

متوسط

-۶

خیر - اگر عدد گویا را صفر در نظر بگیریم، حاصل ضرب آن در هر عدد گنگ برابر صفر خواهد بود، که صفر عددی گنگ نیست. بنابراین پاسخ سؤال، خیر می باشد.

دشوار

-۷

(آ) نادرست
(ب) نادرست
(پ) نادرست
(ت) درست

متوسط

-۸

دو عدد $2 - \sqrt{3}, \sqrt{3}$ اگر با هم جمع شود حاصل ۲ می شود که گویا است و گنگ نیست.

متوسط

-۹

با انتخاب $x = 2 + \sqrt{2}$ و $y = 2 - \sqrt{2}$ داریم:

$$xy = (2 + \sqrt{2})(2 - \sqrt{2}) = (2)^2 - (\sqrt{2})^2 = 4 - 2 = 2$$

دشوار

-۱۰

نادرست است. اگر $x = \sqrt{2}, y = 2\sqrt{2}$ انتخاب شود.

$$y^x = (2\sqrt{2})^{\sqrt{2}} = 2^{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 2^2 = 4$$



آسان

۱- گزینه «۴»

$$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \text{ پس } : N \cup W = W, W \cap Z = W, W - N = \{0\}$$

$\{0\}$ با مجموعه تهی یعنی $\{\}$ فرق دارد.

آسان

۲- گزینه «۴»

تقسیم دو عدد طبیعی می تواند گنگ نباشد مثلاً $2 = 3 \div 6 \div 2$ که عدد گنگ نیست.

آسان

۳- گزینه «۳»

مثلاً جرم انسانی $58/5$ کیلوگرم است که عدد $58/5$ عدد حسابی نیست.



متوسط

-۱

$$-1 < x + 2 \leq 5 \Rightarrow -3 < x \leq 3 \Rightarrow x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow A = \{(-2)^2, (-1)^2, 0^2, (1)^2, (2)^2, (3)^2\}$$

$$\Rightarrow A = \{4, 1, 0, 1, 4, 9\} \Rightarrow A = \{0, 1, 4, 9\}$$

آسان

-۲

در قسمت (آ) عدد $\frac{4}{2}$ همان ۲ می باشد که عدد طبیعی است پس گزاره درست است.

در قسمت (ب) عدد مورد نظر همان $\frac{-2}{3}$ است که عددی گویا است بنابراین درست است.

در قسمت (پ) عدد ساده شده $\frac{1}{4}$ است و این عدد به اعداد حسابی تعلق ندارد بنابراین نادرست است.

آسان

-۳

در قسمت (آ) می دانیم اعداد طبیعی و اعداد حسابی در همه اعضا مشترک هستند جز صفر، پس:

$$N \cap W = N$$

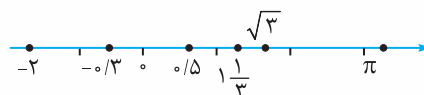
به همین طریق اگر اعداد حسابی را از اعداد طبیعی خارج کنیم برای اعداد طبیعی عضوی باقی نمی ماند. بنابراین در قسمت (ب) $N - W = \emptyset$ و در

قسمت (پ) $W - N = \{0\}$ می باشد.

در قسمت (ت) توجه می کنیم که $N \subseteq Z$ است پس $Z \cup N = Z$.

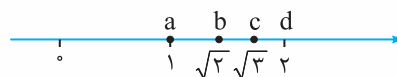
آسان

-۴



متوسط

-۵



$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$



متوسط

۱۱- گزینه «۲»

اگر مخرج صفر شود عدد گویا تولید نمی‌شود.

آسان

۱۲- گزینه «۴»

مجموعه A شامل شماره‌های صحیح عدد ۶ است.

$$A = \{1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6\} \Rightarrow n(A) = 8$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

$$3x + 1 = -16 \Rightarrow 3x = -17 \Rightarrow x = -\frac{17}{3} \notin \mathbb{Z}$$

$$3x + 1 = -26 \Rightarrow 3x = -27 \Rightarrow x = -9 \in \mathbb{Z}$$

$$3x + 1 = -56 \Rightarrow 3x = -57 \Rightarrow x = -19 \in \mathbb{Z}$$

$$3x + 1 = -86 \Rightarrow 3x = -87 \Rightarrow x = -29 \in \mathbb{Z}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow 2^0 \times 5^4 = 625, \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow 2^1 \times 5^3 = 250$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow 2^2 \times 5^2 = 100, \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow 2^3 \times 5^1 = 40$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2^4 \times 5^0 = 16 \Rightarrow A = \{625, 250, 100, 40, 16\}$$

$$625 + 250 + 100 + 40 + 16 = 1031$$



آسان

۱-

آ) $(-\infty, -5]$



ب) $(-2, 2]$



آسان

۲-

آ) $(-3, 1] = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 1\}$



ب) $[2, +\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 2\}$



آسان

۱۴- گزینه «۴»

تنها عددی که حسابی است و طبیعی نیست عدد صفر است که این عدد زوج است.

متوسط

۵- گزینه «۴»

۱) کوچک‌ترین عدد طبیعی ۱ است که ۲ برابر آن می‌شود ۲ که دقیقاً

«برابر» با کوچک‌ترین عدد اول یعنی ۲ است.

۲) تقسیم ۲ بر ۲ برابر ۱ است.

۳) حاصل ضرب دو عدد اول عددی طبیعی است.

۴) هر عدد اول غیر از ۲ را منهای ۲ کنیم فرد می‌شود.

متوسط

۶- گزینه «۴»

اگر عدد طبیعی مربع کامل مانند x را انتخاب کنیم آن‌گاه $\sqrt{x}$ طبیعی و در

غیر این صورت گنگ است.

متوسط

۷- گزینه «۳»

برای رد گزینه‌های (۱ و ۲) مثال نقض می‌آوریم: مثال نقض گزینه (۱) دو

عدد $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ که مجموعشان عدد صفر می‌شود و گنگ نیستند و مثال نقض

گزینه (۲) نیز دو عدد $\sqrt{8}, \sqrt{2}$ است که حاصل ضربشان

$$= \sqrt{2 \times 8} = \sqrt{16} = 4$$

عددی گویای غیرصفر گنگ است.

متوسط

۸- گزینه «۳»

چون صفر تنها عدد نه مثبت و نه منفی است، پس اجتماع آن با اعداد طبیعی

همان اعداد صحیح و نامنفی می‌شود، پس گزینه (۳) نادرست است و بقیه

گزینه‌ها درست هستند.

آسان

۹- گزینه «۳»

آ) نادرست است و مثال نقض مربوط به آن، دو عدد صحیح ۱ و ۲ است که

بین آن‌ها هیچ عدد صحیحی وجود ندارد.

ب) همیشه درست است. $((-a)^2 = a^2)$.

پ) نیز صحیح است، چون قرینه اعداد حسابی همان اعداد صحیح منفی و عدد

صفر هستند. (چون قرینه عدد صفر خودش می‌شود). اجتماع این اعداد با اعداد

طبیعی همان اعداد صحیح هستند.

متوسط

۱۰- گزینه «۳»

k عددی طبیعی است، بنابراین:

۱) $2k + 1$ اعداد طبیعی فرد بزرگ‌تر یا مساوی ۳ خواهد بود.

۲) $2k$ اعداد زوج طبیعی است.

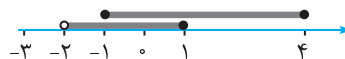
۳) $2k - 1$ اعداد فرد طبیعی است.

۴) $2k$ همه اعداد حسابی زوج را نمایش نمی‌دهد.

-۳

متوسط

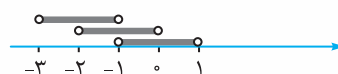
$$\bar{A}) . (-2, 1] \cup [-1, 4] = (-2, 4]$$



$$\text{ب) } (-\infty, 3) \cap [2, +\infty) = [2, 3)$$



$$\text{پ) } (-1, 1) \cup (-2, 0) \cup (-3, -1) = (-3, 1)$$



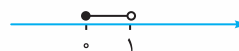
-۴

آسان

$$\bar{A}) A \cup B = (-2, 1) \cup [0, 3] = (-2, 3]$$



$$\text{ب) } A \cap B = (-2, 1) \cap [0, 3] = [0, 1)$$



$$\text{پ) } A - B = (-2, 1) - [0, 3] = (-2, 0)$$



$$\text{ت) } B - A = [0, 3] - (-2, 1) = [1, 3]$$



-۵

آسان

آ) درست است. ب) درست است.

پ) نادرست است. ت) درست است.

ث) نادرست است. $(-1, 0) \cup (-\frac{1}{2}, 1) = (-1, 1) \neq (-1, 1]$

-۶

آسان

آ) درست ب) نادرست

پ) نادرست ت) درست

-۷

متوسط

عدد $\sqrt{17}$ از ۴ بزرگتر است پس به بازه (ت) تعلق دارد. عدد $\frac{-16}{-8}$ برابر

۲ می‌باشد پس به بازه (پ) تعلق دارد. حاصل $(-1)^5$ همان -۱ است که به

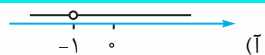
بازه‌های (آ)، (ب) و (پ) تعلق دارد. عدد $\frac{-5}{2}$ یا $-2/5$ نیز به بازه (ب)

متعلق است.

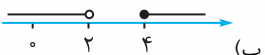
-۸

متوسط

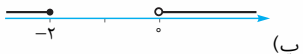
$$\text{آ) } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$



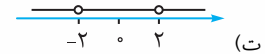
$$\text{ب) } (-\infty, 2) \cup [4, +\infty)$$



$$\text{پ) } (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$$



$$\text{ت) } (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$$



$$\text{ث) } (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$$



$$\text{ج) } (-2, 0] \cup [1, 5)$$



-۹

متوسط

می‌دانیم $B = (-3, 3)$, $A = [2, +\infty)$ می‌باشد بنابراین:

$$\bar{A}) A \cap B = [2, 3)$$

$$\text{ب) } A \cup B = (-3, +\infty)$$

$$\text{پ) } B - A = (-3, 2)$$

-۱۰

متوسط

$$B - A = [-4, 0) - (-3, 3) = [-4, -3]$$

-۱۱

متوسط

$$i = 1 \Rightarrow A_1 = [1, 2] \quad , \quad i = 2 \Rightarrow A_2 = [2, 5] \quad , \quad i = 3 \Rightarrow A_3 = [3, 10]$$

$$\bar{A}) A_1 \cup A_2 = [1, 2] \cup [2, 5] = [1, 5]$$

$$\text{ب) } A_3 \cap A_2 = [3, 10] \cap [2, 5] = [3, 5]$$

-۱۲

متوسط

برای آنکه دو بازه $(a, 4)$, $(2, 3)$ اشتراکی نداشته باشند باید $3 \leq a < 4$ باشد.

-۱۳

متوسط

اگر $(-1, 1) \cap [a, 3) = [0, 1)$ باشد باید $a = 0$ شود.

-۱۴

متوسط

$$(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$$

-۱۵

آسان



$$\mathbb{R} - \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$

-۱۶

متوسط

$$\frac{0}{1} < \frac{0+1}{1+3} < \frac{1+1}{4+3} < \frac{2+1}{7+3} < \frac{3+1}{10+3} < \frac{1}{3} < 1$$

$$0 < \frac{1}{4} < \frac{2}{7} < \frac{3}{10} < \frac{4}{13} < \frac{1}{3} < 1$$

متوسط

۵- گزینه «۲»

$$A \cap B = [2, 3) \cap [2, +\infty) = [2, 3)$$

$$(A \cap B) - C = [2, 3) - \left(0, \frac{5}{2}\right) = \left[\frac{5}{2}, 3\right)$$

متوسط

۶- گزینه «۳»

$$\begin{cases} -i+1 \leq 2 \Rightarrow -i \leq 1 \Rightarrow i \geq -1 \\ 2 \leq 3i-7 \Rightarrow 9 \leq 3i \Rightarrow i \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\cap} i \geq 3$$

متوسط

۷- گزینه «۴»

$$A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{3-2}{3}\right) \Rightarrow A_3 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$A_6 = \left(-\frac{2}{6}, \frac{6-2}{6}\right) \Rightarrow A_6 = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$A_3 \cup A_6 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow (A_3 \cup A_6) - A_3 = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

متوسط

۸- گزینه «۱»

$$\begin{cases} A_2 = [-2, 3/5] \\ A_5 = [-5, 2] \end{cases} \Rightarrow A_2 \cap A_5 = [-2, 2]$$

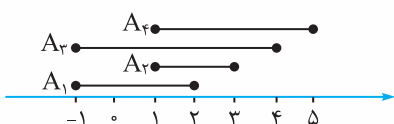
$$\begin{cases} A_1 = [-1, 4] \\ A_4 = [-4, 1] \end{cases} \Rightarrow A_1 \cap A_4 = [-1, 1]$$

$$(A_2 \cap A_5) - (A_1 \cap A_4) = [-2, 2] - [-1, 1] = [-2, -1) \cup (1, 2]$$

متوسط

۹- گزینه «۲»

$$A_n = [(-1)^n, n+1] \Rightarrow \begin{cases} A_1 = [-1, 2] \\ A_2 = [1, 3] \\ A_3 = [-1, 4] \\ A_4 = [1, 5] \end{cases} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = [1, 2]$$



دشوار

۱۰- گزینه «۳»

$$(-\infty, k+1] \cap [2k-1, +\infty) = \{-k+m\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+1 = 2k-1 \Rightarrow k=2 \\ -k+m = k+1 \Rightarrow m=5 \end{cases}$$



آسان

۱- گزینه «۳»

روش اول:



$$A \cap B = (-2, 3]$$

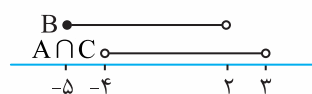
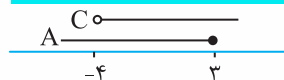
$$A - B = (-5, -2]$$

$$(A \cap B) \cup (A - B) = (-5, 3]$$

روش دوم: $(A \cap B) \cup (A - B) = A$ است پس جواب $(-5, 3]$ است.

متوسط

۲- گزینه «۱»



$$\Rightarrow A \cap C = (-4, 2] \Rightarrow B - (A \cap C) = [-5, -4]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = -4 \end{cases} \Rightarrow b - a = (-4) - (-5) = 1$$

متوسط

۳- گزینه «۳»

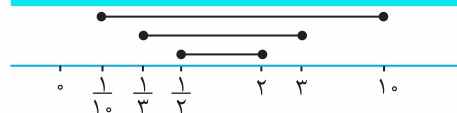
$$-3x + 5 \leq -1 \Rightarrow -3x \leq -6 \Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow A = [2, +\infty)$$

$$-7 \leq 2x + 1 \leq 5 \Rightarrow -8 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \Rightarrow B = [-4, 2]$$



متوسط

۴- گزینه «۱»



$$A_2 = \left[\frac{1}{2}, 2\right]$$

$$A_3 = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$$

...

$$A_{10} = \left[\frac{1}{10}, 10\right]$$

$$A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_{10} \Rightarrow A_2 \cap A_3 \cap A_{10} = A_2$$

متوسط

-۶

(آ) متناهی

(ب) نامتناهی، بی‌شمار عدد اول وجود دارد.

(پ) متناهی است. مجموعه مورد نظر $\{-۱, ۰, ۱\}$ است.(ت) نامتناهی، بی‌شمار عدد گویا بین -۱ و ۱ وجود دارد.

آسان

-۷

مجموعه اعداد گویا (Q) نامتناهی است.

متوسط

-۸

$$(آ) U = \{۵, ۱۰, ۱۵, \dots\}$$

(ب) نامتناهی است.

$$(پ) A = \{۵, ۱۰, ۳۰\}$$

$$(ت) \begin{cases} C = \{۱۵, ۲۰, ۲۵, \dots\} \\ D = \{۱۰, ۱۵, ۲۰, ۲۵, \dots\} \end{cases}$$

متوسط

-۹

(ب) متناهی

(آ) نامتناهی

(ت) متناهی، مجموعه تهی است.

(پ) نامتناهی

(ث) نامتناهی



آسان

-۱ گزینه «۲»

گزینه (۱) متناهی است.

گزینه‌های (۳) و (۴) نیز محدود هستند. ولی بی‌نهایت عدد اعشاری بین

 $۴/۳, ۰/۶$ وجود دارد، پس این مجموعه نامتناهی است.

