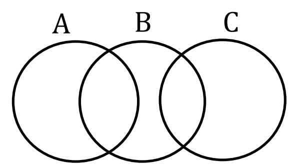
$B=\{-۱,۰,۱,۲\}$ $\quad C=\{۱^۲+۱,۲^۲+۱,۳^۲+۱\}=\{۲,۵,۱۰\}$

ب) $B\cap(A\cup C)=\{-۱,۰,۱,۲\}\cap\{۱,۲,۳,۵,۱۰\}=\{۱,۲\}$

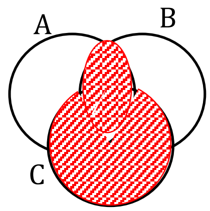
الف) $A-C=\{۱,۳\}$

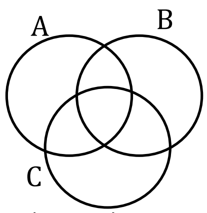
مثال : با توجه به هر شکل مجموعه های داده شده را هاشور بزنید؟





$(A\cup C)-B$





$(A\cap B)\cup C$

مجموعه و احتمال : برای به دست آوردن احتمال هر پیشامد از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$\text{احتمال رخ دادن پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت های مطلوب}}{\text{تعداد همه ی حالت های ممکن}} \Rightarrow p(A)=\frac{n(A)}{n(B)}$$

مثال : در پرتاب یک تاس احتمال های زیر را به دست آورید؟

الف) احتمال آمدن عدد اول : $\quad A=\{۲,۳,۵\} \quad p(A)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ب) احتمال آمدن عدد بزرگتر و مساوی ۵ : $\quad B=\{۵,۶\} \quad p(B)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$

مثال : در پرتاب دو تاس احتمال های زیر را به دست آورید؟ $\quad$ کل حالت ها $\quad n(S)=۶^۲=۳۶$

الف) احتمال آمدن این که تاس اول عدد فرد و تاس دوم عدد کوچکتر از ۳ بیاید :

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۳,۱),(۳,۲),(۵,۱),(۵,۲)\}\Rightarrow n(A)=۶\Rightarrow p(A)=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶}$$

ب) احتمال آمدن این که مجموع هر دو عدد تاس ۶ شود :

$$B=\{(۱,۵),(۵,۱),(۲,۴),(۴,۲),(۳,۳)\}\Rightarrow n(B)=۵\Rightarrow p(B)=\frac{۵}{۳۶}$$

سال نهم

(فصل دوم)

عددهای حقیقی

اعداد گویا : هر عددی که به کسر تبدیل شود عدد گویا نام دارد. (صورت و مخرج عدد صحیح و مخرج مخالف صفر باشد)

نکته : اعداد گویا را با حرف انگلیسی Q نمایش می دهند : $\mathrm{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a\,,b\in Z, b\neq ۰\right\}$

جمع و تفریق اعداد کسری : مخرج مشترک گرفته که بهترین مخرج مشترک همان (ب . م. م) مخرج ها است.

مانند : (ب . م . م) مخرج ها $\Rightarrow (۱۲\,,۱۸)=۳۶$ $\qquad \left(-\frac{۵}{۱۲}\right)-\left(-\frac{۷}{۱۸}\right)=\frac{-۱۵+۱۴}{۳۶}=-\frac{۱}{۳۶}$

ضرب اعداد کسری : فقط در ضرب می توان قبل از جواب دادن صورت را با مخرج ساده کرد. سپس صورت ها در هم و مخرج ها در هم ضرب می شود.

مانند : $\left(-\frac{\overset{۱}{\cancel{۵}}}{\underset{۴}{\cancel{۱۲}}}\right)\times\left(-\frac{\overset{۱}{\cancel{۳}}}{\underset{۲}{\cancel{۱۰}}}\right)=+\frac{۱}{۸}$

تقسیم اعداد کسری : تقسیم به ضرب تبدیل می شود. (کسر اولی در معکوس کسر دومی ضرب می شود)

مانند : $\left(+\frac{۴}{۷}\right)\div\left(-\frac{۵}{۲۱}\right)=\left(+\frac{۴}{\underset{۱}{\cancel{۷}}}\right)\times\left(-\frac{\overset{۳}{\cancel{۲۱}}}{۵}\right)=-\frac{۱۲}{۵}=-۲\frac{۲}{۵}$

مثال : حاصل عبارت زیر را به دست آورید؟

$$\left(+\frac{۲}{۳}\right)\div\left[\left(-\frac{۱}{۱۵}\right)+\left(+\frac{۳}{۵}\right)\right]=\left(+\frac{۲}{۳}\right)\div\left(\frac{\overset{+۸}{\cancel{-۱+۹}}}{۱۵}\right)=\left(+\frac{۲}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}\right)\times\left(+\frac{\overset{۵}{\cancel{۱۵}}}{۸}\right)=+\frac{۱۰}{۸}=\frac{۵}{۴}=۱\frac{۱}{۴}$$

مقایسه کسرها : از دو روش می توان استفاده کرد :

الف) هم مخرج کردن کسرها : ابتدا مخرج تمام کسرها را برابر کرده سپس کسرها را مقایسه می کنیم.

مثال : کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$(۲\,,۴\,,۵\,,۱۰)=۲۰$ $\qquad \frac{۲}{۵},\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۱۰}\Rightarrow\frac{۸}{۲۰},\frac{۱۵}{۲۰},\frac{۱۰}{۲۰},\frac{۱۴}{۲۰}\Rightarrow\frac{۲}{۵}<\frac{۱}{۲}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۳}{۴}$

ب) تبدیل به عدد اعشار : (صورت بر مخرج تقسیم و خارج قسمت تا دو رقم اعشار ادامه می دهیم.)

مثال : کسرهای زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\frac{۲}{۵},\frac{۳}{۴},\frac{۱}{۲},\frac{۷}{۱۰}\Rightarrow\frac{۲}{۵}=۰/۴۰\quad,\quad\frac{۳}{۴}=۰/۷۵\quad,\quad\frac{۱}{۲}=۰/۵۰\quad,\quad\frac{۷}{۱۰}=۰/۷۰\quad\Rightarrow\frac{۲}{۵}<\frac{۱}{۲}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۳}{۴}$$

نکته) بین هر دو عدد گویا بی نهایت عدد گویا وجود دارد.

سال نهم

(فصل دوم)

عددهای حقیقی

پیدا کردن کسر هایی بین دو عدد کسری : چند روش وجود دارد که دو روش کاربردی آن به صورت زیر است :

۱) صورت ها با هم و مخرج ها با هم جمع می کنیم

۲) ابتدا مخرج مشترک گرفته سپس صورت و مخرج را در یک واحد بیشتر از تعداد خواسته شده ضرب کنیم.

مثال : بین $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۵}$ دو عدد گویا بنویسید؟

$$\frac{۳}{۴} \text{ و } \frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{۱۵}{۲۰} \text{ و } \frac{۱۶}{۲۰} \Rightarrow \frac{۴۵}{۶۰} \text{ و } \frac{۴۸}{۶۰} \Rightarrow \frac{۴۵}{۶۰} < \frac{۴۶}{۶۰} < \frac{۴۷}{۶۰} < \frac{۴۸}{۶۰}$$

روش دوم

$$\frac{۳}{۴} < \frac{۷}{۹} < \frac{۱۱}{۱۴} < \frac{۴}{۵}$$

روش اول

تبدیل کسر به اعداد اعشاری :

۱) عددهای اعشاری متناهی یا مختوم : اگر باقیمانده صورت بر مخرج کسر صفر شود آن کسر را مختوم نام دارد.

مانند : $\frac{۶}{۵} = ۱/۲$ و $\frac{۳}{۴} = ۰/۷۵$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ باشند آن کسر مختوم است.

مانند : $۸ = ۲^۳$ $\quad \frac{۵}{۸}$ و $۲۰ = ۲^۲ \times ۵$ $\quad \frac{۳}{۲۰}$

۲) عددهای اعشاری متناوب ساده : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت عددی مرتب تکرار شود آن را متناوب ساده می گویند.

مانند : (خط تیره روی عدد به معنی تکرار یا گردش عدد است) $\frac{۱}{۳} = ۰/۳۳۳۰۰۰ = ۰/\overline{۳}$ و $\frac{۵}{۱۱} = ۰/۴۵۴۵۰۰۰ = ۰/\overline{۴۵}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر عامل ۲ و ۵ نباشند آن کسر متناوب ساده است.

مانند : $\frac{۶}{۱۳}$ و $۷۷ = ۷ \times ۱۱$ $\quad \frac{۳}{۷۷}$

۳) عدد های اعشاری متناوب مرکب : اگر در تقسیم صورت بر مخرج کسر در خارج قسمت بعد از یک یا چند رقم اعشار به رقم های تکراری برسند به آن کسر متناوب مرکب می گویند.

مانند : $\frac{۷}{۲۲} = ۰/۳۱۸۱۸۰۰۰ = ۰/۳\overline{۱۸}$ و $\frac{۵}{۶} = ۰/۸۳۳۰۰۰ = ۰/۸\overline{۳}$

نکته : اگر در تجزیه مخرج کسر غیر از عامل ۲ و ۵ عامل دیگری باشند آن کسر متناوب مرکب است.

مانند : $۷۵ = ۳ \times ۵^۲$ $\quad \frac{۲}{۷۵}$ و $۱۴ = ۲ \times ۷$ $\quad \frac{۵}{۱۴}$

سال نهم

(فصل دوم)

عددهای حقیقی

اعداد گنگ یا اصم : اعداد که تعداد ارقام اعشاری آن ها نا متناهی و دارای دوره تناوب نباشند اعداد گنگ نام دارند.

نکته : مجموعه اعداد گنگ را با حرف انگلیسی $\acute{Q}$ یا Q^C نشان می دهند.

نکته : اگر n مربع کامل نباشد آنگاه $\sqrt{n}$ عددی گنگ است.(یعنی اعدادی که جذر دقیق ندارند عدد گنگ هستند)

نکته : عدد π چون دارای دوره تناوب نیست عدد گنگ است. **(عدد π تا ۱۰ رقم اعشار : ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ ≃ π)**

مثال : در جای خالی علامت ∈ یا ∉ قرار دهید.

۲ مربع کامل نیست   ۴۷ مربع کامل نیست   ۰/۶

$۱-\sqrt{۲} \in \acute{Q}$ $۳/۱۴ \notin \acute{Q}$ $\pi \in \acute{Q}$ $\sqrt{۴۷} \in \acute{Q}$ $\cancel{\sqrt{۰/۳۶}} \notin \acute{Q}$ $-\frac{۲}{۵} \notin \acute{Q}$

نکته : بین دو عدد بی نهایت عدد گنگ وجود دارد.

مثال : بین هر دو عدد داده شده دو عدد گنگ بنویسید.

