



جامی نوین

نام آزمون: پاسخ اتحادهای مثلثاتی دهم

تاریخ آزمون: ۱۴۰۴/۰۹/۱۵

۱ - درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{(1 + \tan^2 \alpha) \cos^2 \alpha}{\cot \alpha} = \tan \alpha$$

پاسخ:

$$\frac{(1 + \tan^2 \alpha) (\cos^2 \alpha)}{\cot \alpha} = \frac{\frac{1}{\cos^2 \alpha} \times \cos^2 \alpha}{\cot \alpha} = \frac{\frac{1}{1}}{\cot \alpha} = \frac{1}{\cot \alpha} = \tan \alpha$$

۲ - درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\tan \alpha - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \tan \alpha$$

پاسخ:

$$\frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha}}{1 - \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(\cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 - \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

۳ - درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \tan \alpha \right) (1 - \sin \alpha) = \cos \alpha$$

پاسخ:

$$\left(\frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right) (1 - \sin \alpha) = \frac{(1 + \sin \alpha)}{\cos \alpha} (1 - \sin \alpha) = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \cos \alpha$$

۴ - درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \cot \alpha} = |\cot \alpha|$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \cot \alpha} &= \sqrt{\left(\frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha} \right) \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}} = \sqrt{\cot^2 \alpha} = |\cot \alpha| \end{aligned}$$

۵ - ساده شده عبارت‌های زیر را به دست آورید.

پاسخ:

الف

$$\left(\frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta (1 + \cot^2 \theta)} \right)$$

پاسخ:

$$\left(\frac{1}{1 - \cos \theta} - \frac{1}{1 + \cos \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta (1 + \cot^2 \theta)} \right) = \left(\frac{1 + \cos \theta - 1 + \cos \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) \left(\frac{1}{1 + \cot^2 \theta} \right) \left(\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \right) \left(\frac{1}{\cos \theta} \right) (\sin^2 \theta) = 2$$

ب

$$\left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) - 2 \tan^2 \theta$$

پاسخ:



$$\left(\frac{1}{1-\sin\theta} + \frac{1}{1+\sin\theta}\right) - 2\tan^2\theta = \frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta} - 2\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2}{\cos^2\theta} - \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{2(1-\sin^2\theta)}{\cos^2\theta} = 2$$

۶- درستی اتحاد زیر را بررسی کنید:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\tan^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

پاسخ:

راه اول:

$$\frac{1-\cos\alpha}{\tan^2\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} \stackrel{\text{صورت و مخرج } \times \cos\alpha}{=} \frac{(1-\cos\alpha)(\cos^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{(1-\cos\alpha)(\cos^2\alpha)}{(1-\cos^2\alpha)}$$

$$= \frac{\cancel{(1-\cos\alpha)}(\cos^2\alpha)}{\cancel{(1-\cos\alpha)}(1+\cos\alpha)} = \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

راه دوم: طرفین وسطین می‌کنیم و ساده می‌کنیم تا به عبارتی بدیهی برسیم.

$$\frac{1-\cos\alpha}{\tan^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow (1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha) = \cos^2\alpha \tan^2\alpha \Rightarrow 1-\cos^2\alpha = \cos^2\alpha \times \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \sin^2\alpha$ همواره برقرار است.

۷- در صورتیکه $\cot\alpha = \frac{1}{5}$ حاصل $\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \tan^2\alpha = \frac{1}{\cot^2\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{25}} = 25$$

۸- با در دست داشتن $\cot\alpha = \frac{2}{3}$ ، $\cos\alpha$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\begin{aligned}\tan^2\alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \frac{1}{\cot^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \rightarrow \frac{1}{\frac{4}{9}} + 1 &= \frac{9}{4} + \frac{4}{4} = \frac{13}{4} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \rightarrow \cos^2\alpha = \frac{4}{13} \\ \rightarrow \cos\alpha &= \pm \frac{2}{\sqrt{13}} = \pm \frac{2\sqrt{13}}{13}\end{aligned}$$

۹- اگر داشته باشیم $\sin\alpha = \frac{6}{7}$ ، $\cot\alpha$ را بدست آورید.