آسان

-۲ گزینه «۲»

تفاضل دو مجموعه نامتناهی ممکن است متناهی یا نامتناهی باشد، مانند:

$$\begin{cases} A = \{۱, ۲, ۳, \dots\} \\ B = \{۲, ۳, \dots\} \end{cases} \Rightarrow A - B = \{۱\} \text{ متناهی}$$

$$\begin{cases} A = \{۱, ۲, ۳, ۴, \dots\} \\ B = \{۲, ۴, ۶, \dots\} \end{cases} \Rightarrow A - B = \{۱, ۳, ۵, \dots\} \text{ نامتناهی}$$



آسان

-۱

(آ) اشتراک $\mathbb{N}$ و $\mathbb{W}$ همان مجموعه $\mathbb{N}$ است. پس نامتناهی است.(ب) حاصل $\{۰\}$ است و مجموعه‌ای متناهی است.(پ) حاصل بازه $(-\infty, ۲)$ می‌باشد که مجموعه‌ای نامتناهی است.

متوسط

-۲

می‌دانیم بین هر دو عدد گویا بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. بنابراین بین $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۱}{۲}$ نیز بی‌شمار عدد گویا موجود است. پس این مجموعه نامتناهی است.

متوسط

-۳

مجموعه‌های $A = \{۳, ۴, ۵, ۶, \dots\}$ و $B = \{۳, ۲, ۱, ۰, \dots\}$ نیز نامتناهی هستند اما $A \cap B = \{۳\}$ مجموعه‌ای متناهی است.

متوسط

-۴

(آ) نادرست می‌باشد. کافی است $A = (-\infty, ۱]$ و $B = [۰, +\infty)$ را در نظربگیریم هر دو مجموعه A و B نامتناهی می‌باشند و اشتراک آن‌ها $[۰, ۱]$

است که نامتناهی است.

(ب) درست است.

متوسط

-۵

(آ) متناهی، تعداد انسان‌های روی کره زمین هر چند زیاد باشد اما عدد مشخصی

دارد که متناهی است.

(ب) نامتناهی، بین هر دو عدد حقیقی بی‌شمار عدد حقیقی وجود دارد.

(پ) نامتناهی، بی‌شمار مربع می‌توان در محورهای مختصات رسم کرد که مبدأ

مختصات مرکز متقارن آنها باشد.

(ت) نامتناهی، اعداد طبیعی بی‌شمار عضو دارند که تعداد نامتناهی از آنها مرکب

هستند.

متوسط

۸- گزینه «۴»

- (۱) بی پایان است. $\mathbb{Z} - \mathbb{W} = \{\dots, -3, -2, -1\}$
- (۲) بی پایان است. $\mathbb{W} \cap \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$
- (۳) بی پایان است. $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- (۴) با پایان است. $\mathbb{W} - \mathbb{N} = \{0\}$



آسان

۱-

مجموعه اعداد زوج طبیعی را با E و مجموعه اعداد فرد طبیعی را با O نمایش می‌دهیم.

$$E' = \mathbb{N} - E = O = \{1, 3, 5, \dots\}$$

$$O' = \mathbb{N} - O = E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

$$E \cup O = \mathbb{N} \Rightarrow (E \cup O)' = \mathbb{N}' = \emptyset$$

$$E \cap O = \emptyset \Rightarrow (E \cap O)' = \emptyset' = \mathbb{N}$$

آسان

۲-

$$U = \{1, 2, \dots, 10\}, A = \{3, 6, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

$$\bar{A} = U - A = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$$

ب) $B' = U - B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

متوسط

۳-

$$A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, +\infty) - [2, 5] = (-\infty, 2) \cup [5, +\infty)$$

متوسط

۴-

$$\bar{A} \cup B = (-\infty, -2] \cup [5, +\infty) \cup [-3, 2) = (-\infty, 2) \cup [5, +\infty)$$



ب) $A \cap B' = A - B = (-2, 5) - [-3, 2) = [2, 5)$



آسان

۵-

$$M = \{1, 2, \dots, 10\}, A = \{2, 4, 6\}, B = \{1, 4, 9\}, A \cup B = \{1, 2, 4, 6, 9\}$$

$$A' = M - A = \{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}, B' = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10\}$$

$$(A \cup B)' = \{3, 5, 7, 8, 10\}$$

متوسط

۳- گزینه «۲»

- (۱) $\{45, 46, 47, \dots\}$ نامتناهی است.
- (۲)
- $$x^2 < 2000 \Rightarrow -\sqrt{2000} < x < \sqrt{2000} \Rightarrow \{-44, -43, \dots, 0, 1, 2, \dots, 43, 44\}$$
- یک مجموعه متناهی است.
- (۳) $\{2001, 2002, 2003, \dots\}$ مجموعه نامتناهی است.
- (۴) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, 1998, 1999\}$ مجموعه نامتناهی است.

متوسط

۴- گزینه «۳»

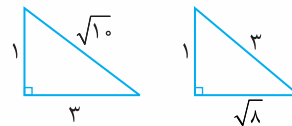
(آ) مجموعه A برابر است با:

$$A = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

$$\Rightarrow A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

متناهی است.

(ب)



در مورد مجموعه مثلث‌های قائم‌الزاویه، ضلع قائم می‌تواند برابر ۳ باشد یا وتر می‌تواند برابر ۳ باشد، پس دو مثلث وجود دارد، بنابراین این مجموعه متناهی است.

(پ) مجموعه، $B = \{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ، شماره‌های صحیح عدد ۱۲ می‌باشد که یک مجموعه متناهی است.

(ت) در مجموعه C اگر اعداد صحیح کوچک‌تر یا مساوی ۴ انتخاب شود آنگاه $2^x \leq 16$ خواهد شد، بنابراین این مجموعه نامتناهی است.

$$C = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

آسان

۵- گزینه «۲»

اگر از هر مجموعه نامتناهی تعداد متناهی عضو کم شود، باز هم مجموعه نامتناهی خواهد بود.

آسان

۶- گزینه «۳»

شمارنده‌های عدد ۱۲ قابل شمارش است، ولی گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴) مجموعه‌های نامتناهی هستند.

متوسط

۷- گزینه «۲»

(۱) نامتناهی است.

(۲) برابر با مجموعه $\{0\}$ است که متناهی است.

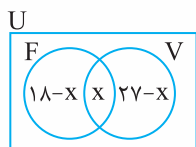
(۳) نامتناهی است، زیرا $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$ (تفاضل و اشتراک دو مجموعه نامتناهی می‌تواند نامتناهی باشد).

(۴) نیز مجموعه اعداد گنگ است که نامتناهی است.

دشوار

-۱۵

فرض کنید تعداد افرادی که هر دو رشته را بازی می‌کنند x باشد.



$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A)$$

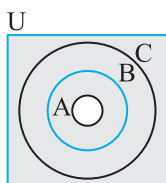
$$\Rightarrow ۳۶ = ۱۸ - x + x + ۲۷ - x \Rightarrow x = ۴۵ - ۳۶ = ۹$$

متوسط

-۱۶

می‌دانیم اگر $A \subseteq B$ باشد $A \cap B = A$ است پس در واقع $(A \cap B)'$ همان

A' است.



متوسط

-۱۷

$$\bar{1}) \quad n(A \cap B') = n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۱۸ - ۶ = ۱۲$$

$$\text{ب) } n(A' \cap B) = n(B - A) = n(B) - n(A \cap B) = ۱۰ - ۶ = ۴$$

$$\text{پ) } n(A' \cup B') = n((A \cap B)') = n(U) - n(A \cap B) = ۲۲ - ۶ = ۱۶$$

دشوار

-۱۸

$$\bar{1}) \quad n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۳۰ + ۱۵ - ۱۰ = ۳۵$$

$$\text{ب) } n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = ۳۰ - ۱۰ = ۲۰$$

$$\text{پ) } n(A' - A) = n(A') = n(U) - n(A) = ۴۰ - ۳۰ = ۱۰$$

آسان

-۱۹

$$[(A \cup A') \cup (U - A)]' = [U \cup A']' = [U]' = \emptyset$$

متوسط

-۲۰

$$C = [(A - A')' \cap (A' - A)'] - B = [A' \cap A] - B = \emptyset - B = \emptyset$$

$$C' = \emptyset' = U$$

آسان

-۶

$$N' = \mathbb{Z} - \mathbb{N} = \{\dots, -۲, -۱, ۰\} \Rightarrow (N')' = \{۱, ۲, \dots\} = \mathbb{N} \Rightarrow ((N')')' = N'$$

متوسط

-۷

$$U = \{۱, ۲, ۳, \dots, ۹\}, \quad A = \{۱, ۲, ۳, ۶\}$$

$$(A')' = A = \{۱, ۲, ۳, ۶\}$$

متوسط

-۸

$$A = (-\infty, ۰), B = (۲, +\infty) \Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

چون $A \cap B = \emptyset$ است پس A, B جدا از هم‌اند.

آسان

-۹

$A \cap B = \emptyset$ است پس:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = ۴ + ۳ = ۷$$

متوسط

-۱۰

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow ۹ = ۷ + ۳ - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = ۱$$

متوسط

-۱۱

$$A' = U - A = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} - \{۱, ۲, ۳, ۴\} = \{۵\}$$

$$B' = U - B = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\} - \{۲, ۴\} = \{۱, ۳, ۵\} \Rightarrow A' \subseteq B'$$

متوسط

-۱۲

$$\bar{1}) \quad A' = \mathbb{R} - A = (-\infty, +\infty) - (-\infty, ۳] = (۳, +\infty)$$

$$\text{ب) } B' = \mathbb{R} - B = (-\infty, +\infty) - [-۱, +\infty) = (-\infty, -۱)$$

$$\text{پ) } A' \cap B' = (۳, +\infty) \cap (-\infty, -۱) = \emptyset$$

$$\text{ت) } A' - B' = (۳, +\infty) - (-\infty, -۱) = (۳, +\infty)$$

متوسط

-۱۳

$$A = O = \{۱, ۳, ۵, \dots\} \Rightarrow A' = E = \{۲, ۴, \dots\}$$

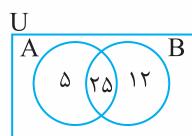
$$B = \{۲, ۳, ۴, \dots\} \Rightarrow B' = \{۱\}$$

متوسط

-۱۴

مجموعه افرادی که جای نوشیده‌اند را با A و مجموعه افرادی که قهوه نوشیده‌اند را

با B نمایش می‌دهیم.



$$n(A) = ۳۰, n(A \cap B) = ۲۵, n(A \cup B) = ۴۲ \quad n(B - A) = ?$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B - A) \Rightarrow ۴۲ = ۳۰ + n(B - A) \Rightarrow n(B - A) = ۱۲$$

متوسط

۷- گزینه «۲»

$$n(U) = 20$$

$$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \Rightarrow n(A) = 6$$

$$B = \{5, 10, 15, 20\} \Rightarrow n(B) = 4$$

$$A \cup B = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 5, 10, 20\} \Rightarrow n(A \cup B) = 9$$

$$n(A' \cap B') = n(A \cup B)' = n(U) - n(A \cup B) = 20 - 9 = 11$$

متوسط

۸- گزینه «۱»

اگر مجموعه بازیکنان فوتبال A و مجموعه بازیکنان والیبال B باشد،

$$n(A) = 20, n(B) = 15, n(A \cap B) = 3$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow n(A \cup B) = 20 + 15 - 3 = 32$$

متوسط

۹- گزینه «۴»

$$U = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$$

$$A = \{1, 4, 6, 8, 9\}, B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow A \cap B = \{6, 9\}$$

$$n(A) = 5, n(B) = 3, n(A \cap B) = 2$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 5 + 3 - 2 = 6$$

متوسط

۱۰- گزینه «۳»

$$n(A) + n(A') = n(U) \Rightarrow n(U) = x + y$$

$$n(B) + n(B') = n(U) \Rightarrow \frac{x}{y} + n(B') = x + y$$

$$\Rightarrow n(B') = x + y - \frac{x}{y} \Rightarrow n(B') = \frac{x}{y} + y$$

متوسط

۱۱- گزینه «۴»

$$A - (A - B) = A \cap B \Rightarrow (A - (A - B)) \cup (A \cap B)'$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap B)' = U$$

$$U' = \emptyset$$

متوسط

۱۲- گزینه «۳»

$$x^2 < 20 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 1, 2, 3, 4 \Rightarrow A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{2x + 1 \mid x \in \{1, 3, 5, 7\}\} \Rightarrow B = \{3, 7, 11, 15\}$$

$$\Rightarrow A \cap B = \{3, 7\} \Rightarrow n(A \cap B) = 2$$

متوسط

۱۳- گزینه «۱»

$$n(B) + n(B') = n(U) \text{ می دانیم}$$

$$n(A) = 60, n(B') = 3n(B), n(U) = 100$$

$$\Rightarrow n(B) + 3n(B) = 4n(B) = 100 \Rightarrow n(B) = 25$$

$$n(A') = n(U) - n(A) = 100 - 60 = 40$$

$$\frac{n(B)}{n(A')} = \frac{25}{40} = \frac{5}{8}$$



آسان

۱- گزینه «۲»

$$\begin{cases} A = \{2, 3, 5, 7\} \\ B = \{1, 3, 5, 7, 9\} \end{cases} \Rightarrow A \cap B = \{3, 5, 7\}$$

آسان

۲- گزینه «۱»

$$n(U) = 42$$

$$n(A) = 17 \text{ ریاضی}$$

$$n(B) = 14 \text{ شیمی}$$

$$n(A \cap B) = 3$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 17 + 14 - 3 = 28$$

$$n(A' \cap B') = n(U) - n(A \cup B) = 42 - 28 = 14$$

آسان

۳- گزینه «۲»

$$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$$

لذا $A \cup B$ ، ۴ عضو دارد.

آسان

۴- گزینه «۲»

$$\begin{cases} A_3 = \{3, 4, 5, 6\} \\ A_4 = \{4, 5, 6, 7\} \Rightarrow A_3 \cap A_4 \cap A_5 = \{5, 6\} \\ A_5 = \{5, 6, 7, 8\} \end{cases}$$

متوسط

۵- گزینه «۳»

$$n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B) = n(A \cup B)$$

$$\Rightarrow 20 + 30 + n(A \cap B) = 65 \Rightarrow n(A \cap B) = 15$$

$$n(A) = n(A - B) + n(A \cap B) = 20 + 15 = 35$$

$$n(B) = n(B - A) + n(A \cap B) = 30 + 15 = 45$$

$$n(A) + n(B) = 35 + 45 = 80$$

متوسط

۶- گزینه «۲»

$$\begin{cases} A_3 = \{3, 4, 5, 6\} \\ A_4 = \{4, 5, 6, 7\} \Rightarrow A_3 \cup A_4 \cup A_5 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\} \\ A_5 = \{5, 6, 7, 8\} \end{cases}$$

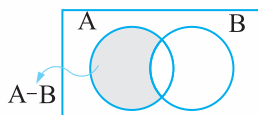
دشواری

۲۰- گزینه «۴»

همانطور که ملاحظه می‌شود، دو مجموعه $B, A - B$ دو مجموعه جدا از هم می‌باشند، بنابراین:

$$B - (A - B) = B$$

$$(A - B) - B = A - B$$



بنابراین:

$$[B - (A - B)] \cup [(A - B) - B] = B \cup (A - B) = A \cup B$$

متمم $A \cup B$ به صورت زیر است:

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

دشواری

۲۱- گزینه «۱»

می‌دانیم $B' - A' = A - B, A - B' = A \cap B, A' - B' = B - A$ می‌باشد، بنابراین:

$$n(B - A) = ۸$$

$$n(A \cap B) = ۵$$

$$n(A \cup B) = ۱۹$$

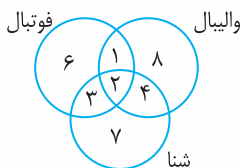
$$m(A - B) + n(A \cap B) + n(B - A) = n(A \cup B)$$

$$n(A - B) + ۵ + ۸ = ۱۹ \Rightarrow n(A - B) = ۶ \Rightarrow n(B' - A') = ۶$$

دشواری

۲۲- گزینه «۱»

ابتدا ۲ نفر که عضو هر سه رشته ورزشی هستند را در ناحیه مربوط به خود قرار می‌دهیم. ۳ نفر عضو تیم فوتبال و والیبال هستند که ۲ نفر آن‌ها عضو هر ۳ رشته هستند، بنابراین ۱ نفر عضو تیم فوتبال و والیبال است و عضو تیم شنا نیست، به همین ترتیب عدد ۳ و ۴ را در ناحیه مربوط به خود قرار می‌دهیم. در این کلاس ۱۲ نفر عضو تیم فوتبال هستند، با توجه به این که ۱ نفر از آن‌ها عضو تیم والیبال، ۳ نفر از آن‌ها عضو تیم شنا و ۲ نفر از آن‌ها هم عضو تیم والیبال و هم شنا هستند، بنابراین ۶ نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؛ به همین ترتیب اعداد ۸ و ۷ را قرار می‌دهیم.