الف) $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۴}$ $\sqrt{۳} < \sqrt{۳/۱} < \sqrt{۳/۲} < \sqrt{۴}$

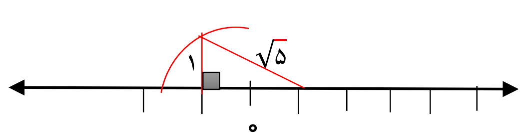
ب) ۲ و ۳ $۲ = \sqrt{۴} < \sqrt{۵} < \sqrt{۶} < \sqrt{۹} = ۳$

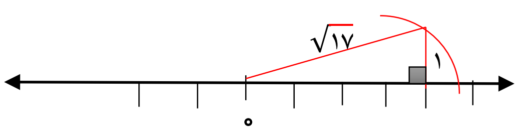
مثال : عدد $۳ - \sqrt{۱۰}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد.

$$۳ - \underbrace{\cancel{\sqrt{۱۶}}}_{۴} < ۳ - \sqrt{۱۰} < ۳ - \underbrace{\cancel{\sqrt{۹}}}_{۳} \Rightarrow -۱ < ۳ - \sqrt{۱۰} < ۰$$

بین ۰ و ۱- قرار دارد

مثال : اعداد $\sqrt{۱۷}$ و $\sqrt{۵} - ۱$ را روی محور اعداد نمایش دهید.

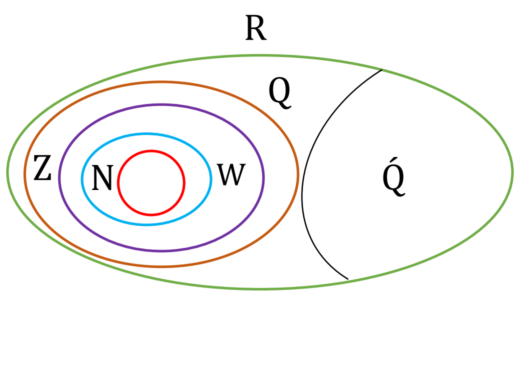




اعداد حقیقی : اجتماع مجموعه اعداد گویا و اعداد گنگ مجموعه اعداد حقیقی را تشکیل می دهد : $Q \cup \acute{Q} = R$

نکته : مجموعه اعداد حقیقی را با حرف انگلیسی R نشان می دهند.

نکته : نمودار ون مجموعه اعداد طبیعی (N) و اعداد حسابی (W) و اعداد صحیح (Z) و اعداد گویا (Q) و اعداد گنگ $(\acute{Q})$ و اعداد حقیقی (R) به صورت زیر است :



$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R \quad , \quad \acute{Q} \subseteq R$

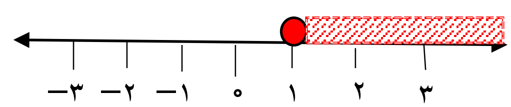
(فصل دوم) **سال نهم**

عددهای حقیقی

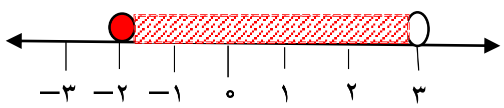
نمایش اعداد حقیقی روی محور : چون اعداد حقیقی شامل اعداد گویا و گنگ هستند پس نمایش این اعداد به صورت یک خط ممتدی است (اگر علامت نامساوی سرکش داشته باشد دایره توپر و بدون سرکش دایره تو خالی قرار می دهیم)

مثال : مجموعه اعداد زیر را روی محور نشان دهید.

$B = \{x \in R \mid ۱ \leq x\}$

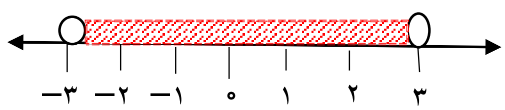


$A = \{x \in R \mid -۲ \leq x < ۳\}$



مثال : مجموعه متناظر محور مقابل را بنویسید.

$C = \{x \in R \mid -۳ < x < ۳\}$



قدرمطلق : فاصله ی نقطه نمایش **یک عدد مانند a را از مبدا مختصات قدرمطلق a می نامیم و آن را به صورت $|a|$ نشان می دهیم.**

خواص قدر مطلق : الف) قدر مطلق عدد مثبت برابر است با خود آن عدد : $x > ۰ \Rightarrow |x| = x$

ب) قدر مطلق صفر برابر با صفر است : $x = ۰ \Rightarrow |x| = ۰$

ج) قدر مطلق عدد منفی برابر با قرینه آن عدد است : $x < ۰ \Rightarrow |x| = -x$

مثال : عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

$$\underbrace{|a^{۲۰} - a^{۳۰}|}_{\text{حاصل منفی}} = a^{۳۰} - a^{۲۰}$$

$$\underbrace{|\overset{\sqrt{۹}}{۳} - \sqrt{۲}|}_{\text{حاصل مثبت}} = ۳ - \sqrt{۲}$$

$$|۴ \overset{-۲۴}{\cancel{-۶ \times ۲^{۲}}} \overset{-۸}{\cancel{\div ۳}} + ۲| = |-۲| = ۲$$

مثال : اگر $x = \frac{۲}{۳}$ و $y = ۳$ و $z = -\frac{۱}{۲}$ باشد. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$|-۶x - ۴z| + ۲|y| = \left|-۶\left(\frac{۲}{۳}\right) - ۴\left(-\frac{۱}{۲}\right)\right| + ۲|۳| = |-۴ + ۲| + ۲(۳) = ۲ + ۶ = ۸$$

نکته : با توجه به مفهوم قدر مطلق همواره رابطه مقابل برقرار است : $\sqrt{a^{۲}} = |a|$

مثال : حاصل هر عبارت را به دست آورید.

$$\sqrt{(۲ - \sqrt{۵})^{۲}} = \underbrace{|\overset{\sqrt{۴}}{۲} - \sqrt{۵}|}_{\text{حاصل منفی}} = -(۲ - \sqrt{۵}) = \sqrt{۵} - ۲$$

$$\sqrt{(۳\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲})^{۲}} = \underbrace{|\overset{\sqrt{۱۸}}{۳\sqrt{۲}} - \overset{\sqrt{۸}}{۲\sqrt{۲}}|}_{\text{حاصل مثبت}} = ۳\sqrt{۲} - ۲\sqrt{۲}$$

سال نهم **(فصل سوم)**

استدلال و اثبات در هندسه

استدلال : دلیل آوردن و استفاده از معلومات قبلی برای معلوم شدن موضوعی که در ابتدا مشخص نبوده است.

اثبات : به استدلالی که موضوع مورد نظر را به درستی نتیجه دهد اثبات می گوییم.

مثال نقض : برای رد یک ادعای ریاضی از مثال نقض استفاده می کنیم.

نکته : همواره برای اثبات یک مسئله نمی توان از رسم شکل یا شهود استفاده کرد زیرا ممکن است خطای دید در آن شکل وجود داشته باشد.

مثال : برای هر یک از مسئله های زیر یک مثال نقض بزنید :

الف) تمام اشکال هندسی گوشه یا زاویه دارند؟ دایره یک شکل هندسی است که دارای گوشه و زاویه نیست.

ب) تمام اعداد زوج اول هستند؟ عدد ۲ تنها عدد زوجی است که اول نیز است.

مثال : کدام یک از استدلال های زیر منطقی و کدام غیر منطقی است :

الف) علی می گوید : هر وقت من درس نخواندم همان روز معلم از من سوال می کند؟ غیر منطقی

ب) تصادف منجر به مرگ در جادها ممکن است به دلیل نقض فنی ماشین باشد؟ منطقی

فرض مسئله : اطلاعاتی که در مسئله داده شده یا حقایقی که مربوط به آن مسئله باشد. (به طور خلاصه داده ها مسئله)

حکم مسئله : خواسته های مسئله را حکم مسئله می گویند.

مثال : در هر مسئله فرض و حکم را مشخص کنید :

الف) زاویه های روبه رو لوزی برابرند. فرض : خواص لوزی حکم : برابر بودن زاویه های رو به رو

ب) طول دو مماس در دایره همواره برابرند. فرض : دایره و عمود بودن خط مماس بر شعاع حکم : برابر بودن دو مماس

مثال : با توجه به مفروضات داده شده نتیجه حاصل را بنویسید :

الف) { در لوزی قطر ها عمود منصف یکدیگر ند ، لوزی نوعی مربع است } $\Leftarrow$ در مربع قطر ها عمود منصف یکدیگر ند

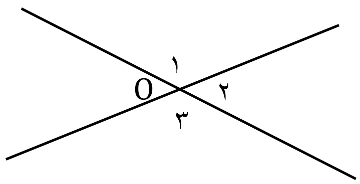
ب) { هر چهار ضلعی که زاویه قائمه داشته باشد مستطیل است ، مربع دارای زاویه قائمه است } $\Leftarrow$ مربع نوعی مستطیل است

سال نهم

(فصل سوم)

استدلال و اثبات در هندسه

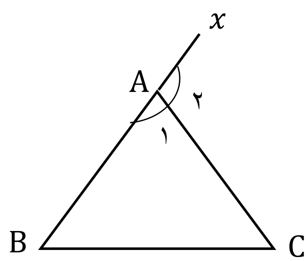
مثال : ثابت کنید زاویه های متقابل به راس با هم برابرند.



فرض : $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۳$ دو زاویه متقابل به راس **حکم :** $\hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$

$$\begin{cases} \hat{O}_۱ + \hat{O}_۲ = ۱۸۰ \text{ درجه} \\ \hat{O}_۲ + \hat{O}_۳ = ۱۸۰ \text{ درجه} \end{cases} \Longrightarrow \hat{O}_۱ + \cancel{\hat{O}_۲} = \cancel{\hat{O}_۲} + \hat{O}_۳ \Longrightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۳$$

مثال : ثابت کنید زاویه ی خارجی مثلث برابر است با مجموع دو زاویه ی داخلی غیر مجاور آن.



فرض : $\hat{A}_۲$ زاویه ی خارجی مثلث **حکم :** $\hat{A}_۲ = \hat{B} + \hat{C}$

$$\begin{cases} \hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۱۸۰ \text{ درجه} \\ \hat{A}_۱ + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \text{ درجه} \end{cases} \Longrightarrow \cancel{\hat{A}_۱} + \hat{A}_۲ = \cancel{\hat{A}_۱} + \hat{B} + \hat{C} \Longrightarrow \hat{A}_۲ = \hat{B} + \hat{C}$$

هم نهشتی مثلث ها : دو مثلث به سه حالت هم نهشت هستند :

الف) دو ضلع مساوی و زاویه بین مساوی (ض ز ض) ب) دو زاویه مساوی و ضلع بین مساوی (ز ض ز) ج) سه ضلع مساوی (ض ض ض)

نکته : سه زاویه مساوی (ز ز ز) از حالت های هم نهشتی نیست.

هم نهشتی دو مثلث قائم الزاویه : دو مثلث قائم الزاویه به دو حالت هم نهشت هستند :

الف) وتر و یک زاویه ی تند (و ز) ب) وتر و یک ضلع (و ض)

نکاتی درباره هم نهشتی دو مثلث :

الف) اگر دو مثلث به هم چسبیده باشند دارای ضلع مشترک هستند.

ب) اگر دو مثلث به صورت ضربدری باشند دارای زاویه متقابل به راس هستند.

