

آسان

۳-

$$1) x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 + 3x = -2 \xrightarrow{(-\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}} x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -2 + \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x + \frac{9}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow (x + \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x + \frac{3}{2} = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \\ x + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1 \\ x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -2 \end{cases}$$

$$ب) x^2 - x = 12 \xrightarrow{(-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}} x^2 - x + \frac{1}{4} = 12 + \frac{1}{4} \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{2}) = \pm \frac{7}{2} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ x - \frac{1}{2} = -\frac{7}{2} \Rightarrow x = -\frac{7}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{6}{2} = -3 \end{cases}$$

$$پ) 3x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow 3x^2 + x = 4 \xrightarrow{\div 3} x^2 + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}$$

$$\xrightarrow{(\frac{1}{6})^2 = (\frac{1}{6})^2 = \frac{1}{36}} x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{1}{36} = \frac{4}{3} + \frac{1}{36} \Rightarrow (x + \frac{1}{6})^2 = \frac{48 + 1}{36} = \frac{49}{36}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{6} = \pm \frac{7}{6} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{6} = \frac{7}{6} \Rightarrow x = \frac{7}{6} - \frac{1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x + \frac{1}{6} = -\frac{7}{6} \Rightarrow x = -\frac{7}{6} - \frac{1}{6} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3} \end{cases}$$

متوسط

۴-

$$4x^2 + 2x = 3 \xrightarrow{\div 4} x^2 + \frac{1}{2}x = \frac{3}{4} \xrightarrow{-\frac{1}{16}} x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = \frac{3}{4} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{16} \Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = \frac{13}{16}$$

با مقایسه $m = \frac{1}{4}$ و $n = \frac{13}{16}$ به دست می آید.

آسان

۵-

$$1) 2x^2 + 5x - 7 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(2)(-7) = 81$$

$$x_1, x_2 = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{2(2)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-5 - 9}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} \\ x_2 = \frac{-5 + 9}{4} = 1 \end{cases}$$

$$ب) x^2 + x - 56 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-56) = 225$$

$$x_1, x_2 = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-1 + 15}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{-1 - 15}{2} = -8 \end{cases}$$

$$پ) 3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(3)(-2) = 25$$

$$x_1, x_2 = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2(3)} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1 + 5}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{1 - 5}{6} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$



آسان

۱-

$$1) x(\Delta x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \Delta x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{\Delta} \end{cases}$$

$$ب) x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x + 2)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$پ) 4x^2 - 81 = 0 \Rightarrow (2x - 9)(2x + 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ x = -\frac{9}{2} \end{cases}$$

$$ت) 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1)(3x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$ث) x^2 - 7x - 18 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$ج) x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$چ) (2x + 1)^2 - (x - 1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (2x + 1 + x - 1)(2x + 1 - x + 1) = 0 \Rightarrow 3x(x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$ح) (x + 2)(x - 3) - (x - 3) = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$خ) x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow x - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

آسان

۲-

$$1) 3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

$$ب) x^2 = -2 \quad \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$پ) (r - 3)^2 = 25 \Rightarrow r - 3 = \pm\sqrt{25} \Rightarrow r - 3 = \pm 5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r - 3 = 5 \Rightarrow r = 8 \\ r - 3 = -5 \Rightarrow r = -2 \end{cases}$$

$$ت) 5x^2 = 125 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$$

$$ث) x^2 + 6 = 0 \Rightarrow x^2 = -6 \quad \text{ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$ج) (2t - 1)^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} 2t - 1 = 3 \\ 2t - 1 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -1 \end{cases}$$

متوسط

-۱۳

طول رشته سیم محیط مستطیل است. اگر ابعاد مستطیل را a و b در نظر بگیریم، آنگاه $2(a+b) = 80$ بنابراین $a+b = 40$ می‌باشد از طرفی مساحت مستطیل $ab = 300$ می‌باشد، پس داریم:

$$\begin{cases} a+b=40 \Rightarrow b=40-a & (1) \\ ab=300 \xrightarrow{(1)} a(40-a)=300 \Rightarrow 40a-a^2-300=0 \\ a^2-40a+300=0 \Rightarrow (a-10)(a-30)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=10 \Rightarrow b=30 \\ a=30 \Rightarrow b=10 \end{cases} \end{cases}$$

پس طول مستطیل ۳۰ و عرض آن ۱۰ می‌باشد.

متوسط

-۱۴

$$2x+1$$



x

$$x(2x+1) = 55 \Rightarrow 2x^2 + x - 55 = 0$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(2)(-55) = 441 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{441}}{2(2)} = \frac{-1 \pm 21}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1+21}{4} = \frac{20}{4} = 5 \quad \text{قابل قبول}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1-21}{4} = \frac{-22}{4} = -\frac{11}{2} \quad \text{غیر قابل قبول}$$

$$\text{طول} = 2x+1 = 2(5)+1=11$$

متوسط

-۱۵

فرض می‌کنیم x عدد فرد باشد.

اعداد فرد متوالی: $x, x+2, x+4, \dots$

$$x^2 + (x+2)^2 = 202 \Rightarrow x^2 + x^2 + 4 + 4x = 202$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 198 = 0$$

$$\div 2 \rightarrow x^2 + 2x - 99 = 0 \Rightarrow (x+11)(x-9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=9 \\ x=-11 (x \in \mathbb{N}) \end{cases} \quad \text{غرض}$$

بنابراین اعداد طبیعی مورد نظر ۹ و ۱۱ هستند.

آسان

-۱۶

$$\text{آ)} \quad 3x^2 + 4x - 7 = 0 \xrightarrow{3+4-7=0} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -\frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\text{ب)} \quad 5x^2 - 3x - 8 = 0 \xrightarrow{5+(-8)=-3} \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{8}{5} \end{cases}$$

آسان

-۶

$$\text{آ)} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4(2)(-5) = 44 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

$$\text{ب)} \quad \Delta = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 \Rightarrow x = \frac{-3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -2 \end{cases}$$

متوسط

-۷

$$\text{آ)} \quad x^2 + x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 1 - 28 = -27 < 0 \quad \text{معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$\text{ب)} \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 16 - 16 = 0 \quad \text{معادله ریشه مضاعف دارد.}$$

$$\text{پ)} \quad x^2 + 7x + 12 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = 49 - 48 = 1 > 0 \quad \text{معادله دو ریشه حقیقی متمایز دارد.}$$

متوسط

-۸

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16 - 4(4)(m) = 0 \Rightarrow 16 - 16m = 0$$

$$\Rightarrow 16 = 16m \Rightarrow m = 1$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(4)} = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

متوسط

-۹

$$\Delta < 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 4 - 4(m)(3) < 0$$

$$\Rightarrow 4 - 12m < 0 \Rightarrow 4 < 12m \Rightarrow \frac{1}{3} < m$$

متوسط

-۱۰

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 25 - 4(3)(m+1) > 0$$

$$\Rightarrow 25 - 12m - 12 > 0 \Rightarrow 13 - 12m > 0 \Rightarrow 13 > 12m \Rightarrow \frac{13}{12} > m$$

متوسط

-۱۱

ریشه معادله در خود معادله صدق می‌کند.

$$x = -1 \Rightarrow a(-1)^2 + 3(-1) - 4 = 0 \Rightarrow a - 7 = 0 \Rightarrow a = 7$$

$$\Rightarrow 7x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = (3)^2 - 4(7)(-4) = 9 + 112 = 121$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-3 + \sqrt{121}}{2(7)} = \frac{-3 + 11}{14} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7} \\ x_2 = \frac{-3 - \sqrt{121}}{2(7)} = \frac{-3 - 11}{14} = \frac{-14}{14} = -1 \end{cases}$$