پاسخ:

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha &= 1 - \frac{36}{49} = \frac{13}{49} \Rightarrow \cos\alpha = \pm \frac{\sqrt{13}}{7}\end{aligned}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \pm \frac{\frac{\sqrt{13}}{7}}{\frac{6}{7}} = \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

۱۰- درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha(\tan\alpha - 1)} = \sin\alpha + \cos\alpha$$

پاسخ:

$$\frac{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{\cos\alpha(\tan\alpha - 1)} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - 1\right)}$$

$$= \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)}{\cos\alpha\left(\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\cos\alpha}\right)} = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin\alpha + \cos\alpha)}{(\sin\alpha - \cos\alpha)} = \sin\alpha + \cos\alpha$$



۱۱ - درستی اتحاد زیر را بررسی کنید.

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

پاسخ:

$$\frac{1 + \sin x - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + 1 - \cos^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x + \sin^2 x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = \sin x$$

۱۲ - اگر $\cos \alpha = \sqrt[3]{3}$ ، حاصل عبارت $(2 + \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + 1)$ را بیابید.

پاسخ:

$$(\sin^2 \alpha + 1)(2 + \cos^2 \alpha) = (1 - \cos^2 \alpha + 1)(2 + \cos^2 \alpha) \\ = (2 - \cos^2 \alpha)(2 + \cos^2 \alpha) = 4 - \cos^4 \alpha = 4 - 3 = 1$$

۱۳ - اگر $\sin \alpha = a + 2b$ و $\cos \alpha = 2a - 3b$ و همچنین $5a^2 + 13b^2 = 17$ باشد، آنگاه حاصل ab را بیابید.

پاسخ:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (a + 2b)^2 + (2a - 3b)^2 = 1$$

$$a^2 + 4b^2 + 4ab + 4a^2 + 9b^2 - 12ab = 1 \Rightarrow \underbrace{5a^2 + 13b^2}_{17} - 8ab = 1$$

$$\Rightarrow 17 - 8ab = 1 \Rightarrow 8ab = 16 \Rightarrow ab = 2$$

۱۴ - درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

پاسخ:

الف

$$1 - \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x} = \sin x$$

پاسخ:

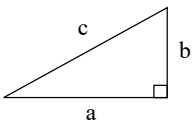
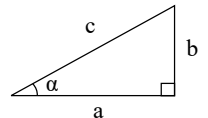
$$1 - \frac{1 - \sin^2 x}{1 + \sin x} = 1 - \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 + \sin x} = 1 - (1 - \sin x) = \sin x$$

ب

$$\frac{1}{\sin x} - \cot x = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

پاسخ:

$$\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

۱۵ - در مثلث روبرو اگر $\frac{b}{c} = \frac{1}{3}$ باشد، نسبت $\frac{a}{b}$ را بیابید.پاسخ: با در نظر گرفتن زاویه ی بین ضلع a و c بعنوان زاویه ی α داریم:

$$\sin \alpha = \frac{b}{c} = \frac{1}{3} \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\frac{1}{9}}$$

$$\cot^2 \alpha + 1 = 9 \rightarrow \cot^2 \alpha = 8 \rightarrow \cot \alpha = \sqrt{8} = \frac{a}{b}$$

۱۶ - با فرض $\cot \alpha = 2$ ، حاصل عبارت زیر را بدست آورید.

$$\frac{2 \cos \alpha - \sin \alpha}{3 \sin \alpha + \cos \alpha}$$

پاسخ:

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Rightarrow \cos \alpha = 2 \sin \alpha$$

با جایگذاری $\cos \alpha = 2 \sin \alpha$ خواهیم داشت:

$$\frac{2(2 \sin \alpha) - \sin \alpha}{3 \sin \alpha + 2 \sin \alpha} = \frac{4 \sin \alpha - \sin \alpha}{5 \sin \alpha} = \frac{3 \sin \alpha}{5 \sin \alpha} = \frac{3}{5}$$

۱۷ - درستی رابطه های زیر را ثابت کنید.