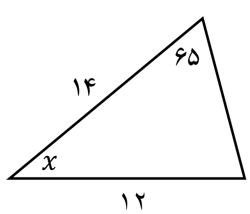
ج) اگر دو مثلث داخل دایره باشند از برابری شعاع دایره استفاده می کنیم.

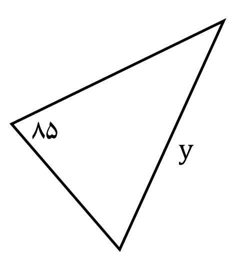
د) در مثلث متساوی الاضلاع هر سه ضلع و هر سه زاویه برابرند.

ه) در مثلث متساوی الساقین دو ساق و دو زاویه ی مجاور قاعده برابرند.

نکته : در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند.

مثال : دو مثلث زیر هم نهشت هستند. مقادیر مجهول را مشخص کنید؟





(در دو مثلث هم نهشت اضلاع و زاویه های متناظر برابرند)

(مجوع زاویه های داخلی مثلث ۱۸۰ درجه است) $۱۸۰ - (۸۵ + ۶۵) = ۳۰$

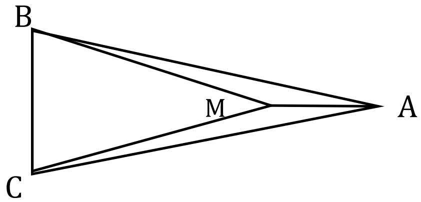
$x = ۳۰ \quad , \quad y = ۱۴$

سال نهم **(فصل سوم)**

استدلال و اثبات در هندسه

مثال : در شکل زیر دو مثلث ABC و MBC متساوی الساقین هستند. دلیل هم نهشتی دو مثلث AMC و AMB را بنویسید.

فرض : $AB = AC\ , MB = MC$ حکم : $\triangle AMB \cong \triangle AMC$

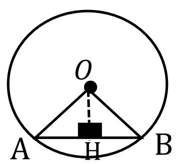


$$\left.\begin{array}{r} AB = AC \ \text{فرض} \\ MB = MC \ \text{فرض} \\ AM = AM = \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AMB \cong \triangle AMC$$

(ض ض ض)

مثال : با توجه به شکل زیر نشان دهید خطی که از مرکز دایره بر وتر عمود می شود آن وتر را نصف می کند.

فرض : O مرکز دایره و OH عمود بر AB حکم : $AH = HB$



$$\left.\begin{array}{r} OA = OB \ \text{شعاع دایره} \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = \text{۹۰ درجه} \\ OH = OH = \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow AH = HB$$

(و ض) (اجزای متناظر)

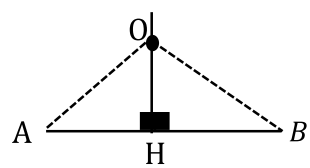
قدم های حل مسئله : برای حل مسئله ۴ گام (قدم) نیاز است :

۱) درک و فهم مسئله ۲) رسم شکل ۳) نوشتن فرض و حکم مسئله ۴) راهبرد حل مسئله

مثال : نشان دهید هر نقطه روی عمود منصف قرار داشته باشد از دو سر پاره خط به یک اندازه است.

گام اول : (درک و فهم مسئله) عمودمنصف خطی بر خط رسم شده عمود باشد و آن خط را نصف کند.

گام دوم : (رسم شکل)



گام سوم : (نوشتن فرض و حکم)

فرض : OH عمود منصف

حکم : $OA = OB$

گام چهارم :(راهبرد حل مسئله)

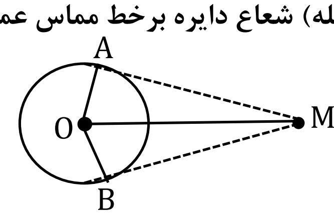
$$\left.\begin{array}{r} AH = HB \ \text{فرض} \\ \widehat{H}_1 = \widehat{H}_2 = \text{۹۰ درجه} \\ OH = OH = \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AHO \cong \triangle BHO \Rightarrow OA = OB$$

(ض ز ض) (اجزای متناظر)

مثال : نشان دهید طول دو مماس رسم شده از نقطه خارج دایره با هم برابر هستند.

گام اول : (درک و فهم مسئله) شعاع دایره برخط مماس عمود و در دایره دو شعاع با هم برابرند.

گام دوم : (رسم شکل)



گام سوم : (نوشتن فرض و حکم)

فرض : $OA = OB\ , \hat{A} = \hat{B} =$ ۹۰

حکم : $MA = MB$

گام چهارم : (راهبرد حل مسئله)

$$\left.\begin{array}{r} OA = OB \ \text{شعاع دایره} \\ \hat{A} = \hat{B} = \text{۹۰ درجه} \\ OM = OM = \text{ضلع مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle MAO \cong \triangle MBO \Rightarrow MA = MB$$

(و ض) (اجزای متناظر)

(فصل سوم) **سال نهم**

استدلال و اثبات در هندسه

دو شکل متشابه : دو شکلی که اضلاع به یک نسبت تغییر کند (کوچک یا بزرگ یا بدون تغییر) ولی زاویه ها تغییر نکرده باشد دو شکل متشابه می گویند.

نکته : دو مربع دلخواه و دو مثلث متساوی الاضلاع همواره متشابه هستند.

نکته : دو مستطیل همواره متشابه نیست. (چون اضلاع ممکن است به یک اندازه تغییر نکند)

نکته : دو لوزی دلخواه همواره متشابه نیست. (چون ممکن است زاویه ها دو به دو برابر نباشند)

نکته : نسبت اضلاع متناظر دو شکل متشابه را نسبت تشابه می گویند.

نکته : دو شکل هم نهشت همواره متشابه و نسبت تشابه آن ها عدد یک است.

مثال : دو مثلث ABC و DEF متشابه هستند. اگر اضلاع مثلث ABC به اندازه های ۳ و ۴ و ۶ و اضلاع مثلث DEF به اندازه های $x-۳\,,۸\,,۲y$ باشند : (اضلاع دو مثلث از کوچک به بزرگ نوشته شده اند)

الف) مقدار x و y را به دست آورید.

تناسب اضلاع

$$\frac{۳}{۲y}=\frac{۴}{۸}=\frac{۶}{x-۳}\Longrightarrow\begin{cases}\frac{۳}{۲y}=\frac{۴}{۸}\Longrightarrow ۸y=۲۴\Longrightarrow y=۳\\ \frac{۴}{۸}=\frac{۶}{x-۳}\Longrightarrow ۴x-۱۲=۴۸\Longrightarrow ۴x=۶۰\Longrightarrow x=۱۵\end{cases}$$

ب) نسبت تشابه دو مثلث را بنویسید. $\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

مثال : مقیاس نقشه ای ۱۰۰۰۰۰ : ۱ است. اگر طول جاده ای روی این نقشه ۱۲ سانتی متر باشد :

الف) طول واقعی جاده چند کیلو متر است؟

$$\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰}=\frac{۱۲}{x}\Longrightarrow x=۱۲۰۰۰۰۰cm$$

$$۱۲۰۰۰۰۰\div۱۰۰۰۰۰=۱۲km$$

تبدیل واحد : هر کیلو متر ۱۰۰۰۰۰ سانتی متر است

ب) اگر اندازه ی یکی از زاویه های روی نقشه ۴۰ درجه باشد اندازه این زاویه در واقعیت چند درجه است؟

در دو شکل متشابه زاویه تغییر نمی کند. پس زاویه در واقعیت نیز ۴۰ درجه است.

نکته : در دو مثلث متشابه : الف) نسبت محیط و ارتفاع و نیمساز و عمود منصف و میانه با نسبت تشابه برابر است.

ب) نسبت مساحت با مجذور نسبت تشابه برابر است.

مثال : نسبت تشابه دو مثلث $\frac{۳}{۵}$ می باشد :

الف) نسبت میانه دو مثلث چند است؟ $\frac{۳}{۵}$

ب) نسبت مساحت دو مثلث چند است؟ $\left(\frac{۳}{۵}\right)^۲=\frac{۹}{۲۵}$

سال نهم **(فصل چهارم)**

توان و ریشه

توان : اگر عددی چند بار در خودش ضرب شود برای خلاصه نویسی از توان استفاده می شود.

مانند : $\underbrace{a \times a \times ... \times a}_{n \text{ بار}} = a^n$ $\qquad$ $۴ \times ۴ \times ۴ = ۴^{۳}$ (توان ، پایه)

ضرب اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را با هم جمع می کنیم.

مانند : $۴^{۷} \times ۴^{۳} = ۴^{۱۰}$ $\qquad$ $a^m \times a^n = a^{m+n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را در هم ضرب می کنیم.

مانند : $۱۲^{۷} \times ۳^{۷} = ۳۶^{۷}$ $\qquad$ $a^m \times b^m = (ab)^m$

تقسیم اعداد توان دار : الف) اگر پایه ها برابر باشند : یکی از پایه ها را نوشته و توان ها را از هم کم می کنیم.

مانند : $\frac{۹^{۵}}{۹^{۳}} = ۹^{۲}$ $\qquad$ $a^m \div a^n = a^{m-n}$

ب) اگر توان ها برابر باشند : یکی از توان ها را نوشته و پایه ها را بر هم تقسیم می کنیم.

مانند : $۲۰^{۸} \div ۴^{۸} = ۵^{۸}$ $\qquad$ $a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

نکته : اگر در ضرب و تقسیم اعداد توان دار پایه ها و توان ها برابر نباشند از تجزیه استفاده می کنیم.

مانند : $\underset{\text{تجزیه}}{۹^{۲} \div ۲۷} = \overset{۳^{۴}}{\cancel{(۳^{۲})^{۲}}} \div ۳^{۳} = ۳$ $\qquad$ $\underset{\text{تجزیه}}{۴^{۸}} \times ۲^{۳} = \overset{۲^{۱۶}}{\cancel{(۲^{۲})^{۸}}} \times ۲^{۳} = ۲^{۱۹}$

نکته : اگر اعداد توان دار مثل هم باشند و بین آن ها علامت جمع باشد آن عبارت را تبدیل به ضرب می کنیم.

مانند : $۹^{۵} + ۹^{۵} + ۹^{۵} = ۳ \times \underset{\text{تجزیه}}{۹^{۵}} = ۳ \times \overset{۳^{۱۰}}{\cancel{(۳^{۲})^{۵}}} = ۳^{۱۱}$ $\qquad$ $۲^{۶} + ۲^{۶} = ۲ \times ۲^{۶} = ۲^{۷}$

توان منفی : برای به دست آوردن توان منفی عدد پایه را معکوس کرده تا به توان مثبت تبدیل شود. $\qquad$ $\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n}$

نکته : تمام قواعد اعداد توان دار برای اعداد با توان منفی صدق می کند.

نکته : اگر عدد صحیحی (غیر از صفر) از صورت به مخرج و یا از مخرج به صورت انتقال داده شود توان آن قرینه می شود.

