



# مجموعه، الگو و دنباله

## فصل ۱

قسمت اول، مجموعه‌ها، بازه‌ها، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

- الف)  $R - Q = Q'$  (ب)  $N \subseteq Q'$  (ب)  $-\sqrt{2} \in Q$  (ب)
- ب)  $\pi - 2\sqrt{2} \in Q$  (ت)  $-4 \in (-5, 1)$  (ت)  $0 \in (0, 1)$  (ج)
- ج)  $-1 \in (-1, 2)$  (ج)  $\frac{2}{3} \in (0, 1)$  (ج)  $\sqrt{2} \in (2, 3)$  (خ)
- د)  $(n \in N) \frac{n}{n+1} \in (0, 1)$  (د)  $(0, 1) = [0, 1)$  (خ)  $\emptyset \subset (-\infty, 0)$  (ر)
- ز)  $[-1, 1] \subseteq [-1, 2)$  (ز)  $(0, 1, 2) \subseteq [-1, 4)$  (ز)  $(-1, 1) \subseteq Q$  (س)
- ح)  $6 \times 10^{23} = 10^{23} \in (1000, +\infty)$  (ح)  $-6 \times 10^{-2} \in (-1, 0)$  (ح)  $\{x \in Q \mid -1 < x < 0\} = (-1, 0)$  (ض)

۲. یک نمودار ون مناسب رسم کرده و اعداد زیر را روی آن و در محل مناسب قرار دهید.

$$-\frac{7}{3}, \sqrt{5}, \frac{\sqrt{16}}{2}, -\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}, -174, 1705121212, \dots, -1702 \times 10^7$$

۳. هر یک از بازه‌های زیر را به صورت مجموعه نمایش دهید و نمایش هندسی آن‌ها را رسم کنید.

- الف)  $[-1, 4)$  (ب)  $(0, 2)$  (ب)  $(0, 2)$  (ب)  $[-2, -1]$  (ت)
- ب)  $(-\infty, 1)$  (ج)  $(1, +\infty)$  (ج)  $(-\infty, 2)$  (ح)  $(-\infty, 2)$  (ح)

۴. هر یک از مجموعه‌های زیر را در صورت امکان به صورت بازه بنویسید.

- الف)  $\{x \in R \mid -1 \leq x < 2\}$  (ا)  $\{x \in R \mid x > -2\}$  (ب)  $\{x \in Q \mid -1 \leq x < 2\}$  (پ)  $\{x \in Q' \mid x < 1\}$  (ت)

۵. حاصل هر یک از مجموعه‌های زیر را با رسم بازه‌های آن‌ها روی یک محور به دست آورید.

- الف)  $(-2, 5) \cap (-1, 7)$  (ا)  $[-2, 0] \cap [-1, +\infty)$  (ب)  $[-2, 4) \cup (0, 5]$  (پ)  $(-\infty, -1) \cup [-1, +\infty)$  (ت)
- ب)  $(-\infty, 2) - (0, 2)$  (ت)  $(0, 5) - [2, +\infty)$  (ج)  $(-1, \infty) \cap [0, 2)$  (ج)  $(-\infty, -1) \cup (-\infty, 2)$  (ح)

۶. اگر  $A = \{x \in R \mid -1 < x < 2\}$  و  $B = \{x \in R \mid x > 0\}$  باشند، بازه‌هایی را که با مجموعه‌های  $A \cup B$  و  $A \cap B$  تعریف شده‌اند

مشخص کنید.

۷. اگر  $A = \{x \in R \mid x \leq -1\}$ ،  $B = \{x \in R \mid -2 \leq x \leq 2\}$  و  $C = \{x \in R \mid \frac{-x+2}{3} \leq 1\}$  باشند، مجموعه‌های زیر را به کمک بازه

نمایش دهید.

- الف)  $C$  (ا)  $A \cup B$  (ب)  $B \cap C$  (پ)
- ب)  $A - B$  (ت)  $B - (A \cup C)$  (ث)  $(A \cap B) \cup C$  (ج)

۸. مجموعه‌های  $\{0\}$ ،  $R - [-1, 2]$ ،  $R - [2, 4)$  و  $[-1, 4) - [0, 1)$  را روی محور نشان دهید و سپس هر یک از آن‌ها را به صورت اجتماع چند

بازه بنویسید.

