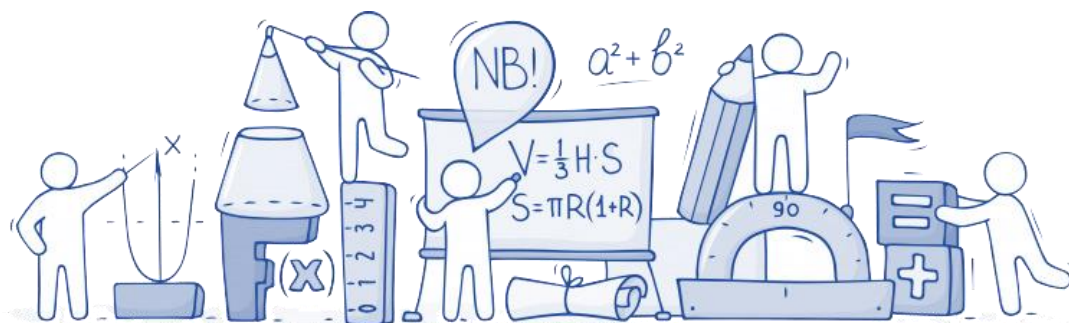


فصل چهارم

معادله ها و نامعادله



درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

معادله درجه دوم

هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که $a \neq 0$ و b و c اعداد حقیقی هستند و a را یک معادله درجه دوم می نامیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

توجه a همیشه ضریب x^2 ، b ضریب x و c عدد ثابت است و همواره همراه با علامت عدد معرفی می شوند.

مثال ۱

در معادلات درجه دوم زیر، ضرایب a و b و c را تعیین کنید.

۱) $2x^2 - 7x + 4 = 0$

ب) $x^2 - 2x = 5$

پ) $x^2 - 9 = 8$

ت) $2x^2 + 6x = 0$

ث) $-3x^2 = 0$

ج) $(x-1)(x+2) = 0$

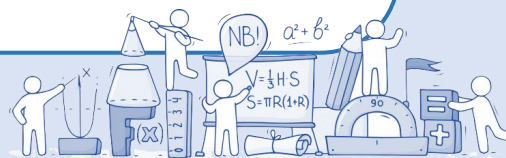
روش های حل معادله درجه دوم

۱) تجزیه

ویژگی حاصل ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $A.B = 0$ باشد، آن گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است یعنی:

$$A.B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ or } B = 0$$

در روش تجزیه به کمک اتحادهای مربع، جمله مشترک، مزدوج و یا فاکتورگیری عبارت را به صورت $A.B = 0$ در می آوریم و سپس از ویژگی ضرب صفر استفاده می کنیم تا جواب های معادله را به دست آوریم.



معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

مثال ۲



۱) $x^2 - 2x - 3 = 0$

ب) $3t^2 - t = 0$

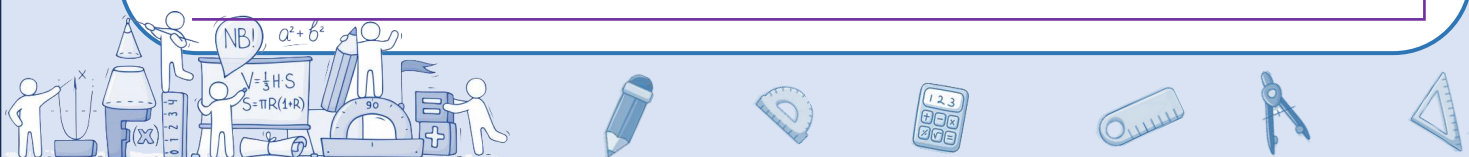
پ) $x^2 - 3x = 10$

ت) $3y^2 - 12 = 0$

ث) $2x^2 = 5x$

ج) $(2x-1)^2 = (x+1)^2$

چ) $x(2x-4) + 4 = 2(x+2)$



نکته



اگر $c = 0$ باشد، از روش فاکتورگیری استفاده می‌کنیم. در این حالت حتماً یکی از جواب‌ها صفر است.

(۲) ریشه‌گیری

در حل معادلاتی به فرم کلی $X^2 = k$ ، اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله به صورت $X = \sqrt{k}$ و $X = -\sqrt{k}$ است.

معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

مثال ۳



۱) $x^2 = ۴$

ب) $x^2 - ۵ = ۰$

پ) $۲x^2 - ۳۲ = ۰$

ت) $(۲x+۱)^2 - ۹ = ۰$

ث) $(r-۲)^2 = ۱۶$

ج) $t^2 + ۷ = ۰$

چ) $۵x^2 = ۲۰$

ح) $(x+۱)^2 + ۴ = ۰$



۳) مربع کامل

روش مربع کامل کردن یک معادله درجه دوم: ابتدا دو جمله شامل متغیر معادله (معمولا x) را یک طرف تساوی و بقیه را سمت دیگر می‌نویسیم. عدد $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم. سه جمله سمت چپ یک اتحاد مربع است. پس از مرتب سازی، از روش ریشه گیری جواب های معادله را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

توجه  برای استفاده از روش مربع کامل، باید $a = 1$ باشد؛ پس اگر a عددی به جز ۱ بود ابتدا کل معادله را بر a تقسیم می‌کنیم.