$$۷ + ۸ + ۶ = ۲۱$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$$n(A) = ۲۰, n(B') = ۴۰, n(A \cap B) = ۱۰$$

$$n(U) = ۵۰ \Rightarrow n(B) = ۵۰ - ۴۰ = ۱۰$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۲۰ + ۱۰ - ۱۰ = ۲۰$$

متوسط

۱۵- گزینه «۱»

$$n(A) = ۵۰۰ + ۶۰۰ = ۱۱۰۰: \text{تعداد دانشجویان تهرانی}$$

$$n(B) = ۶۰۰ + ۶۰۰ = ۱۲۰۰: \text{تعداد دانشجویان پسر}$$

$$n(A \cap B) = ۶۰۰: \text{تعداد دانشجویان پسر تهرانی}$$

تعداد دانشجویان تهرانی یا پسران برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = ۱۱۰۰ + ۱۲۰۰ - ۶۰۰ = ۱۷۰۰$$

$$\Rightarrow n((A \cup B)') = ۲۰۰۰ - ۱۷۰۰ = ۳۰۰$$

متوسط

۱۶- گزینه «۲»

$$n(A) = ۲۰ + ۱۲ = ۳۲: \text{تعداد کارمند مرد}$$

$$n(B) = ۱۰ + ۲۰ = ۳۰: \text{تعداد کارمندان با تحصیلات دانشگاهی}$$

$$n(A \cap B) = ۲۰: \text{تعداد کارمندان مرد با تحصیلات دانشگاهی}$$

تعداد کارمندان مرد یا کارمندان اداری با تحصیلات دانشگاهی برابر است با:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cup B)$$

$$= ۳۲ + ۳۰ - ۲۰ = ۴۲$$

متوسط

۱۷- گزینه «۱»

$$U = \{1, 2, 3, 4, \dots, ۳۰\}$$

$$A = \{1, 1۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹\}, B = \{1, ۲, ۳, ۴, ۶, ۸, ۱۲, ۲۴\}$$

$$A \cap B = \{\} = \emptyset$$

$$(A \cap B)' = U$$

$$n(A \cap B)' = ۳۰$$

متوسط

۱۸- گزینه «۴»

نقطه مورد نظر اشتراک a, b, c است؛ یعنی کوچک‌ترین مضرب مشترک $۱۲, ۹, ۷$ ، لذا با تبدیل آن‌ها به اعداد اول داریم:

$$۱۲ = ۳ \times ۲^۲, ۹ = ۳^۲, ۷ = ۷^۱$$

$$۲۵۲ = ۳^۲ \times ۲^۲ \times ۷ = \text{ک.م.م}$$

بنابراین عدد O می‌تواند ۲۵۲ یا سایر مضارب ۲۵۲ باشد.

متوسط

۱۹- گزینه «۳»

$$\frac{n(A - B)}{n(B - A)} = \frac{n(A) - n(A \cap B)}{n(B) - n(A \cap B)} = \frac{۳n(A \cap B) - n(A \cap B)}{\frac{۳}{۲}n(A \cap B) - n(A \cap B)}$$

$$= \frac{۲n(A \cap B)}{\frac{۱}{۲}n(A \cap B)} = ۴$$

۲۶- گزینه «۴»

متوسط

چون $A \subset B$ است بنابراین $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$ خواهد بود.

$$۱) B - A' = B \cap A = A$$

$$۲) A - B' = A \cap B = A$$

$$۳) A \cap B' = A - B = \emptyset$$

$$۴) B \cap A' = B - A \neq \emptyset$$

۲۷- گزینه «۱»

متوسط

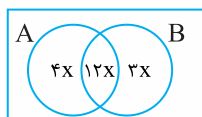
$$A' \cup ((B \cap A) \cap [(B \cup A) \cap B]) = A' \cup ((B \cap A) \cap B) = A' \cup (B \cap A)$$

$$= (A' \cup B) \cap (A' \cup A) = (A' \cup B) \cap U = A' \cup B = (A \cap B')' = (A - B)'$$

۲۸- گزینه «۴»

متوسط

با فرض $n(A \cap B) = 12x$ داریم:



$$n(A \cup B) = 57 \Rightarrow 19x = 57 \Rightarrow x = 3$$

$$n(A) = 16x = 16 \times 3 = 48$$

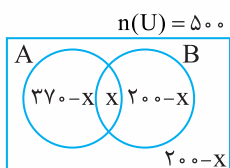
۲۹- گزینه «۳»

متوسط

مجموعه A: مزرعه داران جای

مجموعه B: شالیزار داران

در نمودارِ وِن زیر تعداد اعضای هر کدام را نوشته‌ایم.



$$(370 - x) + (x) + (200 - x) + (200 - x) = 500 \Rightarrow x = 135$$

$$n(A - B) = 370 - 135 = 235$$

دشوار

۲۳- گزینه «۲»

اگر a, b هر دو فرد باشند:

$$(-1)^a + (-1)^b = -1 - 1 = -2$$

اگر a, b هر دو زوج باشند:

$$(-1)^a + (-1)^b = 1 + 1 = 2$$

اگر یکی از a, b فرد و دیگری زوج باشد:

$$(-1)^a + (-1)^b = -1 + 1 = 0$$

بنابراین:

$$A = \{-2, 0, 2\}$$

$$2 \leq \frac{x+4}{2} \leq 3 \Rightarrow 4 \leq x+4 \leq 6 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} B = \{0, 1, 2\}$$

$$A \cup B = \{-2, 0, 2, 1\} \Rightarrow n(A \cup B) = 4$$

متوسط

۲۴- گزینه «۴»

اگر گروه آزمایشگاهی را A و گروه فوتبال را B فرض کنیم.

$$n(A) = 15, n(B) = 12, n(A \cap B) = 7$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 15 + 12 - 7 = 20$$

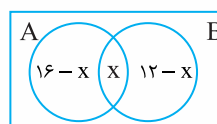
$$n(U) - n(A \cup B) = 42 - 20 = 22$$

متوسط

۲۵- گزینه «۴»

اگر اعضای گروه ورزش را A و گروه روزنامه دیواری را B در نظر بگیریم با

توجه به داده‌های مسئله داریم:

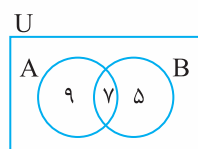


$$n(A \cap B) = x, n(A) = 16, n(A - B) = 9$$

چون تعداد افرادی که فقط در گروه ورزش هستند برابر ۹ است پس:

$$16 - x = 9 \Rightarrow x = 7$$

در نتیجه داده‌های مسئله به صورت زیر است:



خواسته مسئله $n(U) - n(A \cup B)$ است که:

$$n(U) - n(A \cup B) = 39 - (9 + 7 + 5) = 39 - 21 = 18$$

متوسط

-۶

الگوی خطی را به صورت $t_n = an + b$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} t_5 = a(5) + b = 12 \\ t_8 = a(8) + b = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + b = 12 \\ 8a + b = 27 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

$$5a + b = 12 \xrightarrow{a=5} 5(5) + b = 12 \Rightarrow b = 12 - 25 = -13$$

$$\Rightarrow t_n = 5n - 13$$

متوسط

-۷

در قسمت (آ) چون اختلاف هر دو جمله متوالی از الگو یکسان است، پس الگو خطی است.

$$a_2 - a_1 = 5 \quad a_3 - a_2 = 5 \quad a_4 - a_3 = 5$$

در قسمت (ب) اختلاف جملات متوالی از الگو تغییر می‌کند بنابراین الگو خطی نیست.

$$a_2 - a_1 = 3 \quad a_3 - a_2 = 5 \quad a_4 - a_3 = 7$$

آسان

-۸

$$n=1 \Rightarrow a_1 = 2(1)^2 - 1 = 1$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 2(2)^2 - 1 = 7$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 2(3)^2 - 1 = 17$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = 2(4)^2 - 1 = 31$$

$$\text{ب) } n=1 \Rightarrow a_1 = 2(1) + 1 = 3$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 2(2) + 1 = 5$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 2(3) + 1 = 7$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = 2(4) + 1 = 9$$

$$\text{پ) } n=1 \Rightarrow a_1 = -1 - 1 = -2$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = -1 - 2 = -3$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = -1 - 3 = -4$$

$$n=4 \Rightarrow a_4 = -1 - 4 = -5$$

دشواری

-۹

دنباله را به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم. دنباله تفاضلات

این دنباله به صورت $2, 4, 6, \dots$ است. همچنین $a = \frac{4-2}{2} = 1$ می‌باشد، پس

دنباله را به صورت $a_n = n^2 + bn + c$ خواهد بود. و جملات اول و دوم آن را حساب می‌کنیم.

$$a_1 = 1(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow 0 = 1 + b + c \Rightarrow b + c = -1$$

$$a_2 = 1(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 2 = 4 + 2b + c \Rightarrow 2b + c = -2$$

$$\begin{cases} b + c = -1 \\ 2b + c = -2 \end{cases} \xrightarrow{(-)} b = -1 \Rightarrow c = 0$$

جمله عمومی دنباله به صورت $a_n = n^2 - n$ خواهد بود.



آسان

-۱

$$a_1 = 2(1)^2 + 1 = 3$$

$$a_2 = 2(2)^2 + 1 = 9$$

$$a_3 = 2(3)^2 + 1 = 19$$

$$a_4 = 2(4)^2 + 1 = 33$$

$$a_5 = 2(5)^2 + 1 = 51$$

متوسط

-۲

در مرحله اول ۳ چوب کبریت و در مرحله دوم ۶ چوب کبریت و در مرحله سوم ۹ چوب کبریت داریم بنابراین الگو به این صورت است:

$$3, 6, 9, \dots \quad 2(1), 2(2), 2(3), \dots, 2n$$

یعنی جمله عمومی $a_n = 2n$ می‌باشد.

متوسط

-۳

$$1/6 = \frac{2n}{n+2} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{2n}{n+2} \Rightarrow 1n + 16 = 10n \Rightarrow 16 = 9n \Rightarrow n = 8$$

بنابراین هشتمین جمله این الگو $1/6$ می‌باشد.

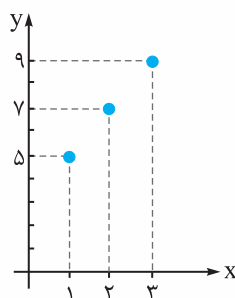
آسان

-۴

$$a_3 = 3^2 + 2 = 11, a_4 = 4^2 + 2 = 18 \Rightarrow \frac{a_3 a_4}{a_3 + a_4} = \frac{11 \times 18}{11 + 18} = \frac{198}{29}$$

آسان

-۵



$$a_1 = 2(1) + 3 = 5$$

$$a_2 = 2(2) + 3 = 7$$

$$a_3 = 2(3) + 3 = 9$$



آسان

۱- گزینه «پ»

تعداد دایره‌ها در هر شکل برابر است با:

$$(۱) \text{ در شکل } a_1 = 4 = 4 + 0 \times 3$$

$$(۲) \text{ در شکل } a_2 = 7 = 4 + 1 \times 3$$

$$(۳) \text{ در شکل } a_3 = 10 = 4 + 2 \times 3$$

$$\Rightarrow a_n = 4 + (n-1) \times 3 = 4 + 3n - 3 = 3n + 1$$

آسان

۲- گزینه «پ»

شماره شکل	۱	۲	۳
تعداد مربع	۵	۷	۹

بنابراین جمله عمومی این الگو $a_n = 2n + 3$ می‌باشد. پس:

$$a_{20} = 2(20) + 3 = 43$$

آسان

۳- گزینه «پ»

دنباله تعداد چوب کبریت‌ها به صورت $4, 7, 10, \dots$ می‌باشد، که می‌توان نوشت:

$$a_1 = 3(1) + 1, a_2 = 3(2) + 1, a_3 = 3(3) + 1$$

بنابراین: $a_n = 3n + 1$ می‌باشد.

$$3n + 1 = 37 \Rightarrow 3n = 36 \Rightarrow n = 12$$

متوسط

۴- گزینه «۴»

$$a_1 = 1 \times 2, a_2 = 2 \times 3, a_3 = 3 \times 4, a_4 = 4 \times 5$$

$$\Rightarrow a_n = n(n+1) \Rightarrow a_{20} = 20 \times 21 = 420$$

متوسط

۵- گزینه «۴»

تعداد نقطه‌های بالای خط راست در شکل برابر است با:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 3 \\ a_3 &= 6 \end{aligned} \right\} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1 + 2, a_3 = 1 + 2 + 3, \dots$$

برای به دست آوردن تعداد نقطه‌های خط در شکل n ام به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$(a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n) + (a_n = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1)$$

$$\Rightarrow 2a_n = (n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)$$

$$\Rightarrow 2a_n = n \times (n+1) \Rightarrow a_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

الگوی بالا به الگوی مثلثی معروف است.

دشواری

۱۰-

دنباله را به صورت $a_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم. دنباله تفاضلات

این دنباله به صورت $10, 16, 22, \dots$ است. همچنین $a = \frac{16-10}{2} = 3$ می‌باشد.

پس دنباله را به صورت $a_n = 3n^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} a_1 = 3(1)^2 + b(1) + c \Rightarrow 2 = 3 + b + c \Rightarrow b + c = -1 \\ a_2 = 3(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 12 = 12 + 2b + c \Rightarrow 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{(-)} b = 1 \\ & b + c = -1 \xrightarrow{b=1} 1 + c = -1 \Rightarrow c = -2 \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{(-)} b = 1$$

$$b + c = -1 \xrightarrow{b=1} 1 + c = -1 \Rightarrow c = -2$$

پس جمله عمومی دنباله $a_n = 3n^2 + n - 2$ می‌باشد.

آسان

۱۱-

در دنباله ثابت همه جملات برابرند.

$$a - 2 = 8 - a \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow b = c = 8 - 5 = 3 \Rightarrow b + c = 6$$

متوسط

۱۲-

این دنباله یک دنباله خطی است زیرا تفاضل هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابت

۵ است بنابراین جمله عمومی را $a_n = an + b$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \Rightarrow a + b = 1 \\ a_2 = 6 \Rightarrow 2a + b = 6 \end{cases} \xrightarrow{(-)} a = 5 \Rightarrow a_2 = 5(2) + b = 6$$

$$\Rightarrow b = -4 \Rightarrow a_n = 5n - 4$$

متوسط

۱۳-

$$a_1 = \frac{1-3}{2(1)-1} = \frac{-2}{1} = -2, \quad a_2 = \frac{2-3}{2(2)-1} = \frac{-1}{3}$$

$$a_3 = \frac{3-3}{2(3)-1} = \frac{0}{5} = 0$$

از جمله چهارم به بعد جملات دنباله مثبت است بنابراین فقط دو جمله اول منفی است.

متوسط

۱۴-

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ n = 1 \Rightarrow a_2 = 2a_1 = 2(4) = 8 \\ n = 2 \Rightarrow a_3 = 2a_2 = 2(8) = 16 \\ n = 3 \Rightarrow a_4 = 2a_3 = 2(16) = 32 \end{cases} \Rightarrow 4, 8, 16, 32, \dots$$

متوسط

۱۵-

در این دنباله الگوی جملات زوج با جملات فرد متفاوت است.

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = (1)^2 = 1$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = 2(2) = 4$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = 3^2 = 9$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = 2(4) = 8$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = 5^2 = 25$$

$$1, 4, 9, 8, 25, \dots$$

۱۰- گزینه «۳»

متوسط

الگوی داده شده یک دنباله مربعی است که از یک مرحله جلوتر شروع شده است، بنابراین الگوی آن بدون توجه به دایره‌های توپر $(n+1)^2$ می‌باشد. در هر مرحله ۲ دایره تو پر وجود دارد، بنابراین:

$$a_n = (n+1)^2 - 2 \Rightarrow a_{10} = (10+1)^2 - 2 = 11^2 - 2 = 121 - 2 = 119$$

۱۱- گزینه «۲»

آسان

$$t_n = \frac{2n-1}{n+1}$$

$$n=1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} < 1, n=2 \Rightarrow t_2 = \frac{3}{3} = 1, n=3 \Rightarrow t_3 = \frac{5}{4} > 1$$

از جمله سوم به بعد همه جملات بیشتر از ۱ خواهند بود.