۹. اگر  $\frac{2x+1}{3} \in [-2, 1)$  باشد، حدود  $x$  را مشخص کنید.

۱۰. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی و کدام یک نامتناهی است؟

- الف) مجموعه اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲ (ا)
- ب) مجموعه شمارنده‌های طبیعی عدد ۲۰ (ب)
- ج) مجموعه ارقام عدد  $\sqrt{5}$  از صفر عدد (ت)
- د) مجموعه اعداد طبیعی پنج رقمی (س)
- ه) مجموعه اعداد گنگ بین ۰ و ۱ (ت)
- و) مجموعه روستاهای ایران (ج)

ج) مجموعه اعداد اول

خ) مجموعه کسرها با مخرج ۲

ذ) مجموعه مولکول‌های آب در یک مول آب

۱۱. فرض کنید  $U$  مجموعه تمام مغرب‌های طبیعی  $\mathbb{P}$  باشد.

ا) مجموعه  $U$  را با اعضای آن نمایش دهید.

ب)  $U$  منتهی است یا نامنتهای؟

پ) یک زیرمجموعه منتهی و یک زیرمجموعه نامنتهای از  $U$  بنویسید.

ت) دو زیرمجموعه نامنتهای از  $U$  مانند  $A$  و  $B$  بنویسید که  $A \subseteq B$  باشد.

ث) دو زیرمجموعه نامنتهای از  $U$  مانند  $C$  و  $D$  بنویسید که  $U = C \cup D$  و  $C \cap D = \emptyset$

۱۲. به سؤالات زیر پاسخ دهید.

ا) مجموعه  $W - \mathbb{N}$  منتهی است یا نامنتهای؟

ب) دو مجموعه نامنتهای متمایز مثال بنویسید که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری باشد.

پ) دو مجموعه نامنتهای  $A$  و  $B$  مثال بنویسید که  $A \subseteq B$  و  $B - A$  منتهی باشد.

ت) دو مجموعه نامنتهای  $A$  و  $B$  مثال بنویسید که  $A \subseteq B$  و  $B - A$  نامنتهای باشد.

ث) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای منتهی باشد، آن‌گاه  $A$  منتهی است یا نامنتهای؟

ج) اگر  $A \subseteq B$  و  $B$  مجموعه‌ای نامنتهای باشد، آن‌گاه  $A$  منتهی است یا نامنتهای؟

چ) اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  مجموعه‌ای منتهی باشد، آن‌گاه  $B$  منتهی است یا نامنتهای؟

ح) اگر  $A \subseteq B$  و  $A$  مجموعه‌ای نامنتهای باشد، آن‌گاه  $B$  منتهی است یا نامنتهای؟

----- قسمت دوم: متمرکز یک مجموعه، مجموعه‌های جدا از هم و تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه -----

۱۳. اگر  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  مجموعه مرجع باشد و  $A = \{1, 2, 4, 5\}$ ،  $B = \{2, 3, 6\}$  و  $C = \{1, 5, 6\}$ ، هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نمایش دهید.

ا)  $A \cap B'$       ب)  $A' \cup C'$       پ)  $B \cap (A \cup C)'$       ت)  $A' - B'$

۱۴. مجموعه شمارنده‌های طبیعی دو عدد ۲۴ و ۱۵ را به ترتیب  $A$  و  $B$  بنامید. اگر  $U = \{1, 2, 3, \dots, 35\}$  باشد، ابتدا هر یک از مجموعه‌های زیر را با اعضا نشان دهید و سپس تعداد عضوهای هر یک را به دست آورید.

ا)  $A'$       ب)  $A \cup B$       پ)  $B \cap A'$       ت)  $A' \cup B'$

۱۵. اگر  $A$  زیرمجموعه‌ای دلخواه از مجموعه مرجع  $U$  باشد، ساده شده عبارت  $(A' \cap \emptyset') \cup (A' - (A \cap A'))$  را بنویسید.