پاسخ:

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta$$

پاسخ:

$$\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = 2 \tan \theta \left(\frac{1}{1 + \tan^2 \theta} \right) = 2 \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos^2 \theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \tan \theta \times \sin \theta$$

پاسخ:

$$\frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin \theta = \tan \theta \cdot \sin \theta$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} + \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} = 2 \tan^2 x$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x}{1 - \sin x} + \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} &= \frac{\sin^2 x(1 + \sin x) + \sin^2 x(1 - \sin x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\ &= \frac{\sin^2 x + \sin^3 x + \sin^2 x - \sin^3 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} = 2 \tan^2 x \end{aligned}$$

$$1 - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = \sin \alpha$$

پاسخ:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} &= \frac{1 + \sin \alpha - \cos^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha - 1 + \sin^2 \alpha}{1 + \sin \alpha} \\ &= \frac{\sin(1 + \sin \alpha)}{1 + \sin \alpha} = \sin \alpha \end{aligned}$$

۱۸ - حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

پاسخ:

الف

$$(\tan 60^\circ - \cos 30^\circ)(\cot 60^\circ \sin 30^\circ) + \tan 45^\circ$$

پاسخ:

$$\left(\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6} + 1 = \frac{3}{12} + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

ب

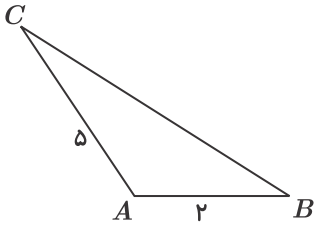
$$\frac{\cos^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ + \tan 180^\circ}{\sin^2 33^\circ - \cot 90^\circ + \cot^2 60^\circ + \cos^2 33^\circ}$$

پاسخ:

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0}{\sin^2 33^\circ + \cos^2 33^\circ - 0 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{16}$$

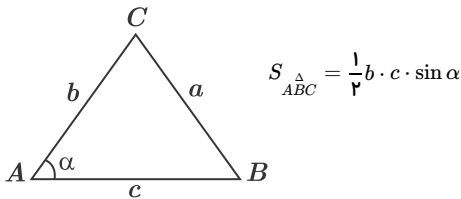


۱۹- الف) اگر مساحت مثلث ABC برابر ۴ باشد، مقدار $\tan \hat{A}$ را به دست آورید.

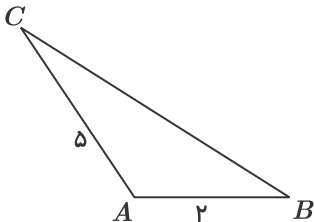


ب) با کمک اتحادهای مثلثاتی حاصل کسر تعریف شده $\frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} - \frac{\tan x \cdot \cot x}{1 + \tan^2 x}$ را به دست آورید.

پاسخ: الف) نکته:



بنابراین:



$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin \hat{A} = 4 \Rightarrow 5 \sin \hat{A} = 4 \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4}{5}$$

حال مقدار $\tan \hat{A}$ را به دست می‌آوریم:

روش اول:

$$\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A} \Rightarrow \cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \hat{A} = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{90^\circ < \hat{A} < 180^\circ} \cos \hat{A} = -\frac{3}{5}$$

$$\tan \hat{A} = \frac{\sin \hat{A}}{\cos \hat{A}} \Rightarrow \tan \hat{A} = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

روش دوم:

$$1 + \cot^2 \hat{A} = \frac{1}{\sin^2 \hat{A}} \Rightarrow 1 + \cot^2 \hat{A} = \frac{25}{16} \Rightarrow \cot^2 \hat{A} = \frac{9}{16} \Rightarrow \cot \hat{A} = \pm \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \tan \hat{A} = \pm \frac{4}{3} \xrightarrow{90^\circ < \hat{A} < 180^\circ} \tan \hat{A} = -\frac{4}{3}$$

(صفحه ۳۳ و ۴۳ کتاب درسی)

ب) می‌دانیم:

$$1 - \sin^2 x = \cos^2 x, \quad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \tan x \cdot \cot x = 1$$

حال داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 x - 1}{\cos^2 x} - \frac{\tan x \cdot \cot x}{1 + \tan^2 x} &= \frac{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1)}{\cos^2 x} - \frac{1}{1 + \tan^2 x} \\ &= \frac{-\cos^2 x (\sin^2 x + 1)}{\cos^2 x} - \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = -\sin^2 x - 1 - \cos^2 x \\ &= -(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) - 1 = -2 \end{aligned}$$

(صفحه ۴۲ و ۴۶ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف)

$$S = \frac{1}{2} \times 2 \times 5 \times \sin \hat{A} = 4 \text{ (نمره ۲,۵)} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{4}{5} \text{ (نمره ۲,۵)} \Rightarrow \tan \hat{A} = -\frac{4}{3} \text{ (نمره ۲,۵)}$$