۱۲- گزینه «۴»

آسان

$$C_n = an + b \Rightarrow \begin{cases} C_f = 4a + b = 17 \\ C_{10} = 10a + b = 47 \end{cases} \Rightarrow C_{10} - C_f$$

$$\Rightarrow 6a = 30 \Rightarrow a = 5$$

$$4a + b = 17 \xrightarrow{a=5} 4(5) + b = 17 \Rightarrow b = -3$$

$$C_n = 5n - 3 = 122 \Rightarrow 5n = 125 \Rightarrow n = 25$$

۱۳- گزینه «۲»

متوسط

$$n=1 \Rightarrow a_1 = a_1 = 2$$

$$n=2 \Rightarrow a_2 = 2a_1 = 4$$

$$n=3 \Rightarrow a_3 = 3a_2 = 12$$

$$a_3 + a_4 = 12 + 4 = 16$$

۱۴- گزینه «۲»

متوسط

$$2n - 5 = 7 \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6 \Rightarrow a_6 = 6^2 - 6 = 30$$

$$2n - 5 = 9 \Rightarrow 2n = 14 \Rightarrow n = 7 \Rightarrow a_7 = 7^2 - 7 = 42$$

$$a_7 - a_6 = 42 - 30 = 12$$

۱۵- گزینه «۳»

متوسط

تعداد چوب کبریت‌ها به صورت زیر است:

$$4, 16, 28, \dots$$

برای به دست آوردن الگو، همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در هر مرحله ۱۲ چوب کبریت نسبت به مرحله قبل اضافه می‌شود، بنابراین دنباله را به صورت $12n + b$ در نظر می‌گیریم، اما چون در مرحله اول، ۴ چوب کبریت داریم، بنابراین $b = -8$ و الگو به صورت $a_n = 12n - 8$ خواهد بود.

$$a_n = 12n - 8 = 244 \Rightarrow 12n = 252 \Rightarrow n = \frac{252}{12} = 21$$

۶- گزینه «۲»

متوسط

هر شکل یک دنباله مربعی با ۴ مربع کوچک در هر گوشه آن قرار دارد، بنابراین:

$$a_n = n^2 + 4 \Rightarrow n^2 + 4 = 85 \Rightarrow n^2 = 81 \Rightarrow n = 9$$

آسان

۷- گزینه «۲»

$$\begin{cases} \text{دایره سیاه} = 1 \\ \text{شکل ۱} \left\{ \begin{aligned} \text{دایره سفید} &= 0 \\ \text{اختلاف} &= 1 - 0 = 1 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{دایره سیاه} = 3 \\ \text{شکل ۲} \left\{ \begin{aligned} \text{دایره سفید} &= 1 \\ \text{اختلاف} &= 3 - 1 = 2 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{دایره سیاه} = 6 \\ \text{شکل ۳} \left\{ \begin{aligned} \text{دایره سفید} &= 3 \\ \text{اختلاف} &= 6 - 3 = 3 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{دایره سیاه} = 10 \\ \text{شکل ۴} \left\{ \begin{aligned} \text{دایره سفید} &= 6 \\ \text{اختلاف} &= 10 - 6 = 4 \end{aligned} \right. \end{cases}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، اختلاف تعداد دایره سیاه و سفید در هر شکل با شماره شکل برابر است، بنابراین اختلاف تعداد دایره سیاه و سفید در شکل نوزدهم برابر ۱۹ است.

متوسط

۸- گزینه «۲»

تعداد دایره‌ها را در هر شکل به دست می‌آوریم.

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3 = 1 + 2$$

$$a_3 = 6 = 1 + 2 + 3$$

$$a_4 = 10 = 1 + 2 + 3 + 4$$

بنابراین تعداد دایره‌ها در شکل n م برابر با: $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

خواهد بود و با توجه به این که $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ می‌شود، بنابراین:

$$a_{11} = \frac{11 \times (11+1)}{2} = \frac{11 \times 12}{2} = 11 \times 6 = 66$$

$$a_{12} = \frac{12 \times (12+1)}{2} = \frac{12 \times 13}{2} = 6 \times 13 = 78$$

$$\Rightarrow a_{11} + a_{12} = 66 + 78 = 144$$

متوسط

۹- گزینه «۱»

$$3 \text{ چوب کبریت} \Rightarrow \text{شکل ۱}$$

$$7 \text{ چوب کبریت} \Rightarrow \text{شکل ۲}$$

$$11 \text{ چوب کبریت} \Rightarrow \text{شکل ۳}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در هر مرحله، نسبت به مرحله قبل، ۴ چوب کبریت اضافه می‌شود، بنابراین دنباله آن خطی و به صورت $a_n = 4n - 1$ می‌باشد.

$$4n - 1 = 55 \Rightarrow 4n = 56 \Rightarrow n = 14$$

۲۲- گزینه «۴»

دشوار

$$3n - 14 < 0 \Rightarrow n < \frac{14}{3}$$

چون n طبیعی است پس به ازای $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ جملات دنباله منفی است.

۲۳- گزینه «۱»

دشوار

$$a_n = n^2 - 10n + 17 \Rightarrow a_n = n^2 - 10n + 25 - 8 \Rightarrow a_n = (n - 5)^2 - 8$$

کمترین جمله دنباله زمانی است که $0 = (n - 5)^2$ باشد؛ یعنی $n = 5$ باشد.

$$a_5 = 5^2 - 10(5) + 17 = -8$$

۲۴- گزینه «۳»

دشوار

$$a_5 = \frac{5}{8}, a_6 = \frac{6}{9}, a_7 = \frac{7}{10}, \dots, a_{21} = \frac{21}{34}, a_{31} = \frac{31}{35}$$

$$\Rightarrow a_5 a_6 a_7 \dots a_{31} = \frac{5}{8} \times \frac{6}{9} \times \frac{7}{10} \times \dots \times \frac{21}{34} \times \frac{31}{35} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} = 0.142857$$

۲۵- گزینه «۴»

آسان

الگوی خطی، همان دنباله حسابی است.

$$d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = \frac{5 - 8}{5} = -\frac{3}{5}$$

$$a_{16} = a_{10} + 6d = 5 + 6\left(-\frac{3}{5}\right) = 5 - \frac{18}{5} = \frac{7}{5} = 1.4$$

۲۶- گزینه «۴»

دشوار

دنباله را $a_n = an^2 + bn + c$ در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} a_5 = 14 \Rightarrow 25a + 5b + c = 14 & (1) \\ a_7 = 17/2 \Rightarrow 49a + 7b + c = 17/2 & (2) \\ a_{10} = -1/5 \Rightarrow 100a + 10b + c = -1/5 \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow 24a + 2b = 3/2 \xrightarrow{a = -\frac{1}{5}} 24 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 2b = 3/2 \Rightarrow -4/8 + 2b = 3/2 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

$$(1) : 25 \times \left(-\frac{1}{5}\right) + 5 \times 4 + c = 14 \Rightarrow c = -1$$

$$a_n = -\frac{1}{5}n^2 + 4n - 1$$

$$\frac{a_{15}}{a_1} = \frac{-\frac{1}{5} \times 225 + 4 \times 15 - 1}{-\frac{1}{5} + 4 - 1} = \frac{-45 + 60 - 1}{-\frac{1}{5} + 3} = 5$$

۱۶- گزینه «۳»

متوسط

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_{48} &= (\sqrt{1} - \sqrt{4}) + (\sqrt{4} - \sqrt{9}) + (\sqrt{9} - \sqrt{16}) \\ &+ \dots + (\sqrt{47} - \sqrt{48}) + (\sqrt{48} - \sqrt{49}) \\ &= \sqrt{1} - \sqrt{49} = 1 - 7 = -6 \end{aligned}$$

۱۷- گزینه «۴»

متوسط

دنباله مربوط به تعداد کاشی‌های تیره $8, 10, 12, \dots$ می‌باشد که جمله عمومی آن $2n + 6$ می‌باشد.

دنباله مربوط به تعداد کاشی‌های سفید $2, 3, 4, \dots$ می‌باشد که جمله عمومی آن $n + 1$ می‌باشد.

بنابراین جمله عمومی نسبت تعداد کاشی‌های تیره به تعداد کاشی‌های

$$\text{سفید } a_n = \frac{2n + 6}{n + 1} \text{ می‌باشد.}$$

$$a_{19} = \frac{2(19) + 6}{19 + 1} = \frac{44}{20} = 2.2$$

۱۸- گزینه «۲»

متوسط

$$t_n = \frac{(2n - 1)^{n-1}}{n + 2}$$

$$n = 1 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{3} \notin \mathbb{N}, n = 2 \Rightarrow t_2 = \frac{3}{4} \notin \mathbb{N}, n = 3 \Rightarrow t_3 = 5 \in \mathbb{N}$$

بنابراین سومین جمله این دنباله عدد طبیعی است.

۱۹- گزینه «۲»

متوسط

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

$$u_1 = u_2 = 1 \Rightarrow 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

این دنباله معروف به دنباله فیبوناتچی است. دو جمله اول دنباله ۱ است و بقیه جملات از مجموع دو جمله قبل به دست می‌آیند، بنابراین جمله نهم ۳۴ است.

۲۰- گزینه «۲»

دشوار

$$n = 10 \Rightarrow a_{10} = 2a_9 - 3 \Rightarrow 11 = 2a_9 - 3 \Rightarrow 2a_9 = 14 \Rightarrow a_9 = 7$$

$$n = 9 \Rightarrow a_9 = 2a_8 - 3 \Rightarrow 7 = 2a_8 - 3 \Rightarrow 2a_8 = 10 \Rightarrow a_8 = 5$$

۲۱- گزینه «۱»

متوسط

با جای گذاری اعداد طبیعی، جملات دنباله را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} = -\frac{7}{16} < 0 \\ n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} > 0 \\ n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{3}{16} - \frac{1}{8} = \frac{1}{16} > 0 \\ n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} > 0 \end{cases}$$

این دنباله فقط یک جمله منفی دارد.



آسان

-۱

در این دنباله حسابی جمله اول ۳ و قدرنسبت ۴ است پس داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 3 + (n-1)4 \Rightarrow a_n = 3 + 4n - 4 \\ \Rightarrow a_n = 4n - 1 \Rightarrow a_{20} = 4(20) - 1 = 79$$

آسان

-۲

اختلاف هر دو جمله متوالی قدرنسبت است.

$$a_1 = 2(1) + 2 = 5 \text{ و } a_2 = 2(2) + 2 = 8 \text{ و } d = a_2 - a_1 = 8 - 5 = 3$$

آسان

-۳

با توجه به رابطه جملات متوالی دنباله حسابی داریم:

$$\frac{(p+4) + (2p+5)}{2} = 2p-1 \Rightarrow \frac{3p+9}{2} = 2p-1 \\ \Rightarrow 3p+9 = 4p-2 \Rightarrow 11 = p$$

متوسط

-۴

$$d = \frac{a_7 - a_1}{7-1} = \frac{40-55}{-3} = 5$$

و چون طبق فرمول جمله عمومی $a_7 = a_1 + 6d$ می‌توان نوشت:

$$40 = a_1 + 6(5) \Rightarrow 40 = a_1 + 30 \Rightarrow a_1 = 10$$

متوسط

-۵

منظور از درج سه واسطه حسابی این است که سه عدد بیابید که بین ۲۰ و ۸۴

قرار دهیم تا ۵ عدد حاصل تشکیل دنباله حسابی بدهند. یعنی:

$$20, \text{---}, \text{---}, \text{---}, 84$$

$$\text{پس } d = \frac{84-20}{4} = 16 \text{ خواهد بود و داریم:}$$

$$20, 36, 52, 68, 84$$

متوسط

-۶

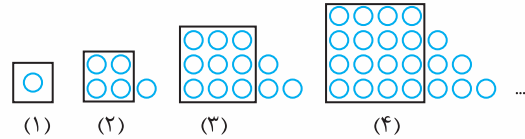
در این دنباله $a_1 = \sqrt{3}$ است و $d = a_2 - a_1 = \sqrt{3}$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = \sqrt{3} + (n-1)\sqrt{3} = \sqrt{3} + n\sqrt{3} - \sqrt{3} \\ \Rightarrow a_n = n\sqrt{3}$$

دشوار

۲۷- گزینه «۱»

الگوی داده شده را به صورت زیر تقسیم بندی می‌کنیم:



تعداد دایره‌های داخل مربع دنباله مربعی و تعداد دایره‌های بیرون مربع دنباله مثلثی است. در شکل نهم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$9^2 + (0+1+2+3+\dots+8) = 81 + \frac{8 \times 9}{2} = 81 + 36 = 117$$

متوسط

۲۸- گزینه «۳»

ردیف اول‌ها یکی یکی اضافه می‌شوند و دنباله ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶ را می‌سازند. ردیف

دوم و سوم هم یکی یکی اضافه می‌شوند و دنباله ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶ را می‌سازند پس

در شکل دوازدهم تعداد دایره‌ها برابر است با:

$$12 + 2 \times 13 = 12 + 26 = 38$$

متوسط

۲۹- گزینه «۴»

$$a_8 = 2a_7 - 2 \Rightarrow a_8 - a_7 = a_7 - 2$$

$$a_1 = 3 \Rightarrow a_2 = 4 \Rightarrow a_3 = 6 \Rightarrow a_4 = 10 \Rightarrow a_5 = 18 \Rightarrow a_6 = 34 \\ \Rightarrow a_7 = 66 \Rightarrow a_8 - a_7 = 64$$

متوسط

۳۰- گزینه «۴»

رابطه $a_n = 2a_{n-1} + 1$ یعنی هر جمله از دو برابر قبلی یک واحد بیشتر است

پس:

$$1, 3, 7, 15, \dots$$

با کمی دقت جمله‌ها از الگوی $2^n - 1$ بدست می‌آیند پس:

$$a_8 = 2^8 - 1 = 255$$

دشوار

۳۱- گزینه «۱»

$$a_{100} = \frac{1+a_{99}}{a_{99}} = \frac{1+\frac{1+a_{98}}{a_{98}}}{\frac{1+a_{97}}{a_{97}}} = \frac{1+2a_{98}}{1+a_{98}} = \frac{k}{m} \\ \Rightarrow a_{98} = \frac{m-k}{k-2m} = \frac{k-m}{2m-k}$$

دشوار

۳۲- گزینه «۲»

$$a_1 = -1, a_2 = 2+1=3$$

$$a_3 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}, a_4 = 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}, \dots$$

$$\text{دنباله مورد نظر به صورت } a_n = \begin{cases} -1 & n=1 \\ \frac{2n-1}{2n-3} & n \geq 2 \end{cases} \text{ است.}$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{100} = -1 \times 3 \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5} \times \dots \times \frac{199}{197} = -199$$

دشوار

-۱۲

می‌دانیم طول شمع ۱۸۰ میلی‌متر است پس آب شدن شمع در هر دقیقه قدرنسبت دنباله حسابی است باید جمله‌ای از دنباله را بیابیم که صفر می‌شود یعنی:

$$۱۷۸, ۱۷۶, \dots, ۰$$

$$a_1 = ۱۷۸, d = -۲, a_n = ۰, n = ?$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow ۰ = ۱۷۸ + (n-1)(-۲)$$

$$\Rightarrow ۰ = -۲n + ۱۸۰ \Rightarrow n = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰$$

این شمع پس از ۹۰ دقیقه کاملاً آب می‌شود.

آسان

-۱۳

روش اول: به ازای $n = ۱$ جمله اول دنباله به دست می‌آید:

$$a_1 = \frac{۱۱(۱) + ۱}{۲} = ۶$$

و به ازای $n = ۲$ جمله دوم به دست می‌آید:

$$a_2 = \frac{۱۱(۲) + ۱}{۲} = \frac{۲۳}{۲}$$

قدرنسبت $d = a_2 - a_1$ است بنابراین:

$$d = \frac{۲۳}{۲} - ۶ = \frac{۱۱}{۲}$$

روش دوم: ضریب n در دنباله حسابی $a_n = \frac{۱۱n + ۱}{۲}$ برابر قدرنسبت است. پس

$$d = \frac{۱۱}{۲}$$

متوسط

-۱۴

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = ۲۲ \\ a_9 = ۵۲ \end{array} \right\} \Rightarrow d = \frac{a_9 - a_4}{9 - 4} = \frac{۵۲ - ۲۲}{۵} = ۶$$

$$a_4 = a_1 + ۳d \Rightarrow ۲۲ = a_1 + ۳(۶) \Rightarrow a_1 = ۴$$

دشوار

-۱۵

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = ۳۲ \\ a_5 + a_6 = ۲۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + ۲d) + (a_1 + ۳d) = ۳۲ \\ (a_1 + ۴d) + (a_1 + ۵d) = ۲۸ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{۲} \begin{cases} ۴a_1 + ۶d = ۳۲ \\ ۲a_1 + ۹d = ۲۸ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ۲a_1 + ۳d = ۱۶ \\ ۲a_1 + ۹d = ۲۸ \end{cases} \xrightarrow{(-)} ۶d = ۱۲ \Rightarrow d = ۲$$

$$\Rightarrow ۲a_1 + ۹d = ۲۸ \Rightarrow ۲a_1 + ۱۸ = ۲۸ \Rightarrow ۲a_1 = ۱۰ \Rightarrow a_1 = ۵$$

آسان

-۱۶

$$5n - ۳ = ۳۷ \Rightarrow 5n = ۴۰ \Rightarrow n = ۸$$

متوسط

-۷

در قسمت (آ) اختلاف جمله اول و دوم ۴ است در حالی که اختلاف جملات دوم و سوم ۳ می‌باشد بنابراین دنباله حسابی نیست.