۱۶.  $\mathbb{R}$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را به صورت بازه یا اجتماعی از بازه‌ها بنویسید.

ا)  $(-1, 0]$       ب)  $W$       پ)  $(-\infty, 2)$       ت)  $(-1, +\infty)$

ث)  $[1, 2) - [0, 4]$

ج)  $(5, +\infty) \cup (-1, 3)$

۱۷.  $Z$  را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

ا) مجموعه‌ای نامنتهای مثل  $A$  ارائه کنید که  $A'$  هم نامنتهای باشد.

ب) مجموعه‌ای نامنتهای مثل  $B$  ارائه کنید که  $B'$  منتهی باشد.

پ) اگر  $C$  مجموعه‌ای نامنتهای باشد،  $C'$  منتهی است یا نامنتهای؟

ت) اگر  $D$  مجموعه‌ای منتهی باشد،  $D'$  منتهی است یا نامنتهای؟

۱۸. فرض کنیم  $A$  و  $B$  زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع  $U$  باشند به طوری که  $n(U) = 80$ ،  $n(A) = 21$ ،  $n(B) = 35$  و  $n(A \cap B) = 12$ . مطلوب است:

ا)  $n(B')$       ب)  $n(A \cup B)$       پ)  $n(A - B)$       ت)  $n(B \cap A')$

ج)  $n(A' \cap B')$

چ)  $n((A - B) \cup (B - A))$

۱۹. اگر  $n(A) = n(B) = n(A \cap B)$  باشد، حاصل هر یک از عبارات‌های زیر را به دست آورید.

(ب)  $\frac{n(A \cup B) - n(A \cap B)}{n(A - B)}$

(ا)  $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$

۲۰. به وسیله نمودار ون نشان دهید:

(ا) اگر  $A \subseteq B \subseteq U$ ، آن گاه  $B' \subseteq A' \subseteq U$

(ب)  $A' - B' = B - A$

۲۱. در یک نظرسنجی از ۱۰۰ نفر مشخص شده است که ۵۰ نفر به سربال‌های طنز و ۶۰ نفر به سربال‌های خانوادگی علاقمند هستند. اگر ۸۰ نفر به حداقل یکی از این دو نوع سربال علاقمند باشند، مطلوب است تعداد افرادی که:

(ا) به هر دو نوع سربال علاقمند باشند

(ب) به سربال‌های طنز علاقمند ولی به سربال‌های خانوادگی علاقمند نیستند.

(پ) نه به سربال‌های طنز علاقمند هستند و نه به سربال‌های خانوادگی.

۲۲. یک باشگاه ورزشی ۷۰ عضو دارد. ۴۰ نفر عضو تیم فوتبال، ۲۵ نفر عضو تیم والبال و ۵۵ نفر حداقل در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

(ا) چند نفر در هر دو رشته فوتبال و والبال فعالیت می‌کنند.

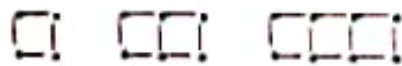
(ب) چند نفر در هیچ یک از این دو رشته فعالیت نمی‌کنند.

(پ) چند نفر فوتبال بازی می‌کنند ولی والبال بازی نمی‌کنند.

(ت) چند نفر فقط در یکی از این دو رشته فعالیت می‌کنند.

### قسمت سوم: الگو، دنباله و دنباله حسابی

۲۳. به تعداد جوب گریب‌های به‌کار رفته در شکل‌های مقابل توجه کنید:



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

اگر  $a_n$  تعداد جوب گریب‌های شکل  $n$  ام باشد، آن گاه:

(ا)  $a_1, a_2, a_3, a_4$  را بنویسد.

(ب) تعداد جوب گریب‌های به‌کار رفته در مرحله  $n$  ام را بر حسب  $n$  بنویسد.

(پ) در شکل سی‌ام چند جوب گریب به‌کار رفته است؟

۲۴. در یک الگوی خطی، جملات پنجم و یازدهم به ترتیب ۳۰ و ۷۲ می‌باشند.

(ا) جمله عمومی الگو را بنویسد.