دشواری

-۱۲

α ریشه معادله است پس در معادله صدق می‌کند.

$$4x^2 - 3x - 2 = 0 \Rightarrow 4\alpha^2 - 3\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4\alpha^2 - 3\alpha = 2 \\ 4\alpha^2 = 3\alpha + 2 \end{cases}$$

$$A = (4\alpha^2 - 3\alpha)^5 + \frac{3\alpha + 2}{4\alpha^2} = 2^5 + \frac{3\alpha + 2}{3\alpha + 2} = 32 + 1 = 33$$

آسان

۶- گزینه «۳»

عدد مثبت را x قرار می‌دهیم، داریم:

$$x^2 = 3x + 40 \Rightarrow x^2 - 3x - 40 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \text{ قق} \\ x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5 \text{ غقق } (x \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

متوسط

۷- گزینه «۱»

عدد مثبت مورد نظر را x می‌نامیم، پس معادله مربوط به آن به صورت زیر

است:

$$2x = \frac{x^2}{3} - 9 \Rightarrow \frac{x^2}{3} - 2x - 9 = 0$$

$$\xrightarrow[\text{در ۳ ضرب می‌کنیم}]{\text{طرفین را}} x^2 - 6x - 27 = 0$$

$$(x - 9)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 9 = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ قق} \\ x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ غقق } (x \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

متوسط

۸- گزینه «۳»

دو عدد مورد نظر را x, y فرض می‌کنیم:

$$x = 4y (*)$$

$$xy = 4(x + y) \Rightarrow xy = 4x + 4y \xrightarrow{(*)} 4y \times y = 4(4y) + 4y$$

$$\Rightarrow 4y^2 = 16y + 4y$$

$$\Rightarrow 4y^2 - 20y = 0 \Rightarrow 4y(y - 5) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow |x - y| = 0 - 0 = 0 \\ y - 5 = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow x = 20 \Rightarrow |x - y| = 20 - 5 = 15 \end{cases}$$

متوسط

۹- گزینه «۳»

$$\begin{array}{|c|c|} \hline x & y \\ \hline \end{array}$$

$$\text{محیط} = 2(x + y) = 17 \Rightarrow 2x + 2y = 17 \Rightarrow 2y = 17 - 2x$$

$$\Rightarrow y = \frac{17}{2} - x$$

$$\text{مساحت} = x.y = 18 \Rightarrow x\left(\frac{17}{2} - x\right) = 18 \Rightarrow \frac{17x}{2} - x^2 = 18$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 17x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 4)(2x - 9) = 0$$

غ ق ق چون x طول در نظر گرفته شده است. $x = 4 \Rightarrow$

$$x = \frac{9}{2} \Rightarrow y = \frac{17}{2} - \frac{9}{2} = 4 \Rightarrow |x - y| = \frac{9}{2} - 4 = \frac{1}{2}$$



آسان

۱- گزینه «۴»

$$x^2 + 6x + 4 = -3x^2 + 6x + 5 \Rightarrow x^2 + 6x + 4 + 3x^2 - 6x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (2x - 1)(2x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 0 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \\ 2x + 1 = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

آسان

۲- گزینه «۲»

چون صفر یک ریشه معادله است، پس باید در معادله صدق کند، بنابراین به

جای x عدد صفر قرار می‌دهیم:

$$0^2 - (a - 1) \times 0 + (a - 2) = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

آسان

۳- گزینه «۴»

برای این که $x = 1$ ریشه معادله باشد، باید در معادله صدق کند، پس اگر در

معادله داده شده به جای x عدد ۱ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$(1)^3 + a^2(1)^2 - 3a(1) + 1 = 0 \Rightarrow 1 + a^2 - 3a + 1 = 0 \Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)(a - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2 \end{cases}$$

متوسط

۴- گزینه «۱»

معادله داده شده به صورت $ax^2 + 4 = x^2 + 4a$ است. اگر تمام جملات را به

سمت چپ تساوی منتقل کنیم، خواهیم داشت:

$$ax^2 - x^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow x^2(a - 1) - 4(a - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow (a - 1)(x - 2)(x + 2) = 0$$

چون طبق فرض مسئله $a - 1 \neq 0$ ، پس $x - 2 = 0$ یا $x + 2 = 0$ ، در نتیجه:

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله دو جواب دارد.}$$

متوسط

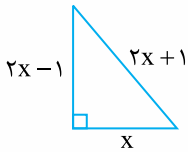
۵- گزینه «۲»

$$(a - 1)(a + 2) = 30 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 30 \Rightarrow a(a + 1) = 32$$

متوسط

۱۵- گزینه «۲»

رابطه فیثاغورس را برای سوال اعمال می‌کنیم.



$$x^2 + (2x-1)^2 = (2x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 + 4x + 1$$

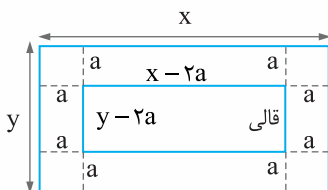
$$x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x-8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 & \text{غ ق} \\ x=8 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$\text{ضلع متوسط} = 2x-1 = 2(8)-1 = 15$$

دشوار

۱۶- گزینه «۱»

فرض کنیم طول و عرض اتاق به ترتیب برابر y, x باشد:



$$xy = 24 = \text{مساحت اتاق}$$

$$\text{محیط اتاق} = 2(x+y) = 20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$$

$$x(10-x) = 24 \Rightarrow 10x - x^2 = 24 \Rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \Rightarrow y=6 \\ x=6 \Rightarrow y=4 \end{cases}$$

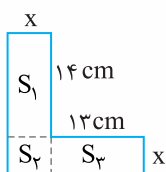
چون طول را x در نظر گرفتیم، $x=6$ پاسخ قابل قبول است.

$$2(x-2a+y-2a) = 12 \Rightarrow 10-4a = 6 \Rightarrow a=1$$

$$\text{مساحت قالی} \Rightarrow (x-2a)(y-2a) = (6-2)(4-2) = 4 \times 2 = 8$$

آسان

۱۷- گزینه «۲»



مطابق شکل مساحت برابر است با:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 \Rightarrow S = 14x + x^2 + 13x = 160$$

$$\Rightarrow x^2 + 27x - 160 = 0 \Rightarrow (x+32)(x-5) = 0 \xrightarrow{x>0} x=5$$

متوسط

۱۸- گزینه «۳»

مساحت مثلث + مساحت مستطیل = مساحت شکل

$$1200 = x \times 1 + \frac{1}{2}x \cdot x \Rightarrow \frac{x^2}{2} + x = 1200 \Rightarrow x^2 + 2x - 2400 = 0$$

$$\Rightarrow (x+50)(x-48) = 0 \xrightarrow{x>0} x=48$$

متوسط

۱۰- گزینه «۴»

دو عدد فرد متوالی را $2k-1$ و $2k+1$ فرض می‌کنیم:

$$(2k-1)(2k+1) = 323 \Rightarrow 4k^2 - 1 = 323$$

$$4k^2 = 324 \Rightarrow k^2 = 81 \Rightarrow k = \pm 9 \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} k=9$$

$$\text{مجموع دو عدد فرد متوالی} = (2k-1)(2k+1) = 4k = 4(9) = 36$$

متوسط

۱۱- گزینه «۲»

دو عدد مورد نظر را $2k+2$ و $2k$ فرض می‌کنیم. در نتیجه:

$$4k^2 + 4k - 224 = 0 \Rightarrow k^2 + k - 56 = 0$$

$$\Rightarrow (k-7)(k+8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=7 \\ k=-8 \end{cases}$$

$k=7$ قابل قبول است بنابراین دو عدد مورد نظر ۱۶، ۱۴ است و مجموع آن‌ها

۳۰ خواهد بود.