نکته  این چند اتحاد را به خاطر بسپارید:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$$

$$x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$$

معادلات زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

مثال ۴ 

۱) $x^2 - 6x + 8 = 0$

۲) $x^2 - 6x = -9$

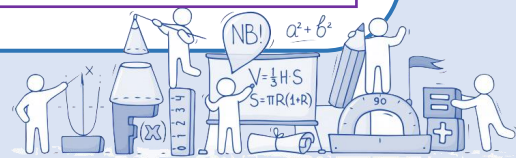


پ) $x^2 - 4x - 6 = 0$

ت) $x^2 - 6x + 4 = 0$

ث) $n^2 - 4n + 5 = 0$

ج) $t^2 + 3t = 3$



$$\text{ج) } 2r^2 + r - 2 = 0$$

$$\text{ح) } 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

(۴) فرمول کلی یا دلتا (Δ)

اگر معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را به روش مربع کامل حل کنیم داریم:



روش استفاده از دلتا (Δ): ابتدا به کمک فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ مقدار Δ را به دست می‌آوریم. عدد دلتا مثبت، منفی یا صفر است:

$$۱) \Delta > 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

معادله دو ریشه متمایز (متفاوت) دارد

$$۲) \Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$$

معادله یک ریشه مضاعف (تکراری) دارد

$$۳) \Delta < 0 \rightarrow$$

معادله ریشه حقیقی ندارد

در روش دلتا، با ضرایب a و b و c سر و کار داریم. پس حتماً به علامت اعداد توجه کنیم و ترجیحاً معادله را از ابتدا مرتب

نکته



بنویسیم.

روش دلتا برای هر معادله درجه دومی قابل استفاده است.

نکته



معادلات درجه دوم زیر را به روش فرمول کلی (دلتا) حل کنید.

مثال ۵

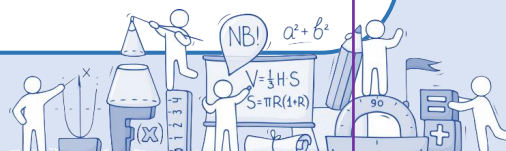


$$۱) x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$۲) 2x^2 + x - 3 = 0$$

$$۳) x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$۴) x^2 + x + 1 = 0$$



ث) $x^2 + 2x + 1 = 0$

ج) $2x^2 - 7x - 9 = 0$

چ) $x^2 - 3x = 0$

ح) $x^2 - 25 = 0$

خ) $2x^2 - 3x + 4 = 0$

د) $(2x+1)^2 = x-3$



$$\text{ذ) } (x-1)(x+1) = 2x$$

$$\text{ر) } 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

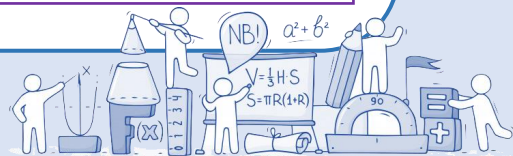
$$\text{ز) } -x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\text{س) } -2x^2 + x + 3 = 0$$

مثال ۶



از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.



دو حالت خاص حل معادله درجه دوم

$$I) a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

$$II) a + c = b \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

نکته

$$1) b = 0 \Rightarrow$$

ریشه‌ها قرینه هم هستند

$$2) a = c \Rightarrow$$

ریشه‌ها عکس هم هستند

$$3) \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$$

معادله دارای دو ریشه مختلف علامت است

معادلات زیر را حل کنید و ریشه‌های آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

مثال ۷

$$1) 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$2) x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$3) x^2 - 4x = 0$$

$$4) 2x^2 - 4 = 0$$

$$5) x^2 - 8x + 7 = 0$$



$$\text{ج) } 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{چ) } -6x^2 + 7x - 1 = 0$$

$$\text{ح) } 2x^2 - 32 = 0$$

$$\text{خ) } 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

مثال ۸ طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $2x+1$ و $2x-1$ و x است ($x \geq 1$). طول ضلع متوسط کدام است؟ (سراسری ۷۶)

$$19(4)$$

$$17(3)$$

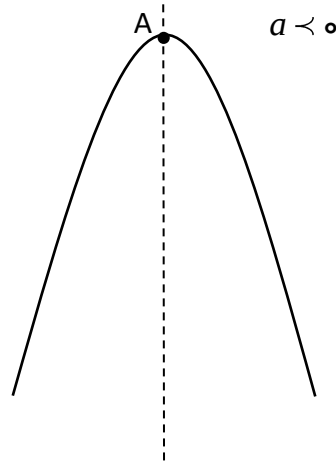
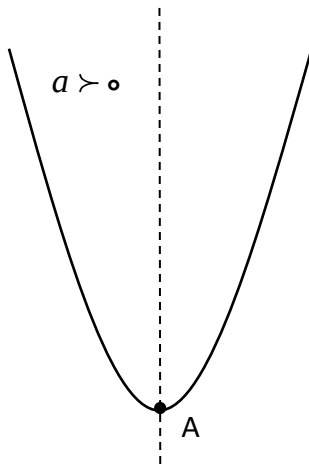
$$15(2)$$

$$13(1)$$



درس دوم: سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است را سهمی می‌نامیم که به یکی از فرم‌های زیر است:



مثال ۹ معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است. سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید، ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و به کمک آن سهمی را رسم کنید.



