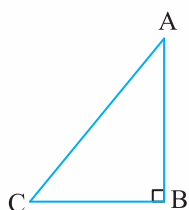


متوسط

-۵

با توجه به روابط مثلثاتی داریم:



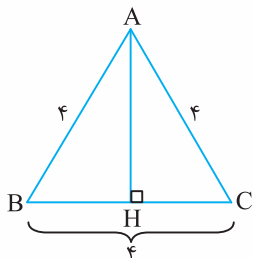
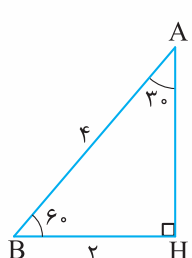
$$\begin{aligned}\cos \hat{A} &= \frac{AB}{AC}, \tan \hat{A} = \frac{CB}{AB} \\ \Rightarrow 1 + \tan^2 \hat{A} &= 1 + \left(\frac{CB}{AB}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{CB^2}{AB^2} = \frac{AB^2 + BC^2}{AB^2} \\ &= \frac{AC^2}{AB^2} = \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{AB}{AC}\right)^2} = \frac{1}{\cos^2 \hat{A}}\end{aligned}$$

متوسط

-۶

می‌دانیم ارتفاع AH میانهٔ BC می‌باشد پس $HC = HB = ۲$ است.همچنین AH نیمساز نیز می‌باشد و زاویهٔ $\hat{A} = ۶۰^\circ$ را به دو قسمت مساوی

تقسیم می‌کند. بنابراین در مثلث ABH و طبق قضیهٔ فیثاغورس داریم:



$$BH^2 + AH^2 = AB^2$$

$$۲^2 + AH^2 = ۴^2 \Rightarrow AH^2 = ۱۶ - ۴ = ۱۲ \Rightarrow AH = \sqrt{۱۲}$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{۴ \times ۳} = ۲\sqrt{۳}$$

بنابراین برای نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\hat{B}$ داریم:

$$\sin ۶۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos ۶۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\tan ۶۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$

$$\cot ۶۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{۲}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

همچنین برای نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\hat{A}$ داریم:

$$\sin ۳۰^\circ = \frac{BH}{AB} = \frac{۲}{۴} = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \frac{AH}{AB} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \frac{BH}{AH} = \frac{۲}{۲\sqrt{۳}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

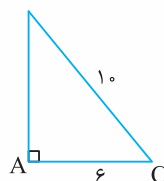
$$\cot ۳۰^\circ = \frac{AH}{BH} = \frac{۲\sqrt{۳}}{۲} = \sqrt{۳}$$



آسان

-۱

ابتدا به کمک قضیه فیثاغورس طول AB را به دست می‌آوریم:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow ۱۰^2 = AB^2 + ۶^2$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ = AB^2 + ۳۶$$

$$\Rightarrow AB^2 = ۱۰۰ - ۳۶ = ۶۴ \Rightarrow AB = ۸$$

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}, \cos \hat{B} = \frac{AB}{BC} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$$

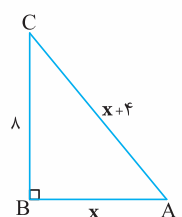
$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}, \cot \hat{B} = \frac{AB}{AC} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

آسان

-۲

طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$



$$(x+4)^2 = x^2 + ۸^2 \Rightarrow x^2 + ۱۶ + ۸x = x^2 + ۶۴$$

$$\Rightarrow ۸x = ۴۸ \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow \tan \hat{A} = \frac{BC}{AB} = \frac{۸}{۶} = \frac{۴}{۳}$$

متوسط

-۳

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{AC}{۱۰} \Rightarrow AC = ۵$$

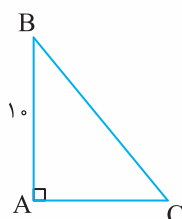
حال طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

$$\Rightarrow BC^2 = ۱۰^2 + ۵^2 = ۱۲۵$$

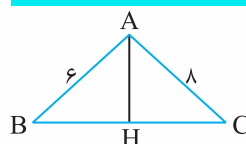
$$\Rightarrow BC = \sqrt{۱۲۵} = ۵\sqrt{۵}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{۵}{۵\sqrt{۵}} = \frac{۱}{\sqrt{۵}} = \frac{\sqrt{۵}}{۵}$$



متوسط

-۴



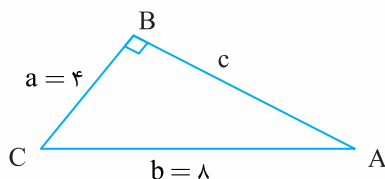
$$\Delta AHC : \sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \frac{AH}{۸} \Rightarrow AH = ۲ \Rightarrow AC^2 = AH^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow ۸^2 = ۲^2 + HC^2 \Rightarrow ۶۴ = ۴ + HC^2$$

$$\Rightarrow HC^2 = ۶۰ \Rightarrow HC = \sqrt{۶۰} = \sqrt{۴ \times ۱۵} = ۲\sqrt{۱۵}$$

متوسط

-۱۱



$$\Delta ABC: b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = 8^2 - 4^2 = (8-4)(8+4)$$

$$= 4 \times 12 = 4^2 \times 3 \Rightarrow c = 4\sqrt{3}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{c}{b} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos \hat{C} = \frac{a}{b} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}, \cot \hat{C} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

متوسط

-۱۲

$$\Delta ADE: DE^2 = AE^2 - AD^2 = 6^2 - 4^2 = 4 \times 5 \Rightarrow DE = 2\sqrt{5}$$

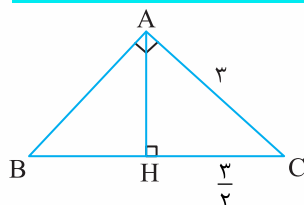
$$\Delta AGF: GF^2 = AF^2 - AG^2 = 9^2 - 6^2 = 9 \times 5 \Rightarrow GF = 3\sqrt{5}$$

$\tan \hat{A}$ را در هر سه مثلث حساب می‌کنیم:

$$\tan \hat{A} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{6}$$

متوسط

-۱۳



ارتفاع AH که همان میانه است را رسم می‌کنیم:

$$\Delta AHC: AH^2 = AC^2 - HC^2 = 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \times \frac{9}{2} = 3 \times \frac{9}{4} \Rightarrow AH = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\hat{C}=60^\circ} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AH}{AC} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{2} \xrightarrow{\hat{C}=60^\circ} \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

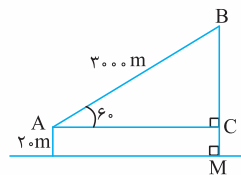
$$\tan \hat{C} = \frac{AH}{HC} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{3}}{\frac{3}{2}} = \sqrt{3} \xrightarrow{C=60^\circ} \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\cot \hat{C} = \frac{HC}{AH} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \xrightarrow{C=60^\circ} \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

متوسط

-۷

ارتفاع موشک از سطح زمین برابر است با: $BC + CM$ حال باید طول BC را به دست آوریم. در مثلث ABC داریم:



$$\sin \hat{A} = \sin 60^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{3000} \Rightarrow 2BC = 3000\sqrt{3} \Rightarrow BC = 1500\sqrt{3}$$

$$BM = BC + CM = 1500\sqrt{3} + 200$$

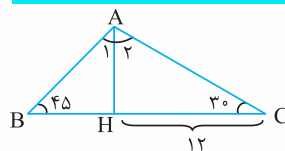
آسان

-۸

$$A = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$$

آسان

-۹



$$\cos \hat{C} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{12}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{12}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{24}{\sqrt{3}} = \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3}$$

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow (8\sqrt{3})^2 = AH^2 + 12^2 \Rightarrow 192 = AH^2 + 144$$

$$\Rightarrow AH^2 = 192 - 144 = 48 \Rightarrow AH = \sqrt{48} = 4\sqrt{3},$$

$$\hat{A}_1 = \hat{B} = 45^\circ \Rightarrow AH = BH = 4\sqrt{3}$$

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 \Rightarrow AB^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 = 48 + 48 = 96$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

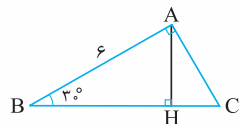
متوسط

-۱۰

AH در مثلث ABH روبه‌رو به زاویه 30° است بنابراین نصف وتر AB می‌باشد

پس $AH = 3$ حال طبق فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$



$$6^2 = 3^2 + BH^2 \Rightarrow BH^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow BH = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

زاویه $\hat{C}$ در مثلث ABC متمم زاویه $\hat{B}$ است بنابراین $\hat{C} = 60^\circ$ می‌باشد و داریم:

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow 3 = \frac{\sqrt{3}}{2} AC \Rightarrow AC = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

حال طبق رابطه فیثاغورس در ΔAHC داریم:

$$AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow (2\sqrt{3})^2 = 3^2 + HC^2$$

$$\Rightarrow HC^2 = 12 - 9 = 3 \Rightarrow HC = \sqrt{3}$$

آسان

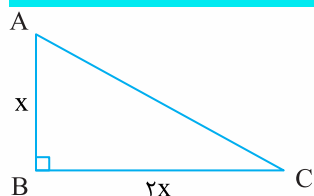
۲- گزینه «ا»

$$\frac{1 - \tan^2 30^\circ}{\cos 60^\circ \sin 30^\circ + \sin 60^\circ \cos 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - (\frac{1}{\sqrt{3}})^2}{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}) + (\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{\frac{2}{3}}{1} = \frac{2}{3}$$

آسان

۳- گزینه «ا»



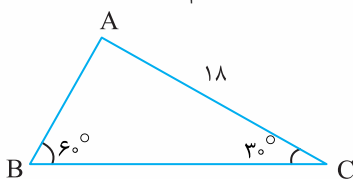
$$AC^2 = (x)^2 + (2x)^2 = 5x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{5}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{2x}{x\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

آسان

۴- گزینه «ا»

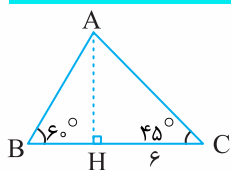
$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow \frac{18}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{AB}{\frac{1}{2}} \Rightarrow AB = \frac{18 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{18}{\sqrt{3}}$$



$$\Rightarrow AB = \frac{18}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3} \approx 6 \times 1.7 = 10.2$$

متوسط

۵- گزینه «ب»



$$\Delta ACH: \begin{cases} \cos 45^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{6}{AC} \Rightarrow AC = \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2} \\ \tan 45^\circ = \frac{AH}{CH} \Rightarrow 1 = \frac{AH}{6} \Rightarrow AH = 6 \end{cases}$$

$$\Delta ABH: \begin{cases} \tan 60^\circ = \frac{AH}{BH} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{6}{BH} \Rightarrow BH = \frac{6}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \\ \cos 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{AB} \Rightarrow AB = 4\sqrt{3} \end{cases}$$

$$BC = BH + CH = 2\sqrt{3} + 6$$

$$\Delta ABC \text{ محیط} = AB + BC + AC \Rightarrow \text{محیط} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{2} = 6\sqrt{3} + 6 + 6\sqrt{2} = 6(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$$