در قسمت (ب) اختلاف هر جمله از جمله ماقبل خود مقدار ثابت ۳ است بنابراین دنباله حسابی است.

در قسمت (پ) نیز اختلاف هر جمله از جمله قبلی خود مقدار ثابت $\sqrt{۲}$ است پس دنباله حسابی است.

در قسمت (ت) اختلاف جملات از یکدیگر مقدار ثابتی نیست بنابراین دنباله حسابی نیست.

متوسط

-۸

در این دنباله حسابی $a_1 = ۲$ و $d = a_2 - a_1 = -۵$ می‌باشد بنابراین داریم:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_{۱۰۰} = ۲ + (۱۰۰-1)(-۵)$$

$$\Rightarrow a_{۱۰۰} = ۲ + ۹۹(-۵) = ۲ - ۴۹۵ = -۴۹۳$$

متوسط

-۹

$$d = \frac{۷۵ - ۵}{۵} = ۱۴ \text{ بنابراین}$$

$$۵, ۱۹, ۳۳, ۴۷, ۶۱, ۷۵$$

دشوار

-۱۰

دنباله به صورت زیر است:

$$۷, \square, \square, \dots, \square, ۳۲$$

که با توجه به تعریف دنباله حسابی داریم:

$$۷, ۷ + d, \dots, ۳۲ - d, ۳۲$$

یعنی اولین جمله به اندازه قدرنسبت از ۷ بیشتر و آخرین جمله به اندازه قدرنسبت از ۳۲ کمتر است پس:

$$(۳۲ - d) - (۷ + d) = ۱۵ \Rightarrow ۲۵ - ۲d = ۱۵ \Rightarrow ۱۰ = ۲d \Rightarrow d = ۵$$

و جملات دنباله به صورت زیر است:

$$۷, ۱۲, ۱۷, ۲۲, ۲۷, ۳۲$$

متوسط

-۱۱

کافی است دنباله‌ای مثال بزنیم که جملات آن دویهدو قرینه و جمله وسط آن صفر باشد مثلاً دنباله:

$$-۶, -۴, -۲, ۰, ۲, ۴, ۶$$

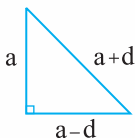
هفت جمله دارد و $d = ۲$ می‌باشد.

دشوار

۳۳-

چون مثلث قائم‌الزاویه است و اضلاع آن جملات دنباله حسابی هستند پس داریم:

$$(a+d) + a + (a-d) = 12 \Rightarrow 3a = 12 \Rightarrow a = 4$$



و اضلاع به صورت $d, 4, 4+d$ خواهد بود. از طرفی وتر $4+d$ است و طبق رابطه فیثاغورس داریم:

$$(4+d)^2 = 4^2 + (4-d)^2$$

$$16 + d^2 + 8d = 16 + 16 + d^2 - 8d \Rightarrow 16 + 16d = 32 \Rightarrow d = 1$$

و اضلاع به صورت ۳ و ۴ و ۵ می‌باشند.



آسان

۱- گزینه «۲»

$$2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow x = 6$$

آسان

۲- گزینه «۲»

روش اول:

$$\begin{aligned} a_1 &= 40 \Rightarrow a_1 + 9d = 40 \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 9d = -40 \\ a_1 + 17d = 80 \end{cases} \\ a_{18} &= 80 \Rightarrow a_1 + 17d = 80 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 8d = 40 \Rightarrow d = 5$$

$$a_1 + 9d = 40 \Rightarrow a_1 + 9(5) = 40 \Rightarrow a_1 = -5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -5 + (n-1)(5) \Rightarrow a_n = 5n - 10$$

$$a_{21} = 5(21) - 10 = 95$$

روش دوم:

$$a_{18} = a_1 + 8d \Rightarrow 80 = 40 + 8d \Rightarrow d = 5$$

$$a_{21} = a_{18} + 3d \Rightarrow a_{21} = 95$$

متوسط

۳- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \frac{3a_4 + a_{12}}{a_5 + a_7} &= \frac{3(a_1 + 3d) + a_1 + 11d}{a_1 + 4d + a_1 + 6d} = \frac{3a_1 + 9d + a_1 + 11d}{2a_1 + 10d} \\ &= \frac{4a_1 + 20d}{2a_1 + 10d} = \frac{2(2a_1 + 10d)}{2a_1 + 10d} = 2 \end{aligned}$$

متوسط

۱۷-

در سه جمله اول داریم $\frac{a+b}{2} = 9$ در نتیجه $a+b=18$ است پس جمله چهارم $15=18-3$ است.

$$a, \underbrace{9, b, 15}_\text{سه جمله متوالی}, c \Rightarrow \frac{9+15}{2} = b \Rightarrow \frac{24}{2} = b \Rightarrow b = 12$$

پس در این دنباله $d=3$ است و داریم:

$$6, 9, 12, 15, 18 \Rightarrow a=6, c=18$$

دشوار

۱۸-

دنباله را به صورت مقابل مرتب می‌کنیم:

$$a-d, a, a+d$$

$$(a-d) + a + (a+d) = 15 \Rightarrow 3a = 15 \Rightarrow a = 5$$

$$(5-d)5(5+d) = 80 \Rightarrow (5-d)(5+d) = \frac{80}{5} = 16$$

$$\Rightarrow 25 - d^2 = 16 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3 \Rightarrow 2, 5, 8, \dots \text{ یا } 8, 5, 2, \dots$$

متوسط

۱۹-

$$2n + 1 = 7 \Rightarrow n = 3 \Rightarrow a_7 = 10(3) + 2 = 32$$

دشوار

۲۰-

با اندکی دقت متوجه می‌شویم که اعداد بخش‌پذیر بر ۱۵ تشکیل یک دنباله عددی با $d=15$ را می‌دهند. کافی است جمله اول و آخر بخش‌پذیر بر ۱۵ را پیدا کنیم:

$$315, 330, \dots, 495$$

فرض کنید جمله n ام ۴۹۵ و جمله اول ۳۱۵ باشد بنابراین:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 495 = 315 + (n-1)15$$

$$\Rightarrow 495 - 315 = 180 \Rightarrow 180 = 15n \Rightarrow n = \frac{180}{15} = 12$$

متوسط

۲۱-

$$\begin{cases} a_7 = 6a_1 \\ a_8 = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + 7d = 6a_1 \\ a_1 + 8d = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a_1 - 7d = 0 \\ a_1 + 8d = 22 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a_1 - 14d = 0 \\ a_1 + 8d = 22 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 11a_1 = 22 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow 5a_1 - 7d = 0$$

$$\Rightarrow 5(2) - 7d = 0 \Rightarrow d = 5$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 2 + (n-1)5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$$

دشوار

۲۲-

با توجه به جمله عمومی داریم:

$$(a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + (a_1 + 4d) = 72$$

$$\Rightarrow 4a_1 + 10d = 72 \xrightarrow{\div 2} 2a_1 + 5d = 36$$

$$\Rightarrow a_1 + (a_1 + 5d) = a_1 + a_6 = 36$$

متوسط

۱۰- گزینه ۳»

با استفاده از دو جمله داده شده، جمله عمومی این دنباله را به دست می آوریم:

$$d = t_2 - t_1 = 161 - 170 = -9$$

$$t_n = t_1 + (n-1)d \Rightarrow t_n = 170 + (n-1)(-9)$$

$$\Rightarrow t_n = 170 - 9n + 9 \Rightarrow a_n = 179 - 9n$$

چون تعداد جملات مثبت را می خواهیم، پس تعداد n هایی که در رابطه $t_n > 0$ صدق می کند، $n = 19$ است، بنابراین این دنباله ۱۹ جمله مثبت دارد.

آسان

۱۱- گزینه ۱»

دنباله به صورت $12, a_2, a_3, a_4, 52$ خواهد بود.

$$a_2 + a_4 = 2a_3 = 12 + 52 \Rightarrow \begin{cases} a_2 + a_4 = 64 \\ a_3 = 32 \end{cases} \Rightarrow a_2 + a_3 + a_4 = 96$$

آسان

۱۲- گزینه ۳»

طبق اطلاعات سوال $t_1 = 69, t_5 = 39$ است. به کمک تعریف جمله عمومی خواهیم داشت:

$$\begin{cases} t_5 = t_1 + 4d = 39 \\ t_1 = t_1 + 9d = 69 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 + 4d = 39 \\ t_1 + 9d = 69 \end{cases}$$

$$5d = 30 \Rightarrow d = 6$$

$$t_1 + 4d = 39 \xrightarrow{d=6} t_1 + 4(6) = 39 \Rightarrow t_1 = 39 - 24 = 15$$

آسان

۱۳- گزینه ۲»

جمله عمومی دنباله حسابی $t_n = t_1 + (n-1)d$ است پس:

$$2t_1 + t_2 - 3t_3 = 10 \Rightarrow 2t_1 + (t_1 + d) - 3(t_1 + 2d) = 10$$

$$\Rightarrow 2t_1 + t_1 + d - 3t_1 - 6d = 10 \Rightarrow -4d = 10 \Rightarrow d = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

دشوار

۱۴- گزینه ۴»

$$d\left(\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n}\right) = \frac{d}{a_1 a_2} + \frac{d}{a_2 a_3} + \dots$$

$$+ \frac{d}{a_{n-1} a_n} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} + \frac{a_3 - a_2}{a_2 a_3} + \dots + \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} a_n}$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}$$

دشوار

۱۵- گزینه ۱»

جملات دنباله را به صورت $a - 2d, a - d, a, a + d, a + 2d$ در نظر می گیریم:

$$a - 2d + a - d + a + a + d + a + 2d = 30 \Rightarrow 5a = 30 \Rightarrow a = 6$$

$$(6 - 2d)^2 + (6 - d)^2 + 6^2 + (6 + d)^2 + (6 + 2d)^2 = 270$$

$$\Rightarrow 36 + 4d^2 - 24d + 36 + d^2 - 12d + 36 + 36 + 12d + d^2 + 36 + 24d + 4d^2 = 270$$

$$\Rightarrow 180 + 10d^2 = 270$$

$$\Rightarrow 10d^2 = 90 \Rightarrow d^2 = 9 \Rightarrow d = \pm 3 \xrightarrow{d > 0} d = 3$$

$$a_1 = a - 2d = 6 - 2(3) = 0$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 0 + (n-1)(3) \Rightarrow a_n = 3n - 3$$

$$a_{20} = 3(20) - 3 = 57$$

۱۴- گزینه ۲»

متوسط

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 32 \Rightarrow a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d = 32$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a_1 + 6d = 32 \\ a_1 + 14d = 58 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 3d = 16 \\ -2a_1 - 28d = -116 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -25d = -100 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow a_{21} = a_{15} + 6d = 58 + 24 = 82$$

۵- گزینه ۳»

متوسط

همان طور که می دانیم جمله عمومی یک دنباله حسابی از درجه ۱ است؛ بنابراین

ضریب n^2 باید صفر باشد.

$$k - 4 = 0 \Rightarrow k = 4 \Rightarrow a_n = (4 - 4)n^2 + (3(4) - 2)n + 4^2$$

$$a_n = 10n + 16 \Rightarrow a_6 = (10)(6) + 16 = 76$$

۶- گزینه ۳»

متوسط

$$a_1 = -328, d = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = -328 + (n-1)(4) \Rightarrow a_n = 4n - 332 = 0$$

$$\Rightarrow 4n - 332 = 0 \Rightarrow 4n = 332 \Rightarrow n = 83$$

۷- گزینه ۲»

متوسط

$$a_4 + a_8 + a_9 = 2a_5 + a_n \Rightarrow a_1 + 3d + a_1 + 7d + a_1 + 8d$$

$$= 2(a_1 + 4d) + a_n$$

$$\Rightarrow 3a_1 + 18d = 2a_1 + 8d + a_n \Rightarrow a_1 + 10d = a_n \Rightarrow a_{11} = a_n \Rightarrow n = 11$$

۸- گزینه ۳»

متوسط

$$a_{12} - a_{10} = 5 \Rightarrow (a_1 + 11d) - (a_1 + 9d) = 5 \Rightarrow 2d = 5 \Rightarrow d = 5/2$$

$$a_{12} + a_{10} = 25 \Rightarrow (a_1 + 11d) + (a_1 + 9d) = 25 \Rightarrow 2a_1 + 20d = 25$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 20(5/2) = 25$$

$$\Rightarrow 2a_1 + 50 = 25 \Rightarrow 2a_1 = -25 \Rightarrow a_1 = -12.5$$

$$a_{21} = a_1 + 20d = -12.5 + 20(5/2) = 37.5$$

۹- گزینه ۴»

متوسط

روش اول:

$$t_5 + t_6 = 3 \Rightarrow (t_1 + 4d) + (t_1 + 5d) = 3 \Rightarrow 2t_1 + 9d = 3$$

$$t_8 + t_9 = -2 \Rightarrow (t_1 + 7d) + (t_1 + 8d) = -2 \Rightarrow 2t_1 + 15d = -2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2t_1 + 9d = 3 \\ 2t_1 + 15d = -2 \end{cases} \xrightarrow{-} d = \frac{-5}{6}$$

$$2t_1 + 9d = 3 \Rightarrow 2t_1 = 3 - 9d = 3 - 9\left(-\frac{5}{6}\right) = 3 + \frac{15}{2} = \frac{21}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{21}{4}$$

$$t_{13} + t_{15} = (t_1 + 12d) + (t_1 + 14d) = 2t_1 + 26d$$

$$= 2 \times \frac{21}{4} + 26 \times \frac{-5}{6} = \frac{21}{2} - \frac{65}{3} = -\frac{67}{6}$$

روش دوم:

$$2t_1 + 9d = 3 \Rightarrow 2t_1 = 3 - 9d (*)$$

$$t_{13} + t_{15} = (t_1 + 12d) + (t_1 + 14d) = 2t_1 + 26d \xrightarrow{(*)} 3 - 9d + 26d$$

$$= 3 + 17d = 3 + 17 \times \frac{-5}{6} = \frac{-67}{6}$$



آسان

-۱

(آ) دنباله هندسی نیست چون نسبت هر جمله به جمله ما قبل آن ثابت نیست.

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{8}{5} \text{ و } \frac{a_2}{a_1} = \frac{5}{2} \text{ می باشد.}$$

(ب) دنباله هندسی است زیرا:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \dots = 2$$

(پ) اعداد تشکیل دنباله هندسی نمی دهند چون نسبت جملات ثابت نیست.

$$\frac{a_3}{a_2} = 2 \text{ و } \frac{a_2}{a_1} = 4 \text{ می باشد.}$$

آسان

-۲

در این دنباله $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ است پس $q = \frac{1}{2}$ می باشد و داریم:

$$5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \frac{5}{16}, \frac{5}{32}, \dots$$

متوسط

-۳

در این دنباله $a_1 = 3$ و $q = 2$ است، بنابراین داریم:

$$a_8 = a_1 q^7 \Rightarrow a_8 = 3 \times 2^7 = 3 \times 128 = 384$$

آسان

-۴

بی شمار دنباله با قدرنسبت $\frac{2}{3}$ می توان ساخت اگر جمله اول را تغییر دهیم

دنباله ها نیز تغییر می کند. مانند دنباله های زیر:

$$5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{40}{27}, \dots \quad 4, \frac{8}{3}, \frac{16}{9}, \frac{32}{27}, \dots$$

متوسط

-۵

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{2}{5(3)^2}, a_5 = \frac{2}{5(3)^5} \Rightarrow \frac{a_2 a_5}{a_2 + a_5} = \frac{\frac{2}{5(3)^2} \times \frac{2}{5(3)^5}}{\frac{2}{5(3)^2} + \frac{2}{5(3)^5}} \\ &= \frac{\frac{4}{5^2 \times 3^7}}{\frac{2}{3^2} + \frac{2}{3^5}} = \frac{\frac{4}{5^2 \times 3^7}}{\frac{2 \times 3^3 + 2}{3^5}} = \frac{\frac{4}{5^2 \times 3^7}}{\frac{2 \times 3^2}{3^5}} = \frac{2}{27+1} = \frac{2}{28(5 \times 3^2)} = \frac{1}{14(5 \times 9)} = \frac{1}{630} \end{aligned}$$

دشوار

۱۶- گزینه «۳»

اولین جمله مشترک دو دنباله ۱۷ است و قدر نسبت جملات مشترک ک.م.م

قدر نسبت های آن دو دنباله است.