(ب) جمله سی‌ام را مشخص کنید.

(پ) جمله چندم الگو برابر ۲۱۵ می‌باشد؟

۲۵. پنج دنباله و پنج جمله عمومی به صورت زیر داده شده است. مشخص کنید که هر جمله عمومی مربوطه به کدام دنباله است؟

$a_n = \frac{7n}{2n-1}$

$b_n = \frac{(-1)^n}{n+2}$

$c_n = n^2 + 2n$

$d_n = 2 - n$

$e_n = \frac{2 + (-1)^n n^2}{n^2 + 1}$

$1, 0, 0, -1, 0, \dots$

$\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots$

$\frac{1}{2}, \frac{6}{5}, \frac{7}{10}, \dots$

$3, 0, 8, 15, 0, \dots$

$4, \frac{8}{3}, \frac{12}{5}, 0, \dots$

۲۶. در هر قسمت، سه جمله بعدی دنباله را بنویسید. همچنین در سه قسمت اول، جمله عمومی دنباله را مشخص کنید.

(ت)  $1, 2, 4, 0, 7, 0, 0, \dots$

(ب)  $3, 0, \frac{1}{3}, 0, 0, \dots$

(ب)  $1, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, 0, 0, \dots$

(ا)  $-1, 3, 7, 0, 0, \dots$

۲۷. جمله عمومی یک دنباله به صورت  $a_n = \frac{2n+2}{n+4}$  است.

(ا) چهار جمله اول دنباله را بنویسد.

(ب) جمله چندم دنباله، برابر  $\frac{5}{4}$  است؟

۲۸. الگوی مقابل را در نظر بگیرید:

(ا) شکل بعدی را رسم و سپس تعداد مربع‌های هر شکل را به صورت

یک دنباله نا جمله هفتم آن بنویسد.

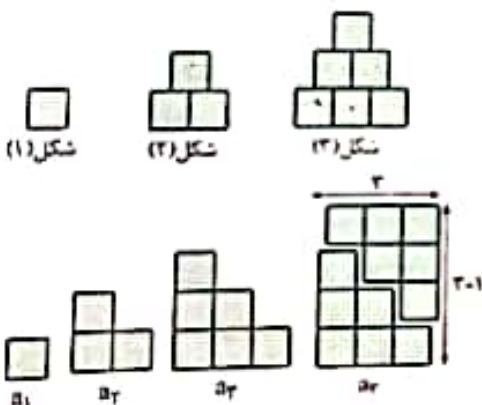
(ب) آیا دنباله حاصل یک دنباله خطی است؟ چرا؟

(پ) شکل‌های الگوی بالا را به صورت مقلد تبدیل کنید. با توجه به

تصویر حاصل،  $a_n$  را بر حسب  $n$  به دست آورید.

(ت) سه کمک قسمت (پ)، حاصل عبارت  $1+2+3+\dots+n$  را

به دست آورید.



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

$a_1$

$a_2$

$a_3$

$a_4$

$a_5$

$a_6$

۲۹. جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید

(ا)  $a_n = 2n$  (ب)  $b_n = 2n + 2$  (پ)  $c_n = n^2 + 1$  (ت)  $d_n = n^2 + 2n$

۳۰. برای دنباله‌های درجه دوم زیر، یک الگوی هندسی نظیر کنید و به کمک آن جمله عمومی هر دنباله را بیابید.

(ا)  $2, 9, 19, \dots$  (ب)  $2, 6, 12, \dots$

۳۱. از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و در هر یک از آن‌ها قدرنسبت را تعیین کنید.

(ا)  $2, 8, 13, \dots$  (ب)  $2, 2, 7, 11, \dots$  (پ)  $8, 4, 10, -4, 10, \dots$  (ت)  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$   
 (ج)  $-1, -1, -1, -1, \dots$  (چ)  $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, \dots$

۳۲. یک دنباله حسابی مثال بزنید که:

- (ا) قدرنسبت آن مثبت و جمله سوم آن ۵ باشد
- (ب) قدرنسبت آن منفی و جمله پنجم آن -۳ باشد
- (ب) فقط چهار جمله منفی داشته باشد
- (ب) فقط سه جمله مثبت داشته باشد

۳۳. در یک دنباله حسابی، جملات پنجم و دوازدهم به ترتیب ۲ و ۴۴ می‌باشند. جمله سی و یکم دنباله را مشخص کنید.