متوسط

۱۴-

$$\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{x}{x+5} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{x+5}$$

$$\Rightarrow 2x = x+5 \Rightarrow x=5$$

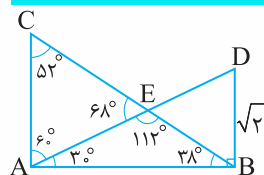
طبق رابطه فیثاغورس:

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 \Rightarrow 10^2 = 5^2 + y^2$$

$$\Rightarrow y^2 = 10^2 - 5^2 = 5 \times 15 = 25 \times 3 \Rightarrow y = 5\sqrt{3}$$

دشوار

۱۵-



زوایای مجهول را در شکل داده شده حساب می‌کنیم.

$$\Delta ABD: \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{AD} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{AD} \Rightarrow AD = 2\sqrt{2}$$

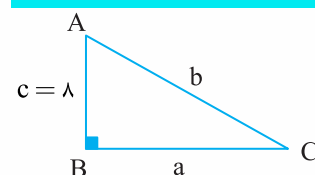
$$\Delta ABD: AB^2 = AD^2 - BD^2 = 8 - 2 = 6 \Rightarrow AB = \sqrt{6}$$

$$\Delta ABC: \tan 52^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow 1/28 = \frac{\sqrt{6}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{6}}{1/28}$$



آسان

۱- گزینه «ب»



$$\cos \hat{C} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{5} \Rightarrow a = \frac{3}{5}b$$

$$a^2 + c^2 = b^2 \Rightarrow (\frac{3}{5}b)^2 + (8)^2 = b^2 \Rightarrow \frac{9}{25}b^2 + 64 = b^2$$

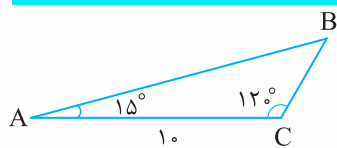
$$\Rightarrow b^2 - \frac{9}{25}b^2 = 64 \Rightarrow \frac{16}{25}b^2 = 64 \Rightarrow b^2 = 100 \Rightarrow b = 10$$

$$a = \frac{3}{5}b \Rightarrow a = \frac{3}{5}(10) \Rightarrow a = 6$$

$$(ABC \text{ مثلث}) \quad 2P = a + b + c = 6 + 10 + 8 = 24$$

متوسط

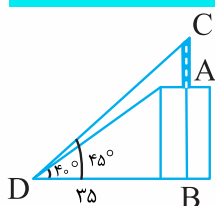
۹- گزینه «ا»



$$\frac{AC}{\sin 45^\circ} = \frac{BC}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \frac{10}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BC}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{20}{\sqrt{2}} = \frac{BC}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow 10\sqrt{2} = \frac{BC}{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow BC = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

متوسط

۱۰- گزینه «ب»



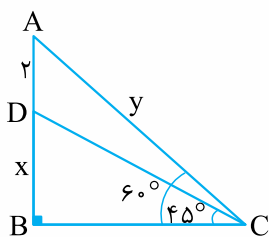
$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{AB}{35} = 1 \Rightarrow AB = 35 \text{ m}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{BC}{BD} \Rightarrow 1 = \frac{BC}{35} \Rightarrow BC = 35 \text{ m}$$

$$\text{ارتفاع مجسمه} : AC = BC - AB = 35 - 35 = 0 \text{ m}$$

متوسط

۱۱- گزینه «د»



$$\Delta BDC : \tan 45^\circ = \frac{BD}{BC} \Rightarrow 1 = \frac{x}{BC} \Rightarrow BC = x$$

$$\Delta ABC : \tan 60^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{2+x}{x} \Rightarrow \sqrt{3}x = 2+x$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x - x = 2 \Rightarrow (\sqrt{3} - 1)x = 2$$

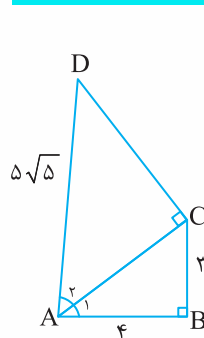
$$\Rightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{2(\sqrt{3} + 1)}{2} = \sqrt{3} + 1$$

$$\Delta ABC : \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{y} \Rightarrow y = 2(\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3} + 2$$

$$x + y = \sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} + 2 = 3\sqrt{3} + 3$$

متوسط

۶- گزینه «ب»



$$\Delta ABC : (AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (4)^2 + (3)^2 = (AC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$$

$$\Delta ACD : (AC)^2 + (CD)^2 = (AD)^2 \Rightarrow (5)^2 + (CD)^2 = (5\sqrt{2})^2 \Rightarrow 25 + (CD)^2 = 50 \Rightarrow (CD)^2 = 25 \Rightarrow CD = 5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tan \hat{A}_1 = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{4} \\ \tan \hat{A}_2 = \frac{CD}{AC} = \frac{1}{5} = 2 \end{array} \right. \Rightarrow \tan \hat{A}_1 + \tan \hat{A}_2 = \frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$$

آسان

۷- گزینه «ب»

با توجه به این که هر ضلع مربع کوچک واحد یعنی ۱ می باشد، پس:

$$\tan \theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{3}{2}$$

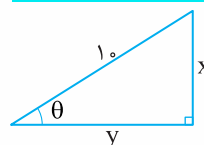
$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{3}{4}$$

$$\tan \beta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \frac{3}{1}$$

$$\Rightarrow \tan \alpha + \tan \beta + \tan \theta = \frac{3}{4} + \frac{3}{1} + \frac{3}{2} = \frac{21}{4}$$

آسان

۸- گزینه «ا»



$$\sin \theta = \frac{x}{10} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

بر اساس رابطه فیثاغورس:

$$x^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow (5\sqrt{2})^2 + y^2 = 10^2 \Rightarrow (25 \times 2) + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 100 - 50 = 50$$

$$\Rightarrow y^2 = 50 \Rightarrow y = \sqrt{50} \Rightarrow \sqrt{25 \times 2} = 5\sqrt{2}$$

$$S = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2} \times 5\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} = \frac{1}{2} \times 25 \times 2 = 25$$

متوسط

۱۵- گزینه «۳»

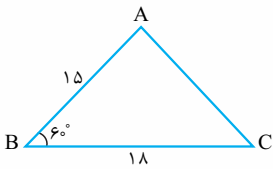
با فرض $AH = 2x, HC = x\sqrt{5}$ داریم:

$$\Delta AHC: AC^2 = AH^2 + HC^2 \Rightarrow 96^2 = 4x^2 + 5x^2 \Rightarrow 96^2 = 9x^2 \\ \Rightarrow 3x = 96 \Rightarrow x = 32 \Rightarrow AH = 64$$



آسان

-۱



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 15 \times 18 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{135\sqrt{3}}{2}$$

آسان

-۲

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin 60^\circ \Rightarrow 16\sqrt{3} = \frac{1}{2} \times x \times 2x \times \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 32 = x^2 \\ \Rightarrow x = 4\sqrt{2} = AB \Rightarrow 2x = 8\sqrt{2} = AC$$

آسان

-۳

$$S = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times 4^2 \times \sqrt{3} = 24\sqrt{3}$$

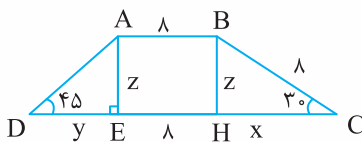
آسان

-۴

$$S = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin 75^\circ = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 \times \frac{0.96}{2} = 23.04$$

دشوار

-۵



$$\Delta BHC: \cos 30^\circ = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow x = 4\sqrt{3}$$

$$\Delta BHC: z^2 = \lambda^2 - (4\sqrt{3})^2 = 64 - 48 = 16 \Rightarrow z = 4$$

$$\Delta ADE: \tan 45^\circ = \frac{z}{y} \Rightarrow \frac{z}{y} = 1 \Rightarrow y = z = 4$$

$$S_{ABCD} = (AB + DC) \times \frac{BH}{2} = (\lambda + 4 + \lambda + 4\sqrt{3}) \times \frac{4}{2} \\ = 2(20 + 4\sqrt{3}) = 4(5 + \sqrt{3})$$

دشوار

۱۲- گزینه «۴»

$$A = \frac{\sin^2 \hat{A} \times \sin \hat{C} + \sin^2 \hat{B} \times \sin \hat{A} + \sin^2 \hat{C} \times \sin \hat{B}}{\sin \hat{A} \times \sin \hat{B} \times \sin \hat{C}}$$

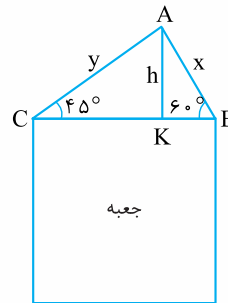
$$A = \frac{\sin^2 \hat{A} \times \sin \hat{C}}{\sin \hat{A} \times \sin \hat{B} \times \sin \hat{C}} + \frac{\sin^2 \hat{B} \times \sin \hat{A}}{\sin \hat{A} \times \sin \hat{B} \times \sin \hat{C}} + \frac{\sin^2 \hat{C} \times \sin \hat{B}}{\sin \hat{A} \times \sin \hat{B} \times \sin \hat{C}} = \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} + \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} + \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}}$$

$$\begin{cases} \frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} \Rightarrow \frac{\sin \hat{A}}{\sin \hat{B}} = \frac{a}{b} \\ \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c} \Rightarrow \frac{\sin \hat{B}}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{c} \\ \frac{\sin \hat{C}}{c} = \frac{\sin \hat{A}}{a} \Rightarrow \frac{\sin \hat{C}}{\sin \hat{A}} = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{5}{4} + \frac{4}{3} + \frac{3}{5} = \frac{191}{60}$$

دشوار

۱۳- گزینه «۴»



$$\tan 60^\circ = \frac{h}{BK} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{h}{BK}$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{3}BK$$

$$\tan 45^\circ = \frac{h}{CK} \Rightarrow 1 = \frac{h}{CK} \Rightarrow h = CK$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}BK = CK$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}BK = CK \Rightarrow \sqrt{3}BK + BK = 6$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3} + 1)BK = 6 \Rightarrow BK = \frac{6}{1 + \sqrt{3}}$$

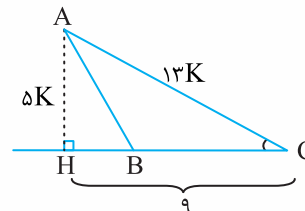
$$\cos 60^\circ = \frac{BK}{x} = \frac{\frac{6}{1 + \sqrt{3}}}{x} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{2 \times 6}{1 + \sqrt{3}} = \frac{12}{1 + \sqrt{3}}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

در مثلث قائم الزاویه AHC با توجه به اینکه $\sin C = \frac{5}{13}$ است پس

AC = 13K و AH = 5K با داشتن CH = 9 داریم:



$$\Rightarrow (13K)^2 = (5K)^2 + 9^2 \Rightarrow 169K^2 = 25K^2 + 81$$

$$\Rightarrow 144K^2 = 81 \Rightarrow K^2 = \frac{81}{144}$$

$$\Rightarrow K = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} \Rightarrow AH = 5K = 5 \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4}$$