نکته



هر سهمی به صورت $y = a(x - h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، دارای راسی با مختصات $A(h, k)$ و خط تقارن با معادله $x = h$ است.

نکته



برای رسم سهمی کافی است مختصات راس سهمی را به دست آورده، دو نقطه کمتر از x_A و دو نقطه بیشتر از x_A را جایگزین کنیم و به کمک این پنج نقطه سهمی را رسم کنیم.

مثال ۱۰



در هریک از سهمی های زیر، راس را مشخص کرده و سهمی را رسم کنید.

۱) $y = (x + 3)^2 + 1$

ب) $y = -2x^2 - 3$

نکته



اگر سمت راست معادله $y = ax^2 + bx + c$ را به شکل مربع کامل بنویسیم داریم:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

در این حالت با توجه به نکته بالا مختصات راس سهمی $A \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ و $A \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$ است و معادله خط تقارن

سهمی $x = \frac{-b}{2a}$ است.



مثال ۱۱

مختصات راس سهمی و معادله محور تقارن سهمی های زیر را به دست آورید.

۱) $y = x^2 - 4x + 5$

ب) $y = 2(x + 3)^2 + 1$

نکته

از مختصات راس سهمی داریم: $x_A = \frac{-b}{2a}$ و $y_A = \frac{-\Delta}{4a}$ اما برای محاسبه y_A همچنین می‌توان

از جایگزینی x_A در معادله سهمی استفاده کرد.

مثال ۱۲

سهمی به معادلات زیر را رسم کنید.

۱) $y = x^2 + 3$

ب) $y = x^2 - 3x + 4$



پ) $y = x^2 - 4x$

ت) $y = -2x^2 + 4x - 5$

به عرض عرض از مبدأ سهمی می‌گوییم که همان محل برخورد سهمی با محور y است.

نکته



همان طور که از مثال بالانیز مشخص است اگر دو نقطه به فاصله یکسان از x_A قرار داشته باشند دارای

نکته



عرض یکسان هستند زیرا سهمی نسبت به راس A متقارن است.

برعکس اگر دو نقطه دارای عرض یکسان باشند مثلاً (x_1, y_0) و (x_2, y_0) ، در این صورت معادله محور تقارن سهمی

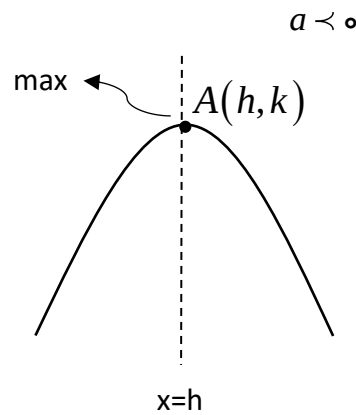
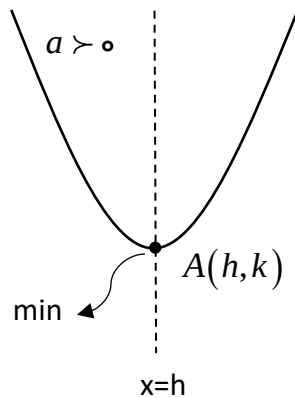
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ است.}$$



مثال ۱۳ اگر $(۰, ۳)$ و $(-۴, ۳)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن این سهمی را بنویسید.

مثال ۱۴ اگر $(۲, -۱)$ و $(۵, -۱)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن این سهمی را بنویسید.

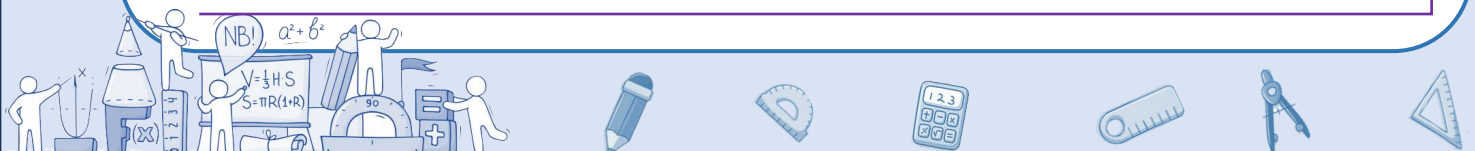
نکته در حالتی که $a > ۰$ است، راس سهمی در پایین‌ترین نقطه سهمی قرار دارد و نقطه مینیمم سهمی است. و در حالت $a < ۰$ ، راس سهمی نقطه ماکزیمم سهمی است.



مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم سهمی به معادلات زیر را بیابید.