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 17 + (n-1)(15) \Rightarrow a_n = 15n + 2$$

$$100 \leq a_n \leq 999 \Rightarrow 100 \leq 15n + 2 \leq 999 \Rightarrow 98 \leq 15n \leq 997$$

$$\Rightarrow \frac{98}{15} \leq n \leq \frac{997}{15} \Rightarrow 7 \leq n \leq 66$$

بنابراین تعداد اعداد سه رقمی مشترک $60 = 66 - 7 + 1$ است.

متوسط

۱۷- گزینه «۴»

$$2(1+2a) = a + 5 - a \Rightarrow 2 + 4a = 5 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$a_9 = a + 8d = \frac{3}{4} + 8(1+a) = \frac{3}{4} + 8(1 + \frac{3}{4}) = \frac{3}{4} + 8 + \frac{24}{4} = \frac{3}{4} + 8 + \frac{24}{4}$$

$$a_9 = 8 + \frac{27}{4} = 8 + 6\frac{3}{4} = 14\frac{3}{4}$$

متوسط

۱۸- گزینه «۱»

به همه جملات ۴ واحد اضافه می شود بنابراین اختلاف جملات برابر ۴

خواهد بود.

دشوار

۱۹- گزینه «۴»

دنباله حسابی را t_n با قدر نسبت d و الگوی خطی را a_n با قدر نسبت d'

نمایش دهیم:

$$t_8 - t_4 = a_7 - a_2 \Rightarrow 4d = 5d' \Rightarrow \frac{d'}{d} = \frac{4}{5}$$

$$a_{10} = 0 \Rightarrow a_1 + 9d' = 0 \Rightarrow a_1 = -9d'$$

$$\frac{a_{15}}{d} = \frac{a_1 + 14d'}{d} = \frac{-9d' + 14d'}{d} = 5\frac{d'}{d} = 5 \times \frac{4}{5} = 4$$

متوسط

-۱۴

$$\frac{a_5}{a_1} = q^4 \Rightarrow \frac{5^4}{\frac{5}{3}} = 81 = q^4 \Rightarrow q = \pm 3$$

بنابراین داریم:

$$\frac{5}{3}, \pm 2, 6, \pm 18, 54$$

آسان

-۱۵

جمله اول را دلخواه انتخاب می کنیم:

$$a_1 = 5 \Rightarrow 5, \frac{15}{4}, \frac{45}{16}, \frac{135}{64}, \dots$$

$$a_1 = 4 \Rightarrow 4, 3, \frac{9}{4}, \frac{27}{16}, \dots$$

دشوار

-۱۶

 مقدار مورد نظر را x فرض می کنیم:

$$2 + x, 12 + x, 42 + x$$

$$(2 + x)(42 + x) = (12 + x)^2 \Rightarrow 84 + 2x + 42x + x^2 = 144 + x^2 + 24x$$

$$\Rightarrow 20x = 60 \Rightarrow x = 3$$

متوسط

-۱۷

$$\left. \begin{array}{l} a_4 = 5^4 \\ a_7 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{a_4}{a_7} = q^3 \Rightarrow \frac{5^4}{6} = 9 = q^3 \Rightarrow q = \pm 3$$

$$n = 2 \longrightarrow a_7 = a_1 q \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = 2 \Rightarrow 2, 6, 18, 54, \dots \\ -3a_1 = 6 \Rightarrow a_1 = -2 \Rightarrow -2, 6, -18, 54, \dots \end{cases}$$

دشوار

-۱۸

$$a_1 \times a_7 \times \dots \times a_{10} = a_1^{10} q^{\frac{10^2-10}{2}} = 3^{10} (2)^{45} = 3^{10} \times 2^{45}$$

متوسط

-۶

در این دنباله جملات یک در میان ۱ و -۱ هستند که جمع هر دو جمله متوالی صفر خواهد بود بنابراین فقط جمله بیست و یکم باقی می ماند و این حاصل جمع برابر ۱- است.

متوسط

-۷

$$a_5 = 768 \Rightarrow a_1 q^4 = 768$$

$$\frac{a_5}{a_2} = q^3 \Rightarrow q^3 = \frac{768}{12} = 64 \Rightarrow q = 4$$

$$a_7 = 12 \Rightarrow a_1 q = 12 \Rightarrow a_1 (4) = 12 \Rightarrow a_1 = 3$$

متوسط

-۸

$$\frac{3x+3}{a}, \frac{x+1}{b}, \frac{x-5}{c} \Rightarrow ac = b^2$$

$$\Rightarrow (3x+3)(x-5) = (x+1)^2 \Rightarrow 3x^2 - 15x + 3x - 15 = x^2 + 2x + 1$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 14x - 16 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 - 7x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \Rightarrow 27, 9, 3 \\ x = -1 \text{ غ ق} \end{cases}$$

متوسط

-۹

$$2, \square, \square, \square, \square, 486 \Rightarrow \frac{b}{a} = q^5 \Rightarrow \frac{486}{2} = q^5$$

$$\Rightarrow 243 = q^5 \Rightarrow 3^5 = q^5 \Rightarrow q = 3$$

بنابراین داریم:

$$2, 6, 18, 54, 162, 486$$

متوسط

-۱۰

$$3 + 7 = 2 + 8 \Rightarrow a_7 a_3 = a_2 a_8 \Rightarrow a_7 a_8 = (12)(3) = 36$$

دشوار

-۱۱

$$a_4, a_8, a_9 \quad q = \frac{9-8}{8-4} = \frac{1}{4}$$

دشوار

-۱۲

$$a_1 = 2, q = 3 \Rightarrow a_1 \times a_7 \times \dots \times a_{20} = 2^{20} \times (3)^{\frac{20^2-20}{2}} = 2^{20} \times 3^{190}$$

متوسط

-۱۳

$$x^2 = 2(3x) \xrightarrow{x \neq 0} x = 6$$

بنابراین دنباله به صورت $2, 6, 18, 54, \dots$ خواهد بود بنابراین $x = 6$ و $y = 54$

و $Z = 486$ می باشد.

آسان

۶- گزینه «۴»

$$a_3 \times a_7 \times a_9 = 8a_{17} \Rightarrow a_1 q^2 \times a_1 q^6 \times a_1 q^8 = 8a_1 q^{16} \\ \Rightarrow a_1^3 q^{16} = 8a_1 q^{16} \Rightarrow a_1^2 = 8 \Rightarrow a_1 = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$$

آسان

۷- گزینه «۱»

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{a_1} = \frac{a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4}{a_1} \\ = \frac{a_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4)}{a_1} \\ = 1 + (-2) + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 = 11$$

متوسط

۸- گزینه «۲»

$$a_1 = 2 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 14 \Rightarrow 2 + a_2 + a_3 = 14 \\ \Rightarrow a_2 + a_3 = 12 \Rightarrow a_1 q + a_1 q^2 = 12 \\ \Rightarrow a_1(q + q^2) = 12 \Rightarrow 2(q + q^2) = 12 \Rightarrow q + q^2 = 6 \\ \Rightarrow q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow (q + 3)(q - 2) = 0 \\ \begin{cases} q + 3 = 0 \Rightarrow q = -3 \\ q - 2 = 0 \Rightarrow q = 2 \end{cases}$$

آسان

۹- گزینه «۳»

$$\frac{a_n}{a_m} = q^{n-m} \Rightarrow \frac{a_6}{a_1} = \frac{a_8}{a_2} = \frac{a_9}{a_3} = \dots = \frac{a_{100}}{a_{99}} = q^3 \\ \frac{a_6}{a_1} \times \frac{a_8}{a_2} \times \dots \times \frac{a_{100}}{a_{99}} = \underbrace{q^3 \times q^3 \times \dots \times q^3}_{99 \text{ بار}} = (q^3)^{99} = q^{3 \times 99} = q^{297}$$

متوسط

۱۰- گزینه «۲»

$$P^2 = (6P - 9)(1) \Rightarrow P^2 = 6P - 9 \Rightarrow P^2 - 6P + 9 = 0 \\ \Rightarrow (P - 3)^2 = 0 \Rightarrow P - 3 = 0 \Rightarrow P = 3 \\ 6P - 9 = 0 \Rightarrow 6(3) - 9 = 9$$

بنابراین دنباله به صورت ۹، ۳، ۱، ... خواهد بود که:

$$r = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۴»

$$a_4 = 216a_7 \Rightarrow \frac{a_4}{a_7} = \frac{1}{216} \Rightarrow \frac{a_1 q^3}{a_1 q^6} = \frac{1}{216} \Rightarrow q^3 = \frac{1}{216} \\ \Rightarrow q^3 = \frac{1}{2^3 \times 3^3} \Rightarrow q^3 = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \Rightarrow q = \frac{1}{6} \\ \frac{a_{10}}{a_8} = \frac{a_1 q^9}{a_1 q^7} = q^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$



متوسط

۱- گزینه «۱»

$$\frac{a_2 + a_6}{a_8 + a_{12}} = 64 \Rightarrow \frac{a_1 q + a_1 q^5}{a_1 q^7 + a_1 q^{11}} = 64 \Rightarrow \frac{1}{q^6} = 64 \\ \Rightarrow q^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow q = \pm \frac{1}{2} \\ \frac{a_2 + a_6}{a_4 + a_8} = \frac{a_1 q + a_1 q^5}{a_1 q^3 + a_1 q^7} = \frac{a_1 q(1 + q^4)}{a_1 q^3(1 + q^4)} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{(\pm \frac{1}{2})^2} = 4$$

متوسط

۲- گزینه «۴»

$$(-2x)^2 = (2x - 2)(2x + 4) \Rightarrow 4x^2 = 4x^2 + 4x - 8 \\ \Rightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

بنابراین جملات دنباله به صورت زیر است:

$$2, -4, 8, \dots \Rightarrow a_1 = 2, q = -2$$

$$a_{10} = a_1 q^{n-1} = (2)(-2)^{9} = -2^{10}$$

متوسط

۳- گزینه «۴»

$$p^4 = 8p \xrightarrow{p \neq 0} p^3 = 8 \Rightarrow p = 2 \Rightarrow r = 2$$

$$t_8 = t_1 r^7 \Rightarrow t_8 = 2 \times (2^7) = 2^8$$

متوسط

۴- گزینه «۱»

$$(1) \quad \frac{36}{4} = 9 \Rightarrow t_8 = t_1 q^7 \Rightarrow t_8 = 4 \times 9^4$$

$$(2) \quad 2, 6, 18, \dots \Rightarrow r = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow t_8 = t_1 r^7 \Rightarrow t_8 = 2 \times 3^7$$

$$\frac{t_8}{t_8} = \frac{4 \times 9^4}{2 \times 3^7} = \frac{2^2 \times 3^8}{2 \times 3^7} = 2 \times 3 = 6$$

متوسط

۵- گزینه «۱»

$$a_1, x_1, x_2, x_3, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 8 \\ a_5 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{a_1}{2} = a q^4 \Rightarrow \frac{8}{2} = 8 q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{8}{16} = \left(\frac{2}{2}\right)^4 \Rightarrow q = \frac{2}{2}$$

$$\Rightarrow a_7 = a_1 q = 8 \left(\frac{2}{2}\right) = 16$$

متوسط

۱۹- گزینه «۲»

$$q^{n+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow q^{3+1} = \frac{324}{4} \Rightarrow q^4 = 81 \Rightarrow q = \pm 3$$

با توجه به صورت سوال باید همه جملات مثبت باشند، بنابراین $q = 3$ خواهد بود. پس جملات دنباله به صورت $4, 12, 36, 108, 324$ می باشد که مجموع آن ها 484 است.

دشوار

۲۰- گزینه «۳»

اگر جملات دنباله هندسی را x_1, x_2, x_3 بنامیم، این جملات به ترتیب با جملات a_3, a_7, a_9 دنباله عددی (حسابی) برابر خواهند بود. می دانیم بین هر سه جمله

متوالی از دنباله هندسی x_1, x_2, x_3 رابطه $x_2^2 = x_1 x_3$ برقرار است؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} t_7^2 &= t_3 t_9 \Rightarrow (t_1 + 6d)^2 = (t_1 + 2d)(t_1 + 8d) \\ \Rightarrow t_1^2 + 12t_1 d + 36d^2 &= t_1^2 + 10t_1 d + 16d^2 \Rightarrow 2t_1 d + 20d^2 = 0 \\ \Rightarrow 2d(t_1 + 10d) &= 0 \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ t_1 + 10d = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$d = 0$ غیر قابل قبول است، چون در آن صورت همه جملات با هم مساوی می شوند؛ بنابراین جمله ۱۱ ام این دنباله برابر با صفر خواهد بود.

دشوار

۲۱- گزینه «۴»

اگر قدر نسبت دنباله حسابی مورد نظر برابر با d باشد، جملات دنباله حسابی به صورت $d, 14, 14-d, 14$ خواهند بود. حال اگر به جمله سوم آن ۲۵ واحد اضافه کنیم، جمله سوم برابر $d+39$ خواهد بود یعنی جملات دنباله هندسی به صورت $d, 14, 39-d, 14$ خواهد بود.

$$14^2 = (14-d)(39+d) \Rightarrow 196 = 546 + 14d - 39d - d^2 \Rightarrow d^2 + 25d - 350 = 0$$

$$\Rightarrow (d+35)(d-10) = 0 \Rightarrow \begin{cases} d = -35 \text{ ق ق غ} \\ d = 10 \text{ ق ق} \end{cases}$$

چون دنباله افزایشی است.

بنابراین جملات دنباله هندسی به صورت $10, 14, 39+10, 14$ یعنی $10, 14, 49, 14$ بوده که جمله سوم آن ۴۹ است.

متوسط

۲۲- گزینه «۱»

$$\left. \begin{aligned} a, b, 1 &\xrightarrow{\text{حسابی}} 2b = a + 1 \\ b, a, 1 &\xrightarrow{\text{هندسی}} a^2 = b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 = \frac{a+1}{2} \Rightarrow 2a^2 - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2a+1)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = 1 \\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$a = 1, b = 1$ چون جملات با هم مساوی می شوند غیر قابل قبول است.