آسان

۴- گزینه «۴»

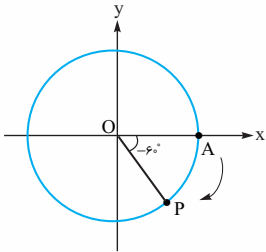
$$S = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} (\sqrt{3})^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \frac{9}{2} = 4.5$$



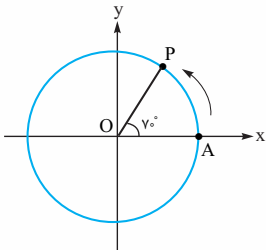
آسان

۱-

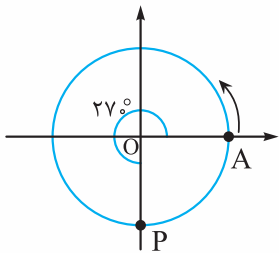
آ)



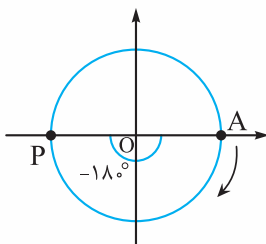
ب)



پ)

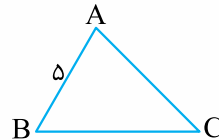


ت)



آسان

۱- گزینه «۳»



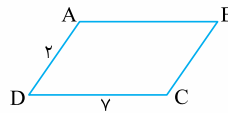
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} (AB)(AC)(\sin \hat{A})$$

$$\Rightarrow 6 = \left(\frac{1}{2}\right)(5)(AC)(\sin 60^\circ)$$

$$\Rightarrow AC = \frac{12}{5 \times \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow AC = \frac{8\sqrt{3}}{5}$$

آسان

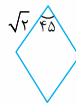
۲- گزینه «۲»



$$S_{ABCD} = AD \times DC \times \sin \hat{D} = 2 \times 8 = (2)(8) \times \sin \hat{D} \Rightarrow \sin \hat{D} = \frac{28}{160} = \frac{7}{40}$$

آسان

۳- گزینه «۳»



$$S = (\sqrt{2})^2 \sin 45^\circ = \sqrt{2}$$

متوسط

۴- گزینه «۲»

می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع برابر $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ می‌باشد، بنابراین:

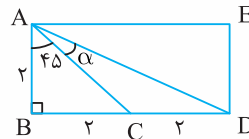
$$AB = 2 \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{\sqrt{3}(2)^2}{4} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \sqrt{3} \quad \left\{ \begin{array}{l} AB = 2 \\ BD = 2 \Rightarrow S_{\triangle ABD} \\ \hat{B} = 60^\circ \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{2} (AB)(BD) \sin \hat{B} = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(2)(\sin 60^\circ) \Rightarrow S_{\triangle ABD} = (2)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{\triangle ACD} = S_{\triangle ABD} - S_{\triangle ABC} = \frac{2\sqrt{3}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

دشوار

۵- گزینه «۲»



$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$$

$$S_{\triangle ACD} = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \frac{1}{2} AC \times AD \times \sin \alpha = 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \sin \alpha = 2 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$$



$$x^2 = 10 - 1 \Rightarrow x = 3$$

$$\cot \alpha = x = 3$$

متوسط

-۶

معنی این است که $\sin \theta$ و $\cos \theta$ مختلف‌العلامت هستند یعنی θ در ناحیه دوم یا چهارم قرار دارد.

آسان

-۷

چون مقدار $\sin x$ منفی است، بنابراین x باید در ناحیه سوم یا ناحیه چهارم واقع شود.

آسان

-۸

این زاویه در ناحیه اول یعنی بین 0° تا 90° می‌باشد، مثلاً 25° .

آسان

-۹

چنین زاویه‌ای وجود ندارد زیرا در تمام نواحی دایره مثلثاتی مقادیر تانژانت و کتانژانت با هم، هم علامت هستند.

متوسط

-۱۰

$$\cos \theta = x = \frac{-1}{3} \text{ و } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3} \xrightarrow{y > 0} y = \frac{2\sqrt{2}}{3} = \sin \theta$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{-1}{3}} = -2\sqrt{2} \quad \text{و} \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{-1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

متوسط

-۱۱

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 3 \Rightarrow y = 3x, \quad x^2 + y^2 = 1$$

$$\xrightarrow{y=3x} x^2 + (3x)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + 9x^2 = 1$$

$$\Rightarrow 10x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{10} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\xrightarrow{x > 0} x = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{3}$$

$$y = 3x \Rightarrow y = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} = \sin \theta$$

متوسط

-۱۲

$$\sin \theta = y = \frac{-1}{2}, \quad x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{4} = 1$$

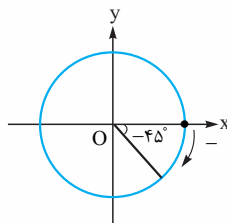
$$\Rightarrow x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\text{ناحیه چهارم } x > 0} x = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = -\sqrt{3}$$

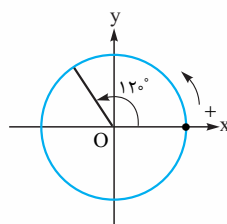
آسان

-۱۳

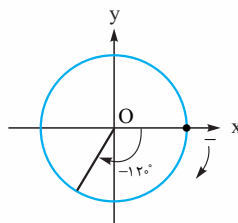
(آ) در ناحیه چهارم قرار دارد.



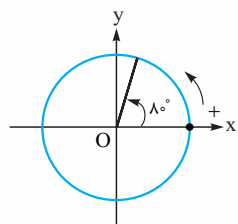
(ب) در ناحیه دوم قرار دارد.



(پ) در ناحیه سوم قرار دارد.



(ت) در ناحیه اول قرار دارد.



آسان

-۱۴

$$(A) A = 0 + 0 - 2(1) = -2$$

$$(B) B = 2(-1)^2 - (-1)^3 = 2(1) - (-1) = 3$$

آسان

-۱۵

(آ)

در ناحیه دوم قرار دارد. $90^\circ < 160^\circ < 180^\circ \Rightarrow$

(ب)

در ناحیه سوم قرار دارد. $180^\circ < 220^\circ < 270^\circ \Rightarrow$

(پ)

در ناحیه اول قرار دارد. $0^\circ < 70^\circ < 90^\circ \Rightarrow$

آسان

-۱۶

می‌دانیم این زاویه باید یا در ناحیه دوم یا ناحیه چهارم یعنی یا $90^\circ < \theta < 180^\circ$

یا $270^\circ < \theta < 360^\circ$ می‌باشد پس به عنوان مثال $\theta = 100^\circ$ یا $\theta = 300^\circ$ را

انتخاب می‌کنیم.

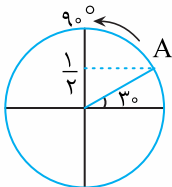
متوسط

-۱۹

$$\begin{aligned} -1 \leq \sin x \leq 1 &\xrightarrow{\times(-2)} -2 \leq -2\sin x \leq 2 \\ &\xrightarrow{+3} 1 \leq -2\sin x + 3 \leq 5 \Rightarrow 1 \leq A \leq 5 \end{aligned}$$

آسان

-۲۰



طبق دایره مثلثاتی اگر α از 30° تا 90° تغییر کند در این صورت $\sin \theta$ از $\frac{1}{2}$ تا ۱ قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < \frac{3m-1}{5} < 1 &\xrightarrow{\times 10} 5 < 6m-2 < 10 \xrightarrow{+2} 7 < 6m < 12 \\ &\xrightarrow{\div 6} \frac{7}{6} < m < 2 \end{aligned}$$



آسان

-۱ گزینه «۴»

نکته: اگر $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی باشد: $x^2 + y^2 = 1$

بررسی گزینه‌ها:

$$1): A(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}) \Rightarrow (-\frac{2}{3})^2 + (\frac{\sqrt{5}}{3})^2 = \frac{4}{9} + \frac{5}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

$$2): B(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}) \Rightarrow (\frac{3}{4})^2 + (\frac{\sqrt{7}}{4})^2 = \frac{9}{16} + \frac{7}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

$$3): C(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}) \Rightarrow (-\frac{4}{5})^2 + (-\frac{3}{5})^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

$$4): D(\frac{5}{6}, -\frac{\sqrt{10}}{6}) \Rightarrow (\frac{5}{6})^2 + (-\frac{\sqrt{10}}{6})^2 = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} = \frac{35}{36} \neq 1$$

بنابراین نقطه D روی دایره مثلثاتی قرار ندارد.

آسان

-۲ گزینه «۳»

$$\sin \theta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin^3 \theta > 0 \\ \tan \theta > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^3 \theta \cdot \tan \theta > 0$$

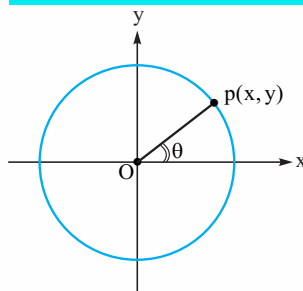
$$\sin \theta > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin^3 \theta > 0 \\ \tan \theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^3 \theta \cdot \tan \theta < 0$$

$$\sin \theta < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin^3 \theta < 0 \\ \tan \theta > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^3 \theta \cdot \tan \theta < 0$$

$$\sin \theta < 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin^3 \theta < 0 \\ \tan \theta < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin^3 \theta \cdot \tan \theta > 0$$

متوسط

-۱۳



$$x^2 + y^2 = 1 \xrightarrow{y=2x} x^2 + (2x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\xrightarrow{x>0} x = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad y = 2x \Rightarrow y = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\sin \theta = y = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{\sqrt{5}}{5}} = 2$$

$$\cos \theta = x = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{1}{2}$$

متوسط

-۱۴

$$x^2 + (\frac{x}{2})^2 = 1 \Rightarrow \frac{5}{4}x^2 = 1 \xrightarrow{x>0} x = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\cos \theta = x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{2}, \quad \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = 2$$

آسان

-۱۵

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1 \Rightarrow -1 \leq m-2 \leq 1 \xrightarrow{+2} 1 \leq m \leq 3$$

متوسط

-۱۶

$$180 < 3\alpha - 20 < 270 \xrightarrow{+20} 200 < 3\alpha < 290 \Rightarrow \frac{200}{3} < \alpha < \frac{290}{3}$$

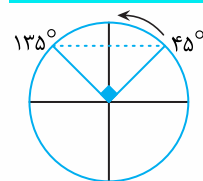
متوسط

-۱۷

چون $\cos x \cdot \cot x > 0$ است پس $\cos x$ و $\cot x$ هم علامت‌اند. پس x در نواحی اول یا دوم قرار دارد.

متوسط

-۱۸



طبق دایره مثلثاتی اگر θ بین 45° و 135° تغییر کند آنگاه $\sin \theta > \cos \theta$ خواهد بود.