۱) $y = x^2 - ۴x + ۵$

ب) $y = -۲x^2 + ۱$

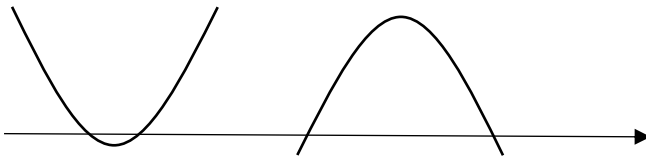


نکته



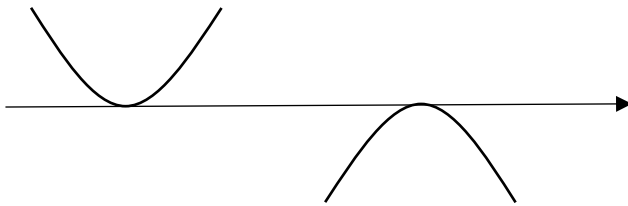
تعداد نقاط برخورد سهمی با محور x ها همان تعداد ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است و سه حالت

طی زیر رخ می دهد:



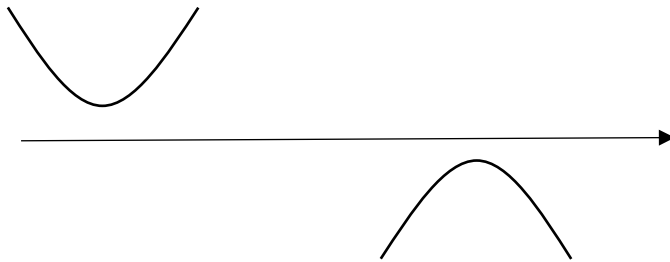
(۱) معادله دو ریشه متمایز دارد ($\Delta > 0$)

در این صورت سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می کند.



(۲) معادله یک ریشه مضاعف دارد ($\Delta = 0$)

در این حالت سهمی بر محور x ها مماس است.



(۳) معادله ریشه ندارد ($\Delta < 0$)

در این حالت سهمی به طور کامل یا بالای

محور x ها یا زیر آن قرار می گیرد.

نوشتن معادله از روی ریشه ها

در سه حالت نکته قبل می توان معادله سهمی را نوشت:

حالت اول: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

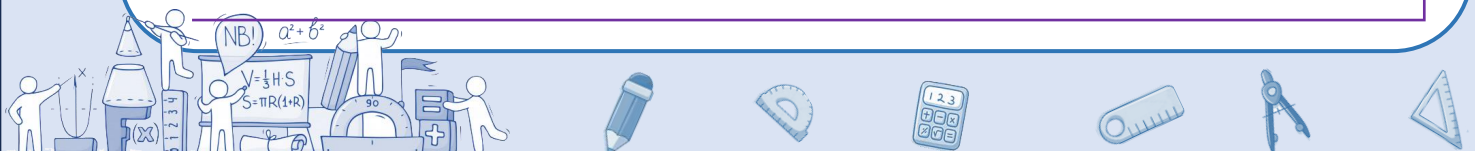
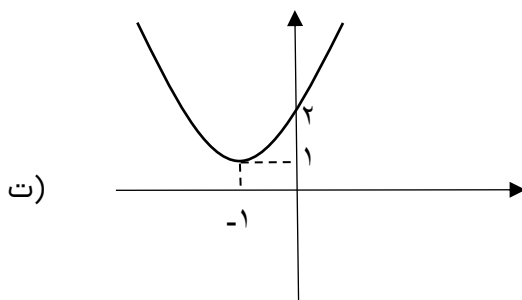
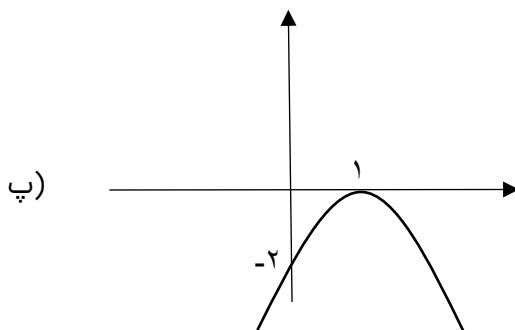
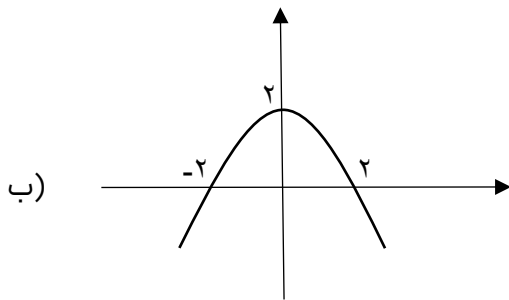
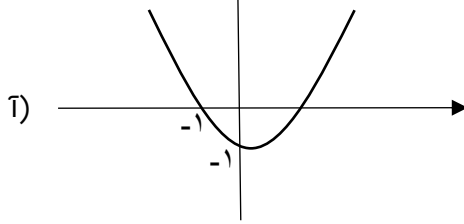
حالت دوم: $y = a(x - x_A)^2$

حالت سوم: $y = ax^2 + bx + c$. با جایگذاری نقاط و استفاده از اطلاعات

مساله ضرایب را تعیین می کنیم.



در هر حالت، معادله سهمی را بنویسید.



مثال ۱۷



معادله سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده و از نقطه $(-1, 3)$ نیز بگذرد.