ب)



$$\frac{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1)}{\cos^2 x} \text{ یا } \frac{(\sin^2 x - 1)(\sin^2 x + 1)}{1 - \sin^2 x} \quad (\text{نمره ۲۵})$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ یا } \frac{1}{1 + \tan^2 x} = \cos^2 x \quad (\text{نمره ۲۵})$$

$$-2 \quad (\text{نمره ۲۵}) = -\sin^2 x - 1 - \cos^2 x \quad (\text{نمره ۲۵}) = -\sin^2 x - 1 - \cos^2 x \quad (\text{نمره ۲۵})$$

۲۰- عبارت تعریف شده زیر را تا حد امکان ساده کنید.

$$\left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right)(\tan \theta \cot \theta + \cot^2 \theta) + \cos \theta$$

پاسخ: با استفاده از روابط مثلثاتی $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$ ، $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ ، $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ داریم:

$$\left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right)(\tan \theta \cot \theta + \cot^2 \theta) + \cos \theta = \left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right)(1 + \cot^2 \theta) + \cos \theta$$

$$= \left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \theta}\right) + \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \cos \theta = \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} = 1$$

می توان قسمت انتهایی سؤال را به صورت زیر نیز ساده کرد:

$$\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \cos \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} + \cos \theta = \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{1 + \cos \theta} + \cos \theta = 1 - \cos \theta + \cos \theta = 1$$

(صفحه ۴۳، ۴۴، ۴۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right)(\tan \theta \cot \theta + \cot^2 \theta) + \cos \theta &= \left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right)\overbrace{(1 + \cot^2 \theta)}^{(\text{نمره ۲۵})} + \cos \theta \\ &= \underbrace{\left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}\right)\left(\frac{1}{\sin^2 \theta}\right)}_{(\text{نمره ۲۵})} + \cos \theta = \underbrace{\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}}_{(\text{نمره ۲۵})} + \cos \theta = \underbrace{\frac{\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta}}_{(\text{نمره ۲۵})} = \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} = 1 \quad (\text{نمره ۲۵}) \end{aligned}$$

توضیح برای مصحح: (اشاره به رابطه $\tan \theta \cdot \cot \theta = 1$ (نمره ۲۵))

رابطه $1 + \cot^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$ یا محاسبه آن (نمره ۲۵)

ساده کردن و رسیدن به رابطه $\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta}$ (نمره ۲۵)

مخرج مشترک گیری یا استفاده از اتحاد مزدوج (نمره ۲۵) و رسیدن به عدد یک (نمره ۲۵)

۲۱- اگر $\sin^2 x + \cos^2 x = k$ باشد، مقدار $\cos^2 x + \sin^2 x$ را بر حسب k به دست آورید.

پاسخ: می دانیم:

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

حال داریم:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = k \Rightarrow \sin^2 x + (1 - \sin^2 x) = k$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = \sin^2 x + \underbrace{1 - \sin^2 x}_{\cos^2 x} = \sin^2 x + \cos^2 x = k$$

روش دوم:

$$\sin^2 x - \cos^2 x = (\sin^2 x - \cos^2 x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_1$$

$$\Rightarrow \sin^2 x - \cos^2 x = \sin^2 x - \cos^2 x \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = \underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_k = k$$

(صفحه ۴۳، ۴۴، ۴۵ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\sin^2 x + \underbrace{(1 - \sin^2 x)}_{(\text{نمره ۲۵})} = \underbrace{\sin^2 x + 1 - \sin^2 x + \sin^2 x}_{(\text{نمره ۲۵})}$$

$$= \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{(\text{نمره ۲۵})} = k \quad (\text{نمره ۲۵})$$

۲۲- اگر $\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ، $45^\circ < x < 90^\circ$ باشد، مقدار $\sin x + \cos x$ را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا طرفین رابطه داده شده را به توان ۲ می رسانیم:



$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow -2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2}$$

اکنون با فرض $\sin x + \cos x = A$ باشد، داریم:

$$\sin x + \cos x = A \xrightarrow{\text{توان}} \underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1 + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\frac{1}{2}} = A^2$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{2} = A^2 \Rightarrow A^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sin x + \cos x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

چون $90^\circ < x < 45^\circ$ است پس $\cos x, \sin x > 0$ و $\sin x + \cos x > 0$ جواب $\sqrt{\frac{3}{2}}$ است.