متوسط

۱۲- گزینه «۲»

دو عدد صحیح متوالی را $k+1, k$ در نظر می‌گیریم:

$$k^2 + (k+1)^2 = 925 \Rightarrow k^2 + k^2 + 2k + 1 = 925$$

$$\Rightarrow 2k^2 + 2k - 924 = 0 \Rightarrow k^2 + k - 462 = 0$$

$$\Rightarrow (k-21)(k+22) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k=21 \Rightarrow k+1=22 \\ k=-22 \Rightarrow k+1=-21 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع دو عدد} = \begin{cases} 21+22=43 \\ (-22)+(-21)=-43 \end{cases}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۳»

اعداد طبیعی مورد نظر را به ترتیب $x+4, x+3, x+2, x+1, x$ فرض

می‌کنیم:

$$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = (x+3)^2 + (x+4)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$$

$$= x^2 + 6x + 9 + x^2 + 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 8x - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=10 & \text{قابل قبول} \\ x=-2 & \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۲»

$$\begin{cases} x-y=4 \Rightarrow y=x-4 \\ x^2+y^2=136 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (x-4)^2 = 136$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 - 8x + 16 = 136 \Rightarrow 2x^2 - 8x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 60 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=10 \xrightarrow{x-y=4} y=6 \\ x=-6 \xrightarrow{x-y=4} y=-10 \end{cases}$$

۱۹- گزینه «۱»

متوسط

معادله مسئله به صورت زیر است:

$$4x^2 = 12x - 9 \Rightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{3}$$

۲۰- گزینه «۲»

متوسط

$$x^2 + 4y^2 = 4xy \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = 0 \Rightarrow (x - 2y)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 2y = 0 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = 2$$

۲۱- گزینه «۱»

متوسط

روش اول:

$$35x^2 - 20x - 15 = 0 \Rightarrow 7x^2 - 4x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(7)(-3) = 100$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm 10}{14} \Rightarrow \begin{cases} x' = 1 \\ x'' = \frac{-3}{7} \end{cases}$$

روش دوم: مجموع ضرایب صفر است.

$$a + b + c = 0 \Rightarrow x' = 1, x'' = \frac{-3}{7} = \frac{c}{a}$$

۲۲- گزینه «۲»

متوسط

روش اول: ابتدا طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$75x^2 - x - 74 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4(75)(-74) = 22201$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 \pm 149}{150} \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{-148}{150} = \frac{-74}{75}$$

روش دوم: مجموع ضرایب صفر است پس یکی از ریشه‌ها ۱ و ریشه دیگر

$$\text{برابر } \frac{c}{a} = \frac{-74}{75} \text{ خواهد شد.}$$

۲۳- گزینه «۲»

آسان

وقتی یک معادله درجه دوم دارای دو ریشه متمایز است که در آن $\Delta > 0$ باشد.

در گزینه «۲» داریم:

$$x^2 + x = 1 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(1)(-1) = 5 > 0$$

در سایر گزینه‌ها $\Delta < 0$ بوده که بیانگر نداشتن ریشه حقیقی است.

۲۴- گزینه «۳»

آسان

در گزینه «۳» داریم:

$$x^2 + 6x = 2x - 4 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(4) = 0$$

وقتی معادله درجه دوم، ریشه مضاعف دارد که دلتای آن مساوی صفر باشد؛ در سایر گزینه‌ها $\Delta \neq 0$ است.

۲۵- گزینه «۱»

متوسط

برای این که ریشه‌های معادله درجه دوم با هم مساوی باشند، باید دلتای آن برابر صفر باشد، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4)^2 - 4(1)(-a - 1) = 0 \Rightarrow 16 + 4a + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 4a + 20 = 0 \Rightarrow 4a = -20 \Rightarrow a = \frac{-20}{4} = -5$$

۲۶- گزینه «۲»

متوسط

برای این که ریشه‌های معادله درجه دوم با هم برابر باشند، باید دلتای آن معادله برابر صفر باشد؛ پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3a + 1)^2 - 4(1)(2a^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow 9a^2 + 6a + 1 - 8a^2 - 8 = 0 \Rightarrow a^2 + 6a - 7 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 1)(a + 7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1 \\ a + 7 = 0 \Rightarrow a = -7 \end{cases}$$

۲۷- گزینه «۲»

متوسط

برای این که معادله $x^2 - 2mx + 6 - m = 0$ دارای دو ریشه مساوی باشد؛ باید دلتای آن برابر صفر باشد، پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(1)(6 - m) = 4m^2 - 24 + 4m = 0$$

اگر طرفین تساوی فوق را بر ۴ تقسیم کنیم:

$$m^2 + m - 6 = 0 \Rightarrow (m - 2)(m + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m - 2 = 0 \Rightarrow m = 2 \\ m + 3 = 0 \Rightarrow m = -3 \end{cases}$$

۲۸- گزینه «۴»

متوسط

برای این که یک معادله درجه دوم ریشه مساوی داشته باشد، باید دلتای آن معادله برابر صفر باشد؛ پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2m)^2 - 4(1)(m^2 + n) = 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 - 4m^2 - 4n = 0 \Rightarrow -4n = 0 \Rightarrow n = 0$$

۲۹- گزینه «۲»

آسان

عبارت درجه دوم وقتی مربع کامل می‌شود که دلتای آن مساوی صفر باشد؛ پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (4m)^2 - 4(1)(16) = 16m^2 - 64 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 = 4 \Rightarrow m = \pm 2$$



دشوار

۳۶- گزینه «۳»

پول اکرم و علی را به ترتیب x, y می‌نامیم.

$$x + y = 100 \Rightarrow y = 100 - x$$

اگر علی ۱۰ تومان به اکرم بدهد، پول علی $y - 10$ و پول اکرم $x + 10$ خواهد بود.

$$(x + 10)(y - 10) = 475 \Rightarrow (x + 10)(100 - x - 10) = 475$$

$$\Rightarrow (x + 10)(90 - x) = 475 \Rightarrow x = 85$$

دشوار

۳۷- گزینه «۳»

$$x^2 + 6x + m = x^2 + 2x - 3m$$

$$\Rightarrow 6x + m = 2x - 3m \Rightarrow 4x = -4m \Rightarrow x = -m$$

$$x = -m \Rightarrow m^2 - 6m + m = 0 \Rightarrow m = 0, 5$$

$$m = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x = 0 \Rightarrow x = 0, -6 \\ x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x = 0, -2 \end{cases}$$

$$m = 5 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 6x + 5 = 0 \Rightarrow x = -1, -5 \\ x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = -5, 3 \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌های غیرمشترک برابر ۴ است.



آسان

-۱

ابتدا از ضریب x^2 فاکتورگیری می‌کنیم:

$$y = 3(x^2 - 2x + \frac{1}{3})$$

حال ضریب x را بر ۲ تقسیم و به توان ۲ می‌رسانیم یک‌بار اضافه می‌کنیم و یک‌بار کم می‌کنیم در نتیجه داریم:

$$-2 \div 2 = -1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 1$$

$$y = 3(x^2 - 2x + 1 - 1 + \frac{1}{3}) \Rightarrow y = 3(x^2 - 2x + 1 + \frac{-2}{3})$$

$$\Rightarrow y = 3(x - 1)^2 - 2$$

آسان

-۲

کافی است اتحاد مربع کامل را باز کنیم.

$$y = -2(x^2 + 16 + 8x) + 3 \Rightarrow y = -2x^2 - 32 - 16x + 3$$

$$y = -2x^2 - 16x - 29$$

آسان

۳۰- گزینه «۲»

برای این که یک عبارت درجه دوم، مربع کامل شود باید دلتای آن مساوی صفر باشد؛ پس:

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow (a + 2)^2 - 4(1)(2a) = 0 \Rightarrow a^2 + 4a + 4 - 8a = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

آسان

۳۱- گزینه «۲»

در این معادله دلتا برابر صفر است پس ریشه‌ها برابرند و $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = -\sqrt{5}$. بنابراین هر دو ریشه گنگ هستند.