مثال : حاصل هر عبارت را به صورت توان طبیعی (توان مثبت) بنویسید.

$$۳^{-۴} \times ۳^{۲} \div ۲۷ = \overset{۳^{-۲}}{\cancel{۳^{-۴} \times ۳^{۲}}} \div ۳^{۳} = ۳^{-۵} = \left(\frac{۱}{۳}\right)^{۵}$$

$$۵^{-۶} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۶}$$

$$\frac{۴^{۷} \times ۳^{-۶}}{۳^{۳} \times ۴^{-۲}} = \frac{۴^{۷} \times ۴^{۲}}{۳^{۳} \times ۳^{۶}} = \frac{۴^{۹}}{۳^{۹}} = \left(\frac{۴}{۳}\right)^{۹}$$

$$\frac{۲۰^{-۶}}{۵^{۲} \times ۴^{-۶}} = \frac{۵^{-۶}}{۵^{۲}} = ۵^{-۸} = \left(\frac{۱}{۵}\right)^{۸}$$

(فصل چهارم)

سال نهم

توان و ریشه

نکته : هر عدد (غیر از صفر) به توان صفر باشد حاصل عدد یک است.

مثال : حاصل عبارت مقابل را به دست آورید؟

$$۳^{۲} + ۵^{۰} - ۲^{-۲} = \overset{۱۰}{\cancel{۹ + ۱}} - \frac{۱}{۴} = \frac{۴۰ - ۱}{۴} = \frac{۳۹}{۴} = ۹\frac{۳}{۴}$$

نماد علمی : برای محاسبه ساده تر اعداد خیلی بزرگ و اعداد خیلی کوچک آن ها را به صورت توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

نکته : به طور کلی نماد علمی هر عدد اعشاری مثبت به صورت $a \times ۱۰^{n}$ است که در آن $۱ \leq a < ۱۰$ و nعدد صحیحی است.

الف) نماد علمی اعداد خیلی بزرگ (توان مثبت) : ابتدا یک رقم از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های بعد از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

$$۱\overbrace{۴۷۵۲}^{۴ \text{ رقم}}/۹۳ = ۱/۴۷۵۲۹۳ \times ۱۰^{۴}$$

$$۳\overbrace{۴۱۰۰۰۰۰۰}^{۸ \text{ رقم}} = ۳/۴۱ \times ۱۰^{۸}$$

ب) نماد علمی اعداد خیلی کوچک (توان منفی) : ابتدا یک رقم مخالف صفر از سمت چپ جدا کرده سپس به تعداد رقم های قبل از ممیز توانی از عدد ۱۰ می نویسیم.

مانند :

$$۰/۰۰۶۷۸ = ۶/۷۸ \times ۱۰^{-۳}$$

$$۰/\overbrace{۰۰۰۰۰۳}^{۶ \text{ رقم}}۷ = ۳/۷ \times ۱۰^{-۶}$$

مثال : حاصل عبارت زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

$$۵۳۰۰۰۰ \times ۰/۰۰۰۲۷ = \underline{۵/۳} \times \underline{۱۰^{۵}} \times \underline{۲/۷} \times \underline{۱۰^{-۴}} = ۱۴/۳۲ \times ۱۰^{۱} = ۱/۴۳۲ \times ۱۰^{۲}$$

ریشه گیری : الف) ریشه دوم اعداد : هر عدد دارای دو ریشه دوم است : (یکی مثبت و دیگری منفی)

مانند : (ریشه های دوم ۱۶ برابر است با ۴ و ۴-)

$$۴^{۲} = (-۴)^{۲} = ۱۶ \Rightarrow \sqrt{۱۶} = ۴ \text{ و } -۴$$

نکته : اعداد منفی جذر (ریشه دوم) ندارند. (چون مجذور دو عدد مثل هم هیچ وقت منفی نمی شود)

ب) ریشه سوم اعداد : هر عدد دارای یک ریشه سوم است.

نکته : اگر a یک عدد حقیقی باشد ریشه سوم آن را به صورت $\sqrt[۳]{a}$ نشان می دهیم.

فرجه یا ریشه

مانند :

$$(-۳)^{۳} = -۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{-۲۷} = -۳ \quad \text{و} \quad ۳^{۳} = ۲۷ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲۷} = ۳$$

مثال : حاصل جذر های زیر را به دست آورید.

$$۴\sqrt[۳]{-۱۲۵} = ۴ \times -۵ = -۲۰$$

$$\sqrt{۶۴ \times \frac{۱}{۹}} = ۸ \times \frac{۱}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\sqrt[۳]{۰/۰۰۱} \times \sqrt{\sqrt{۱۶}} = ۰/۱ \times ۲ = ۰/۲$$

$$\sqrt{۶۴} \times \sqrt[۳]{-۶۴} = ۸ \times -۴ = -۳۲$$

سال نهم (فصل چهارم)

توان و ریشه

ضرب و تقسیم رادیکال ها : اگر دو رادیکال دارای ریشه (فرجه) یکسان باشند می توانیم آن ها را در هم ضرب یا بر هم تقسیم کنیم.

نکته : اگر رادیکال ها دارای عدد صحیح باشند ابتدا اعداد صحیح را ضرب یا تقسیم کرده سپس رادیکال ها را ضرب یا تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل ضرب و تقسیم های زیر را به دست آورید؟

$$\sqrt[۳]{-۲} \times \sqrt[۳]{۳۲} = \sqrt[۳]{-۶۴} = -۴ \qquad ۲\sqrt{۲} \times \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۱۶} = ۲ \times ۴ = ۸$$

$$۹\sqrt[۳]{۵۴} \div ۳\sqrt[۳]{۲} = ۳\sqrt[۳]{۲۷} = ۳ \times ۳ = ۹ \qquad ۸\sqrt{۵۰} \div ۴\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲۵} = ۲ \times ۵ = ۱۰$$

ساده کردن رادیکال ها : بعضی از رادیکال ها را می توان ساده کرد. به این صورت که برای عدد یک ضربی بنویسیم که یکی از آن اعداد ریشه دوم یا ریشه سوم داشته باشد.

مانند :

$$\sqrt[۳]{۸۱} = \sqrt[۳]{۳ \times \underbrace{۲۷}_{\text{ریشه سوم}}} = ۳\sqrt[۳]{۳} \qquad \sqrt[۳]{۱۲۸} = \sqrt[۳]{۲ \times \underbrace{۶۴}_{\text{ریشه سوم}}} = ۴\sqrt[۳]{۲} \qquad \sqrt{۲۰} = \sqrt{\underbrace{۴}_{\text{ریشه دوم}} \times ۵} = ۲\sqrt{۵}$$

جمع و تفریق رادیکال ها : اگر قسمت رادیکال ها پس از ساده کردن مثل هم باشند می توانیم آن ها را همانند عبارت های جبری با هم جمع یا تفریق کنیم.

مانند :

$$۵\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۵} + ۳\sqrt{۲} - ۶\sqrt{۲} - ۳\sqrt{۵} = ۲\sqrt{۲} - ۹\sqrt{۵}$$

مثال : عبارت های زیر را ساده کنید.

$$۲\sqrt{۲} - \sqrt{۷۵} - ۳\sqrt{۷۲} + ۴\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۲} - \overset{-۵\sqrt{۳}}{\cancel{\sqrt{۳ \times ۲۵}}} - \overset{-۱۸\sqrt{۲}}{\cancel{۳\sqrt{۲ \times ۳۶}}} + ۴\sqrt{۳} = -۱۶\sqrt{۲} - \sqrt{۳}$$

$$\sqrt{۱۸} + ۳\sqrt[۳]{-۵۴} + \sqrt[۳]{۱۶} - ۲\sqrt{۸} = \overset{۳\sqrt{۲}}{\cancel{\sqrt{۲ \times ۹}}} + \overset{-۹\sqrt[۳]{۲}}{\cancel{۳\sqrt[۳]{۲ \times -۲۷}}} + \overset{+۲\sqrt[۳]{۲}}{\cancel{\sqrt[۳]{۲ \times ۸}}} - \overset{-۴\sqrt{۲}}{\cancel{۲\sqrt{۲ \times ۴}}} = -\sqrt{۲} - ۷\sqrt[۳]{۲}$$

گویا کردن مخرج کسرهای رادیکالی : گاهی اوقات برای ساده کردن لازم است مخرج کسر را از حالت رادیکالی بیرون بیاوریم که برای این کار صورت و مخرج را در عددی ضرب می کنیم تا مخرج از حالت رادیکالی خارج شود.

الف) مخرج کسر دارای ریشه دوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب می کنیم.

مانند :

$$\frac{۲}{۳\sqrt{۲}} = \frac{۲ \times \sqrt{۲}}{۳\sqrt{۲} \times \sqrt{۲}} = \frac{\overset{۱}{\cancel{۲}}\sqrt{۲}}{\underset{۳}{\cancel{۶}}} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \qquad \frac{۳}{\sqrt{۵}} = \frac{۳ \times \sqrt{۵}}{\sqrt{۵} \times \sqrt{۵}} = \frac{۳\sqrt{۵}}{۵}$$

ب) مخرج کسر دارای ریشه سوم باشد : صورت و مخرج را در همان رادیکال مخرج ضرب کرده با این تفاوت که عدد زیر رادیکال به توان ۳ برسد. برای این کار فرجه را توان کم کرده تا توان عدد زیر رادیکال مشخص شود.

مانند :

$$\frac{۱}{\sqrt[۳]{a^{۲}}} = \frac{۱ \times \sqrt[۳]{a}}{\sqrt[۳]{a^{۲}} \times \sqrt[۳]{a}} = \frac{\sqrt[۳]{a}}{a} \qquad ۳ - ۲ = ۱$$

$$\sqrt[۳]{\frac{۳}{۷}} = \frac{\sqrt[۳]{۳}}{\sqrt[۳]{۷}} = \frac{\sqrt[۳]{۳} \times \sqrt[۳]{۷^{۲}}}{\sqrt[۳]{۷} \times \sqrt[۳]{۷^{۲}}} = \frac{\sqrt[۳]{۱۴۷}}{۷} \qquad ۳ - ۱ = ۲$$

سال نهم

(فصل پنجم)

عبارت های جبری

عبارت جبری : عبارتی است که از اعداد و متغیر (حروف انگلیسی) تشکیل شده است.

یک جمله ای : عبارت جبری که از دو قسمت تشکیل شده است (متغیر و عدد) و بین آن ها علامتی نباشد. (ضرب است)

مانند : $\frac{a}{۳}$, $-۴xy$

نکته : فرم کلی یک جمله ای به صورت ax^n است که a عدد حقیقی و x متغیر و n عدد حسابی است.

نکته : هر عدد حقیقی به تنهایی یک جمله ای است. چون متغیر آن صفر است.

نکته : اگردرعبارتی حروف زیر رادیکال یا حروف در مخرج یا حروف توان منفی داشته باشند. آن عبارت یک جمله ای نیست.

مثال : کدام عبارت یک جمله ای است.

$\frac{۳}{۲}$, $ab^{-۲}$, $۷\sqrt{x}$, $\underset{\text{دو جمله دارد}}{۴a+۲}$, $\sqrt{۳}xy^۲$

درجه یک جمله ای : توان متغیر را درجه آن یک جمله ای می گویند.

مثال : جدول زیر را کامل کنید.