مثال ۱۸



نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقاطی به طول‌های ۱- و ۳ و محور y ها را در نقطه با عرض ۱- قطع می‌کند. عرض راس سهمی کدام است؟

$$\frac{-4}{3} \quad (4)$$

$$\frac{4}{3} \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} \quad (2)$$

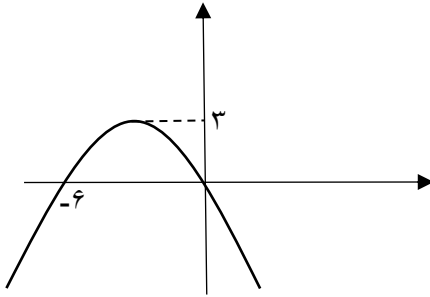
$$\frac{-2}{3} \quad (1)$$



مثال ۱۹ با توجه به سهمی روبرو حاصل عبارت $\frac{-\sqrt{b^2}}{a}$ کدام است؟



- (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۶

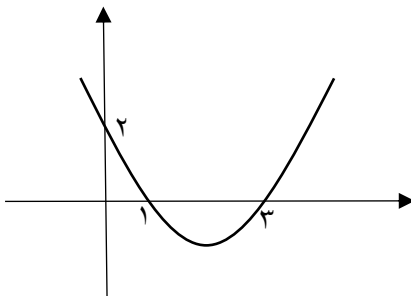


مثال ۲۰ شکل مقابل نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. عرض پایین ترین نقطه این سهمی



کدام است؟

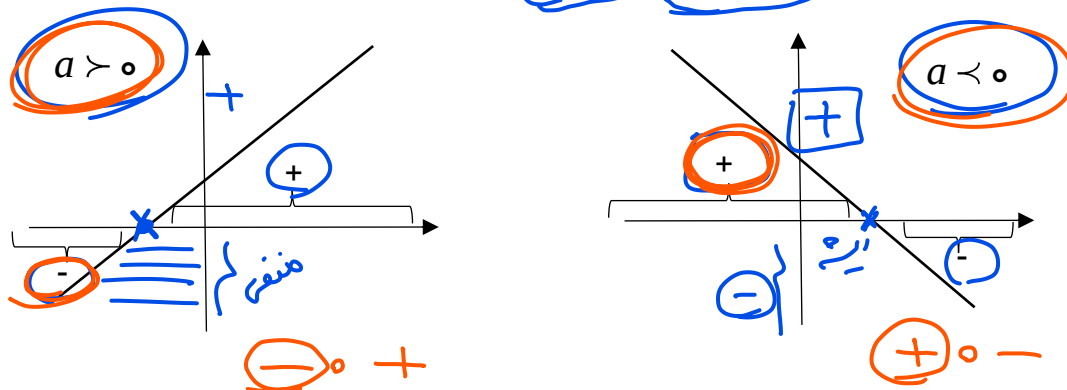
- (۱) $-\frac{1}{3}$ (۲) $-\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{3}{2}$ (۴) $-\frac{128}{27}$



درس سوم: تعیین علامت

۱) تعیین علامت عبارت های درجه اول

به نمودارهای مربوط به معادله خطی $y = ax + b$ و علامت y توجه کنید:



همان طور که از شکل ها مشخص است، علامت y به ازای مقادیر کوچکتر از ریشه، با علامت a مخالف هم هستند و به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه، با علامت a موافق هم هستند. در حالت کلی داریم:

$$P(x) = ax + b$$

	x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b$	$ax + b$	مخالف علامت a	موافق علامت a	
$x = \frac{-b}{a}$				

عبارت های درجه اول زیر را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۱

۱) $P(x) = -4x + 8$ (منفی a)

$-4x + 8 = 0$
 $-4x = -8$
 $x = \frac{-8}{-4} = 2$

۲) $y = 2x - 3$ (مثبت a)

$2x - 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3$
 $x = \frac{3}{2}$

۳) $y = -3x$ (منفی a)

$-3x = 0 \Rightarrow x = 0$

۴) $y = 2x + 2$ (مثبت a)

$2x + 2 = 0 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow x = -1$

نکته

۱) تعیین علامت عبارت‌های $(ax+b)^{2n+1}$ یعنی عبارت‌های درجه اول باتوان فرد نیز مانند عبارت‌های درجه اول معمولی است. در این حالت ریشه رامکدر فرد می‌نامیم.

۲) علامت عبارت‌های $(ax+b)^{2n}$ یعنی عبارت‌های درجه اول باتوان زوج همواره مثبت است. در این حالت ریشه رامکدر زوج می‌نامیم. علامت عبارت $|ax+b|$ نیز شبیه توان زوج همواره مثبت است.

۳) تعیین علامت عبارت‌های ضربی با عوامل درجه اول به صورت ضرب علامت‌های تک‌تک عوامل است.

۴) تعیین علامت عبارت‌های کسری با عوامل درجه اول به صورت ضرب علامت‌های عوامل است با در نظر گرفتن اینکه در ریشه مخارج تعریف نشده (ت.ج.ا) است.

مثال ۲۲

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $A = (3x+1)(2x-1)$

$3x+1=0 \rightarrow 3x=-1 \rightarrow x=-\frac{1}{3}$

$2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$3x+1$	-	0	+	+
$2x-1$	-	-	0	+
A	+	-	-	+

۲) $B = (4x+5)^2 = (4x+5)(4x+5)$

$4x+5=0 \rightarrow 4x=-5 \rightarrow x=-\frac{5}{4}$

ریشه مضرب
(مکدر زوج)

x	$-\infty$	$-\frac{5}{4}$	$+\infty$
$(4x+5)^2$	+	0	+

توان ۲ حاصل عبارت را مثبت می‌کند.