متوسط

۹- گزینه «۲»

$$\frac{\sin^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x + \cos x} < 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x (\sin x + 1)}{\cos x (\cos x + 1)} < 0$$

$$\sin^2 x \geq 0 \text{ همواره}$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \Rightarrow \text{همواره نامنفی}$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow \text{همواره نامنفی}$$

$$\text{بنابراین برای آن که } \frac{\sin^2 x (\sin x + 1)}{\cos x (\cos x + 1)} < 0 \text{ باشد، باید } \cos x < 0 \text{ باشد، پس}$$

انتهای زاویه x در ناحیه دوم و سوم مثلثاتی قرار دارد.

متوسط

۱۰- گزینه «۲»

نقطه P به مختصات $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, y)$ خواهد بود، در دایره مثلثاتی داریم:

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \pm \frac{1}{2}$$

با توجه به شکل واضح است که $y = \frac{1}{2}$ در دایره مثلثاتی $y = \sin \theta$ ،

$$\text{بنابراین } \sin(\hat{AOP}) = \frac{1}{2} \text{ خواهد بود.}$$

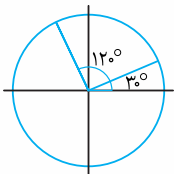
دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع ۱ است، بنابراین $OP = OA = 1$ ، بنابراین:

$$S_{\triangle OAP} = \frac{1}{2}(OP)(OA)\sin(\hat{AOP}) = (\frac{1}{2})(1)(1)(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۳»

همان‌طور که از شکل مشخص شده است، کمترین مقدار سینوس مربوط به زاویه 30° و بیشترین مقدار سینوس مربوط به زاویه 90° می‌باشد.



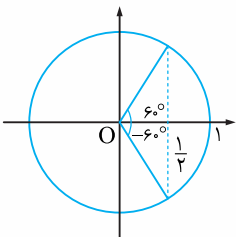
$$\begin{cases} \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{-2m-1}{4} \leq 1 \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2 < -2m-1 \leq 4 \Rightarrow 3 < -2m \leq 5 \Rightarrow \frac{-5}{2} \leq m < -\frac{3}{2}$$

متوسط

۱۲- گزینه «۳»

$$-20^\circ < x < 20^\circ \Rightarrow -60^\circ < 3x < 60^\circ \Rightarrow \frac{1}{2} < \cos 3x \leq 1$$

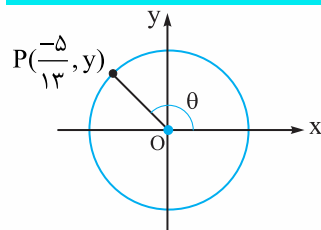


همان‌طور که از شکل مشخص است:

$$\frac{1}{2} < \cos 3x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{m-1}{2} \leq 1 \Rightarrow 1 < m-1 \leq 2 \Rightarrow 2 < m \leq 3$$

آسان

۱۳- گزینه «۳»



$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (-\frac{5}{13})^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \frac{25}{169} + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow y^2 = 1 - \frac{25}{169} \Rightarrow y^2 = \frac{144}{169} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{144}{169}} \Rightarrow y = \pm \frac{12}{13}$$

با توجه به آن که θ در ربع دوم است، بنابراین $y = \frac{12}{13}$.

$$\cot \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow \cot \theta = \frac{-\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} \Rightarrow \cot \theta = -\frac{5}{12}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

در ربع دوم $-1 < \cos \theta < 0$ بنابراین:

$$-1 < 2m+1 < 0 \Rightarrow -2 < 2m < -1 \Rightarrow -1 < m < -\frac{1}{2}$$

آسان

۱۵- گزینه «۲»

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -5 \leq -5 \sin \alpha \leq 5 \Rightarrow -3 \leq -5 \sin \alpha + 2 \leq 7$$

متوسط

۱۶- گزینه «۱»

$$0^\circ < x < 45^\circ \Rightarrow 0 < \tan x < 1$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{5m+1}{3} < 1 \Rightarrow 0 < 5m+1 < 3 \Rightarrow -1 < 5m < 2 \Rightarrow \frac{-1}{5} < m < \frac{2}{5}$$

متوسط

۱۷- گزینه «۱»

$$\sin x - \frac{1}{\sin x} < 0 \Rightarrow \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} < 0$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \sin^2 x - 1 \leq 0$$

$$\text{بنابراین } \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x} < 0 \text{ عبارتی نامثبت است، برای آن که } \sin x > 0 \text{ باشد،}$$

باید $\sin x > 0$ باشد، بنابراین انتهای کمان x در ناحیه اول و دوم قرار دارد.

آسان

۱۸- گزینه «۴»

می‌دانیم $|\sin x| > 0$ است، بنابراین برای آن که $|\sin x| \cos x > 0$ باشد،

باید $\cos x > 0$ باشد.

می‌دانیم $\tan^2 x > 0$ است، بنابراین برای آن که $\tan^2 x \cdot \sin x < 0$ باشد،

باید $\sin x < 0$ باشد.

$$\begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x < 0 \end{cases} \Rightarrow x \text{ در ناحیه چهارم}$$

آسان

۱۷- گزینه «۳»

اگر θ از 0° تا 90° زیاد شود در این صورت $\sin \theta$ از 0 تا 1 افزایش پیدا کند و اگر θ از 0° تا 180° زیاد شود آنگاه $\sin \theta$ از 1 به 0 کم می‌شود.

آسان

۱۸- گزینه «۲»

اگر θ از 0° تا 180° افزایش یابد آنگاه $\cos \theta$ از 1 به -1 کاهش پیدا می‌کند.

آسان

۱۹- گزینه «۲»

اگر θ از 90° تا 270° افزایش یابد آنگاه $\sin \theta$ از 1 به -1 کاهش می‌یابد.

متوسط

۲۰- گزینه «۴»

اگر θ از 90° تا 180° آن‌گاه $\cos \theta$ از 0 به -1 کاهش می‌یابد و اگر θ از 180° تا 270° افزایش یابد آنگاه $\cos \theta$ از -1 به 0 افزایش می‌یابد.



آسان

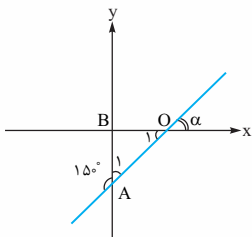
۱-

اگر خط $y = 3x + 1$ با جهت مثبت محور x زاویه α بسازد $\tan \alpha = 3$ خواهد بود.

متوسط

۲-

با توجه به شکل مجموع زاویه‌های $\hat{A}_1$ و 150° برابر 180° هستند. بنابراین $\hat{A}_1 = 30^\circ$ می‌باشد و چون مثلث OAB قائم‌الزاویه است $\hat{O}_1$ برابر 60° خواهد بود و $\hat{O}_1$ و α متقابل به رأس هستند، پس $\hat{\alpha} = 60^\circ$ و داریم:



$$\text{شیب خط} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{(1,0)} 0 = \sqrt{3}(1) + b \Rightarrow b = -\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

متوسط

۳-

شیب این خط $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ است بنابراین داریم:

$$y = ax + b \Rightarrow y = \sqrt{3}x + b \xrightarrow{(3,1)} 1 = \sqrt{3}(3) + b \Rightarrow b = 1 - 3\sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}x + (1 - 3\sqrt{3})$$

متوسط

۱۳- گزینه «۲»

اگر دو زاویه مکمل هم باشند $(x + y = 180^\circ)$ ، آن‌گاه $\sin x = \sin y$ ، همچنین در ربع اول هر چه زاویه بزرگ‌تر باشد سینوس آن هم بزرگ‌تر خواهد بود. اکنون به بررسی نامساوی‌ها می‌پردازیم.

$$\text{آ)} \sin 15^\circ = \sin 30^\circ \Rightarrow \sin 30^\circ > \sin 40^\circ \text{ نادرست است.}$$

$$\text{ب)} \sin 120^\circ = \sin 60^\circ, \sin 130^\circ = \sin 50^\circ \Rightarrow \sin 60^\circ > \sin 50^\circ$$

درست است.

$$\text{پ)} \sin 100^\circ = \sin 80^\circ \Rightarrow \sin 100^\circ > \sin 80^\circ \text{ نادرست است.}$$

$$\text{ت)} \sin 130^\circ = \sin 50^\circ \Rightarrow \sin 50^\circ > \sin 20^\circ \text{ درست است.}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۱»

نکته: (۱) در ربع اول $0^\circ < x < 45^\circ$ باشد، $\cos x > \sin x$ اگر $45^\circ < x < 90^\circ$ باشد، $\sin x > \cos x$ خواهد بود.

(۲) در ربع اول اگر $x > y$ باشد، آن‌گاه $\tan x > \tan y$ و $\cot x < \cot y$ خواهد بود.

اکنون به بررسی نامساوی‌ها می‌پردازیم:

$$\text{آ)} 0^\circ < 25^\circ < 45^\circ \Rightarrow \sin 25^\circ < \cos 25^\circ$$

بنابراین نامساوی (آ) نادرست است.

$$\text{ب)} 45^\circ < 70^\circ < 90^\circ \Rightarrow \sin 70^\circ > \cos 70^\circ$$

بنابراین نامساوی (ب) درست است.

$$\text{پ)} 68^\circ < 86^\circ \Rightarrow \tan 68^\circ < \tan 86^\circ$$

بنابراین نامساوی (پ) نادرست است.

$$\text{ت)} 25^\circ > 20^\circ \Rightarrow \tan 25^\circ > \tan 20^\circ \Rightarrow \cot 25^\circ < \cot 20^\circ$$

بنابراین نامساوی (ت) نادرست است.

متوسط

۱۵- گزینه «۴»

$1 + \cos x$ یک عبارت نامنفی است پس $|1 + \cos x| = 1 + \cos x$ است.

$$\cos x |1 + \cos x| = (1 + \cos x) |\cos x| \Rightarrow |\cos x| = \cos x \Rightarrow \cos x \geq 0$$

$$|\sin x| + \sin x = 0 \Rightarrow |\sin x| = -\sin x \Rightarrow \sin x \leq 0$$

با توجه به روابط به دست آمده x در ناحیه چهارم قرار دارد.

متوسط

۱۶- گزینه «۱»

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\sin \alpha \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \sin \alpha \leq 3$$

$$\Rightarrow |2 - \sin \alpha| = 2 - \sin \alpha$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin \alpha - 1 \leq 0 \Rightarrow |\sin \alpha - 1| = 1 - \sin \alpha$$

$$\Rightarrow |2 - \sin \alpha| - |\sin \alpha - 1| = (2 - \sin \alpha) - (1 - \sin \alpha) = 1$$

آسان

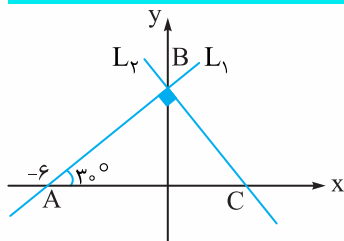
۴- گزینه «۱»

ابتدا باید شیب خط را بیابیم:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{1 - 3}{0 - 2} = \frac{-2}{-2} = 1 = \tan \alpha \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

متوسط

۵- گزینه «۲»



ابتدا معادله خط L_1 را پیدا می‌کنیم. این خط از نقطه $A(-6, 0)$ عبور می‌کند

$$m_1 = \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ و}$$

$$L_1 \text{ معادله خط: } y - y_A = m_1(x - x_A)$$

$$\Rightarrow y - 0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 6) \Rightarrow L_1$$

$$\text{معادله خط: } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2\sqrt{3}$$

اکنون می‌توان عرض از مبدأ این خط یعنی نقطه B را پیدا کرد.

$$x = 0 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}(0) + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

بنابراین نقطه B به صورت $B(0, 2\sqrt{3})$ می‌باشد.