یک جمله ای	ضریب	درجه نسبت به x	درجه نسبت به y	درجه نسبت به کل متغیرها
$-\frac{x^۲y^۳}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$	۲	۳	۲+۳=۵
$\sqrt{۲}x$	$\sqrt{۲}$	۱	۰	۱

یک جمله ای متشابه : یک جمله ای که متغیر و توان هر متغیر کاملا مثل هم باشند.

مانند : $(۴xy \ , -۳yx)$ متشابه اند ولی $(-۵a^۲b \ , \ ۳ab^۲)$ نا متشابه هستند.

جمع و تفریق یک جمله ای های متشابه : ضرایب یک جمله ای را با هم جمع و تفریق می کنیم و متغیرها را کنار آن ها می نویسیم.

مثال : عبارت جبری مقابل را ساده کنید. $-۵ab+b-۶+۳ab+۲b-۸b=-۲ab-۵b-۶$

ضرب و تقسیم یک جمله ای : در ضرب ضرایب در هم و متغیرها در هم ضرب می شود و در تقسیم ضرایب بر هم و متغیرها بر هم تقسیم می شوند.

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$\frac{۲۴x^۲y^۳z}{۳xyz}=۸xy^۲$$

$$۳a(-۴ab-c)=-۱۲a^۲b-۳ac$$

سال نهم

(فصل پنجم)

عبارت های جبری

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$-6x^2 + 5x(x-2y) + 8xy = \underline{-6x^2} + \underline{5x^2} - \underline{10xy} + \underline{8xy} = -x^2 - 2xy$$

درجه چند جمله ای : بزرگترین درجه نسبت به آن متغیر را در نظر می گیریم.

مثال : درجه نسبت به متغیر x در چند جمله ای $\sqrt{5}x^2y^3z - 3xy + 2x^3y^2 - x$ چند است؟ درجه x برابر ۳ است.

مثال : چند جمله ای زیر را نسبت به توان های نزولی a (از بزرگ به کوچک) مرتب کنید.

$$a^2b - 3 + 2a^3b^2 - 5ab = 2a^3b^2 + a^2b - 5ab - 3$$

اتحاد جبری : اگر دو عبارت جبری به گونه ای باشند که با ازای تمام مقادیر دلخواه برای متغیرها مقدار یکسانی داشته باشد به تساوی جبری آن ها اتحاد می گویند.

مثال : آیا $(x-2)^2 = x^2 - 4x + 4$ یک اتحاد است؟چرا؟ به ازای مقادیر دلخواه امتحان می کنیم اگر دو طرف تساوی یکی شد این تساوی یک اتحاد است.

$$\begin{cases} x = -4 \Rightarrow (-4-2)^2 = (-4)^2 - 4(-4) + 4 \Rightarrow 36 = 36 \\ x = 5 \Rightarrow (5-2)^2 = 5^2 - 4(5) + 4 \Rightarrow 9 = 9 \end{cases}$$

اتحاد مربع دو جمله ای : الف) جبری :

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

ب) کلامی :

$$\left(\text{جمله دوم} + \text{جمله اول}\right)^2 = \left(\text{جمله اول}\right)^2 + \text{دو برابر جمله اول در دوم} + \left(\text{جمله دوم}\right)^2$$

مثال : حاصل عبارت های جبری زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$(a-2b)^2 = a^2 - 2(a)(2b) + (2b)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2$$

$$(xy+3)^2 = x^2y^2 + 2(xy)(3) + 3^2 = x^2y^2 + 6xy + 9$$

اتحاد مزدوج : الف) جبری :

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

ب) کلامی :

$$\left(\text{جمله دوم} + \text{جمله اول}\right)\left(\text{جمله دوم} - \text{جمله اول}\right) = \left(\text{جمله اول}\right)^2 - \left(\text{جمله دوم}\right)^2$$

مثال : حاصل عبارت های جبری زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$(a-3b)(a+3b) = a^2 - (3b)^2 = a^2 - 9b^2$$

$$\left(2x + \frac{y}{2}\right)\left(2x - \frac{y}{2}\right) = (2x)^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 4x^2 - \frac{y^2}{4}$$

سال نهم

(فصل پنجم)

عبارت های جبری

اتحاد جمله مشترک : $(x+a)(x+b)=x^{۲}+(a+b)x+ab$

مثال : حاصل عبارت جبری زیر را به کمک اتحاد به دست آورید.

$$(۲a-۳)(۲a+۴)=(۲a)^{۲}+(-۳+۴)(۲a)+(-۳\times ۴)=۴a^{۲}+۲a-۱۲$$

تجزیه عبارت جبری : نوشتن یک عبارت جبری به صورت حاصل ضرب چند عبارت دیگر را تجزیه می گویند.

روش های تجزیه : الف) فاکتور گیری ب) با استفاده از اتحادها

فاکتور گیری : برای فاکتور گیری مراحل زیر را انجام می دهیم :

۱) (ب.م.م) ضرایب را تعیین می کنیم ۲) حروف مشترک با توان کمتر را انتخاب می کنیم

۳) (ب.م.م) و حروف مشترک را به عنوان فاکتور می گیریم

۴) تمام جملات را بر عامل فاکتور تقسیم کرده و جواب را داخل پرانتز می نویسیم

مثال : عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

$$۱۶a^{۲}b+۴ab^{۲}-۸ab=۴ab(۴a+b-۲)$$

حروف مشترک

(ب.م.م) اعداد

$$۱۸xy-۱۲y=۶y(۳x-۲)$$

تجزیه به کمک اتحاد مربع : ۱) تعداد جملات ۳ جمله باشد ۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق داشته باشند

مثال : عبارت های جبری زیر را تجزیه کنید.

$۲x$ $y^{۲}$

$$۴x^{۲}+۴xy^{۲}+y^{۴}=(۲x+y^{۲})^{۲}$$

a ۳

جذر

$$a^{۲}-۶a+۹=(a-۳)^{۲}$$

تجزیه به کمک اتحاد جمله مشترک : ۱) تعداد جملات ۳ جمله باشد ۲) جمله اول و جمله سوم جذر دقیق نداشته باشند

۳) ضریب x حاصل جمع و عدد آخر حاصل ضرب دو عدد را نشان می دهد

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

جمع دو عدد

$$x^{۲}-۱x-۱۲=(x-۴)(x+۳)$$

ضرب دو عدد

جمع دو عدد ضرب دو عدد

$$x^{۲}-۵x+۶=(x-۳)(x-۲)$$

تجزیه به کمک اتحاد مزدوج : ۱) تعداد جملات ۲ جمله باشد ۲) جملات اول و دوم جذر دقیق داشته باشند

۳) بین جملات علامت منفی باشد

سال نهم

(فصل پنجم)

عبارت های جبری

مثال : عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$\overset{\overset{x^{۲}}{\uparrow}}{x^{۴}} - \overset{\overset{۴}{\uparrow}}{۱۶} = (x^{۲} - ۴)(x^{۲} + ۴)$$

$$\overset{\overset{a}{\uparrow}\text{جذر}}{a^{۲}} - \overset{\overset{۳}{\uparrow}}{۹} = (a - ۳)(a + ۳)$$

نامعادله : جواب های نامعادله مقادیری از متغیرهستند که به ازای آن ها نامساوی برقرار است. همه ی جواب های نامعادله مجموعه جواب آن گفته می شود.

نکته : اگر به طرفین یک نا مساوی عدد اضافه یا عددی کم شود جهت نابرابری عوض نمی شود :

$$a < b \Rightarrow a + c < b + c \qquad , \qquad a < b \Rightarrow a - c < b - c$$

نکته : اگر طرفین یک نا مساوی در عدد مثبت ضرب یا بر عدد مثبت تقسیم کنیم جهت نابرابری عوض نمی شود :

$$a > b \overset{c > ۰}{\Longrightarrow} ac > bc \qquad , \qquad a > b \overset{c > ۰}{\Longrightarrow} \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

نکته : اگر طرفین یک نا مساوی در عدد منفی ضرب یا بر عدد منفی تقسیم کنیم جهت نابرابری عوض می شود :

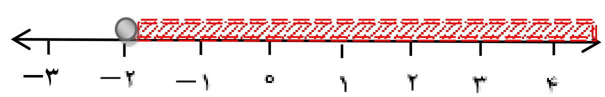
$$a < b \overset{c < ۰}{\Longrightarrow} ac > bc \qquad , \qquad a < b \overset{c < ۰}{\Longrightarrow} \frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

حل نامعادله : همانند یک معادله حل می شود با این تفاوت که اگر در اخر نامعادله ضریب مجهول عدد منفی باشد جهت نامعادله عوض می شود.

مثال : مجموعه جواب نامعادله های زیر را به دست آورده و آن ها را روی محور اعداد نمایش دهید.

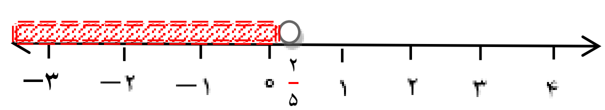
$$۴(x - ۱) \leq ۵x - ۲ \Rightarrow ۴x - ۴ \leq ۵x - ۲ \Rightarrow ۴x - ۵x \leq ۴ - ۲ \Rightarrow -x \leq ۲ \Rightarrow x \geq -۲$$

مجموعه جواب $A = \{x \in R \mid x \geq -۲\}$



$$x^{۲} + \frac{x}{۲} < (x - ۱)^{۲} \Rightarrow \cancel{x^{۲}} + \frac{x}{۲} < \cancel{x^{۲}} - ۲x + ۱ \Rightarrow \overbrace{\frac{x}{۲} + ۲x < ۱}^{\text{طرفین در ۲ ضرب}} \Rightarrow x + ۴x < ۲ \Rightarrow ۵x < ۲ \Rightarrow x < \frac{۲}{۵}$$

مجموعه جواب $B = \left\{x \in R \mid x < \frac{۲}{۵}\right\}$



نکته : در مسایل مربوط به نابرابری به جای کلمه حداکثر از علامت ≤ و به جای کلمه حداقل از علامت ≥ استفاده می کنیم.

مثال : عبارت زیر را به صورت کلامی بنویسید : " مجموع دو برابر عددی با قرینه سه برابر عدد دیگر حداکثر ۹- است. "

$$۲x + (-۳y) \leq -۹$$

سال نهم

(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

معادله خط : رابطه ای است که بین نقاط تشکیل دهنده یک خط وجود دارد.

نکته : فرم کلی معادله خط به صورت $(y = ax + b)$ می باشد.

نکته : در صورتی که نمودار رابطه ی بین دو مقدار به صورت خط راست باشد. آن دو مقدار با هم رابطه خطی دارند.