۳) $C = x^3(x-2)$

$x=0$

$x-2=0 \rightarrow x=2$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
x^3	-	0	+	+
$x-2$	-	-	0	+
C	+	0	-	+

۴) $D = \frac{x-1}{3-2x}$

$3-2x=0 \rightarrow 3=2x \rightarrow \frac{3}{2}=x$

x	$-\infty$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$x-1$	-	0	+	+
$3-2x$	+	+	0	-
D	-	+	+	-

ریشه‌های مساوی

$x = 1$ $x = -3$

ث) $E = (x-1)^2(x+3)^3$

چون توان ۲ (زوج) دارد حاصل‌گواردها مثبت است
توان فرد را با علامت می‌زنیم

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$
$(x-1)^2$	+	+	+	+
$(x+3)^3$	-	0	+	+
E	-	0	+	+

ج) $F = \frac{x^3(2x+4)}{-x^2|3-x|}$

$2x+4=0$
 $2x=-4$
 $x=-2$

$x^3=0$
 $x=0$

$-x^2=0$
 $x^2=0$
 $x=0$

$3-x=0$
 $3=x$
جمع

x	$-\infty$	-2	0	3	$+\infty$
x^3	-	-	0	+	+
$2x+4$	-	0	+	+	+
$-x^2$	-	-	0	-	-
$ 3-x $	+	+	+	0	+
F	-	0	+	-	-

۲) تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم

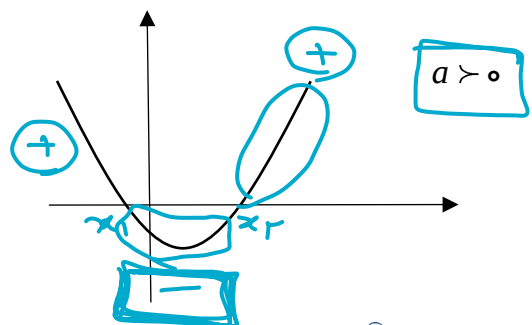
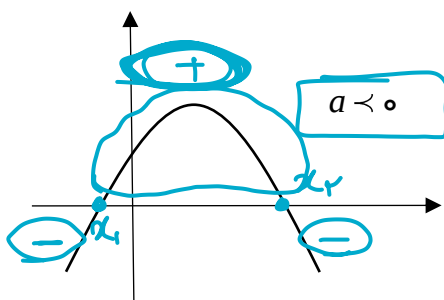
همانند عبارت‌های درجه اول، می‌توان برای عبارت‌های درجه دوم نیز تعیین علامت را با توجه به تعداد ریشه‌ها و علامت a انجام داد:

$P(x) = ax^2 + bx + c$ $a \neq 0$

الف) معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه متمایز x_1, x_2 است $\Delta > 0$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
P	موافق علامت a	مخالف علامت a	مخالف علامت a	موافق علامت a

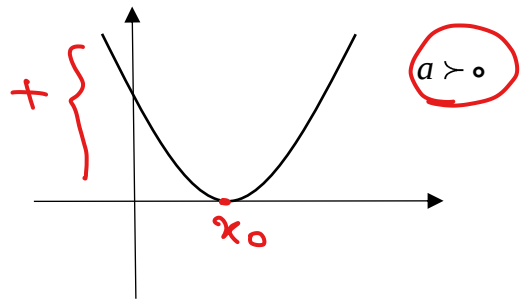
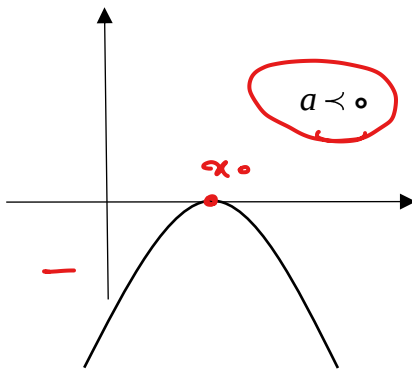
بین دورت‌ها مخالف علامت a ،
خارج دورت‌ها (انتهای دورت‌ها) موافق علامت a



ب) معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای یک ریشه مضاعف x_0 است $\Delta = 0$

$$\Delta = 0$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P	موافق علامت a	موافق علامت a	موافق علامت a

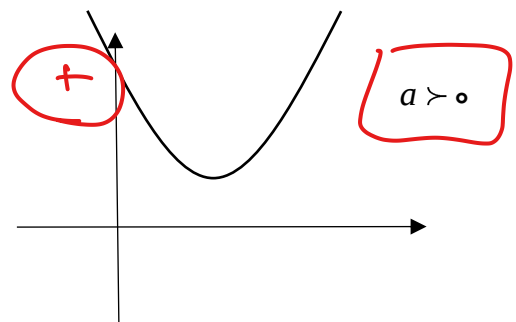
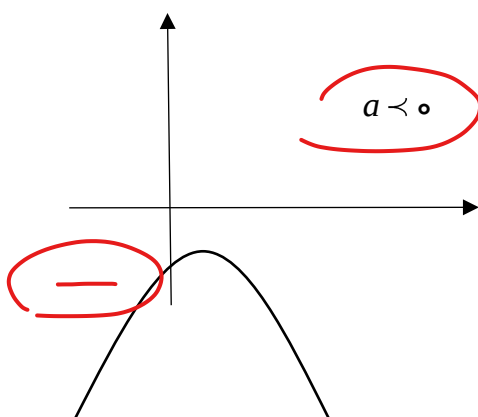


ب) معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه حقیقی نیست $\Delta < 0$

ریشه برابر

x	$-\infty$	$+\infty$
P	موافق علامت a	موافق علامت a

عبارت درازن صلب همواره مثبت
یا همواره منفی است.