متوسط

۳۳- گزینه «۱»

چون ۲ یک ریشه معادله است، پس باید در معادله صدق کند، بنابراین:

$$(m - 1)(2)^2 - 7(2) + 2m = 0 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow \text{معادله } 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4(2)(6) = 1 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

متوسط

۳۳- گزینه «۱»

چون ۵ یک جواب معادله $3x^2 + kx - 10 = 0$ است، پس باید در آن صدق کند؛ بنابراین:

$$3(5)^2 + k(5) - 10 = 0 \Rightarrow 75 + 5k - 10 = 0$$

$$\Rightarrow 5k = -65 \Rightarrow k = -13$$

حال در معادله به جای k عدد -13 را قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم:

$$3x^2 - 13x - 10 = 0 \Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-13)^2 - 4(3)(-10) = 289$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13 \pm \sqrt{289}}{6} = \frac{13 \pm 17}{6} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

دشوار

۳۴- گزینه «۱»

اگر در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ مجموع ضرایب صفر باشد، یکی از ریشه‌ها ۱ و ریشه دیگر $\frac{c}{a}$ است.

دشوار

۳۵- گزینه «۳»

چون اعداد -1 و 2 ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند، پس باید در معادله صدق کنند.

$$\begin{cases} a(-1)^2 + b(-1) + c = 0 \Rightarrow a - b + c = 0 \\ a(2)^2 + b(2) + c = 0 \Rightarrow 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4 \times \begin{cases} a - b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -4a + 4b - 4c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow + \begin{cases} -4a + 4b - 4c = 0 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow 6b - 3c = 0 \Rightarrow 2b - c = 0$$

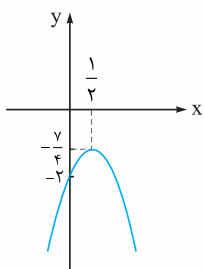


$$S\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$$

برخورد با محور y ها $c = -2 \rightarrow$

$$-x^2 + x - 2 = 0$$

محور x ها را قطع نمی‌کند. $\Delta = 1 - 8 = -7 < 0$



(ث)

سهمی دارای مینیمم است $a = 2 > 0 \Rightarrow$

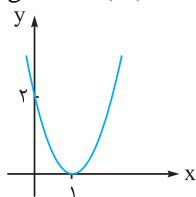
رأس، $S(1, 0)$ محور تقارن و طول رأس $x = 1$

دقت کنید در این سهمی با توجه به فرمول کلی $y = 0$ است بنابراین $x = 1$ ریشه مضاعف است و نمودار سهمی بر محور طول‌ها مماس است.

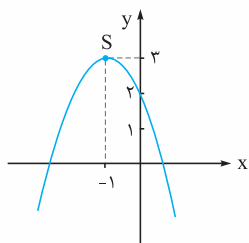
برای دقت نمودار یک نقطه دلخواه مثلاً به طول $x = 0$ را نیز بدست می‌آوریم:

$$y = 2(0 - 1)^2 = 2$$

نقطه کمکی $(0, 2)$



(ج)



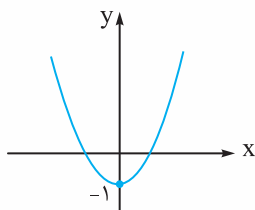
سهمی ماکزیمم دارد $a = -1 < 0$

$(0, 2) \Rightarrow$ برخورد سهمی با محور y ها $y = -(0 + 1)^2 + 3 = 2$

محور تقارن و طول رأس $x_S = -1$

رأس سهمی $S(-1, 3) \Rightarrow$

(ج)



سهمی مینیمم دارد $a = 2 > 0$

محور تقارن محور y ها است. $x_S = 0$

$S(0, -1)$

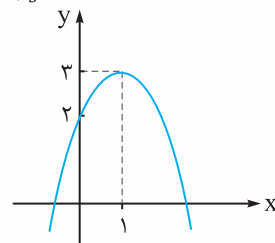
آسان

۳-

آ) در این سهمی $a = -1$ می‌باشد، پس دهانه سهمی رو به پایین و دارای ماکزیمم است.

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ رأس محور تقارن و طول رأس}$$

$$y_S = -(1)^2 + 2(1) + 2 = 3 \Rightarrow S(1, 3)$$



چون $c = 2$ می‌باشد، سهمی محور y ها را در ۲ قطع می‌کند.

(ب)

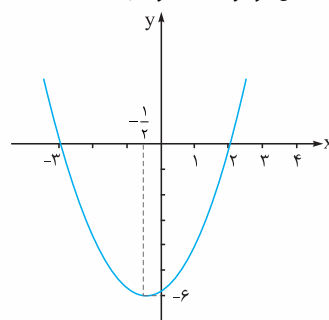
$$a = 1 > 0 \quad x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$$

$$y_S = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) - 6 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = \frac{1-2-24}{4} = \frac{-25}{4}$$

$$S\left(\frac{-1}{2}, \frac{-25}{4}\right)$$

محل برخورد با محور x ها $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2 \rightarrow$

محل برخورد با محور y ها $c = -6 \rightarrow$



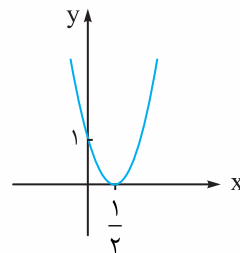
سهمی محور x ها را در ۲ نقطه قطع می‌کند ($\Delta > 0$).

(پ)

$$a = 4 > 0 \quad x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad y_S = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = 0 \Rightarrow S\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$4x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow (2x - 1)^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

محل برخورد با محور y ها $c = 1 \rightarrow$



سهمی بر محور x ها مماس شده است. ($\Delta = 0$)

(ت)

$$a = -1 < 0 \quad x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow y_S = \frac{-7}{4}$$

-۴

آسان

چون دو نقطه از سهمی با عرض‌های مساوی داریم، معادلهٔ محور تقارن دقیقاً وسط طول‌های این دو نقطه است.

$$x = \frac{3 + (-1)}{2} = 1$$

-۵

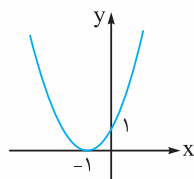
آسان

یعنی سهمی از نقاط $(2, 0)$ و $(-3, 0)$ می‌گذرد، پس محور تقارن: $x = \frac{-3 + 2}{2} = \frac{-1}{2}$ می‌باشد.