مثال : آیا رابطه بین یک ضلع مربع و محیط مربع رابطه ی خطی است؟ چرا؟ بله. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش محیط مربع یک مقدار ثابت است : (ضلع مربع را x و محیط مربع را y در نظر می گیریم پس خواهیم داشت : $y = ۴x$)

x	۱	۲	۳	۴
$y = ۴x$	۴	۸	۱۲	۱۶

مثال : آیا رابطه بین یک ضلع مربع و مساحت مربع رابطه ی خطی است؟ چرا؟ خیر. چون افزایش یک ضلع مربع با افزایش مساحت مربع مقدار ثابتی نیست : (ضلع مربع را x و مساحت مربع را y در نظر می گیریم بنابرین خواهیم داشت : $y = x^۲$)

x	۱	۲	۳	۴
$y = x^۲$	۱	۴	۹	۱۶

انواع معادله خط : ۱) مبدا گذر (فرم کلی : $\boldsymbol{y = ax}$) ۲) غیر مبدا گذر (فرم کلی : $\boldsymbol{y = ax + b}$)

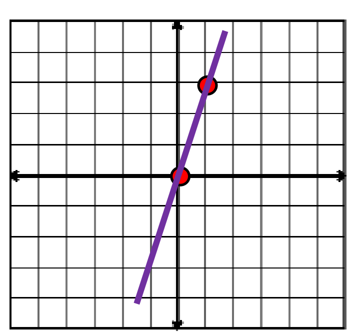
۳) خطوط موازی با محور (فرم کلی : $\boldsymbol{x = n}$, $\boldsymbol{y = m}$)

رسم یک خط : برای رسم یک خط در دستگاه مختصات نیاز به مختصات دو نقطه است.

نکته : اگر در فرم کلی (استاندارد) معادله خط عدد قبل از x عدد صحیح باشد در جدول به جای x اعداد (صفر و ۱) قرار می دهیم و عدد قبل از x عدد کسری باشد به جای x اعداد (صفر و مخرج کسر) قرار می دهیم.

مثال : معادله خط $y = ۳x$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

x	۰	۱
$y = ۳x$	۰	۳

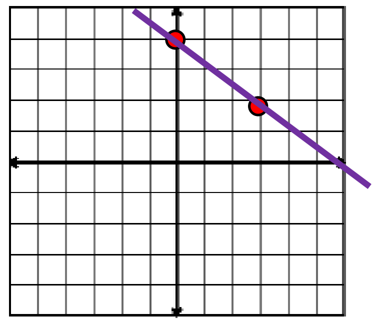


خط مبدا گذر

خط و معادله های خطی

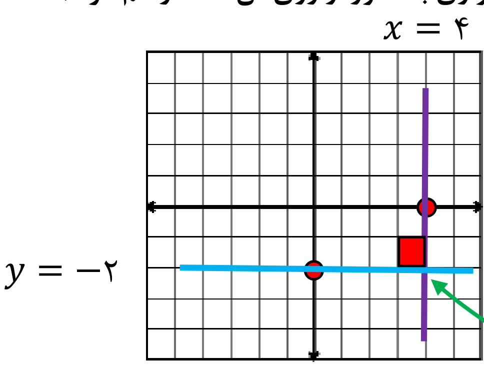
مثال : معادله خط $y = -\frac{۲}{۳}x + ۴$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

x	۰	۳
$y = -\frac{۲}{۳}x + ۴$	۴	۲



خط غیرمبدا گذر

مثال : معادلات خط $y = -۲$ و $x = ۴$ را در دستگاه مختصات رسم کنید. (برای رسم این خط ها نیاز به جدول نیست. فقط کافی است هر نقطه داده شده را در دستگاه مختصات مشخص کرد سپس خطی موازی با محور از روی آن نقطه رسم کرد.)



خط موازی با محور

زاویه ی بین خطوط موازی با محور ۹۰ درجه است.

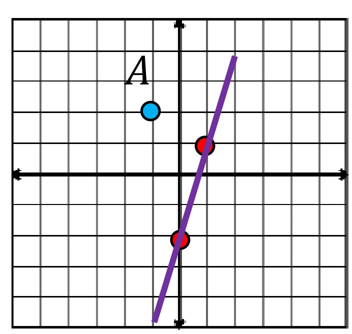
نکته : شرط این که نقطه روی یک خط قرار گیرد این است که مختصات آن نقطه در معادله خط صدق کند. که برای این کار دو روش وجود دارد : ۱) روش تحلیلی (جایگزینی مختصات نقطه در معادله خط) ۲) روش ترسیمی

مثال : آیا نقطه ی $A = \begin{bmatrix} -۱ \\ ۲ \end{bmatrix}$ روی خط $y = ۳x - ۲$ قرار دارد؟

روش تحلیلی : قرار ندارد چون دو طرف تساوی برابر نیست : $(x = -۱ , y = ۲) \Longrightarrow ۲ = ۳(-۱) - ۲ \Longrightarrow ۲ \neq -۵$

روش ترسیمی : خط داده شده را در دستگاه مختصات رسم کرده سپس نقطه A را نیز در دستگاه مختصات مشخص می کنیم :

x	۰	۱
$y = ۳x - ۲$	-۲	۱



سال نهم

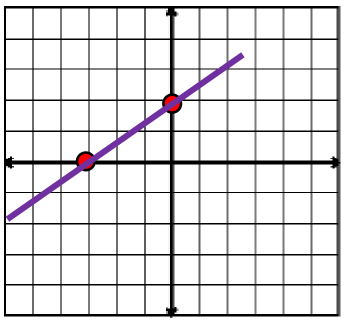
(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

نکته : برای رسم معادلات خطی که به صورت $(ax+by=c)$ هستند. در جدول یک بار به جای x و یک بار به جای y صفر قرار می دهیم.

مثال : معادله خط $۲x-۳y=-۶$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.

x	۰	-۳
$۲x-۳y=-۶$	۲	۰



شیب خط: زاویه ای بین سمت راست محور طول ها با خط داده شده را می گویند.

عرض از مبدا : نقطه ای که خط داده شده محور عرض ها را در آن نقطه قطع می کند را عرض از مبدا می گویند.

نکته : در فرم کلی معادله خط $(y=ax+b)$ ضریب x یعنی عدد a شیب خط و عدد b عرض از مبدا نام دارد.

مانند : در معادله خط $y=-\frac{۱}{۳}x+۱$ عدد $\left(\text{شیب خط}:-\frac{۱}{۳}\right)$ و عدد $\left(\text{عرض از مبدا}:۱\right)$ می باشد.

نکته : برای به دست آوردن شیب خط و عرض مبدا باید معادله خط به فرم کلی $(y=ax+b)$ مرتب شود.

مثال : شیب خط و عرض از مبدا معادله های خطی زیر را به دست آورید.

الف) $-۵x+۲y=-۶ \quad ۲y=۵x-۶ \Longrightarrow \frac{۲y}{۲}=\frac{۵x}{۲}-\frac{۶}{۲} \Longrightarrow y=\frac{۵}{۲}x-۳ \Longrightarrow \left(\text{عرض از مبدا}: -۳ \,,\, \text{شیب خط}: \frac{۵}{۲}\right)$

ب) $۲y=-۴x \quad \frac{۲y}{۲}=\frac{-۴x}{۲} \Longrightarrow y=-۲x \Longrightarrow \left(\text{عرض از مبدا}: ۰ \,,\, \text{شیب خط}: -۲\right)$

طول از مبدا : نقطه ای که خط داده شده محور طول ها را در آن نقطه قطع می کند را طول از مبدا می گویند.

نکته : برای به دست آوردن طول از مبدا در معادله خط به جای y صفر قرار می دهیم.

مثال : طول از مبدا معادله خط $\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۴}y=-۵$ را به دست آورید.

$$y=۰ \Longrightarrow \frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۴}(۰)=-۵ \Longrightarrow \frac{۲}{۳}x=-۵ \Longrightarrow x=\frac{-۵}{\frac{۲}{۳}}=-\frac{۱۵}{۲} \Longrightarrow x=-\frac{۱۵}{۲}: \text{طول از مبدا}$$

سال نهم

(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

نکته : دو خط در صورتی موازی هستند که شیب دو خط برابر باشند. **مانند :** $(y=-۳x\,,y=-۳x+۵)$

نکته : دو خط در صورتی بر هم عمود هستند که شیب دو خط قرینه و معکوس یکدیگر باشند یا حاصل ضرب دو شیب خط برابر با عدد -۱ شود.   **مانند :** $\left(y=۲x+۳\ ,\ \ y=-\frac{۱}{۲}x-۲\right)$

عرض از مبدا

شیب دو خط برابر

مثال : معادله خطی بنویسید که با خط $x-۳y=۵$ موازی و از نقطه ی $A=\begin{bmatrix}۰\\-۲\end{bmatrix}$ بگذرد. ابتدا معادله خط را مرتب کرده تا شیب خط مشخص شود : $-۳y=-x+۵\Longrightarrow\frac{-۳y}{-۳}=-\frac{x}{-۳}+\frac{۵}{-۳}\Longrightarrow y=\frac{۱}{۳}x-\frac{۵}{۳}\Longrightarrow a=\frac{۱}{۳}$

$$y=ax+b\xrightarrow{(a=\frac{۱}{۳},b=-۲)}y=\boxed{\frac{۱}{۳}x-۲}$$ معادله خط جدید

شیب دو خط قرینه و معکوس

مثال : معادله خطی بنویسید که با خط $y=-\frac{۱}{۵}x+۲$ عمود باشد و از نقطه ی $B=\begin{bmatrix}-۱\\۲\end{bmatrix}$ بگذرد. شیب خط مشخص است پس باید عرض از مبدا را به دست آوریم :

$$y=ax+b\xrightarrow{(a=۵\,,x=-۱\,,y=۲)}۲=۵(-۱)+b\Longrightarrow b=۷$$

$$y=ax+b\xrightarrow{(a=۵\,,b=۷)}y=\boxed{۵x+۷}$$ معادله خط جدید

نکته : برای به دست آوردن شیب خطی که از دو نقطه می گذرد از رابطه ی زیر استفاده می کنیم :

$$a=\frac{\text{تفاضل عرض ها}}{\text{تفاضل طول ها}}=\frac{y_۲-y_۱}{x_۲-x_۱}$$

مثال : معادله خطی بنویسید که از نقاط $A=\begin{bmatrix}۲\\۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱\\۴\end{bmatrix}$ بگذرد.

$$a=\frac{۴-۳}{-۱-۲}=-\frac{۱}{۳}\qquad ,y=ax+b\xrightarrow{(a=-\frac{۱}{۳},x=۲\,,y=۳)}۳=-\frac{۱}{۳}(۲)+b\Longrightarrow b=\frac{۱۱}{۳}$$

$$y=ax+b\xrightarrow{(a=-\frac{۱}{۳},b=\frac{۱۱}{۳})}y=\boxed{-\frac{۱}{۳}x+\frac{۱۱}{۳}}$$ معادله خط جدید

نکته : معادله خط محور طول ها $(y=۰)$ و معادله خط محور عرض ها $(x=۰)$ و معادله خط نیمساز ربع اول و سوم $(y=x)$ و معادله خط نیمساز ربع دوم و چهارم $(y=-x)$ می باشد.

سال نهم

(فصل ششم)

خط و معادله های خطی

دستگاه معادلات خطی : برای حل دستگاه معادلات خطی از روش های زیر می توان استفاده کرد :

الف) روش حذفی : در این روش یکی از متغیرها را حذف کرده سپس با جایگزینی متغیر دوم به دست می آید.