ریشه هریک از عبارت های زیر را در صورت وجود بیابید و عبارت را تعیین علامت کنید.

۱) $A = 2x^2 - x - 3$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$2 - 3 = -1$

$a + c = b$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-b}{a} = \frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x^2 - x - 3$	+	0	-	+
			مخالف	

ب) $B = x^2 - 4x + 4$

$x^2 - 4x + 4 = 0 \rightarrow (x-2)(x-2) = 0$

$(x-2)^2 = 0$

$x-2=0 \rightarrow x=2$ مضارب

x	$-\infty$	2	$+\infty$
B	+	0	+

پ) $C = 3x^2 - 5x$

$3x^2 - 5x = 0$

$x(3x-5) = 0$

$x=0$

$x = \frac{5}{3}$

x	$-\infty$	0	$\frac{5}{3}$	$+\infty$
$3x^2 - 5x$	+	0	-	+
			مخالف	

ت) $D = 2x^2 - x + 1$

$2x^2 - x + 1 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4(2)(1)$

$= +1 - 8 = -7 < 0$ ریشه نداریم

x	$-\infty$	$+\infty$
D	+	+
		موافق است

ث) $E = \frac{x(x-3)^2}{x^2+x-2}$

$x-3=0$
 $x=3$

$x^2+x-2=0$

$1+1-2=0$

$1+1-2=0$

$x=1$

$x = \frac{c}{a} = \frac{-2}{1} = -2$

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
x	—	—	0	+	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+	+	+
x^2+x-2	+	0	-	-	0	+
E	-	0	+	0	+	+

ج) $F = (x^2+2x+1)(x^2-4)$

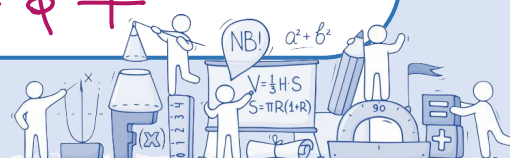
$(x+1)^2=0$
 $x=-1$ مضارب

$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

x	$-\infty$	-2	-1	2	$+\infty$
x^2+2x+1	+	+	+	+	+
x^2-4	+	0	-	-	+
F	+	0	-	0	+



ج) $G = \frac{x^2(x-3)^3}{x(2x+1)}$

$x^2 = 0$
 $x = 0$
مضاعف

$x = 0$
ریشه

$2x+1=0$
 $x = -\frac{1}{2}$
ریشه

$x-3=0$
 $x=3$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	3	$+\infty$
x^2	+	+	+	+	+
$(x-3)^3$	-	-	-	+	+
x	-	-	+	+	+
$2x+1$	-	+	+	+	+
G	-	+	+	-	+

ح) $H = \frac{-x^2+6x-9}{x^2+x+3}$

↓
بارریشه‌ها: ۳، ۳، ۳، ۱، ۱، ۱
+ معادله تعیین علامت برای کسر دهنده

روش سریع برای تعیین علامت عبارت های ضربی و کسری

ریشه همه عبارت ها را پیدا کرده و در سطر اول جدول تعیین علامت، از کوچک به بزرگ می نویسیم.
علامت اولین ناحیه از سمت راست (بعد از بزرگترین ریشه) را تعیین کرده و سپس با عبور از ریشه های ساده یا مکرر فرد، علامت را تغییر می دهیم و با عبور از ریشه مضاعف یا مکرر زوج یا عبارت قدرمطلق، علامت عوض نمی شود.

۱) ریشه های مخرج همواره تعریف نشده (ت.ن.ح.) هستند.

نکته

۲) تعداد تکرارهای هر ریشه از صورت و مخرج با هم حساب می شوند.

عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۴

۱) $P(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+5)}$

$$\text{ب) } f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x - 6)^3}{(x - 5)^2}$$

$$\text{پ) } q(x) = \frac{(x^2 + 3x + 5)|x - 1|}{(x + 2)^3(x^2 - 4)}$$

نکته: بارفت در جدول تعیین علامت عبارت های درجه دوم در حالتی که $\Delta < 0$ است، می بینیم که علامت عبارت،

همواره مثبت یا همواره منفی است. بنابراین داریم:

حالت اول:

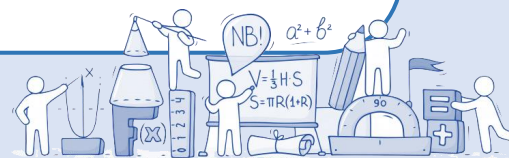
$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$$

به عبارتی علامت $p(x) = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است یا سهمی آن همواره بالای محور x ها قرار می گیرد.

حالت دوم:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0$$

به عبارتی علامت $p(x) = ax^2 + bx + c$ همواره منفی است یا سهمی آن همواره زیر محور x ها قرار می گیرد.