-۶

متوسط

(آ)



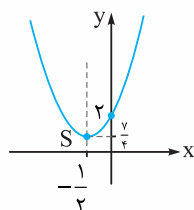
سهمی مینیمم دارد. $a = 1 > 0$

$$x = -1 \Rightarrow S(-1, 0)$$

محل برخورد با محور y ها $(0, 1) \Rightarrow (0 + 1)^2 = 1 \Rightarrow x = 0$

(سهمی در $x = -1$ بر محور x ها مماس است، پس $x = -1$ ریشهٔ مضاعف

$$y = 0 \Rightarrow (x + 1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow \text{می‌باشد. (ب)}$$



$(0, 2)$ تلاقی با محور y

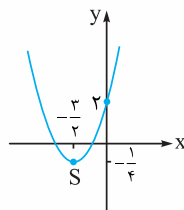
سهمی مینیمم دارد $a = 1 > 0$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right) + 2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{+7}{4}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$$

رأس سهمی $S\left(\frac{-1}{2}, \frac{7}{4}\right)$

سهمی محور x ها را قطع نمی‌کند، پس معادلهٔ مربوط به آن فاقد ریشه است یعنی $\Delta < 0$ می‌باشد. (پ)



$$x = 0 \Rightarrow y = 2$$

سهمی مینیمم دارد $a = 1$

$$\Rightarrow y = \left(\frac{-3}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{-3}{2}\right) + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{-1}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$$

-۷

دشوار

طول رأس سهمی از رابطهٔ $x = \frac{-b}{2a}$ به دست می‌آید و چون روی خط $y = -x$ قرار دارد داریم:

$$x_s = \frac{-m}{2(1)} = \frac{-m}{2} \Rightarrow S\left(\frac{-m}{2}, \frac{m}{2}\right)$$

مختصات این نقطه را در معادله جایگزین می‌کنیم:

$$y = x^2 + mx + 6$$

$$\frac{m}{2} = \left(\frac{-m}{2}\right)^2 + m\left(\frac{-m}{2}\right) + 6 \Rightarrow \left(\frac{m}{2} = \frac{m^2}{4} - \frac{m^2}{2} + 6\right) \times 4$$

$$\Rightarrow 2m = m^2 - 2m^2 + 24 \Rightarrow m^2 + 2m - 24 = 0 \Rightarrow (m + 6)(m - 4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -6 \Rightarrow y = x^2 - 6x + 6 \Rightarrow S(3, -3) \\ m = 4 \Rightarrow y = x^2 + 4x + 6 \Rightarrow S(-2, 2) \end{cases}$$

چون راس روی نیمساز ناحیه دوم قرار دارد باید طول منفی و عرض مثبت

باشد. در حالت $m = -6$ رأس روی نیمساز ناحیه چهارم و در حالت $m = 4$

روی نیمساز ناحیه دوم قرار دارد.

-۸

آسان

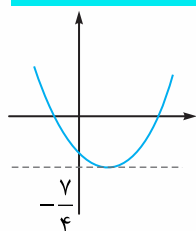
$$x = -\frac{4}{3} = \frac{-1}{2a} \Rightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$y = \frac{3}{8}x^2 + x - \frac{9}{8}$$

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{9}{8} \text{ نقطه برخورد با محور عرض‌ها}$$

-۹

آسان

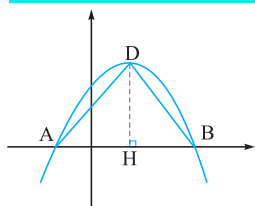


$$y_s = -\frac{1}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + k = -\frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{-3}{2}$$

متوسط

-۱۵



$$\frac{-b}{2a} = 3$$

$$\text{ارتفاع} = DH = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = f(3) = 16$$

$$\text{قاعده} = AB = |x_B - x_A| = 8$$

محل برخورد تابع با محور x ها ۱-۷، است:

$$S = \frac{16 \times 8}{2} = 64$$

متوسط

-۱۶

$$\begin{cases} y = fx^2 - 6x + c \\ y = a(x - x_0)^2 + \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ x_0 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = 4\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow y_s = \frac{3}{4} \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{4}\right) + c = \frac{3}{4} \Rightarrow c = 3$$

$$a + x_0 + c = 4 + \frac{3}{4} + 3 = \frac{31}{4}$$

متوسط

-۱۷

$$f(x) = a(x+1)(x-3)$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow a(1)(-3) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x+1)(x-3)$$

$$g(x) = a(x-1)(x-5)$$

$$\text{طول رأس میانگین نقاط برخورد با محور x ها یعنی } \frac{1+5}{2} = 3 \text{ می باشد که}$$

عرض آن برابر ۲ است.

$$g(3) = 2 \Rightarrow a(2)(-2) = 2 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x-5)$$

آسان

-۱۰

$$y = 0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2 + 5x - 20 = 0 \Rightarrow x^2 - 15x + 60 = 0$$

$$\Delta < 0 \rightarrow \text{معادله جواب حقیقی ندارد.}$$

پس سهمی محور طولها را قطع نمی کند.

آسان

-۱۱

$$y = mx^2 - 6x + 1$$

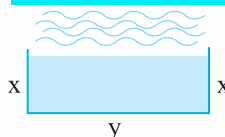
$$\Delta = 0 \Rightarrow 36 - 4m = 0 \Rightarrow m = 9 \Rightarrow$$

$$y = 9x^2 - 6x + 1 = (3x-1)^2$$

$$\text{طول نقطه تماس با محور x ها} = -\frac{b}{2a} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}, 0\right)$$

دشواری

-۱۲



$$2x + y = 180 \Rightarrow y = -2x + 180$$

$$S = xy = x(-2x + 180) = -2x^2 + 180x$$

$$S_{\max} \text{ را می توان از طریق } -\frac{b}{2a} \text{ یا } f\left(-\frac{b}{2a}\right) \text{ به دست آورد. داریم:}$$

$$S_{\max} = S\left(-\frac{b}{2a}\right) = S(45) = -2 \times 45^2 + 180 \times 45$$

$$= 90(90 - 45) = 90 \times 45 = 4050$$

آسان

-۱۳

$$\max = \frac{11}{12} \Rightarrow f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{11}{12} \Rightarrow f\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow (-3)\left(\frac{1}{36}\right) - \left(-\frac{1}{6}\right) + 2m - 1 = \frac{11}{12}$$

$$\Rightarrow -1 + 2 + 24m - 12 = 11 \Rightarrow 24m = 22 \Rightarrow m = \frac{11}{12}$$

آسان

-۱۴

$a > 0$: زیرا سهمی دارای نقطه $\min$ است.

$c > 0$: زیرا سهمی در y های مثبت محور y را قطع می کند.

$b > 0$: زیرا در نقطه برخورد با محور y شیب مماس مثبت است.



۵- گزینه «۴»

متوسط

$$\frac{y+3x}{2} = \frac{-x^2+y}{3} \Rightarrow 3(y+3x) = 2(-x^2+y)$$

$$\Rightarrow 3y+9x = -2x^2+2y \Rightarrow 3y-2y = -2x^2-9x$$

$$\Rightarrow y = -2x^2-9x$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{9}{2(-2)} = -\frac{9}{4}$$

معادله محور تقارن:

۶- گزینه «۴»

آسان

مینیم یک نقطه در سهمی همان نقطه رأس است.

اگر $y = ax^2 + bx + c$ باشد، خواهیم داشت:

$$x_s = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-m}{2(1)} = 4 \Rightarrow \frac{-m}{2} = 4 \Rightarrow -m = 8 \Rightarrow m = -8$$

$$y_s = (4)^2 + (-8)(4) + n \Rightarrow -11 = 16 - 32 + n$$

$$\Rightarrow n = 5 \Rightarrow m + n = -8 + 5 = -3$$

۷- گزینه «۳»

متوسط

دهانه سهمی رو به پایین ($a < 0$) و طول رأس سهمی منفی ($-\frac{b}{2a} < 0$)

است بنابراین گزینه (۳) درست است.