مثال : دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش حذفی)

$$۲\begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ -۴x + y = -۷ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cancel{۴x} + ۶y = ۱۴ \\ \cancel{-۴x} + y = -۷ \end{cases}$$

$$۷y = ۷ \Longrightarrow y = ۱$$

$$۲x + ۳(۱) = ۷ \Longrightarrow ۲x = ۴ \Longrightarrow x = ۲$$

جواب دستگاه دو مجهولی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

ب) روش جایگزینی (تبدیلی) : در این روش یکی از معادلات را بر حسب یک متغیر مرتب کرده و مقدار آن را در معادله دوم قرار می دهیم.

مثال : دستگاه معادلات دو مجهولی زیر را حل کنید. (روش جایگزینی)

(بر حسب x مرتب می کنیم)

$$\begin{cases} ۲x + ۳y = ۷ \\ -۴x + y = -۷ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} ۲x = -۳y + ۷ \Longrightarrow \boxed{x = -\frac{۳}{۲}y + \frac{۷}{۲}} \\ -۴\left(-\frac{۳}{۲}y + \frac{۷}{۲}\right) + y = -۷ \Longrightarrow ۶y - ۱۴ + y = -۷ \Longrightarrow ۷y = ۷ \Longrightarrow y = ۱ \end{cases}$$

(مقدار x را در معادله پایینی قرار می دهیم)

$$x = -\frac{۳}{۲}(۱) + \frac{۷}{۲} \Longrightarrow x = -\frac{۳}{۲} + \frac{۷}{۲} = \frac{۴}{۲} = ۲ \Longrightarrow x = ۲$$

جواب دستگاه دو مجهولی $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$

نکته : برای حل بعضی از مسایل می توان از دستگاه دو مجهولی استفاده کرد و به یکی از روش های آن را حل کرد.

مثال : سن برادر علی ۳ برابر سن او است. و اختلاف سن آن ها ۱۸ سال است. سن هر یک را به دست آورید. (روش جایگزینی)

(سن برادر علی را x و سن علی را y فرض می کنیم.)

$$\begin{cases} x = ۳y \\ x - y = ۱۸ \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = ۳y \\ ۳y - y = ۱۸ \Longrightarrow ۲y = ۱۸ \Longrightarrow \boxed{y = ۹} \end{cases}$$ سن علی

$$x = ۳(۹) = ۲۷ \Longrightarrow \boxed{x = ۲۷}$$ سن برادر علی

سال نهم

(فصل هفتم)

عبارت های گویا

عبارت گویا : کسری است که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند.

مانند : $\frac{x-۳}{x}\ ,\ \frac{\sqrt{۵}x}{۲}\ ,\ \frac{۴x^۲-۱}{۲x+۳}$

نکته : عبارتی که متغیر آن توان منفی یا زیر رادیکال یا داخل قدر مطلق یا در مخرج کسر یا در توان باشد. گویا نیست.

مانند : $\frac{۴-\sqrt{x}}{۳x}\ ,\ \frac{x^y}{۳}\ ,\ |x-۲|$

نکته : عبارت گویا به ازای مقادیری که مخرج کسر را صفر می کند تعریف نشده است.

مثال : عبارت های گویا زیر به ازای چه مقادیری از مخرج کسر تعریف نشده است.

(مخرج کسر را مساوی صفر قرار داده تا مقادیر تعریف نشده مشخص شوند)

$$\frac{x^۲-۵}{۲x-۴} \Rightarrow ۲x-۴=۰ \Rightarrow ۲x=۴ \Rightarrow x=۲$$

(عبارت گویا به ازای $(x=۲)$ تعریف نشده است)

$$\frac{x-۴}{x^۲-۴x} \xRightarrow{\text{فاکتورگیری}} x^۲-۴x=۰ \Rightarrow x(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$$

(عبارت گویا به ازای $(x=۴\ ,x=۰)$ تعریف نشده است)

ساده کردن عبارت گویا : برای ساده کردن صورت و مخرج را به صورت حاصل ضرب دو یا چند عبارت جبری نوشته سپس

عبارت های مساوی را از صورت و مخرج ساده می کنیم.

نکته : برای ساده کردن عبارت های گویا از فاکتورگیری و اتحاد استفاده می کنیم.

مثال : عبارت های گویا زیر را ساده کنید.

$$\underbrace{\overbrace{\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۲-۶x+۹}}^{\text{اتحاد جمله مشترک}}}_{\text{اتحاد مربع دو جمله ای}} = \frac{\cancel{(x-۳)}(x-۲)}{(x-۳)\cancel{(x-۳)}} = \frac{(x-۲)}{(x-۳)}$$

$$\underbrace{\overbrace{\frac{x^۲-۴}{x^۲+۲x}}^{\text{اتحاد مزدوج}}}_{\text{فاکتورگیری}} = \frac{(x-۲)\cancel{(x+۲)}}{x\cancel{(x+۲)}} = \frac{(x-۲)}{x}$$

ضرب عبارت های گویا : در ضرب عبارت های گویا ابتدا ساده می کنیم سپس صورت در صورت و مخرج در مخرج ضرب می کنیم.

تقسیم عبارت های گویا : ابتدا تقسیم را به ضرب تبدیل می کنیم یعنی کسر اولی را در معکوس کسر دومی ضرب می کنیم.

سال نهم

(فصل هفتم)

عبارت های گویا

مثال : حاصل ضرب و تقسیم عبارت های گویا زیر را به دست آورید.

$$\frac{x+5}{3x+6}\times\frac{x+2}{x^2-25}=\frac{\cancel{(x+5)}}{3\cancel{(x+2)}}\times\frac{\cancel{(x+2)}}{(x-5)\cancel{(x+5)}}=\frac{1}{3(x-5)}$$

$$\frac{x^2-2x-15}{x+3}\div\frac{x^2-x-12}{2x+6}=\frac{(x-5)\cancel{(x+3)}}{\cancel{(x+3)}}\times\frac{2\cancel{(x+3)}}{(x-4)\cancel{(x+3)}}=\frac{2(x+5)}{(x-4)}$$

جمع و تفریق عبارت های گویا : بین مخرج ها مخرج مشترک (ک.م.م) مخرج ها را انتخاب می کنیم.

مثال : حاصل جمع و تفریق های زیر را به دست آورید.

$$\frac{2x+3}{x+1}+\frac{x-4}{x-2}=\frac{(2x+3)(x-2)+(x-4)(x+1)}{(x+1)(x-2)}=\frac{3x^2-4x-10}{(x+1)(x-2)}$$

$$\frac{x-1}{x-3}-\frac{x+5}{x^2-9}=\frac{(x-1)(x+3)-(x+5)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x^2+x-8}{(x-3)(x+3)}$$

ساده کردن عبارت های مرکب : عبارت صورت کسر و عبارت مخرج کسر را جداگانه جواب داده و در آخر حاصل عبارت صورت را برحاصل عبارت مخرج تقسیم می کنیم.

مثال : حاصل عبارت زیر را به ساده ترین صورت بنویسید.

$$\frac{\frac{3}{x^2}-\frac{4}{x}+1}{1-\frac{6}{x^2}-\frac{1}{x}}=\frac{\frac{3-4x+x^2}{x^2}}{\frac{x^2-6-x}{x^2}}=\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{x^2}}\times\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{(x-3)}(x+2)}=\frac{(x-1)}{(x+2)}$$

تقسیم یک جمله ای بر یک جمله ای : ۱) علامت ها در هم ضرب شده ۲) اعداد با هم ساده می شوند ۳) حروف (متغیرها) با هم ساده می شوند : (در ساده کردن متغیرها از قاعده تقسیم اعداد توان دار استفاده می شود)

مثال : عبارت گویا زیر را ساده کنید.

$$\frac{-18x^5y^2z^4}{12x^3y^3z^4}=\frac{-18}{12}\times\frac{x^5}{x^3}\times\frac{y^2}{y^3}\times\frac{z^4}{z^4}=-\frac{3x^2}{2y}$$

سال نهم

(فصل هفتم)

عبارت های گویا

تقسیم چند جمله ای بر یک جمله ای : تک تک جملات صورت کسر را بر مخرج کسر تقسیم می کنیم.

مثال : عبارت گویا زیر را ساده کنید.

$$\frac{4x^5 - 6x^3 + 12x}{2x} = \frac{4x^5}{2x} - \frac{6x^3}{2x} + \frac{12x}{2x} = 2x^4 - 3x^2 + 6$$

تقسیم چند جمله ای بر چند جمله ای : برای این تقسیم مراحل زیر را به ترتیب انجام می دهیم :

۱) ابتدا مقسوم و مقسوم علیه را به شکل استاندارد یعنی از بیشترین توان به کمترین توان می نویسیم.

۲) اولین جمله ی مقسوم را بر اولین جمله ی مقسوم علیه تقسیم کرده و حاصل را در خارج قسمت می نویسیم.

۳) خارج قسمت را در تک تک جملات مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را زیر عبارت مقسوم نوشته و دو عبارت را از هم کم می کنیم.

۴) برای چند جمله ای به دست آمده مراحل ۲ و ۳ را تکرار کنیم و این تکرار را تا جایی ادامه می دهیم که درجه باقی مانده از درجه مقسوم علیه کمتر شود.

مثال : خارج قسمت و باقی مانده تقسیم $4x - x^2 + 7 + 2x^2 \div x - 2$ زیر را به دست آورید.

مرحله اول (استاندارد کردن عبارت) : $4x - \underline{x^2} + 7 + \underline{2x^2} = x^2 + 4x + 7$

مرحله دوم (تقسیم مقسوم بر مقسوم علیه) : $\frac{x^2}{x} = x$

مرحله سوم (حاصل ضرب خارج قسمت در مقسوم علیه) : $x(x-2) = x^2 - 2x$

$x^2 + 4x + 7 \quad | \quad x - 2$

$-(x^2 - 2x) \quad \quad \boxed{x + 6}$ خارج قسمت

$6x + 7$

$-(6x - 12)$

$\boxed{19}$ باقی مانده

رابطه تقسیم : $(x-2)(x+6) + 19 = x^2 + 4x + 7$

نکته : اگر در تقسیم دو عبارت باقی مانده صفر شود. مقسوم بر مقسوم علیه بخشپذیر است.

مثال : مقدار a طوری بیابید که چند جمله ای $x^4 - 3x^2 + a - 3$ بر $x^2 - 5$ بخشپذیر باشد.

$x^4 - 3x^2 + a - 3 \quad | \quad x^2 - 5$

$-(x^3 - 5x^2) \quad \quad x^2 + 2$

$2x^2 + a - 3$

$-(2x^2 - 10)$

$a + 7$

بخشپذیر بودن یعنی باقی مانده تقسیم صفر شود :

$$a + 7 = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -7}$$

سال نهم

(فصل هشتم)

حجم و مساحت

حجم : مقدار فضایی را که یک جسم اشغال می کند حجم (گنجایش) نام دارد و حجم را با حرف انگلیسی (v) نشان می دهند.

انواع حجم : ۱) حجم منشوری ۲) حجم هرمی یا مخروطی ۳) حجم کروی

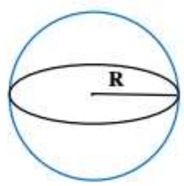
دایره : مجموعه نقاطی از صفحه که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز دایره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع دایره) می گویند.