روش دوم: با فرض $\sin x + \cos x = A$ داریم:

$$\sin x + \cos x = A \quad (1)$$

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) + (2) &\Rightarrow 2 \sin x = A + \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{توان}} 4 \sin^2 x = A^2 + \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2A}{\sqrt{2}} \\ (1) - (2) &\Rightarrow 2 \cos x = A - \frac{1}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{توان}} 4 \cos^2 x = A^2 - \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2A}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (+)$$

$$4 \sin^2 x + 4 \cos^2 x = 2A^2 + 1 \Rightarrow 4(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_1) = 2A^2 + 1 \Rightarrow 2A^2 = 3 \Rightarrow A = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$$

چون $90^\circ < x < 45^\circ$ است پس $\cos x, \sin x > 0$ و $\sin x + \cos x > 0$ جواب $\sqrt{\frac{3}{2}}$ است.

(صفحه ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad (25, \text{نمره})$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{1}{2} \quad (25, \text{نمره})$$

$$\sin x + \cos x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5, \text{نمره})$$

چون $90^\circ < x < 45^\circ$ است، پس $\cos x, \sin x > 0$ و $\sin x + \cos x > 0$ جواب $\sqrt{\frac{3}{2}}$ است. (25, نمره)

۲۳- با ساده کردن سمت چپ تساوی‌های زیر، درستی اتحادهای داده‌شده را اثبات کنید.

الف) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$

ب) $2 + \tan^2 x + \cot^2 x = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2$

پاسخ: الف)

روش اول: $\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x)(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_1)$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$$

روش دوم: $\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$

ب)

روش اول: $2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 1 + 1 + \tan^2 x + \cot^2 x = 1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2$$

روش دوم: $2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$

$$= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2$$

روش سوم: می‌دانیم:



$$\tan x \cdot \cot x = 1$$

$$2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 \tan x \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2$$

$$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right)^2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2$$

(صفحة ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(الف)

$$(\cos^2 x - \sin^2 x)(\overbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}^1) \quad (25 \text{ نمره})$$

$$= (1 - \sin^2 x - \sin^2 x) \quad (25 \text{ نمره})$$

$$= 1 - 2 \sin^2 x \quad (25 \text{ نمره})$$

(ب)

$$1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x \quad (25 \text{ نمره})$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \quad (5 \text{ نمره})$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2 \quad (5 \text{ نمره})$$

$$24- \text{اگر } \frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = 2 \text{ باشد، مقدار } \tan x \text{ را به دست آورید.}$$

پاسخ: روش اول: با طرفین وسطین کردن رابطه داده شده داریم:

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = 2 \Rightarrow 3 \sin x - 4 \cos x = 2 \cos x - 4 \sin x$$

$$\Rightarrow 7 \sin x = 6 \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{6}{7} \Rightarrow \tan x = \frac{6}{7}$$

روش دوم: صورت و مخرج کسر داده شده را به $\cos x$ تقسیم می کنیم: ($\cos x \neq 0$)

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{3 \sin x}{\cos x} - \frac{4 \cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos x}} = 2 \Rightarrow \frac{3 \tan x - 4}{1 - 2 \tan x} = 2$$

$$\Rightarrow 3 \tan x - 4 = 2 - 4 \tan x \Rightarrow 7 \tan x = 6 \Rightarrow \tan x = \frac{6}{7}$$

(صفحة ۴۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

روش اول:

$$3 \sin x - 4 \cos x = 2 \cos x - 4 \sin x \quad (25 \text{ نمره}) \Rightarrow 7 \sin x = 6 \cos x \quad (25 \text{ نمره}) \Rightarrow \tan x = \frac{6}{7} \quad (25 \text{ نمره})$$

روش دوم:

$$\frac{\frac{3 \sin x}{\cos x} - \frac{4 \cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos x}} = 2 \quad (25 \text{ نمره}) \Rightarrow \frac{3 \tan x - 4}{1 - 2 \tan x} = 2 \quad (25 \text{ نمره})$$

$$\tan x = \frac{6}{7} \quad (25 \text{ نمره})$$

۲۵- گزینه درست را انتخاب کنید.

$$\text{الف) حاصل عبارت تعریف شده } \frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} + \sin \theta \text{ کدام است؟}$$

$$1) \tan \theta \quad 2) 1 \quad 3) 2 \quad 4) 2 \tan \theta$$

(ب) اگر $\tan x + \cot x = 3$ ، حاصل $\sin x \cos x$ کدام است؟

$$1) \frac{1}{3} \quad 2) \frac{2}{3} \quad 3) \frac{1}{9} \quad 4) \frac{4}{9}$$