۸- گزینه «۱»

آسان

اولاً: نمودار تابع از مبدأ می‌گذرد، پس (۰،۰) در معادله صدق می‌کند، در نتیجه:

$$0 = 0^2 + 0(m) + n - 1 \Rightarrow n - 1 = 0 \Rightarrow n = 1$$

ثانیاً: طول رأس سهمی برابر با ۲ است، در نتیجه:

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow -\frac{m}{2(1)} = 2 \Rightarrow m = -4$$

۹- گزینه «۴»

متوسط

چون نقطه (۱،-۲) رأس سهمی است، پس حالت کلی آن به صورت

$$y = a(x-1)^2 - 2 \text{ می‌باشد که } a > 0 \text{ است. (به دلیل مینیمم بودن نقطه}$$

رأس) همچنین این نمودار از نقطه (۰،-۱) می‌گذرد، پس:

$$0 = a(-1-1)^2 - 2 \Rightarrow 0 = 4a - 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) - 2 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$$

۱۰- گزینه «۳»

متوسط

اگر $A(x_0, y_0)$ رأس سهمی باشد، می‌توان معادله آن را به صورت

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0 \text{ نوشت.}$$

چون (۰،-۴) رأس سهمی است، پس داریم:

$$y = 3(x+1)^2 - 4$$

برای محاسبه محل تقاطع با محور عرض‌ها، $x = 0$ قرار می‌دهیم؛ داریم:

$$x = 0 \Rightarrow y = 3(0+1)^2 - 4 = -1$$



۱- گزینه «۴»

آسان

چون سهمی در دو نقطه محور x ها را قطع کرده است، پس دو ریشه دارد، در

نتیجه $\Delta > 0$ است و از طرفی چون دهانه سهمی رو به بالاست، داریم: $a > 0$

۲- گزینه «۳»

متوسط

عرض از مبدأ این معادله برابر ۱ است، بنابراین:

$$-n = 1 \Rightarrow n = -1$$

طول رأس سهمی برابر ۲- است، بنابراین:

$$-\frac{b}{2a} = -2 \Rightarrow \frac{-m}{2(-1)} = -2 \Rightarrow -m = 4 \Rightarrow m = -4$$

۳- گزینه «۳»

متوسط

طول نقطه ماکزیم یا مینیم سهمی درجه دوم به معادله $y = ax^2 + bx + c$ برابر

است با $x = \frac{-b}{2a}$ که اگر $a > 0$ مینیم و اگر $a < 0$ نقطه ماکزیم است.

$$y = (2-m)x^2 + (m^2-8)x - 3 \xrightarrow{x_s = 2} \frac{-b}{2a} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{-(m^2-8)}{2(2-m)} = 2 \Rightarrow -(m^2-8) = (2)(2)(2-m)$$

$$\Rightarrow -m^2 + 8 = 8 - 4m \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ ق ق غ} \\ m - 4 = 0 \Rightarrow m = 4 \text{ ق ق} \end{cases}$$

مقداری از m را می‌پذیریم که به‌ازای آن ضریب x^2 منفی باشد.

۴- گزینه «۲»

متوسط

سهمی محور y ها را در نقطه‌ای به عرض مثبت قطع کرده است.

$$x = 0 \Rightarrow y = a(0)^2 + b(0) + c \Rightarrow y = c > 0$$

سهمی روبه بالا است، بنابراین $a > 0$ و طول رأس سهمی عدد منفی است.

$$-\frac{b}{2a} < 0 \Rightarrow \frac{b}{2a} > 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0$$

دشوار

۱۴- گزینه «۳»

برای آن که خط $y = mx + 5$ بر سهمی $y = -mx^2 + 2x + 2$ مماس باشد، باید معادله $-mx^2 + 2x + 2 = mx + 5$ ریشه مضاعف داشته باشد؛ یعنی $\Delta = 0$ باشد.

$$-mx^2 + 2x + 2 = mx + 5 \Rightarrow -mx^2 + (2-m)x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (2-m)^2 - 4(-m)(-3) = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (m^2 - 4m + 4) - 12m = 0 \Rightarrow \Delta = m^2 - 16m + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-16)^2 - 4(1)(4) = 256$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 + \sqrt{256}}{2} = \frac{16 + 16}{2} = 16$$

$$m_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{16 - \sqrt{256}}{2} = \frac{16 - 16}{2} = 0$$

متوسط

۱۵- گزینه «۳»

در یک سهمی معادله محور تقارن $x = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد و همواره موازی محور y ها است.

$$y = x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2$$

$$\Rightarrow y = x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow y = 3x^2 + 6x + 5$$

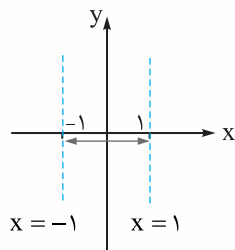
$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-6}{2(3)} = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$y = x^2 + (x-1)^2 + (x-2)^2$$

$$\Rightarrow y = x^2 + x^2 - 2x + 1 + x^2 - 4x + 4$$

$$\Rightarrow y = 3x^2 - 6x + 5$$

$$x = \frac{-b}{2a} \Rightarrow x = \frac{-(-6)}{2(3)} = 1 \Rightarrow x = 1$$



فاصله بین دو محور تقارن ۲ می‌باشد.

متوسط

۱۶- گزینه «۱»

با توجه به شکل $(2, 0)$ رأس سهمی است. و عرض از مبدأ یعنی c برابر ۴ است. بنابراین گزینه (۱) درست است.

متوسط

۱۱- گزینه «۴»

با توجه به این که مبدأ مختصات یعنی $(0, 0)$ در ضابطه $y = -mx^2 + nx$ صدق می‌کند پس تابع از $(0, 0)$ عبور می‌کند.

$$y = -m(x-h)^2 + k \xrightarrow{\text{رأس } (-2, 1)} y = -m(x+2)^2 + 1$$

$$y = -m(x - (-2))^2 + 1 = -m(x+2)^2 + 1$$

$$\xrightarrow{\text{در } (0, 0) \text{ تابع صدق می‌کند}} 0 = m(0+2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = 4m + 1 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$$

همچنین مختصات نقطه رأس نیز در معادله سهمی صدق می‌کند، بنابراین:

$$y = -mx^2 + nx \xrightarrow{(-2, 1)} 1 = -\frac{1}{4}(-2)^2 + n(-2)$$

$$\xrightarrow{(-2, 1)} 1 = -1 - 2n \Rightarrow n = -1$$

$$\Rightarrow m + n = \frac{1}{4} + (-1) = -\frac{3}{4}$$

متوسط

۱۲- گزینه «۲»

اگر $S(x_0, y_0)$ رأس سهمی باشد، معادله سهمی $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ می‌باشد، بنابراین:

$$S(1, 4) \Rightarrow y = a(x-1)^2 + 4$$

این سهمی از نقطه $(3, 16)$ عبور می‌کند.

$$y = a(x-1)^2 + 4 \xrightarrow{x=3, y=16} 16 = a(3-1)^2 + 4$$

$$\Rightarrow 16 = 4a + 4 \Rightarrow 12 = 4a \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow y = 3(x-1)^2 + 4 \Rightarrow y = 3(x^2 - 2x + 1) + 4$$

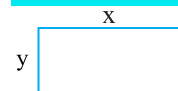
$$\Rightarrow y = 3x^2 - 6x + 7$$

یک نمودار محور y ها را زمانی قطع می‌کند که $x = 0$ باشد، بنابراین:

$$y = 3(0)^2 - 6(0) + 7 \Rightarrow y = 7$$

متوسط

۱۳- گزینه «۲»



$$\text{محیط مستطیل} = 2(x+y) = 20 \Rightarrow x+y=10 \Rightarrow y=10-x$$

$$\text{مساحت مستطیل} = S = xy \Rightarrow S = x(10-x) \Rightarrow S = -x^2 + 10x$$

حداکثر مساحت مستطیل در رأس این سهمی رخ می‌دهد.

$$y = 10 - x \xrightarrow{x=5} y = 10 - 5 = 5$$

$$S = xy = (5)(5) = 25$$

۱۹- گزینه «۳»

دشوار

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow mx^2 - (1+m)x - m - 1 = 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (1+m)^2 + 4m(m+1) \leq 0 \Rightarrow (1+m)(1+5m) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq m < -\frac{1}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -1$$

۲۰- گزینه «۱»

دشوار

طول راس سهمی میانگین ۵-، ۱ است.