مثال ۲۵ به ازای کدام مقدار m ، نمودار سهمی به معادله $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور x ‌هاست؟

(۱) $m > -2$

(۲) $-2 < m < -1$

(۳) $-2 < m < 2$

(۴) $-1 < m < 2$

به ازای کدام مقدار a عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ همواره منفی است؟

(۱) $\mathbb{R}$

(۲) $a < 1$

(۳) $\emptyset$

(۴) $1 < a < 5$

اگر $P(x) = ax^2 + bx + c$

نکته

۱) $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ مماس بر محور طول‌ها و روبه بالا است.

۲) $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ مماس بر محور طول‌ها و روبه پایین است.

۳) $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ همواره نامنفی است. ($P(x) \geq 0$)

۴) $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ همواره نامثبت است. ($P(x) \leq 0$)



نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، چهار نامعادله به صورت زیر ساخته می‌شود:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچکتر از B است
$A \leq B$	A کوچکتر یا مساوی B است
$A > B$	A بزرگتر از B است
$A \geq B$	A بزرگتر یا مساوی B است

دو ویژگی کاربردی در نامعادلات

اگر A و B و C عبارت‌های جبری باشند:

$$1) A < B \Rightarrow A + C < B + C$$

$$2) A > B \Rightarrow \begin{cases} AC > BC & C > 0 \\ AC < BC & C < 0 \end{cases}$$

نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

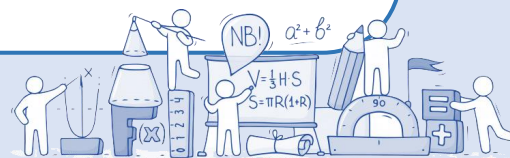
مثال ۲۷

$$1) 5x - 1 \geq 3x - 7$$

$$2) -2 < 3x - 1 \leq 8$$

حل نامعادله درجه اول

همانند حل معادله درجه اول، مجهول‌ها را یک طرف و معلومات را طرف دیگر نامساوی قرار می‌دهیم. پس از ساده کردن و تنها کردن x ، مجموعه جواب نامعادله مشخص می‌شود.



نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید.

۱) $2x + 5 \leq x - 1$

ب) $-1 < 3x + 8 \leq 5$

پ) $0 \leq \frac{x+1}{5} < -2$

ت) $0 \leq \frac{x+1}{5} < -2$

حل نامعادلات کلی به کمک جدول تعیین علامت

ابتدا همه عبارت های جبری را در یک طرف نامساوی قرار می دهیم تا به یکی از شکل های $p < 0$ ، $p \leq 0$ ، $p > 0$ و یا $p \geq 0$ برسیم.

با حل $p = 0$ ریشه های p را پیدا کرده و جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم.

از روی سطر آخر، مجموعه جواب را با توجه به علامت نامعادله مشخص می کنیم.

نکته

نامعادله	انتخاب مجموعه جواب
$p < 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت منفی وجود دارد
$p \leq 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت منفی یا صفر وجود دارد
$p > 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت مثبت وجود دارد
$p \geq 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت مثبت یا صفر وجود دارد



نکته



در نامعادلات کسری، حواسمان به حذف ریشه‌های مخارج از بازه جواب باشد.

مثال ۲۹



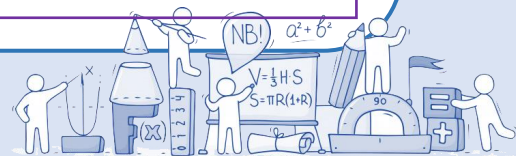
مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید و به صورت بازه نشان دهید.

$$1) \quad x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$2) \quad 2x^2 + 4 \leq x^2 - 5x$$

$$3) \quad \frac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)^2} < 0$$

$$4) \quad (x^2 - 3x + 4)(x^2 - 4) \leq 0$$



ث) $x^2 \leq 4$

ج) $3x^2 - x - 2 \geq 0$

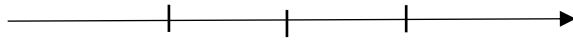
چ) $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$

ز) $H = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

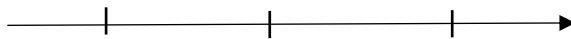


نامعادلات قدر مطلق

وقت می‌گوییم $|x| = 2$ ، منظور مقادیری از x است که فاصله آن‌ها تا مبدا برابر ۲ است. پس $x = 2$ و $x = -2$.



بنابراین معنی $|x| \leq 3$ این است که مقادیری از x را بیابیم که فاصله آن‌ها تا مبدا مختصات کوچکتر یا مساوی ۳ باشد. یعنی $-3 \leq x \leq 3$.



همچنین $|x| \geq 2$ یعنی مقادیری از x که فاصله آن‌ها تا مبدا مختصات بزرگتر یا مساوی ۲ است. یعنی $x \leq -2$ یا $x \geq 2$.



اگر لایک عبارت جبری a یک عدد حقیقی مثبت باشد:

توجه



$$1) |u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a$$

$$2) |u| \geq a \Rightarrow u \leq -a \cup u \geq a$$

نامعادلات قدر مطلق زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید.

مثال ۳۰

$$1) |2x - 1| \geq 5$$

$$2) |x - 4| < 1$$

$$3) |2x + 3| \leq 4$$



ت) $|2x| + 1 \geq 3$

ث) $\left| \frac{x}{3} + 1 \right| < \frac{2}{3}$

ج) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 3$

چ) $|x+3| \leq -1$