دو خط L_1, L_2 بر هم عمود هستند، بنابراین شیب آن‌ها معکوس و قرینه

یکدیگرند، بنابراین $m_2 = -\sqrt{3}$ می‌باشد.

این خط از نقطه B عبور می‌کند، بنابراین:

$$d_2 \text{ معادله خط: } y - y_B = m_2(x - x_B) \Rightarrow y - 2\sqrt{3} = -\sqrt{3}(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

$$y = 0 \Rightarrow -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ طول از مبدأ}$$

متوسط

۴-

خطی که موازی محور x ها است و d مورب آنهاست زاویه تندی برابر $30^\circ = 150^\circ - 180^\circ$ با جهت مثبت محور x ها می‌سازد یعنی شیب خط d .

$\tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ می‌باشد و از طرفی خط d از نقطه $(0, -4)$ می‌گذرد بنابراین داریم:

$$y = ax + b \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b \xrightarrow{(0, -4)} -4 = \frac{\sqrt{3}}{3}(0) + b$$

$$\Rightarrow b = -4 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$$

آسان

۵-

شیب خط $\tan 45^\circ = 1$ می‌باشد. معادله خط:

$$y = x + b \xrightarrow{(-2, 3)} 3 = -2 + b \Rightarrow b = 5$$

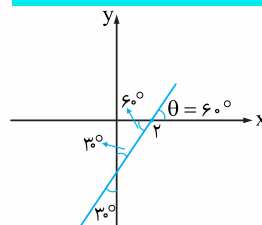
بنابراین معادله خط $y = x + 5$ خواهد بود.

محل برخورد با محورهای مختصات $A(0, 5)$
 $B(-5, 0)$



آسان

۱- گزینه «۱»



$$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3}, A(2, 0)$$

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Rightarrow y - 0 = \sqrt{3}(x - 2)$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$$

بنابراین عرض از مبدأ $-2\sqrt{3}$ خواهد بود.

آسان

۲- گزینه «۱»

شیب خط برابر $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ است و خط محور عرض‌ها را در نقطه O

قطع می‌کند؛ یعنی از مبدأ می‌گذرد، پس عرض از مبدأ آن صفر

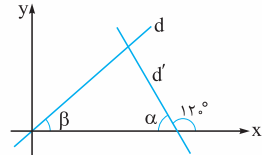
است، $y = \sqrt{3}x$ معادله خط است.

آسان

۳- گزینه «۳»

$$\alpha = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - (90^\circ + \alpha) = 180^\circ - (90^\circ + 60^\circ) = 30^\circ$$



برای نوشتن معادله خط d باید شیب و عرض از مبدأ را داشته باشیم؛ شیب

همان $\tan \beta$ است، پس شیب خط $\tan \beta = \tan 30^\circ$ بوده و عرض از مبدأ

صفر است، بنابراین:

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$$

آسان

-۵

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2$$

$$= \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2$$

آسان

-۶

$$B = 1 + \tan x + \cot x + \frac{\tan x \cot x}{1} - 2 = \tan x + \cot x$$

دشوار

-۷

$$\tan^2 x + 4 \tan x + 4 = 0 \Rightarrow (\tan x + 2)^2 = 0 \Rightarrow \tan x = -2$$

$$A = \frac{4}{\tan x} + \frac{\frac{3 \sin x}{\cos x} + \frac{4 \cos x}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}} = \frac{4}{-2} + \frac{-2 \times 3 + 4}{-2 + 1} = -2 + 2 = 0$$

دشوار

-۸

$$A = \tan \alpha + \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \tan \alpha + \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \frac{1}{\tan \alpha}}$$

$$= \tan \alpha + \frac{\tan \alpha (1 + \tan \alpha)}{1 + \tan \alpha} = \tan \alpha + \tan \alpha = 2 \tan \alpha$$

متوسط

-۹

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

$$B = \sin^2 \alpha + \cot \alpha = \frac{4}{5} + \frac{1}{2} = \frac{13}{10} = 1 \frac{3}{10}$$

دشوار

-۱۰

از اتحاد $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ استفاده می‌کنیم:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x)^2 + (\cos^2 x)^2$$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

پس $A = 2$ می‌باشد.

دشوار

-۱۱

$$A = \sin^2 x \left(1 + \frac{\cos x}{\sin x}\right) + \cos^2 x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \sin^2 x + \sin^2 x \cos x + \cos^2 x + \cos^2 x \sin x$$

$$= \sin^2 x (\sin x + \cos x) + \cos^2 x (\sin x + \cos x)$$

$$= (\sin x + \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = \sin x + \cos x$$



آسان

-۱

داریم $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ و چون α در ناحیه دوم است پس:

$$\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{4}{25}}$$

$$= -\sqrt{\frac{21}{25}} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

متوسط

-۲

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + 5^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 26 = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{26} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{26}} \xrightarrow{180^\circ < \theta < 270^\circ} \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{26}}$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{5}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow 5 = \frac{\sin \theta}{\frac{-1}{\sqrt{26}}} \Rightarrow \sin \theta = \frac{-5}{\sqrt{26}}$$

متوسط

-۳

$$A) \cos^4 \theta - \sin^4 \theta = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$= \cos^2 \theta - (1 - \cos^2 \theta) = \cos^2 \theta - 1 + \cos^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1$$

$$B) (1 + \tan^2 \theta)^2 = \left(\frac{1}{\cos^2 \theta}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \theta \times \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{(1 - \sin^2 \theta)(\cos^2 \theta)}$$

متوسط

-۴

می‌دانیم 120° در ناحیه دوم است.

$$\sin^2 120^\circ + \cos^2 120^\circ = 1 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \cos^2 120^\circ = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 120^\circ = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 120^\circ = \pm \frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{90^\circ < 120^\circ < 180^\circ} \cos 120^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}} = -\sqrt{3} \cdot \cot 120^\circ = \frac{1}{\tan 120^\circ} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

دشوار

-۱۸

$$\sin \theta + \cos \theta = A$$

$$\Rightarrow A^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta = \frac{A^2 - 1}{2}$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$$

$$= A(1 - \frac{A^2 - 1}{2}) = A \times \frac{2 - A^2 + 1}{2} = \frac{3A - A^3}{2}$$

دشوار

-۱۹

$$\tan \alpha \cot \alpha \Rightarrow \frac{m-1}{n} \times \frac{3}{m-2} = 1 \Rightarrow 3m - 3 = mn - 2$$

$$\Rightarrow 3m - mn = 1 \Rightarrow m(3 - n) = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{3-n}$$

متوسط

-۲۰

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{\sin x(1 - \cos x + 1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x}$$

$$= \frac{2 \sin x}{\sin^2 x} = \frac{2}{\sin x}$$



آسان

-۱ گزینه «ب»

می دانیم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \xrightarrow{\sin \theta = \frac{6}{7}} (\frac{6}{7})^2 + \cos^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2 \theta = 1 - \frac{36}{49} \Rightarrow \cos \theta = \pm \frac{\sqrt{13}}{7}$$

ولی چون θ حاده است، حاصل برابر $\frac{\sqrt{13}}{7}$ خواهد بود.

آسان

-۲ گزینه «ب»

$$(\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x}) \cos^2 x = \frac{(\sin x + 1 - \sin x + 1) \cos^2 x}{(-\sin x + 1)(\sin x + 1)}$$

$$= \frac{2 \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{2 \cos^2 x}{\cos^2 x} = 2$$

آسان

-۳ گزینه «ب»

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1$$

دشوار

-۱۲

$$1) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$ب) \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta(1 + \sin \theta)} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$پ) \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \cot \alpha} = \frac{1 + \tan \alpha}{1 + \frac{1}{\tan \alpha}} = \tan \alpha$$

هر سه تساوی درست هستند.

متوسط

-۱۳

$$B = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos^2 x}$$

$$= \tan^2 x - 1 = (\tan x - 1)(\tan x + 1)$$

دشوار

-۱۴

$$3 \sin x = 1 - \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin x(1 + \cos x)}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{1}{3}$$

متوسط

-۱۵

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + 9 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{10}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\cos^2 \alpha + \tan \alpha}{\cos^2 \alpha + \cot \alpha} = \frac{\frac{1}{10} + 3}{\frac{1}{10} + \frac{1}{3}} = \frac{3 + 90}{3 + 10} = \frac{93}{13}$$

متوسط

-۱۶

$$1) \sin^2(30^\circ) + \cos^2(30^\circ) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

بنابراین قسمت (آ) درست نیست.

$$ب) \frac{1}{\cos \theta} + \cot \theta = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta \cos \theta}$$

بنابراین قسمت (ب) درست است.

دشوار

-۱۷

$$1) \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = 2 \sin x \cos x$$

$$ب) (1 - \sin x)(1 + \sin x)(1 + \tan^2 x)$$

$$= (1 - \sin^2 x) \times \frac{1}{\cos^2 x} = \cos^2 x \times \frac{1}{\cos^2 x} = 1$$

متوسط

۱- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} r \sin^r x - 1 &= \sin^r x + \sin^r x - 1 = \sin^r x - \cos^r x \\ \sin^r x (1 - \cot^r x) &= \sin^r x (1 - \frac{\cos^r x}{\sin^r x}) = \sin^r x - \cos^r x \\ \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} + \frac{1 \sin^r x - 1}{\sin^r x (1 - \cot^r x)} \\ &= \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} + \frac{\sin^r x - \cos^r x}{\sin^r x - \cos^r x} = \frac{\sin x + \cos x}{\cos x - \sin x} + 1 \\ \frac{\sin x + \cos x + \cos x - \sin x}{\cos x - \sin x} &= \frac{2 \cos x}{\cos x - \sin x} \\ \div \cos x \rightarrow \frac{2}{1 - \tan x} &= \frac{2}{1 - a} \end{aligned}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۱»

می‌دانیم:

$$a^r + b^r = (a + b)^r - r a b (a + b)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \sin^r x + \cos^r x &= (\sin x + \cos x)^r - r \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) \\ (\sin x + \cos x)^r &= 1 + r \sin x \cdot \cos x \Rightarrow \left(\frac{1}{r}\right)^r = 1 + r \sin x \cos x \\ \Rightarrow \frac{1}{r} &= 1 + r \sin x \cdot \cos x \Rightarrow -\frac{r}{r} = r \sin x \cdot \cos x \\ &= \sin x \cdot \cos x = -\frac{r}{r} \Rightarrow \sin^r x + \cos^r x \\ &= (\sin x + \cos x)^r - r \sin x \cdot \cos x (\sin x + \cos x) \\ \Rightarrow \sin^r x + \cos^r x &= \left(\frac{1}{r}\right)^r - \left(-\frac{r}{r}\right) \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r} + \frac{r}{r} = \frac{11}{16} \end{aligned}$$