مرکز دایره شعاع

نکته : دایره را به اختصار به صورت $C(O\ ,R)$ نشان می دهند.

کره : مجموعه نقاطی از فضا که فاصله تمام نقاط از یک نقطه به نام (مرکز کره) به یک اندازه باشد. به این فاصله نقاط صفحه تا مرکز دایره (شعاع کره) می گویند.

مانند : کره زمین و توپ



فرمول حجم کره : $v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ **فرمول مساحت کره :** $s = ۴\pi r^{۲}$

مثال : حجم و مساحت کره با قطر ۴ سانتی متر را به دست آورید.

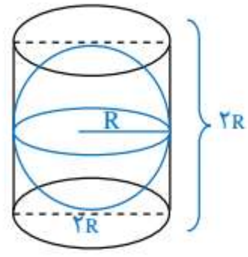
شعاع کره $۴ \div ۲ = ۲$

$$\begin{cases} v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۴}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۲^{۳} = ۳۳/۴۹ \\ s = ۴\pi r^{۲} = ۴ \times ۳/۱۴ \times ۲^{۲} = ۵۰/۲۴ \end{cases}$$

مثال : نسبت عددی حجم کره به مساحت کره چند است.

$$\frac{v}{s} = \frac{\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}}{۴\pi r^{۲}} = \frac{۱}{۳}r$$

نکته : اگر کره به طور کامل داخل استوانه قرار گیرد. می گوییم کره بر استوانه محاط شده و استوانه بر کره محیط شده است.



سال نهم

(فصل هشتم)

حجم و مساحت

مثال : کره ای در استوانه ای به قطر ۶ سانتی متر محاط شده است :   شعاع کره $۶ \div ۲ = ۳\ cm$

الف) حجم کره را به دست آورید. $v = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۴}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۳^{۳} = ۱۱۳/۰۴\ \ cm^{۳}$

ب) حجم استوانه را به دست آورید. $v = s \times h = (۳ \times ۳ \times ۳/۱۴) \times ۶ = ۱۶۹/۵۶\ \ cm^{۳}$

ج) حجم فضای بین کره و استوانه را به دست آورید. $۱۶۹/۵۶ - ۱۱۳/۰۴ = ۵۶/۵۲\ \ cm^{۳}$

نکته : از دوران نیم دایره حول قطر کره حاصل می شود.

نکته : از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود.

نکته : برای به دست آوردن حجم نیم کره می توان از رابطه ی $v = \frac{۲}{۳}\pi r^{۳}$ استفاده کرد.

مثال : حجم حاصل از دوران ربع دایره حول شعاع ۴ سانتی متر را به دست آورید. (بر حسب π)

(از دوران ربع دایره حول شعاع نیم کره حاصل می شود) $v = \frac{۲}{۳}\pi r^{۳} = \frac{۲}{۳}\pi \times ۴^{۳} = ۴۲/۶۶\,\pi$

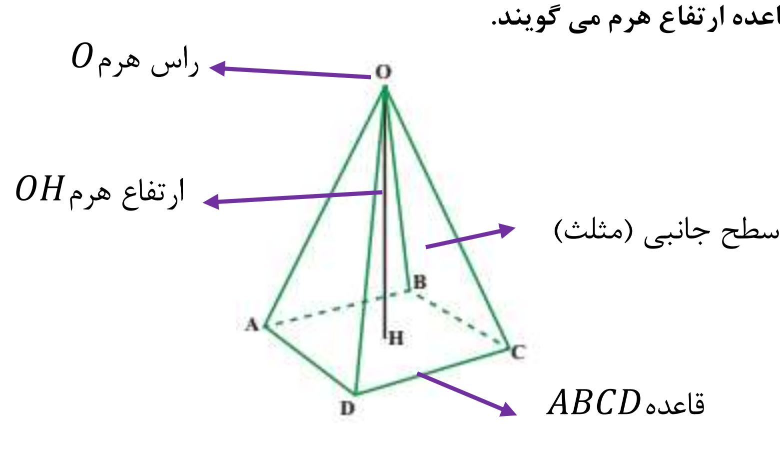
نکته : اگر شعاع کره را n برابر کنیم مساحت کره $n^{۲}$ و حجم کره $n^{۳}$ برابر خواهد شد.

مثال : اگر شعاع کره ای را ۴ برابر کنیم مساحت و حجم کره چند برابر خواهد شد.

$v = n^{۳} = ۴^{۳} = ۶۴$ برابر $s = n^{۲} = ۴^{۲} = ۱۶$ برابر

هرم : شکل فضایی که سطح جانبی آن مثلث و وجه زیرین (قاعده) آن چند ضلعی محدب باشد.

نکته : به فاصله راس هرم تا قاعده ارتفاع هرم می گویند.



سال نهم

(فصل هشتم)
حجم و مساحت

حجم هرم : **الف) کلامی :** $\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{۱}{۳} = \text{حجم هرم}$

ب) جبری : $v = \frac{۱}{۳} s.h$

مثال : حجم هرم مربع القاعده ای به ضلع ۵ سانتی متر و ارتفاع ۶ سانتی متر را به دست آورید.

مساحت مربع

$$\left(\text{خودش} \times \text{یک ضلع} = s \ \text{مربع}\right) \qquad v = \frac{۱}{۳} s.h = \frac{۱}{۳} \times (۵ \times ۵) \times ۶ = ۵۰\ cm^۳$$

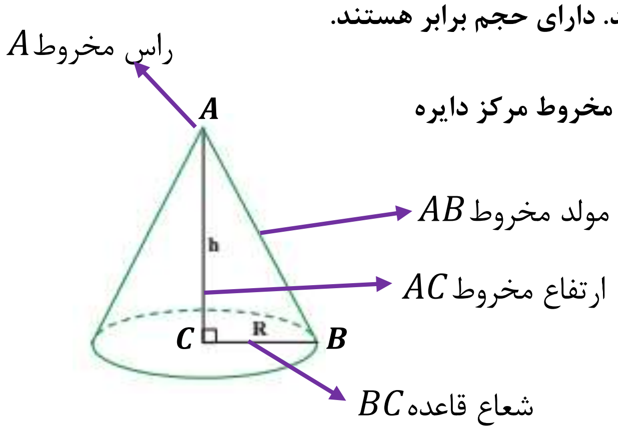
مثال : قاعده لوزی با قطرهای ۶ و ۸ سانتی متر است. اگر ارتفاع هرم ۵ سانتی متر باشد حجم هرم چند سانتی متر مکعب است.

مساحت لوزی

$$\left(s\ \text{لوزی} = \frac{\text{حاصل ضرب دو قطر}}{۲}\right) \qquad v = \frac{۱}{۳} s.h = \frac{۱}{۳} \times \left(\frac{۶ \times ۸}{۲}\right) \times ۵ = ۴۰\ cm^۳$$

نکته : اگر دو هرم دارای قاعده های هم مساحت و ارتفاع یکسان باشند. دارای حجم برابر هستند.

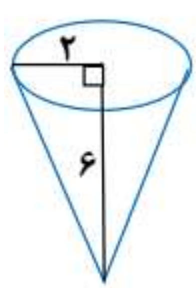
مخروط : شکلی شبیه ای هرم منتظم که قاعده آن دایره و پای ارتفاع مخروط مرکز دایره باشد.



حجم مخروط : **الف) کلامی :** $\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{۱}{۳} = \text{حجم مخروط}$

ب) جبری : $v = \frac{۱}{۳} s.h = \frac{۱}{۳} \pi r^۲ h$

مثال : حجم مخروط زیر را حساب کنید.



$$v = \frac{۱}{۳} \pi r^۲ h = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۲^۲ \times ۶ = ۲۵/۱۲\ \ cm^۳$$

سال نهم

(فصل هشتم)

حجم و مساحت

مثال : گنجایش مخروطی ۴۷۱۰۰ لیتر است. اگر شعاع قاعده ۳ متر باشد ارتفاع مخروط چند متر است.

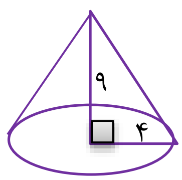
(هر متر مکعب ۱۰۰۰ لیتر است.)

$$\text{حجم مخروط} \quad ۴۷۱۰۰ \div ۱۰۰۰ = ۴۷/۱ \; m^{۳}$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h \Longrightarrow ۴۷/۱ = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۳^{۲} \times h \Longrightarrow h = \frac{۴۷/۱}{۹/۴۲} = ۵\, m$$

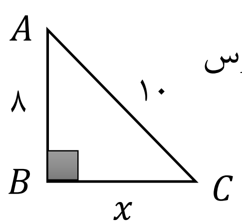
نکته : از دوران مثلث قائم الزاویه حول یک ضلع قائم آن مخروط حاصل می شود. ضلعی که دوران روی آن انجام شده است ارتفاع مخروط و ضلع دیگر شعاع قاعده نام دارد.

مثال : مثلث قائم الزاویه با اضلاع قائم ۴ و ۹ سانتی متر را روی ضلع بزرگتر دوران داده ایم. حجم شکل حاصل چند سانتی متر مکعب است.



$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۴^{۲} \times ۹ = ۱۵۰/۷۲ \;\; cm^{۳}$$

مثال : مثلث قائم الزاویه ABC را روی حول ضلع AB دوران داده ایم. حجم شکل حاصل را به دست آورید.



$$\text{شعاع قاعده} \quad x^{۲} = ۱۰^{۲} - ۸^{۲} = ۱۰۰ - ۶۴ = ۳۶ \Longrightarrow x = ۶ \quad : \text{رابطه فیثاغورس}$$

$$v = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h = \frac{۱}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۶^{۲} \times ۸ = ۳۰۱/۴۴ \;\; cm^{۳}$$

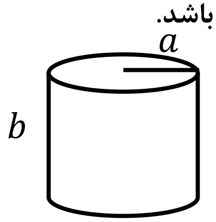
نکته : از دوران مستطیل و مربع حول یک ضلع آن استوانه تشکیل می شود.

نکته : مساحت جانبی و مساحت کل استوانه از رابطه های زیر به دست می آید :

$$\text{مساحت جانبی} = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} \Longrightarrow s = p \times h$$

$$\text{مساحت کل} = \text{مساحت جانبی} + \text{مساحت دو قاعده} \Longrightarrow s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + s_{\text{دو قاعده}}$$

مثال : نسبت حجم به مساحت کل استوانه ای را به دست آورید که شعاع قاعده آن a و ارتفاع آن b باشد.



$$v = s \times h = (a \times a \times \pi) \times b = \pi a^{۲} b$$

$$s_{\text{جانبی}} = p \times h = (۲ \times a \times \pi) \times b = ۲\pi ab$$

$$s_{\text{کل}} = s_{\text{جانبی}} + s_{\text{دو قاعده}} = ۲\pi ab + ۲a^{۲}\pi = ۲\pi a(b + a)$$

$$\frac{v}{s} = \frac{\pi a^{۲} b}{۲\pi a(a+b)} = \frac{ab}{۲(a+b)}$$