بنابراین راس $S(-2, -\frac{1}{2})$ خواهد بود. معادله سهمی را می‌نویسیم.

$$x_S = \frac{-5+1}{2} = -2$$

$$y = a(x+2)^2 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2} = a(0+2)^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow 4a = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2}$$

$$(1, \beta) \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}(1+2)^2 - \frac{1}{2} = 4$$

۲۱- گزینه «۳»

دشوار

محور تقارن‌های دو سهمی با هم برابرند:

$$\frac{-a}{2 \times 1} = \frac{2}{2 \times (-1)} \Rightarrow a = 2$$

دو سهمی در نقطه‌ای به عرض ۱ یکدیگر را قطع می‌کنند (عرض یکسان دارند).

پس:

$$1 = x^2 + 2x - 2 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$1 = -x^2 - 2x + b \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow b = 4 \\ x = -3 \Rightarrow b = 4 \end{cases}$$

بنابراین $ab = 8$ خواهد بود.

۲۲- گزینه «۴»

متوسط

اگر A راس سهمی باشد آن‌گاه:

$$x_A = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{k}$$

$$y_A = \frac{4}{k} - \frac{8}{k} - 6 = \frac{-4}{k} - 6$$

نقطه $(\frac{2}{k}, \frac{-4}{k} - 6)$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد پس:

$$-\frac{4}{k} - 6 = -\frac{8}{k} - 4 \Rightarrow \frac{4}{k} = 2 \Rightarrow k = 2$$

$$y_A = \frac{-4}{2} - 6 = -8$$

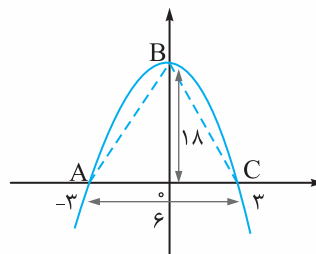
۱۷- گزینه «۳»

دشوار

نقطه B رأس سهمی می‌باشد؛ مشخص است طول آن صفر است، بنابراین:

$$x_S = \frac{-b}{2a} = 0 \Rightarrow \frac{-(m+1)}{2(-2)} = 0 \Rightarrow -(m+1) = 0 \Rightarrow m = -1$$

بنابراین معادله سهمی به شکل زیر است:



$$y = -2x^2 + (-1+1)x - 12(-1) + 6 \Rightarrow y = -2x^2 + 18$$

بنابراین مختصات نقطه B، $(0, 18)$ می‌باشد نقاط C، A ریشه‌های این معادله

می‌باشد.

$$-2x^2 + 18 = 0 \Rightarrow -2x^2 = -18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

بنابراین مختصات نقطه C برابر $(3, 0)$ و مختصات نقطه A، $(-3, 0)$ می‌باشد.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{AC \times OB}{2} = \frac{6 \times 18}{2} = 54$$

دشوار

۱۸- گزینه «۴»

در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ طول رأس سهمی $x_S = \frac{-b}{2a}$ می‌باشد، بنابراین:

$$x_S = \frac{-(-\frac{1}{m+1})}{2m} \Rightarrow \frac{\frac{1}{m+1}}{2m} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{1}{2m(m+1)} = \frac{1}{4} \Rightarrow 2m(m+1) = 4 \Rightarrow m(m+1) = 2 \Rightarrow m^2 + m - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (m+2)(m-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 1 \end{cases}$$

با توجه به آن که سهمی رو به پایین است، ضریب x^2 باید منفی باشد، بنابراین $m = -2$

قابل قبول است.

$$y = -2x^2 - \frac{1}{-2+1}x + n \Rightarrow y = -2x^2 + x + n$$

این سهمی از نقطه $(\frac{3}{4}, 0)$ عبور می‌کند. بنابراین:

$$0 = -2(\frac{3}{4})^2 + \frac{3}{4} + n \Rightarrow -2(\frac{9}{16}) + \frac{3}{4} + n = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{9}{8} + \frac{3}{4} + n = 0 \Rightarrow n = \frac{3}{8}$$

آسان

-۴

$$P(x) = x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
P(x)	+	•	-	+

$$q(x) = \frac{x-1}{-(x-3)^2}$$

x	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
x-1	-	•	+	+
-(x-3) ²	-	-	•	-
q(x)	+	•	-	-

متوسط

-۵

$$P(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{x^2+x+1}$$

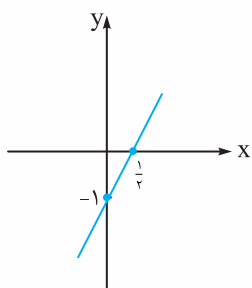
عبارت x^2+x+1 دارای $\Delta < 0$ ، $a > 0$ است پس همواره مثبت است.

x	$-\infty$	-۱	۳	$+\infty$
(x-1)(x-3)	+	•	-	+
x^2+x+1	+	+	+	+
P(x)	+	•	-	+

آسان

-۶

$$2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$



x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y	-	•	+

همانطور که در نمودار می‌بینیم به ازای مقادیر بیشتر از $\frac{1}{2}$ ، نمودار بالای محور x هاست، یعنی $y > 0$ و به ازای x های کمتر از $\frac{1}{2}$ ، نمودار پایین محور x ها می‌باشد و $y < 0$ است. در $x = \frac{1}{2}$ تلاقی با محور x ها رخ داده است پس $y = 0$ می‌باشد.

متوسط

-۷

x	$-\infty$	-۳	$+\infty$
y	-	•	+

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

به ازای $x=1$ داریم $y=1+3=4$ که $4 > 0$ است.

به ازای $x=0$ داریم $y=0+3=3$ و می‌دانیم $3 > 0$ می‌باشد.

به ازای $x=-5$ داریم $y=-5+3=-2$ و می‌دانیم $-2 < 0$ است.



آسان

-۱

$$P(x) = \frac{x}{3} - 1 = 0 \Rightarrow x=3$$

x	$-\infty$	۳	$+\infty$
P(x)	-	•	+

آسان

-۲

$$P(x) = \frac{x-1}{4-x}$$

x	$-\infty$	۱	۴	$+\infty$
x-1	-	•	+	+
4-x	+	+	•	-
P(x)	-	•	+	-

$$q(x) = x(3x+2)$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	۰	$+\infty$
x-1	-	•	+	+
4-x	+	+	•	-
P(x)	-	•	+	-

آسان

-۳

$$P(x) = \frac{(x-1)^3}{x^5(x+2)}$$

x	$-\infty$	-۲	۰	۱	$+\infty$
(x-1) ³	-	-	-	•	+
x ⁵	-	-	•	+	+
x+2	-	•	+	+	+
P(x)	-	•	+	•	+

آسان

-۹

$$1) x(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y		+	+	+

$$\Rightarrow P \geq 0$$

ب)

$$-x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \text{فاقد ریشه} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} x & -\infty & & +\infty \\ \hline P & & + & \end{array} \Rightarrow P > 0$$

$$پ) x^2 + 5x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-5 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
P		+	-	+

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$
P		+	-	+

$$ت) -x-4=0 \Rightarrow x=-4 \Rightarrow$$

آسان

-۱۰

x	$-\infty$	3	4	$+\infty$
P		+	+	+

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow$$

$$P = |-x^2 - 3| \quad -x^2 - 3 = 0 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد}$$

x	$x \in \mathbb{R}$
P	+

(آ)

آسان

-۱۱

x	
y	+

x	
y	-

x	
y	+

x	
y	+

متوسط

-۱۲

$$P = (x^2 - 2x)(|x| + 3)(x - 5)^2$$

ابتدا ریشه همه عبارت‌ها را به دست می‌آوریم:

$$x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$|x| + 3 = 0 \Rightarrow |x| = -3 \rightarrow \text{فاقد ریشه حقیقی}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

عبارت $|x| + 3$ همواره مثبت و عبارت $(x-5)^2$ همواره نامنفی است.