متوسط

۱۲- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \frac{1 + \sin x}{\cos^r x} - \frac{1}{\cos x (1 - \sin x)} &= \frac{(1 + \sin x)(1 - \sin x) - \cos^r x}{\cos^r x (1 - \sin x)} \\ &= \frac{1 - \sin^2 x - \cos^r x}{\cos^r x (1 - \sin x)} = \frac{1 - (\sin^2 x + \cos^r x)}{\cos^r x (1 - \sin x)} = \frac{1 - 1}{\cos^r x (1 - \sin x)} = 0 \end{aligned}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} 4 \sin x + 3 \cos x = 0 &\Rightarrow 4 \sin x = -3 \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3}{4} \\ \Rightarrow \tan x &= -\frac{3}{4} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x} \\ \Rightarrow 1 + \frac{9}{16} &= \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{25}{16} = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{16}{25} \\ \Rightarrow \cos x &= \pm \frac{4}{5} \xrightarrow{\text{در ناحیه دوم}} \cos x = -\frac{4}{5} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \Rightarrow \sin^2 x + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{16}{25} = 1 \\ \Rightarrow \sin^2 x &= 1 - \frac{16}{25} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{9}{25} \\ \Rightarrow \sin x &= \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{در ناحیه دوم}} \sin x = \frac{3}{5} \\ \sin x + \cos x &= \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5} \end{aligned}$$

آسان

۱۴- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\cos x} + \tan x\right)(\sin x - 1) &= \left(\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right)(\sin x - 1) \\ &= \frac{(\sin x + 1)(\sin x - 1)}{\cos x} = \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x} \\ &= \frac{-(1 - \sin^2 x)}{\cos x} = \frac{-\cos^2 x}{\cos x} = -\cos x \end{aligned}$$

آسان

۵- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{1 + \sin x} + \frac{1 + \sin x}{\cos x} &= \frac{\cos^2 x + (1 + \sin x)^2}{(1 + \sin x) \cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2 \sin x + 1}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2 + 2 \sin x}{(1 + \sin x) \cos x} \\ &= \frac{2(1 + \sin x)}{(1 + \sin x) \cos x} = \frac{2}{\cos x} = \frac{a}{\cos x} \Rightarrow a = 2 \end{aligned}$$

آسان

۶- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 \theta - \sin^4 \theta} &= \sqrt{\sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)} = \sqrt{\sin^2 \theta \cdot \cos^2 \theta} \\ &= \sqrt{(\sin \theta \cdot \cos \theta)^2} = |\sin \theta \cdot \cos \theta| \end{aligned}$$

در ربع چهارم $\cos \theta > 0$ و $\sin \theta < 0$ پس $\sin \theta \cdot \cos \theta < 0$ بنابراین:

$$|\sin \theta \cdot \cos \theta| = -\sin \theta \cdot \cos \theta$$

متوسط

۷- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} &= \frac{1 + \sin \alpha - \cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{1 - \cos^2 \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} \\ &= \frac{\sin^2 \alpha + \sin \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\sin \alpha (\sin \alpha + 1)}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \tan \alpha \end{aligned}$$

متوسط

۸- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} 1 + \tan^r x &= \frac{1}{\cos^r x} \Rightarrow 1 + (\sqrt{b-1})^r = \frac{1}{(\sqrt{a+r})^r} \\ \Rightarrow 1 + b - 1 &= \frac{1}{a+r} \Rightarrow b = \frac{1}{a+r} \Rightarrow a+r = \frac{1}{b} \\ \Rightarrow a &= \frac{1}{b} - r \Rightarrow a = \frac{1-rb}{b} \end{aligned}$$

متوسط

۹- گزینه «۲»

چون x حاده است پس:

$$\sin x = |\sin x|, \cos x = |\cos x|$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos x |\cos x| + \sin x |\sin x|}{-|\cos x| \cos x + 1} &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{-\cos^2 x + 1} \\ &= \frac{1}{1 - \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} \end{aligned}$$

نکته: اگر θ زاویه‌ای حاده باشد، آنگاه:

$$|\cos \theta| = \cos \theta, |\sin \theta| = \sin \theta$$



آسان

-۱

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{AC}{10} \Rightarrow AC = 15$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 10^2 + 15^2 = 100 + 225 = 325 = 25 \times 13 \\ \Rightarrow BC = 5\sqrt{13}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{10}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

آسان

-۲

$$E = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 5(\frac{\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - 5 \times \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{5}{3}} = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

متوسط

-۳

$$S = 20\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times x \times x \times \sin 60^\circ = 10\sqrt{3}$$

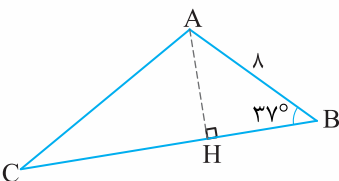
$$S = 25\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2x \times x \times \sin 60^\circ = 25\sqrt{3} \Rightarrow x^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = 5\sqrt{2} \Rightarrow AB = x = 5\sqrt{2}, \quad AC = 2x = 10\sqrt{2}$$

متوسط

-۴

$$\triangle ABH: \sin(37^\circ) = \frac{AH}{AB} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{AH}{8} \Rightarrow AH = \frac{32}{5}$$



آسان

-۵

(ب) ربع دوم

(آ) ربع چهارم

(ت) ربع اول

(پ) ربع سوم

آسان

-۶

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 3m + 4 \leq 1 \xrightarrow{-4} -5 \leq 3m \leq -3$$

$$\xrightarrow{\div 3} -\frac{5}{3} \leq m \leq -1$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

$$\frac{\tan^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cot^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \sin^2 \alpha}{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} - \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha (\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1)}{\cos^2 \alpha (\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1)}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha (\frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha})}{\cos^2 \alpha (\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha})} = \frac{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha$$

دشوار

۱۵- گزینه «۴»

$$\tan \theta + \cot \theta = 4 \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 4 \Rightarrow \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 4 \\ \Rightarrow \frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = 4 \Rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{4}$$

$$(\sin \theta + \frac{1}{\cos \theta})(\cos \theta + \frac{1}{\sin \theta}) = (\frac{\sin \theta \cdot \cos \theta + 1}{\cos \theta})(\frac{\sin \theta \cdot \cos \theta + 1}{\sin \theta}) \\ = \frac{(\sin \theta \cdot \cos \theta + 1)^2}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{(\frac{1}{4} + 1)^2}{\frac{1}{4}} = \frac{25}{4}$$

دشوار

۱۶- گزینه «۳»

$$\sqrt{\tan \theta} + \sqrt{\cot \theta} = 3 \Rightarrow (\sqrt{\tan \theta} + \sqrt{\cot \theta})^2 = 9 \\ \Rightarrow \tan \theta + \cot \theta + 2\sqrt{\tan \theta \cdot \cot \theta} = 9$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \cot \theta + 2 = 9 \Rightarrow \tan \theta + \cot \theta = 7 \Rightarrow \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 7$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = 7 \Rightarrow \sin \theta \cdot \cos \theta = \frac{1}{7}$$

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + 2\sin \theta \cdot \cos \theta \Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \frac{2}{7}$$

$$\Rightarrow (\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{9}{7} \Rightarrow \sin \theta + \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

آسان

۱۷- گزینه «۳»

$$2\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 1 - \cos^2 x + 1 = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

آسان

-۲

(آ) ناحیه سوم (ب) ناحیه دوم

متوسط

-۳

برای θ هایی که در بازه $(0, 45^\circ)$ قرار دارند $\sin \theta < \cos \theta$ است.

متوسط

-۴

$$x^2 + (4x)^2 = 1 \Rightarrow 17x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{17}$$

$$\xrightarrow{x>0} x = \frac{1}{\sqrt{17}}, y = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin \theta = y = \frac{4}{\sqrt{17}}, \cos \theta = x = \frac{1}{\sqrt{17}},$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = 4, \cot \theta = \frac{1}{4}$$

متوسط

-۵

شیب خط d برابر $-\tan 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ است. خط d' بر خط d عمود است.پس شیب آن $\sqrt{3}$ خواهد بود. خط d' از مبدأ می‌گذرد و شیب آن $\sqrt{3}$ است پس معادله آن $y = x\sqrt{3}$ خواهد بود.

آسان

-۶

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \left(\frac{1}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha = 24 \xrightarrow{\tan \alpha < 0} \tan \alpha = -\sqrt{24}$$

دشوار

-۷

$$\cos \theta = -\frac{1}{4} \Rightarrow 3k + 1 = -\frac{1}{4} \Rightarrow 3k = -\frac{5}{4} \Rightarrow k = -\frac{5}{12}$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(2m - \frac{5}{12}\right)^2 = 1 \Rightarrow \left(2m - \frac{5}{12}\right)^2 = \frac{15}{16}$$

$$\Rightarrow 2m - \frac{5}{12} = -\frac{\sqrt{15}}{4} \Rightarrow m = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{12} - \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

متوسط

-۸

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{m-2n}{2m+n} \Rightarrow 3m-6n=2m+n$$

$$\Rightarrow m=7n \Rightarrow P(15n, 8n)$$

$$(15n)^2 + (8n)^2 = 1 \Rightarrow (8n)^2(9+1) = 1 \Rightarrow 8n = \frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow n = \frac{1}{8\sqrt{10}}$$

$$\cos \theta = x = 15n = \frac{3}{\sqrt{10}}, \sin \theta = y = 8n = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

آسان

-۷

$$\tan \alpha = m_{AB} = \frac{4-(-2)}{2-(-1)} = \frac{6}{3} = 2$$

متوسط

-۸

شیب خط برابر $\tan 45^\circ$ خواهد بود.

$$-\frac{2m+3}{m-4} = 1 \Rightarrow 4-m=2m+3 \Rightarrow 2m=1 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$$

متوسط

-۹

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{36} + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$$

$$\xrightarrow{\cos \alpha < 0} \cos \alpha = -\frac{\sqrt{35}}{6}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{1}{6}}{-\frac{\sqrt{35}}{6}} = -\frac{1}{\sqrt{35}}$$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = -\sqrt{35}$$

دشوار

-۱۰

$$a^2 + b^2 = (3 \cos x + 4 \sin x)^2 + (3 \sin x - 4 \cos x)^2$$

$$= (9 \cos^2 x + 24 \sin x \cos x + 16 \sin^2 x)$$

$$+ (9 \sin^2 x - 24 \sin x \cos x + 16 \cos^2 x)$$

$$= 25 \sin^2 x + 25 \cos^2 x = 25(\sin^2 x + \cos^2 x) = 25$$

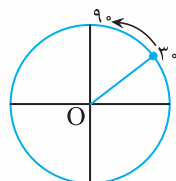
$$a^2 + b^2 + c^2 = 25 + 25 \tan^2 x = 25(1 + \tan^2 x) = \frac{25}{\cos^2 x}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{\frac{25}{\cos^2 x}} = \frac{5}{|\cos x|}$$