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{دنباله حسابی: } -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{دنباله هندسی: } \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow a + b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

متوسط

۱۲- گزینه «۳»

$$\frac{t_8}{t_5} = r^3 = r^3 \Rightarrow r^3 = 3^3 \Rightarrow r = 3 \Rightarrow \frac{t_{12}}{t_6} = r^6 = 3^6 = 729$$

آسان

۱۳- گزینه «۲»

$$\left. \begin{aligned} \frac{t_7}{t_5} = \frac{16}{8} = r^2 \Rightarrow r^2 = 2 \\ t_8 = 8 \Rightarrow t_1 r^7 = 8 \Rightarrow t_1 (r^2)^{3.5} = 8 \Rightarrow t_1 \times 2^7 = 8 \Rightarrow t_1 = 2 \\ \Rightarrow t_{11} = t_1 r^{10} = t_1 (r^2)^5 = 2 \times (2)^5 = 2^6 = 64 \end{aligned} \right\}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۲»

اگر عدد مورد نظر را x در نظر بگیریم، آنگاه $(1+x), (4+x), (10+x)$ جملات متوالی یک دنباله هندسی خواهند بود؛ بنابراین:

$$\begin{aligned} (4+x)^2 &= (1+x)(10+x) \Rightarrow 16 + 8x + x^2 = 10 + 11x + x^2 \\ \Rightarrow 3x &= 6 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

متوسط

۱۵- گزینه «۳»

طبق رابطه بین سه جمله متوالی در دنباله هندسی داریم:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} - 1, x, \sqrt{2} + 1 \\ x^2 &= (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1 \Rightarrow x = 1 \\ r &= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1 = t_3 \end{aligned}$$

متوسط

۱۶- گزینه «۲»

جمله عمومی یک دنباله هندسی برابر با $t_n = t_1 r^{n-1}$ است. طبق اطلاعات سوال داریم:

$$r = \frac{1}{2}$$

$$\frac{t_5 + t_7}{t_8 + t_9} = \frac{t_1 r^4 + t_1 r^6}{t_1 r^7 + t_1 r^9} = \frac{t_1 r^4 (1 + r^2)}{t_1 r^7 (1 + r^2)} = \frac{1}{r^3} \xrightarrow{r = \frac{1}{2}} \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{\frac{1}{8}} = 8$$

متوسط

۱۷- گزینه «۱»

طبق تعریف دنباله هندسی $t_n = t_1 r^{n-1}$ داریم:

$$\begin{aligned} t_2 t_3 t_4 &= 8 \Rightarrow (t_1 r)(t_1 r^2)(t_1 r^3) = 8 \\ t_1^3 r^6 &= 8 \Rightarrow (t_1 r^2)^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow t_1 r^2 = 2 (*) \\ t_1 t_5 &= t_1 (t_1 r^4) = t_1^2 r^4 = (t_1 r^2)^2 \xrightarrow{(*)} t_1 t_5 = 2^2 = 4 \end{aligned}$$

متوسط

۱۸- گزینه «۱»

اگر قدرنسبت و جمله اول دو دنباله را به ترتیب t'_1, r', t_1, r بنامیم؛ داریم:

$$\begin{aligned} r' &= r, t'_1 = r t_1 \\ t_n &= t_1 r^{n-1}, t'_n = t'_1 (r')^{n-1} = r t_1 r^{n-1} = r t_n \Rightarrow t'_n = r t_n \end{aligned}$$



آسان

-۱

$$\text{آ)} A \cup B = [2, 15] \cup (-1, +\infty) = (-1, +\infty)$$

$$\text{ب)} A \cap B = [2, 15] \cap (-1, +\infty) = [2, 15]$$

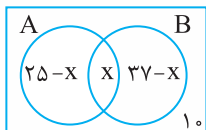
$$\text{پ)} A - B = [2, 15] - (-1, +\infty) = \emptyset$$

دشواری

-۲

مجموعه قبول شدگان در درس ادبیات را A و مجموعه قبول شدگان در درس عربی را B نمایش می‌دهیم. تعداد اعضای هر مجموعه را در ناحیه خود می‌نویسیم چون تعداد کل دانش‌آموزان ۵۵ نفر است پس:

$$25 - x + x + 37 - x + 10 = 55 \Rightarrow x = 72 - 55 = 17$$

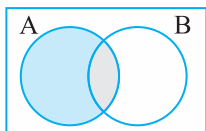


متوسط

-۳

به کمک نمودار ون به راحتی معلوم می‌شود که جواب سوال برابر A است.

$$(A - B) \cup (B \cap A) = A = (0, 3)$$



متوسط

-۴

$$t_n = 283 \Rightarrow 2n^2 - 5 = 283 \Rightarrow 2n^2 = 288 \Rightarrow n^2 = 144 \Rightarrow n = 12$$

بنابراین جمله دوازدهم برابر ۲۸۳ است.

متوسط

-۵

الگوی خطی را $t_n = an + b$ فرض می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_3 = 13 \\ t_7 = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a + b = 13 \\ 7a + b = 29 \end{cases} \xrightarrow{(-)} 4a = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow t_n = 4n + 1$$

متوسط

۲۳- گزینه «۲»

دنباله هندسی را a_n و دنباله حسابی را t_n فرض می‌کنیم.

$$\begin{cases} 4a_1 = t_1 \\ 8a_2 = t_2 \Rightarrow 16a_2 = 4a_1 + 16a_3 \Rightarrow 4a_1q = a_1 + 4a_1q^2 \\ 16a_3 = t_3 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\div a_1} 4q^2 - 4q + 1 = 0 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = t_1 + t_2 + t_3 \Rightarrow a_1^2 + a_1^2q^2 + a_1^2q^4 = 4a_1 + 8a_2 + 16a_3$$

$$\Rightarrow a_1^2 + \frac{1}{4}a_1^2 + \frac{1}{16}a_1^2 = 4a_1 + 4a_1 + 4a_1$$

$$\frac{16 + 4 + 1}{16}a_1^2 - 12a_1 = 0 \xrightarrow{a_1 \neq 0} a_1 = \frac{12 \times 16}{21} = \frac{64}{7}$$

متوسط

۲۴- گزینه «۱»

اگر جمله اول $a = 1$ فرض شود در این صورت دنباله‌های هندسی زیر را با شرایط مسئله می‌توان نوشت.

$$r = 2:1, 2, 4, 8, 16$$

$$r = 3:1, 3, 9, 27, 81$$

در صورتی که $a = 2$ باشد آن‌گاه دنباله زیر جواب خواهد بود.

$$r = 2:2, 4, 8, 16, 32$$

در صورتی که $a = 3$ باشد دنباله زیر جواب است.

$$r = 2:2, 6, 18, 54, 162$$

در صورتی که $a = 4$ باشد دنباله زیر جواب است.

$$r = 2:4, 8, 16, 32, 64$$

در صورتی که $a = 5$ باشد دنباله زیر جواب است.

$$r = 2:5, 10, 20, 40, 80$$

در صورتی که $a = 6$ باشد دنباله زیر جواب است.

$$r = 2:6, 12, 24, 48, 96$$

بنابراین با شرایط مسئله فقط ۷ دنباله وجود دارد.

متوسط

۲۵- گزینه «۲»

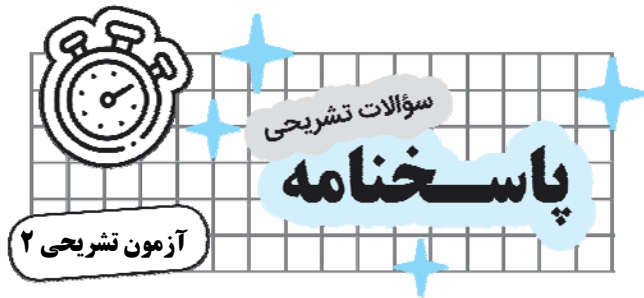
جملات دنباله هندسی را a, ar, ar^2 در نظر می‌گیریم بنابراین جملات دنباله

حسابی به صورت $\frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}$ خواهد بود.

$$ar = \frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} \xrightarrow{\div a} r = \frac{1}{2} + \frac{r^2}{2} \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$$

اگر $r = 1$ باشد دنباله ثابت خواهد بود بنابراین $d = 0$ است پس:

$$r + d = 0 + 1 = 1$$



آسان

-۱

آ) متناهی ب) نامتناهی

دشوار

-۲

$$A \cap B = [3, 7] \Rightarrow [3, k+1) \cap (k-2, 7] = [3, 7]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k+1 > 7 \\ k-2 < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k > 6 \\ k < 5 \end{cases} \xrightarrow{\cap} k \in \emptyset$$

متوسط

-۳

آ) نادرست. اگر $x = 0, y = \sqrt{2}$ فرض شود $xy = 0$ است.

ب) نادرست. اگر $x = 3\sqrt{5}, y = \sqrt{5}$ باشد $x^y = 3^5$ است.

پ) درست.

آسان

-۴

$$\bar{A} \cup B = [-2, 1) \cup [0, 2] = [-2, 2]$$



ب) $A \cap B = [-2, 1) \cap [0, 2] = [0, 1)$



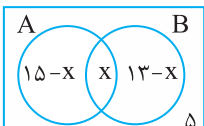
دشوار

-۵

مجموعه افرادی که جای می‌نوشند را با **A** و مجموعه افرادی که شربت

می‌نوشند را با **B** نمایش می‌دهیم اگر $n(A \cap B) = x$ باشد، تعداد اعضای هر

مجموعه را درون آن می‌نویسیم.



$$15 - x + x + 13 - x + 5 = 30 \Rightarrow x = 3$$

افرادی که هم جای نوشیده‌اند و هم شربت تعداد اعضای مشترک است.

$$n(A \cap B) = x = 3$$

متوسط

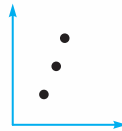
-۶

سه تا از جمله‌های دنباله را می‌نویسیم:

$$n = 1 \Rightarrow t_1 = 4$$

$$n = 2 \Rightarrow t_2 = 7$$

$$n = 3 \Rightarrow t_3 = 12$$



متوسط

-۷

$$d = 176 - 180 = -4, a_1 = 180$$

$$a_n = 0 \Rightarrow a_1 + (n-1)d = 0 \Rightarrow 180 + (n-1)(-4) = 0$$

$$\Rightarrow n-1 = \frac{180}{4} = 45 \Rightarrow n = 46$$

بنابراین جمله چهارم و ششم برابر صفر است.

متوسط

-۸

$$5, \dots, \dots, \dots, 17$$

$$\begin{cases} t_1 = 5 \\ t_5 = 17 \end{cases} \Rightarrow 5 + 4d = 17 \Rightarrow d = 3$$

بنابراین دنباله به صورت ۵، ۸، ۱۱، ۱۴، ۱۷ خواهد بود.

متوسط

-۹

$$x^2 = (x+4)(x-2) \Rightarrow x^2 = x^2 + 2x - 8 \Rightarrow x = 4$$

متوسط

-۱۰

$$2, \dots, \dots, \dots, 32$$

$$\begin{cases} t_1 = 2 \\ t_5 = 32 \end{cases} \Rightarrow \frac{t_5}{t_1} = \frac{32}{2} \Rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

$$r = 2 \Rightarrow \text{دنباله: } 2, 4, 8, 16, 32$$

$$r = -2 \Rightarrow \text{دنباله: } 2, -4, 8, -16, 32$$

متوسط

-۶

$$r = \frac{6}{-3} = -2, a_1 = -3$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = (-3)(-2)^{n-1} \Rightarrow a_{\Delta n+1} = (-3)(-2)^{\Delta n}$$

دشوار

-۷

دنباله $a_n = 5 \times 2^{\Delta n+1}$ یک دنباله هندسی با جمله اول $a_1 = 5 \times 2^6$ و قدر

نسبت $r = 2^5$ است.

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \dots \times a_{10} = a_1^{10} \times r^{45} = (5 \times 2^6)^{10} \times (2^5)^{45} = 5^{10} \times 2^{285}$$

دشوار

-۸

صورت کسرها اعداد طبیعی، اما مخرج کسرها جملات دنباله درجه دوم است.

$$5, 10, 17, 26, \dots$$

دنباله مخرجها را به صورت $t_n = an^2 + bn + c$ فرض می‌شود. دنباله

تفاضلات به صورت $5, 7, 9, \dots$ پس $a = 1$ خواهد بود.

$$t_n = n^2 + bn + c$$

$$\begin{cases} t_1 = 1 + b + c = 5 \\ t_2 = 4 + 2b + c = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 4 \\ 2b + c = 6 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(-)} b = 2, c = 2 \Rightarrow t_n = n^2 + 2n + 2$$

بنابراین جملات دنباله از الگوی $\frac{n}{n^2 + 2n + 2}$ تبعیت می‌کنند.

دشوار

-۹

$$20 < 2n^2 + 1 < 60 \Rightarrow \frac{19}{2} < n^2 < \frac{59}{2} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} 4 \leq n \leq 5$$

بنابراین فقط جملات چهارم و پنجم بین ۲۰ و ۶۰ قرار دارند.

دشوار

-۱۰

$$2t_2 = t_4 + t_1 \Rightarrow 2p - 8 = 4p + 5 + 2p + 1$$

$$\Rightarrow 4p = -14 \Rightarrow p = -\frac{7}{2}$$

سوالات تستی

پاسخنامه

آزمون تستی پایانی

آسان

۱- گزینه «۱»

گزینه «۱»: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 < x < 4\} = \{0, 1, 2, 3\} \Rightarrow n(A) = 4$

گزینه «۲»: $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 4\} = \{1, 2, 3\}$

گزینه «۳»: $C = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x < 10\} = \{1^2, 2^2, 3^2, \dots, 9^2\}$

گزینه «۴»: $D = \{\frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{Z} - \{0\}; x < 5\}$

$$= \{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, -1, -\frac{1}{2}, \dots\}$$

آسان

۲- گزینه «۳»

$$(4x-1)(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{4} \\ x-1=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

مجموعه جواب معادله دو عضو دارد $\{\frac{1}{4}, 1\}$ پس متناهی است.

$$3x + 4 > 0 \Rightarrow 3x > -4 \Rightarrow x > -\frac{4}{3} \Rightarrow x \in (-\frac{4}{3}, +\infty)$$

بازه $(-\frac{4}{3}, +\infty)$ نامتناهی است.

$$A = \{3^n : n \in \mathbb{N}\} = \{3^1, 3^2, 3^3, \dots\}$$

عضوهای مجموعه A بی‌شمارند پس مجموعه A نامتناهی است.

مجموعه $(\frac{1}{20}, \frac{1}{10})$ نامتناهی است زیرا عضوهای بی‌شماری دارد.

متوسط

۳- گزینه «۴»

چون اشتراک دو بازه فقط یک عضو دارد پس انتهای بازه اول باید منطبق بر ابتدای بازه دوم باشد.

$$3m - 2 = m + 8 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow (-5, 13] \cap [13, +\infty) = \{13\}$$

$$\Rightarrow k = 13 \Rightarrow \frac{m^2}{k^2 + 1} = \frac{25}{170} = \frac{5}{34}$$

متوسط

۴- گزینه «۱»

$$vn(A \cap B) - n(B) = n(A) \Rightarrow n(A) + n(B) = vn(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$n(A \cup B) = vn(A \cap B) - n(A \cap B) = \epsilon n(A \cap B)$$

$$\Rightarrow \frac{n(A \cup B)}{vn(A \cap B)} = \frac{\epsilon n(A \cap B)}{vn(A \cap B)} = \epsilon$$



۵- گزینه «۱»

دشوار

اگر مجموعه اعضای تیم فوتبال را A و بسکتبال را B بنامیم آنگاه:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$35 - 8 = 25 + 11 - n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = 36 - 27 = 9$$

۶- گزینه «۳»

متوسط

شکل اول ۴ دایره، شکل دوم $3 + 4 = 7$ دایره، شکل سوم $3 + 7 = 10$ دایره و به همین ترتیب داریم:

$$a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10$$

ملاحظه می کنید که دنباله به صورت خطی است و ۳ تا ۳ افزایش می یابد.

بنابراین جمله عمومی آن $a_n = 3n + 1$ خواهد بود. بنابراین $a_{40} = 121$ خواهد بود.

۷- گزینه «۴»

متوسط

$$a_n = (2k-1)n^2 + n^2 - 2n + 1 + 5n \Rightarrow a_n = (2k)n^2 + 3n + 1$$

برای آن که a_n الگوی خطی باشد بایستی ضریب n^2 صفر شود پس $k = 0$ و

الگوی این سوال $a_n = 3n + 1$ و در نتیجه جمله دوم برابر ۷ است.

۸- گزینه «۱»

دشوار

مرحله	۱	۲	۳	...	۱۰
تعداد دایره های داخل کادر	2^2	3^2	4^2	...	11^2
تعداد دایره های بیرون کادر	$2+1$	$3+1$	$4+1$	...	$11+1$

$$\text{اختلاف دایره ها} = 11^2 - (11+1) = 121 - 12 = 109$$

۹- گزینه «۴»

دشوار

داخل دو خط موازی تعداد دایره ها به ترتیب ۱، ۴، ۹، ... و در مرحله n ام، n^2 تا است. دایره ها در سمت چپ خط به ترتیب ۱، ۲، ۳، ... و در مرحله n ام برابر n تا است و در سمت راست خط به ترتیب ۱، ۲، ... و در مرحله n ام برابر $n-1$ تا است. در کل تعداد دایره ها در مرحله n ام برابر مجموع n^2 ، $n-1$ و n است، پس:

$$t_n = n^2 + n + n - 1 = n^2 + 2n - 1 \Rightarrow t_{10} = 119$$

۱۰- گزینه «۲»

متوسط

دنباله داده شده یک دنباله حسابی با جمله ی اول ۵ و قدر نسبت $d = \frac{9}{2} - 5 = -\frac{1}{2}$ می باشد. پس یک دنباله حسابی است.

$$a_n = a + (n-1)d \xrightarrow{a_n = -3} -3 = 5 + (n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow -6 = 10 - n + 1 \Rightarrow n = 17$$

پس جمله هفدهم برابر ۳- است.