ج) اگر ریشه پنجم عدد a ، ۶ واحد از ریشه سوم عدد $64 - a$ بزرگ تر باشد، آنگاه ریشه ششم $2a$ کدام می تواند باشد؟

$$1) \sqrt[6]{24} \quad 2) -2 \quad 3) \sqrt[6]{6} \quad 4) \sqrt[6]{12}$$

پاسخ: الف) گزینه ۲: با توجه به اتحاد مثلثاتی $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ ، عبارت داده شده را ساده می کنیم؛



$$\frac{\cos^2 \theta}{1 + \sin \theta} + \sin \theta = \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 + \sin \theta} + \sin \theta = \frac{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{1 + \sin \theta} + \sin \theta = 1 - \sin \theta + \sin \theta = 1$$

پس حاصل عبارت تعریف شده بالا برابر یک است.

(صفحه ۴۶ کتاب درسی)

ب) گزینه ۱: با توجه به روابط $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ داریم؛

$$\tan x + \cot x = 3 \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = 3 \Rightarrow \frac{1}{\sin x \cos x} = 3 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{3}$$

(صفحه ۴۶ کتاب درسی)

ج) گزینه ۲: می‌دانیم ریشه پنجم عدد a برابر $\sqrt[5]{a}$ و ریشه سوم -64 برابر $\sqrt[3]{-64}$ است.

بنابراین:

$$\sqrt[5]{a} = 6 + \sqrt[3]{-64} \Rightarrow \sqrt[5]{a} = 6 + (\sqrt[3]{(-4)^3}) = 6 - 4 = 2$$

$$\sqrt[5]{a} = 2 \xrightarrow{\text{توان ۵}} (\sqrt[5]{a})^5 = 2^5 \Rightarrow a = 32$$

خواسته سؤال، ریشه ششم عدد $2a$ یعنی ریشه ششم عدد 64 است که برابر ± 2 است و با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۲ پاسخ است.

(صفحه ۵۴ تا ۵۸ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف) گزینه ۲ (۵ نمره)

ب) گزینه ۱ (۵ نمره)

ج) گزینه ۲ (۵ نمره)

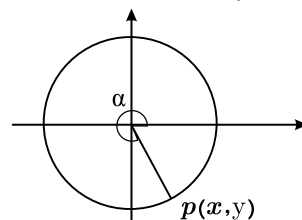
۲۶- اگر $27^\circ < a < 36^\circ$ و $\tan a = \frac{-4}{3}$ ، نسبت‌های مثلثاتی $\cos a$ و $\cot a$ را به دست آورید.

پاسخ: روش اول: استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \cos a = +\frac{3}{5}$$

$$\cot a = \frac{1}{\tan a} = -\frac{3}{4}$$

روش دوم: استفاده از دایره مثلثاتی



$$\tan a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}, \cot a = -\frac{3}{4}$$

روش سوم:

$$\tan a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cot a = -\frac{3}{4}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sin a = -\frac{4}{3} \cos a$$

$$\cos^2 a + \frac{16}{9} \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \cos a = \frac{3}{5}$$

۲۷- زاویه‌ای در ربع دوم دایره مثلثاتی و $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$ است. با استفاده از روابط بین نسبت‌های مثلثاتی، مقدار $\cos \alpha$ را به دست آورید.



$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + \frac{144}{25}} = \frac{25}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{5}{13}$$

با توجه به اینکه در ربع دوم دایره مثلثاتی کسینوس منفی است پس: $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$

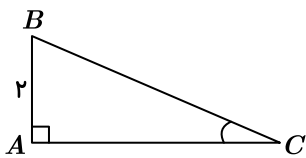
۲۸- با فرض بامعنی بودن کسرها، درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha (1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

۲۹- در مثلث قائم الزاویه ABC ، $AB = 2$ ، $\hat{A} = 90^\circ$ و $\tan C = \frac{1}{2}$ می‌باشند. سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویه C را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به شکل مقابل، داریم:



$$\tan C = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow AC = 4$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow BC^2 = 4 + 16 = 20 \Rightarrow BC = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$\cot C = \frac{1}{\tan C} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\sin C = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos C = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۳۰- اگر $\tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار سایر نسبت‌های مثلثاتی 150° را به دست آورید.