متوسط

-۱

اگر α از 30° تا 90° افزایش یابد آنگاه $\sin \alpha$ از $\frac{1}{2}$ تا ۱ افزایش می‌یابد. پس:

$$\frac{1}{2} < \frac{3m-1}{5} < 1 \xrightarrow{\times 10} 5 < 6m-2 < 10$$

$$\xrightarrow{+2} 7 < 6m < 12 \xrightarrow{\div 6} \frac{7}{6} < m < 2$$

دشوار

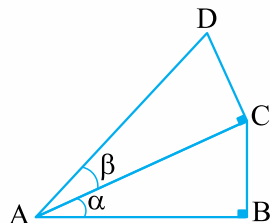
۳- گزینه «۳»

طول BC را برابر x در نظر می‌گیریم:

$$\triangle ABC: \tan \alpha = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \begin{cases} BC = x \\ AB = 3x \end{cases}$$

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = (3x)^2 + (x)^2$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 10x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{10}$$



$$\triangle ACD: \tan \beta = \frac{DC}{AC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{DC}{x\sqrt{10}} \Rightarrow DC = \frac{x\sqrt{10}}{3}$$

$$(AD)^2 = (AC)^2 + (DC)^2 \Rightarrow (AD)^2$$

$$= (\sqrt{10}x)^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{3}x\right)^2 = 10x^2 + \frac{10}{9}x^2 \Rightarrow (AD)^2 = \frac{100}{9}x^2$$

$$\Rightarrow AD = \frac{10}{3}x$$

$$\frac{AB}{AD} = \frac{3x}{\frac{10}{3}x} = \frac{9}{10}$$

متوسط

۴- گزینه «۴»

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AB)(AC)\sin \hat{A} = \left(\frac{1}{2}\right)(2)(6)\sin 30^\circ$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)(2)(6)\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2}(AD)(AE)\sin \hat{A} = \left(\frac{1}{2}\right)(6)(10)\sin 30^\circ$$

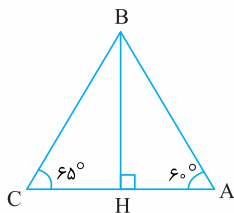
$$= \left(\frac{1}{2}\right)(6)(10)\left(\frac{1}{2}\right) = 15$$

$$S_{BCED} = S_{ADE} - S_{ABC} = 15 - 3 = 12$$

آسان

۵- گزینه «۳»

ارتفاع BH را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه BHA داریم:



$$\sin 60^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = AB \sin 60^\circ = 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

آسان

۹-

$$\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)$$

$$= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

دشوار

۱۰-

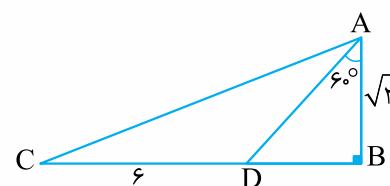
$$\frac{2 \tan \hat{B}}{1 + \tan^2 \hat{B}} = \frac{2 \times \frac{b}{c}}{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} = \frac{\frac{2b}{c}}{\frac{b^2 + c^2}{c^2}} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

$$2 \sin \hat{B} \cos \hat{B} = 2 \times \frac{b}{a} \times \frac{c}{a} = \frac{2bc}{a^2}$$



متوسط

۱- گزینه «۱»



$$\tan 60^\circ = \frac{BD}{AB} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{BD}{\sqrt{3}} \Rightarrow BD = 3$$

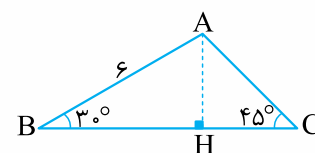
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 \Rightarrow (AC)^2 = (\sqrt{3})^2 + (9)^2$$

$$\Rightarrow (AC)^2 = 84 \Rightarrow AC = 2\sqrt{21}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{BC}{AC} = \frac{9}{2\sqrt{21}} = \frac{9\sqrt{21}}{2 \times 21} = \frac{3\sqrt{21}}{14}$$

دشوار

۲- گزینه «۱»



$$\frac{\sin \hat{B}}{AC} = \frac{\sin \hat{C}}{AB} \Rightarrow \frac{\sin 30^\circ}{AC} = \frac{\sin 45^\circ}{6} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{AC} \Rightarrow AC = \frac{6 \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3\sqrt{2}$$

$$\triangle AHB: \cos \hat{B} = \frac{BH}{AB} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{BH}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BH}{6} \Rightarrow BH = 3\sqrt{3}$$

$$\triangle ACH: \cos \hat{C} = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \cos 45^\circ = \frac{CH}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CH}{3\sqrt{2}} \Rightarrow CH = 3$$

$$BC = BH + CH = 3 + 3\sqrt{3} = 3 + 3(1/\sqrt{2}) = 8/1$$

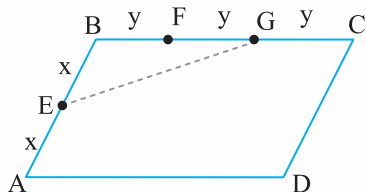
متوسط

۱۲- گزینه «۳»

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{y}{f} = \frac{b}{\sin B} \xrightarrow{\times \frac{r}{y}} \frac{r}{\lambda} = \frac{rb}{r \sin B}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۲»



$$\frac{S(ABCD)}{S(EBG)} = \frac{rx \times ry \sin \hat{B}}{\frac{1}{r} \times x \times ry \sin \hat{B}} = \frac{xy \sin \hat{B}}{xy \sin \hat{B}} = r$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{rm}{m+9} \Rightarrow fm = m+9 \Rightarrow m=3$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{r+p}{12} \Rightarrow 12\sqrt{3} = 6 + 2P$$

$$\Rightarrow P = \frac{12\sqrt{3} - 6}{2} = 6\sqrt{3} - 3$$

متوسط

۱۵- گزینه «۲»

$$S_{ABC} = S_{BDEF} \Rightarrow \frac{1}{2} \times x \times 2 \times \sin \hat{B} = 1 \times y \times \sin \hat{B} \Rightarrow x = y$$

آسان

۱۶- گزینه «۱»

α در ناحیه اول است.

$$\cos \alpha \cot \alpha = \cos \alpha \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} = \frac{1 - \frac{1}{9}}{\frac{1}{3}} = \frac{8}{3}$$

آسان

۱۷- گزینه «۲»

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5}$$

متوسط

۱۸- گزینه «۳»

$$\left(\frac{1}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}\right)^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{2}{\sin \theta \cos \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{(\sin \theta \cos \theta)^2} + \frac{2}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} + \frac{2}{\frac{1}{5}} = 25 + 10 = 35$$

متوسط

۶- گزینه «۴»

با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \Delta AHC: \cos 30^\circ = \frac{a}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{6} \Rightarrow a = 3\sqrt{3} \\ \Delta ABC: \tan 30^\circ = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{b}{6} \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow a + b = 5\sqrt{3}$$

آسان

۷- گزینه «۱»

$$\sin^2 60^\circ - \sin^2 30^\circ - \sin(60^\circ + 30^\circ) \sin(60^\circ - 30^\circ)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 \times \frac{1}{2} = 0$$

متوسط

۸- گزینه «۴»

عبارت داده شده را طرفین وسطین می‌کنیم:

$$2 \sin x + 8 \cos x = 3 \sin x - \cos x \Rightarrow \sin x = 9 \cos x$$

$$\Rightarrow \tan x = 9, \cot x = \frac{1}{9}$$

$$\tan x + \cot x = 9 + \frac{1}{9} = \frac{82}{9}$$

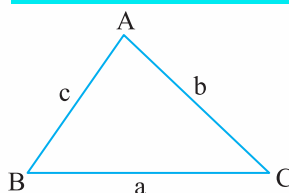
آسان

۹- گزینه «۴»

$$S = \frac{3}{2} a^2 \sqrt{3} = \frac{3}{2} (\sqrt{3})^2 (\sqrt{3}) = \frac{9}{2} \sqrt{3} = \frac{\frac{9}{2} \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 9$$

متوسط

۱۰- گزینه «۲»



$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 \sin \hat{C} = 3 \sin \hat{C}$$

چون مساحت برابر ۲ است، پس:

$$3 \sin \hat{C} = 2 \Rightarrow \sin \hat{C} = \frac{2}{3}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۱»

با توجه به مثلث قائم‌الزاویه ABC مقدار BC را به کمک رابطه فیثاغورس محاسبه می‌کنیم.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52 = 4 \times 13$$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{13}$$

$$\sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{2\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\cos \hat{C} = \frac{AC}{BC} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$M = \sqrt{13} \times \frac{2}{\sqrt{13}} + \frac{1}{\sqrt{13} \times \frac{3}{\sqrt{13}}} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

۳- گزینه «۳»

(۱) در ربع اول اگر $0^\circ < \theta < 45^\circ$ باشد، آنگاه $\sin \theta < \cos \theta$

$$0^\circ < 20^\circ < 45^\circ \Rightarrow \sin 20^\circ < \cos 20^\circ$$

(۲) در ربع دوم، $\sin$ مثبت و $\cos$ منفی است، بنابراین $\sin 130^\circ > \cos 130^\circ$ درست است.

(۳) در ربع سوم اگر $225^\circ < \theta < 270^\circ$ باشد، آنگاه $\sin \theta < \cos \theta$

$$225^\circ < 230^\circ < 270^\circ \Rightarrow \sin 230^\circ < \cos 230^\circ$$

گزینه (۳) نادرست است.

(۴) در ربع چهارم $\cos$ مثبت و $\sin$ منفی است.

بنابراین $\cos 280^\circ > \sin 280^\circ$ درست است.