۳۴. در یک دنباله حسابی، جمله یازدهم، ۱۲ واحد کم‌تر از جمله هفتم آن است. اگر جمله پنجم آن ۱۷- باشد، دنباله را مشخص کنید.

۳۵. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول ۲۶ و جمله هفتم دنباله برابر ۲۹ می‌باشد. جمله نوزدهم دنباله را مشخص کنید.

۳۶. در یک دنباله حسابی مجموع چهار جمله اول -۱۰ و مجموع پنج جمله بعدی ۵۵ می‌باشد. جمله اول و قدرنسبت را مشخص کنید.

۳۷. در دنباله حسابی  $2010, 1980, 1950, \dots$

- (ا) جمله هفدهم دنباله را مشخص کنید
- (ب) چند جمله دنباله، عددی سه رقمی می‌باشد؟

۳۸. در دنباله حسابی  $-1070, -1000, -930, \dots$

- (ا) جمله سی و یکم دنباله را مشخص کنید
- (ب) دنباله چند جمله متقی دارد؟
- (ب) کدام جمله دنباله برابر ۱۴۵ است؟

۳۹. بین دو عدد ۲- و ۳۲، پنج واسطه حسابی درج کرده‌ایم. واسطه‌ها را مشخص کنید.

۴۰. در دنباله حسابی  $\dots -100, -2x, x + 20, 0, 2x, x + 20, \dots$  واسطه حسابی جملات بیست و پنجم و چهل و دوم را به دست آورید.

۴۱. در دنباله حسابی با جمله عمومی  $a_n$ ، حاصل  $\frac{a_7 + 2a_5 - a_3}{a_7 - a_{11}}$  را به دست آورید.

۴۲. پنج عدد که تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند را طوری مشخص کنید که مجموع آن‌ها برابر ۸۰ و بزرگ‌ترین عدد، دو برابر مجموع دو عدد کوچک‌تر باشد.

۴۳. زوایای یک شش ضلعی محدب که اندازه کوچک‌ترین آن‌ها  $80^\circ$  می‌باشد، تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند. اندازه زوایای شش ضلعی را به دست آورید.

**قسمت چهارم: دنباله هندسی**

۴۴. کدام یک از دنباله‌های زیر، دنباله هندسی است؟ جمله عمومی دنباله هندسی را مشخص کنید.

(ا)  $2, -6, 18, -54, \dots$  (ب)  $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 5\sqrt{2}, 7\sqrt{2}, \dots$  (پ)  $4, 4, 4, 4, \dots$

۴۵. در یک دنباله هندسی جمله دوم و پنجم به ترتیب ۳۶ و  $\frac{9}{16}$  می‌باشند. دنباله را مشخص کنید.

۴۶. جملات دوم و هشتم دنباله حسابی  $5012, \dots$  به ترتیب جملات اول و دوم یک دنباله هندسی می‌باشند. جمله عمومی دنباله هندسی را مشخص کنید.

۴۷. در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و دوم برابر ۱۶ و تفاضل جمله دوم از جمله چهارم برابر ۹۶ می‌باشد. دنباله را مشخص کنید.

۴۸. در یک دنباله با جمله عمومی  $a_n = \frac{1}{3} a_{n-1} \cdot a_{n+1} = 9$  می‌باشند. جمله هفتم دنباله را مشخص کنید.

۴۹. واسطه هندسی بین دو عدد  $3 - \sqrt{5}$  و  $3 + \sqrt{5}$  را به دست آورید.

۵۰. در دنباله هندسی  $x - 20, -x, x + 60, \dots$  جمله پانزدهم چند برابر جمله هفتم آن است؟

۵۱. در دنباله هندسی  $10x + 2x + 3y^2 + 2081, \dots$  اگر همه جملات مثبت باشند، مقادیر  $x$  و  $y$  را به دست آورید.