$150^\circ = \theta$ در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد. در ناحیه دوم مثلثاتی، سینوس مثبت و بقیه منفی‌اند. بنابراین داریم:

$$1 + \tan^2 150^\circ = \frac{1}{\cos^2 150^\circ} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 150^\circ} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos^2 150^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos^2 150^\circ = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 150^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\cos 150^\circ < 0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 150^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 150^\circ} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cot 150^\circ = \frac{1}{\tan 150^\circ} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

۳۱- درستی هر یک از اتحادهای مثلثاتی زیر را بررسی کنید.

الف

$$\frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \sin^2 \theta$$

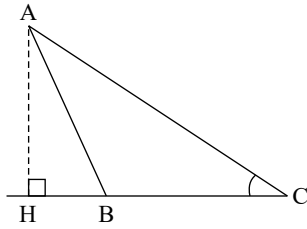
$$1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow \frac{\tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\tan^2 \theta}{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \tan^2 \theta \cdot \cos^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cdot \cos^2 \theta = \sin^2 \theta$$

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

ب



$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \underbrace{(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}_1 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = (1 - \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$$



۳۲- در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{5}{13}$ و $CH = 9$ ، اندازه ارتفاع AH ، کدام است؟

۳٫۵ (۲)

۳٫۲۵ (۱)

۳٫۷۵ (۴)

۳٫۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

$$1 + \cot^2 C = \frac{1}{\sin^2 C} \rightarrow 1 + \cot^2 C = \frac{169}{25} \rightarrow \cot^2 C = \frac{144}{25} \rightarrow \cot C = \frac{12}{5}$$

$$\triangle AHC : \cot C = \frac{CH}{AH} \rightarrow \frac{12}{5} = \frac{9}{AH} \rightarrow 12AH = 45 \rightarrow AH = 3.75$$

۳۳- اگر $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos \alpha$ کدام است؟

$\frac{\sqrt{5}}{10}$ (۴)

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۳)

$-\frac{\sqrt{5}}{5}$ (۲)

$-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲ با توجه به رابطه داده شده، مقدار کسینوس را به دست می آوریم:

$$\sin \alpha = 2 \cos \alpha \Rightarrow \tan \alpha = 2$$

می دانیم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + 4 = 5 \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\xrightarrow[\cos \alpha < 0]{\text{ربع سوم}} \cos \alpha = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$$

۳۴- اگر $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ باشد، حاصل $\tan^2 x$ کدام است؟ ($x \neq 0$)

$\frac{1}{4}$ (۴)

$\frac{1}{2}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{2}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ طرفین $2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$ را بر $\cos^2 x$ تقسیم می کنیم و از رابطه $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ استفاده می کنیم.

$$\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{4}{3} \times \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 2 \tan^2 x + 1 = \frac{4}{3}(1 + \tan^2 x) \xrightarrow{\times 3} 6 \tan^2 x + 3 = 4 + 4 \tan^2 x \Rightarrow 2 \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

روش دوم: از روابط $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ و $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ استفاده می کنیم.

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$2 \sin^2 x + 1 - \sin^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

$$2 \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2 - 2 \cos^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos^2 x = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\tan^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

۳۵- حاصل عبارت $\frac{\sin^2 \alpha + 4 \cos^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha} - \frac{\cos^2 \alpha + 4 \sin^2 \alpha}{1 + \sin^2 \alpha}$ کدام است؟

$\sin 2\alpha$ (۴)

$\cos 2\alpha$ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۳ روش اول: به ازای حاصل عبارت برابر ۱ و به ازای $\alpha = \frac{\pi}{4}$ برابر ۱- است که این تساوی ها فقط در گزینه ۳، دیده می شود.

روش دوم: در فرمول های مثلثاتی داریم:

$$\sin^2 \alpha = (1 - \cos^2 \alpha) = \cos^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha + 1$$

$$\cos^2 \alpha = (1 - \sin^2 \alpha) = \sin^2 \alpha - 2 \sin^2 \alpha + 1$$

این فرمول ها را در صورت سؤال جای گذاری می کنیم و سپس داریم:

$$\Rightarrow T = \frac{\cos^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha + 1}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + 1}{\sin^2 \alpha + 1} = \frac{(\cos^2 \alpha + 1)^2}{\cos^2 \alpha + 1} - \frac{(\sin^2 \alpha + 1)^2}{\sin^2 \alpha + 1} = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha$$