۱۱- گزینه «۴»

متوسط

در دنباله حسابی داریم:

$$m + n = k + l \Rightarrow a_m + a_n = a_k + a_l$$

$$a_6 + a_{14} = 2a_{10}, a_8 + a_{12} = 2a_{10}, a_{17} + a_{23} = 2a_{20}$$

$$\frac{a_6 + a_8 + a_{10} + a_{12} + a_{14}}{a_{17} + a_{20} + a_{23}} = \frac{2a_{10} + 2a_{10} + a_{10}}{2a_{20} + a_{20}} = \frac{5a_{10}}{3a_{20}} = \frac{5(a+9d)}{3(a+19d)}$$

$$= \frac{5(2+9 \times \frac{3}{2})}{3(2+19 \times \frac{3}{2})} = \frac{5(\frac{31}{2})}{3(\frac{61}{2})} = \frac{155}{183}$$

۱۲- گزینه «۳»

متوسط

با توجه به اینکه به مقدار P نیاز پیدا می کنیم ابتدا آن را پیدا می کنیم:

$$P, P+3, P+6, \dots \xrightarrow{2b=a+c} 2(P+3) = P+6P \Rightarrow 3P = 6 \Rightarrow P = 2$$

پس دنباله حسابی به صورت ۲، ۵، ۸، ...، ۹۲ است. بنابراین:

$$a = 2, d = 3, a_n = 92 \Rightarrow 2 + (n-1)(3) = 92 \Rightarrow (n-1)(3) = 90$$

$$\Rightarrow n-1 = 30 \Rightarrow n = 31$$

۱۳- گزینه «۱»

آسان

وقتی دو واسطه حسابی داشته باشیم یعنی دنباله به صورت ۵، x_1 ، x_2 ، ۴ می باشد که در آن $a_1 = 4, a_4 = 5$ بنابراین:

$$a_4 = 5 \Rightarrow a + 3d = 5 \Rightarrow 4 + 3d = 5 \Rightarrow d = \frac{1}{3}$$

پس واسطه ها عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1 = 4 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} \\ x_2 = x_1 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} + \frac{1}{3} = \frac{14}{3} \end{cases} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{27}{3} = 9$$

۱۴- گزینه «۲»

آسان

$$\frac{a_1 a_2 a_8}{a_4 a_7 a_{10}} = \frac{a a q a q^7}{a q^3 a q^4 a q^6} = \frac{1}{q} = \frac{1}{3}$$

۱۵- گزینه «۴»

متوسط

$$a_{10} = (a_6)^2 \Rightarrow a_1 q^9 = (a_1 q^5)^2 \Rightarrow a_1 q^9 = a_1^2 q^{10}$$

$$\Rightarrow a_1 q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{a_1} = \sqrt{2}$$

۱۶- گزینه «۲»

متوسط

$$\begin{cases} a_{16} = 64 \\ a_{11} = -2 \end{cases} \Rightarrow \frac{a_{16}}{a_{11}} = \frac{64}{-2} \Rightarrow q^5 = -32 \Rightarrow q = -2 \Rightarrow \frac{a_1}{a_3} = \frac{1}{q^2} = \frac{1}{4}$$



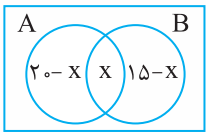
۱- گزینه «۴»

$$(3m+4, 7) \subseteq (-3, m-4) \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq 3m+4 < 7 \Rightarrow \frac{-7}{3} \leq m < 1 \quad (1) \\ 7 \leq m-4 \Rightarrow m \geq 11 \quad (2) \end{cases}$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر تهی است.

۲- گزینه «۴»

در این مسئله مجموعه مرجع ۲۸ عضو و مجموعه A (فوتبال دوست‌ها) ۲۰ عضو و مجموعه B (والیبال دوست‌ها) ۱۵ عضو دارد. فرض می‌کنیم که $n(A \cap B) = x$ باشد. تعداد عضوها را ببینند.



$$20 - x + x + 15 - x \leq 28 \Rightarrow x \geq 7$$

پس x باید دست کم ۷ باشد.

۳- گزینه «۳»

جملات یکی در میان برابر صفر و ۴ است.

پس مجموع هفتاد جمله برابر است با:

$$t_1 + t_2 + \dots + t_{70} = 35 \times 4 = 140$$

۴- گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = a_1 + 2 \times 1 \\ a_3 = a_2 + 2 \times 2 \\ \vdots \\ a_{100} = a_{99} + 2 \times 99 \end{array} \right\} \xrightarrow{+}$$

$$a_{100} = 1 + 2(1 + 2 + \dots + 99) = 1 + 2 \times \frac{99 \times 100}{2} = 9901$$

۵- گزینه «۳»

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3(a_1 + a_2 + a_3)$$

$$a_3 - 2d + a_3 - d + a_3 + a_3 + d + a_3 + 2d$$

$$= 3(a_3 - d + a_3 + a_3 + d)$$

$$5a_3 = 9a_2 \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{5}$$

متوسط

۱۷- گزینه «۱»

$$a_n = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} \Rightarrow \begin{cases} n=1 \Rightarrow a_1 = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} \\ n=2 \Rightarrow a_2 = 4\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{4}{27} \end{cases}$$

$$\Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow a_1 + q = \frac{4}{9} + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9}$$

متوسط

۱۸- گزینه «۲»

$$a_n = ar^{n-1} \Rightarrow 2048 = \frac{1}{64} \times 2^{n-1} \Rightarrow 2048 \times 64 = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow 2^{11} \times 2^6 = 2^{n-1} \Rightarrow 2^{17} = 2^{n-1}$$

$$\Rightarrow n-1 = 17 \Rightarrow n = 18$$

متوسط

۱۹- گزینه «۴»

در دنباله هندسی $a_{n+1} = q a_n$ است.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2}{3} \Rightarrow q = \frac{2}{3}, \quad a_2 = \frac{20}{3} \Rightarrow aq = \frac{20}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}a = \frac{20}{3}$$

$$\Rightarrow a = 10 \Rightarrow a_{10} = 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{99} = \frac{5 \times 2^{100}}{3^{99}}$$

متوسط

۲۰- گزینه «۱»

اگر دنباله‌ای هم هندسی باشد و هم حسابی، باید همه جملات با هم برابر و غیر

صفر باشند در واقع دنباله ثابت غیر صفر است که در این صورت $d = 0$

و $r = 1$ خواهد بود. پس در این مسئله:

$$x = y = z \Rightarrow \frac{x^2 + 3y^2}{xy} = \frac{x^2 + 3x^2}{x \cdot x} = 4$$



۱۱- گزینه «۳»

اگر a_n دنباله حسابی با قدر نسبت d باشد، آن گاه $a_n = dn + \alpha$ و به همین ترتیب $b_n = d'n + \beta$ خواهد بود و در نتیجه:

$$a_n - b_n = (d - d')n + \alpha - \beta$$

پس $a_n - b_n$ دنباله حسابی با قدر نسبت $d - d'$ خواهد بود.

۱۲- گزینه «۳»

$$a + 1, a^2 + 4, a^3 + 7 \xrightarrow{2b=a+c} 2(a^2 + 4) = (a + 1) + (a^3 + 7)$$

$$\Rightarrow 2a^2 + 8 = a^3 + a + 8 \Rightarrow a^3 - 2a^2 + a = 0$$

$$\Rightarrow a(a^2 - 2a + 1) = 0 \Rightarrow a(a-1)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

۱۳- گزینه «۱»

$$3, 7, 11, \dots \Rightarrow a_1 = 3, d = 4$$

$$4, 7, 10, \dots \Rightarrow a'_1 = 4, d' = 3$$

دنباله مشترک با جمله‌ی اول ۷ شروع می‌شود و قدرنسبت آن ۱۲ (ک.م.م ۳ و ۴) است و دو دنباله ۴ جمله کوچک‌تر از ۵۰ مشترک دارند:

$$7, 19, 31, 43$$

۱۴- گزینه «۴»

قدر نسبت دنباله جدید برابر ک.م.م قدر نسبت دو دنباله است. بنابراین:

$$d = [3, 5] = 15$$

از طرفی اولین جمله دنباله جدید $a_1 = 14$ است بنابراین می‌توان جمله عمومی آن را به صورت زیر نوشت:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow a_n = 14 + 15n - 15 \Rightarrow a_n = 15n - 1$$

برای یافتن بزرگ‌ترین عدد سه رقمی داریم:

$$15n - 1 < 1000 \Rightarrow n < 66 \frac{1}{3} \Rightarrow n \leq 66$$

بنابراین جمله شصت و ششم بزرگ‌ترین عدد سه رقمی دنباله جدید است.

$$a_{66} = a_1 + 65d = 14 + 65 \times 15 = 989 \Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 26$$

۱۵- گزینه «۲»

هر n ضلعی محدب از $n-2$ مثلث تشکیل شده است پس $(2n+1)$ ضلعی از $2n-1$ مثلث تشکیل شده است. پس مجموع زوایای داخلی $(2n+1)$ ضلعی برابر $(2n-1)180^\circ$ خواهد بود. زاویه متوسط را x در نظر می‌گیریم. اگر قدرنسبت زاویه‌ها d باشد آن گاه زاویه‌های $(2n+1)$ ضلعی محدب به صورت دنباله زیر خواهند بود.

$$x - nd, x - (n-1)d, \dots, x - 2d, x - d, x, x + d, x + 2d, \dots, x + (n-1)d, x + nd$$

حال مجموع زوایا را برابر $(2n-1)180^\circ$ قرار می‌دهیم:

$$(2n+1)x = (2n-1)180^\circ \Rightarrow x = \frac{2n-1}{2n+1} \times 180^\circ$$

۶- گزینه «۱»

در این دنباله حسابی $a_1 = -\frac{1}{3}$ و $d = (-\frac{1}{4}) - (-\frac{1}{3}) = \frac{1}{12}$ است و باید

بررسی کنیم که به ازای چند n ، $a_n < 0$ است. پس:

$$a_n = a_1 + (n-1)d < 0 \Rightarrow -\frac{1}{3} + (n-1)\left(\frac{1}{12}\right) < 0$$

$$\xrightarrow{\times 12} -4 + (n-1) < 0$$

$$\Rightarrow n < 5 \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n \in \{1, 2, 3, 4\}$$

پس دقیقاً چهار جمله دنباله منفی است.

۷- گزینه «۲»

اولین عدد سه رقمی بخش‌پذیر بر ۷ عدد ۱۰۵ و آخرین عدد بخش‌پذیر بر ۷

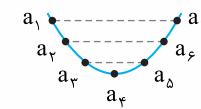
عدد ۹۹۴ است و چون اعداد بخش‌پذیر بر ۷ همان مضرب‌های ۷ هستند پس

$d = 7$ در نتیجه:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{994 - 105}{7} + 1 = \frac{889}{7} + 1 = 127 + 1 = 128$$

۸- گزینه «۴»



$$-\frac{b}{2a} = 4$$

ملاحظه می‌کنید که سه جفت از جملات دنباله با هم برابرند.

۹- گزینه «۱»

$$a_1 = 1, a_7 = \frac{3 + a_1}{2a_1 + 2} = \frac{3 + 1}{2 + 2} = 1 \Rightarrow a_7 = 1$$

$$\Rightarrow a_1 + a_7 + \dots + a_{10} = 100$$

۱۰- گزینه «۴»

$$a_3^2 - a_5^2 = -16 \Rightarrow (a_3 - a_5)(a_3 + a_5) = -16$$

$$\xrightarrow{a_3 + a_5 = 8} a_3 - a_5 = -2$$

$$a_3 - a_5 = -2 \Rightarrow -2d = -2 \Rightarrow d = 1$$

$$a_3 + a_5 = 8 \Rightarrow a + 2d + a + 4d = 8 \Rightarrow 2a + 6 = 8 \Rightarrow a = 1$$

پس دنباله حسابی $a_n = n$ است.

$$\frac{a_n + 2n}{a_{n+1} + n - 1} = \frac{n + 2n}{n + 1 + n - 1} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

۱۹- گزینه «۴»

اگر جمله وسط را x و قدرنسبت را q در نظر بگیریم در این صورت سه جمله متوالی $\frac{x}{q}, x, xq$ خواهد بود پس:

$$\left(\frac{x}{q}\right)(x)(xq) = 27 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} = 3$$

$$\frac{x}{q} + x + xq = 13 \Rightarrow x\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 13 \Rightarrow \frac{1+q+q^2}{q} = \frac{13}{3}$$

$$3 + 3q + 3q^2 = 13q \Rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \Rightarrow (q-3)(3q-1) = 0$$

$$\Rightarrow q_1 = 3, q_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow q_1 + q_2 = \frac{10}{3}$$

یا اینکه:

$$q_1 + q_2 = \frac{-b}{a} = \frac{10}{3}$$

۲۰- گزینه «۴»

اطلاعات مسئله را می‌نویسیم:

$$t_1 = 16 + t_v \Rightarrow t_1 - t_v = 16 \Rightarrow t_1 - t_1 r^6 = 16 \Rightarrow t_1(1 - r^6) = 16 \quad (1)$$

$$t_1 + t_r + t_d = -16 \Rightarrow t_1 + t_1 r^2 + t_1 r^4 = -16$$

$$\Rightarrow t_1(1 + r^2 + r^4) = -16 \quad (2)$$

اگر رابطه (۱) را بر (۲) تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{t_1(1 - r^6)}{t_1(1 + r^2 + r^4)} = \frac{t_1(1 - r^2)(1 + r^2 + r^4)}{t_1(1 + r^2 + r^4)} = -1 \Rightarrow 1 - r^2 = -1$$

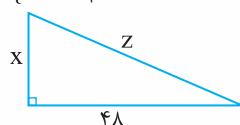
$$\Rightarrow r^2 = 2 \Rightarrow r^6 = 8$$

از رابطه (۱) استفاده می‌کنیم:

$$t_1(1 - 8) = 16 \Rightarrow t_1 = -\frac{16}{7}$$

۱۶- گزینه «۳»

$$\begin{cases} x + y + z = 180 \\ y = \frac{x+z}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 60 \\ x + z = 120 \end{cases}$$



$$\Rightarrow x^2 + 48^2 = z^2 \Rightarrow z^2 - x^2 = 48^2 \Rightarrow (z-x)(z+x) = 48^2$$

$$\Rightarrow (z-x) \times 120 = 48^2 \Rightarrow z-x = \frac{96}{5}$$

حال از دستگاه زیر خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x + z = 120 \\ z - x = \frac{96}{5} \end{cases} \Rightarrow z = \frac{48}{5} + 60 = 69\frac{6}{5}$$

۱۷- گزینه «۱»

در مورد درج ۵ واسطه حسابی یعنی:

۶۴ و $\square$ و $\square$ و $\square$ و $\square$ و $\square$ و ۱، که با کمی دقت دیده می‌شود. فاصله A تا ۱ و فاصله A تا ۶۴ یکسان است به عبارتی A مرکز است. پس:

$$A = \frac{64+1}{2} = \frac{65}{2} = 32\frac{1}{2}$$

و در مورد درج ۵ واسطه هندسی یعنی ۶۴ و $\square$ و $\square$ و $\square$ و $\square$ و ۱ و با دقت در این قسمت نیز معلوم می‌شود B واسطه هندسی ۱ و ۶۴ است.

$$B^2 = 1 \times 64 \Rightarrow B = 8 \Rightarrow A + B = 40\frac{1}{2}$$

۱۸- گزینه «۳»

a_1, a_2, a_3 جملات دنباله هندسی‌اند پس:

$$a_1, a_2, a_3 \Rightarrow a, aq, aq^2 \xrightarrow{\text{دنباله حسابی}} 2aq = a + aq^2$$

$$\xrightarrow{\div a} q^2 - 2q + 1 = 0$$

در این معادله درجه‌ی ۳ مجموع ضرایب صفر است پس یک ریشه $q=1$ و بقیه ریشه‌ها از تقسیم بر $q-1$ به دست می‌آید پس:

$$\begin{array}{r|l} q^3 - 2q + 1 & q-1 \\ -q^3 + q^2 & \\ \hline q^2 - 2q + 1 & \\ -q^2 + q & \\ \hline -q + 1 & \\ +q - 1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

برای یافتن بقیه ریشه‌ها باید معادله $q^2 + q - 1 = 0$ حل شود که در آن

$$q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

چون در این دنباله $q \neq 1$, $q > 0$ است پس از بین قدرنسبت‌های بدست آمده

$$q = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ قابل قبول است.}$$