۴- گزینه «۴»

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos^2 x \leq 0 \Rightarrow 1 \leq 2 - \cos^2 x \leq 2$$

$$\Rightarrow |2 - \cos^2 x| = 2 - \cos^2 x$$

$$-1 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos^2 x \leq 0 \Rightarrow -4 \leq -\cos^2 x - 3 \leq -3$$

$$\Rightarrow |-\cos^2 x - 3| = -(-\cos^2 x - 3) \Rightarrow |-\cos^2 x - 3| = \cos^2 x + 3$$

$$|2 - \cos^2 x| - |-\cos^2 x - 3| = (2 - \cos^2 x) - (\cos^2 x + 3)$$

$$= 2 - \cos^2 x - \cos^2 x - 3$$

$$\Rightarrow |2 - \cos^2 x| - |-\cos^2 x - 3| = (2 - \cos^2 x) - (\cos^2 x + 2)$$

$$= 2 - \cos^2 x - \cos^2 x - 2$$

$$\Rightarrow |2 - \cos^2 x| - |-\cos^2 x - 3| = -2\cos^2 x - 1$$

$$= -2(1 - \sin^2 x) - 1 = -2 + 2\sin^2 x - 1 = 2\sin^2 x - 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow a + b = -1$$

۵- گزینه «۴»

به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$13^2 = (x+11)^2 + (x+4)^2$$

$$x^2 + 22x + 121 + x^2 + 8x + 16 = 169$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 30x - 32 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -16 \end{cases} \quad \text{غ ق ق}$$

$$\tan \hat{C} = \frac{x+11}{x+4} = \frac{12}{5}, \quad \tan B = \frac{5}{12}$$

$$\tan \hat{C} + \tan \hat{B} = \frac{12}{5} + \frac{5}{12} = \frac{144+25}{60} = \frac{169}{60}$$

۱۹- گزینه «۴»

متوسط

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} &= \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha} \\ 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \right)^2 &= 1 + \left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} \right)^2 = 1 + \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2 \\ &= 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \end{aligned}$$

متوسط

۲۰- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \cos^4 x + \sin^4 x - \sin^4 x - \cos^4 x \\ = \cos^4 x - \sin^4 x - \cos^4 x + \sin^4 x \\ = (\cos^4 x - \sin^4 x) - (\cos^4 x - \sin^4 x) = 0 \end{aligned}$$



۱- گزینه «۲»

شکل زیر از یک شش ضلعی منتظم به طول ۲ و شش مثلث متساوی الاضلاع به طول ۲ تشکیل شده است.

$$S_{\text{شش ضلعی منتظم}} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}(2)^2}{2} = 6\sqrt{3}$$



$$S_{\text{مثلث متساوی الاضلاع}} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}(2)^2}{4} = \sqrt{3}$$

$$S_{\text{ستاره}} = S_{\text{شش ضلعی منتظم}} + 6S_{\text{مثلث متساوی الاضلاع}} = 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$$

۲- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} A &= \Delta \sin^2 x - 2\cos^2 x + 3 = \Delta \sin^2 x - 2(1 - \sin^2 x) + 3 \\ &= \Delta \sin^2 x - 2 + 2\sin^2 x + 3 = \gamma \sin^2 x + 1 \end{aligned}$$

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \gamma \sin^2 x \leq \gamma \Rightarrow 1 \leq \gamma \sin^2 x + 1 \leq \gamma + 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq A \leq \gamma + 1$$

۹- گزینه «۲»

$$S_1 = S(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 \times \sin \hat{A} = 10 \sin \hat{A}$$

$$S_2 = S(\triangle ADE) = \frac{1}{2} AE \times AD \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sin \hat{A} = \sin \hat{A}$$

$$S_3 = S_1 - S_2 = 10 \sin \hat{A} - \sin \hat{A} = 9 \sin \hat{A}$$

$$\frac{S_1}{S_2} + \frac{S_1}{S_3} = \frac{10 \sin \hat{A}}{\sin \hat{A}} + \frac{10 \sin \hat{A}}{9 \sin \hat{A}} = 10 + \frac{10}{9} = \frac{100}{9}$$

۱۰- گزینه «۱»

$$\triangle ABD: \tan \alpha = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{2}, \cot \beta = \frac{AD}{BD} = \frac{3}{2}$$

$$\triangle ADC: \sin \theta = \frac{AD}{AC} = \frac{3}{\sqrt{9+4}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \sin^2 \theta = \frac{9}{13}$$

$$\tan \alpha \cot \beta \sin^2 \theta = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{9}{13} = \frac{81}{4 \times 13} \Rightarrow 13 \tan \alpha \tan \beta \sin^2 \theta = \frac{81}{4}$$

۱۱- گزینه «۳»

می‌توان $x+y$ را برابر 90° و $x-y$ را برابر 180° در نظر گرفت تا

$A=4$ و به همین ترتیب $\sin T=1$ و $\cos P=1$ فرض کرد که $B=4$

شود پس مجموع بیش‌ترین‌ها $4+4=8$ خواهد بود.

۱۲- گزینه «۲»

از رابطه اول نتیجه می‌شود که $\tan \theta = \cos \alpha + 2$ است، همچنین

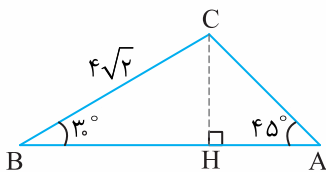
$1 \leq \cos \alpha + 2 \leq 3$ بنابراین $1 \leq \cos \alpha + 2 \leq 3$ می‌باشد، پس $\tan \theta > 0$ است.

همچنین از رابطه دوم نتیجه می‌شود که:

$$(1+a^2)\cos \theta = -a^2 \Rightarrow \cos \theta = \frac{-a^2}{1+a^2} < 0$$

پس θ در ناحیه سوم مثلثاتی قرار دارد.

۱۳- گزینه «۲»



$$\hat{A} = 180^\circ - (30^\circ + 105^\circ) = 45^\circ$$

$$\sin 30^\circ = \frac{CH}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{CH}{4\sqrt{2}} \Rightarrow CH = 2\sqrt{2}$$

$$\sin 45^\circ = \frac{CH}{AC} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{AC} \Rightarrow AC = 4$$

۶- گزینه «۲»

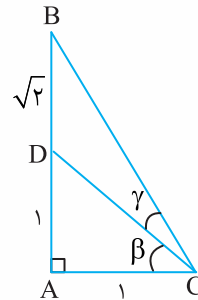
نقطه D را روی AB طوری انتخاب می‌کنیم که $AD=1$ و $DB=\sqrt{2}$

باشد. حال در مثلث ADC داریم:

$$\tan \hat{\beta} = \frac{AD}{AC} = \frac{1}{1} \Rightarrow \beta = 45^\circ$$

و همچنین:

$$DC^2 = AD^2 + AC^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow DC = \sqrt{2}$$



پس مثلث DBC متساوی‌الساقین است پس $\hat{B} = \gamma$

$$\gamma = \hat{B} = \frac{180^\circ - 135^\circ}{2} = 22.5^\circ \Rightarrow \beta + \gamma = 67.5^\circ$$

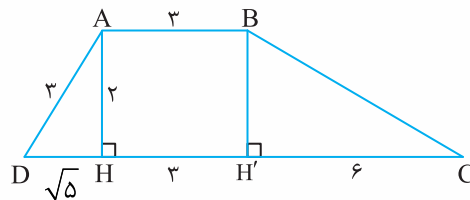
۷- گزینه «۴»

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x}$$

$$= 1 - (1 - \sin x) = \sin x$$

۸- گزینه «۴»

ارتفاع‌های AH و BH' را رسم می‌کنیم.



$$\sin \hat{D} = \frac{AH}{AD} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{AH}{3} \Rightarrow AH = 2$$

چون $AH=2$ است پس $BH'=2$ خواهد بود.

$$\triangle BH'C: \tan \hat{C} = \frac{BH'}{H'C} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{2}{H'C} \Rightarrow H'C = 6$$

$$\triangle DAH: DH^2 = 9 - 4 = 5 \Rightarrow DH = \sqrt{5}$$

$$S (\text{ذوزنقه}) = \frac{1}{2} AH(AB + DC) =$$

$$\frac{1}{2} \times 2 \times (\sqrt{5} + 3 + 6 + 3) = 12 + \sqrt{5}$$

۱۸- گزینه «۲»

در کسر N صورت و مخرج را بر $\cos^5 \theta$ تقسیم می‌کنیم:

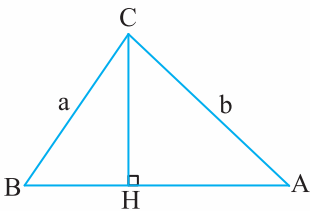
$$N = \frac{\frac{\sin^5 \theta}{\cos^5 \theta} - \frac{\cos^3 \theta}{\cos^5 \theta}}{\frac{\cos^5 \theta}{\cos^5 \theta} + \frac{\sin^5 \theta}{\cos^5 \theta}} = \frac{\tan^5 \theta - (1 + \tan^3 \theta)}{1 + \tan^3 \theta + \tan^5 \theta} = \frac{32 - (1 + 4)}{1 + 4 + 32} = \frac{27}{37}$$

۱۹- گزینه «۲»

$$N = a^2(1 - \sin^2 B) + b^2(1 - \sin^2 A) + 2ab \cos A \cos B$$

$$= a^2 \cos^2 B + b^2 \cos^2 A + 2ab \cos A \cos B = (a \cos B + b \cos A)^2$$

$$N = \left(a \times \frac{BH}{a} + b \times \frac{AH}{b}\right)^2 = (BH + AH)^2 = c^2$$



۲۰- گزینه «۲»

$$\frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{2 \cos x} = \frac{1 + \sin x}{\sin x} + \frac{1 - \sin x}{2 \sin x} = \frac{1 - k}{-k} + \frac{1 + k}{-2k}$$

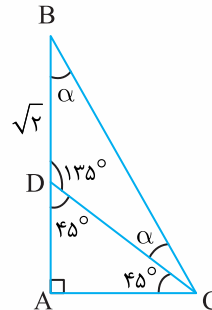
$$= \frac{2 - 2k + 1 + k}{-2k} = \frac{k - 3}{2k}$$

۱۴- گزینه «۱»

مثلث ABC را به صورت زیر تبدیل می‌کنیم.

مثلث ADC قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است. مثلث BDC نیز

متساوی‌الساقین است، زیرا $DB = DC = \sqrt{2}$ می‌باشد.



$$\alpha + \alpha + 135^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2\alpha = 45^\circ \Rightarrow \alpha = 22.5^\circ$$

$$S(\triangle BEF) = \frac{1}{2} BE \times BF \times \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه «۴»

اگر طرفین دو رابطه داده شده را به توان دو برسانیم و سپس طرفین را جمع

کنیم جواب مسئله به دست می‌آید.

$$\begin{cases} (\sin x + 2 \cos x)^2 = A^2 \\ (\cos x - 2 \sin x)^2 = B^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x + 4 \cos^2 x + 4 \sin x \cos x = A^2 \\ \cos^2 x + 4 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x = B^2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{+} \Delta(\sin^2 x + \cos^2 x) = A^2 + B^2 \Rightarrow A^2 + B^2 = \Delta$$

۱۶- گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{3 + 1 - \sin^2 10^\circ} (4 \cos^2 10^\circ + 3 \sin^2 10^\circ) \\ &= \frac{1}{3 + \cos^2 10^\circ} (\cos^2 10^\circ + 3(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ)) \\ &= \frac{1}{3 + \cos^2 10^\circ} (3 + \cos^2 10^\circ) = 1 \\ B &= \frac{\frac{\cos^2 10^\circ}{\sin^2 10^\circ} - \cos^2 10^\circ}{\cot^2 10^\circ \cos^2 10^\circ} = \frac{\cos^2 10^\circ (1 - \sin^2 10^\circ)}{\cot^2 10^\circ \cos^2 10^\circ} = 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow A + B = 2$$

۱۷- گزینه «۳»

$$1 + 3 \cos^2 \theta = -4 \sin \theta \cos \theta \xrightarrow{\div \cos^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} + 3 = -4 \tan \theta$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \theta + 3 = -4 \tan \theta \Rightarrow \tan^2 \theta + 4 \tan \theta + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\tan \theta + 2)^2 = 0 \Rightarrow \tan \theta + 2 = 0 \Rightarrow \tan \theta = -2 \Rightarrow \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$$

$$\cos^2 \theta + \cot^2 \theta = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$