ریشه‌ها را به ترتیب از چپ به راست از کوچک به بزرگ قرار می‌دهیم:

هر عبارت را به طور مستقل تعیین علامت می‌کنیم و در قسمت P حاصل ضرب

علامت‌ها در هر ستون را قرار می‌دهیم:

x	$-\infty$	0	2	5	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	+	-	+	+
$ x + 3$	+	+	+	+	+
$(x-5)^2$	+	+	+	+	+
P	+	+	-	+	+

متوسط

-۸

$$\Delta > 0 \Rightarrow (x+7)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-7 \\ x=4 \end{cases} \quad (آ)$$

x	$-\infty$	-7	4	$+\infty$
y		+	-	+

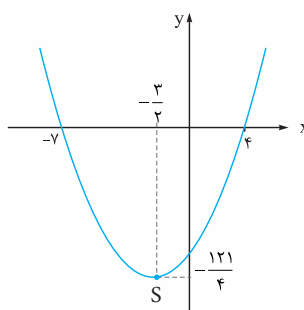
$$y = x^2 + 3x - 28$$

$$a = 1 > 0$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-3}{2}$$

$$y_s = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{2}\right) - 28 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 28 = \frac{-9}{4} - 28 = \frac{-9-112}{4} = \frac{-121}{4}$$

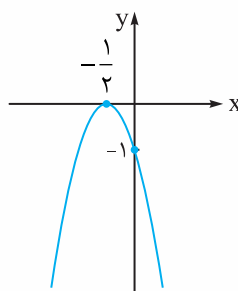
$$\Rightarrow S\left(-\frac{3}{2}, \frac{-121}{4}\right)$$



در فاصله -7 تا 4 نمودار سهمی زیر محور x ها واقع شده است و برای x های بزرگتر از 4 و کوچکتر از -7 بالای محور x ها قرار دارد.

(ب)

$$\Delta = 16 - 16 = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = \frac{-1}{2}$$



$$a = -4 < 0 \quad x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow S\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$y_s = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
y		-	-

نمودار سهمی زیر محور x ها (و یک برخورد با محور x ها) قرار دارد، این عبارت را نامثبت می‌نامیم.

۱۳-

متوسط

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{matrix} -x - 4 = 0 \Rightarrow x = -4 \end{matrix}$$

X	$-\infty$	-4	-1	0	1	$+\infty$
X	-	-	-	0	+	+
$x^2 - 1$	+	+	0	-	-	+
$-x - 4$	+	0	-	-	-	-
P	-	+	+	-	+	-

* عبارت $|x| + 2$ همواره مثبت است و تاثیری در تعیین علامت ندارد.

۱۴-

متوسط

$$p(x) = \frac{(x-1)^3}{x^5(x+2)}$$

X	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$(x-1)^3$	-	-	-	0	+
x^5	-	-	0	+	+
$x+2$	-	0	+	+	+
P(x)	-	+	+	-	+

۱۵-

متوسط

ابتدا باید عبارت‌ها به حاصل ضرب عوامل تبدیل شوند، سپس تعیین علامت کنیم:

$$\begin{aligned} P &= (x^2 - 4x)^2 - (2x^2 + 7x)^2 \\ &= (x^2 - 4x - 2x^2 - 7x)(x^2 - 4x + 2x^2 + 7x) \\ &= (-x^2 - 11x)(3x^2 + 3x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x^2 - 11x = 0 \Rightarrow x(-x - 11) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -11 \end{cases} \\ 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow 3x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \end{cases}$$

X	$-\infty$	-11	-1	0	$+\infty$
$-x^2 - 11x$	-	0	+	+	-
$3x^2 + 3x$	+	+	0	-	+
P	-	+	+	-	-

۱۶-

آسان

(آ)

$$x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{ساده} \\ x = 2 & \text{ساده} \\ x = -2 & \text{ساده} \end{cases}$$

(ب)

$$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{(زوج) مضاعف} \\ x = 1 & \text{ساده} \end{cases}$$

(ب)

$$(x-1)^2(x^2-1) = 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 & \text{فرد} \\ x = -1 & \text{ساده} \end{cases}$$

(ت)

$$4x^2 - 17x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm 15}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 & \text{ساده} \\ x = \frac{1}{4} & \text{ساده} \end{cases}$$

در معادله درجه دوم اگر $\Delta > 0$ هر دو ریشه از نوع ریشه ساده هستند.

(ث)

$$x^2 + 10x + 25 = 0 \Rightarrow (x+5)^2 = 0 \Rightarrow x = -5 \quad \text{ریشه مضاعف}$$

اگر در معادله درجه دوم $\Delta = 0$ باشد، ریشه مضاعف دارد.

دشوار

۱۷-

$$f(x) = \frac{(4-x)^2(x-1)^3}{|x+2|}$$

X	$-\infty$	-2	1	4	$+\infty$
f(x)	-	+	-	+	+

$$g(x) = \frac{(x-1)(2-x)}{(x^2-4x)} = \frac{(x-1)(2-x)}{x(x-4)}$$

X	$-\infty$	0	1	2	4	$+\infty$
f(x)	-	+	-	+	+	-

$$p(x) = \frac{x^3(1-x)}{(x+2)^2}$$

X	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
P(x)	-	+	-	+	-

در محدوده $x > 1$ یا از ضرب جملات پیشرو استفاده می کنیم یا در این محدوده یکعدد مانند $x = 2$ را به $P(x)$ می دهیم و علامت این محدوده را تعیین کرده و بقیه

محدوده‌ها را از روی نوع ریشه‌ها تعیین می کنیم.

$$r(x) = (x-1)(x^3-x) = x(x-1)^2(x+1)$$

X	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
r(x)	+	-	+	+	+

متوسط

۱۸-

باید در معادله $\frac{x}{2} + \frac{k}{y} = 0$ جواب $x = -\frac{3}{2}$ شود.

$$-\frac{3}{2} + \frac{k}{y} = 0 \Rightarrow \frac{k}{y} = \frac{3}{2} \Rightarrow k = \frac{21}{4} = 5.25$$

متوسط

۵- گزینه «۴»

جدول تعیین علامت $y = ax + b$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
y	مخالف علامت a	موافق علامت a	

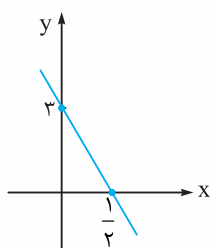
طبق جدول $a < 0$ است و:

$$3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \xrightarrow{a < 0} b > 0.$$

دشوار

۶- گزینه «۳»

نمودار این خط به صورت زیر است.



طبق نمودار برای $y > 3$ خط سمت چپ محور y ها قرار می گیرد.

دشوار

۷- گزینه «۱»

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ نکته:}$$

$$\begin{aligned} & x + (x-a) + (x-2a) + \dots + (x-na) \\ &= (x+x+\dots+x) - (a+2a+\dots+na) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$(n+1)x - a(1+2+\dots+n) = (n+1)x - a \times \frac{n(n+1)}{2} = 0.$$

$$\Rightarrow (n+1)x = \frac{a \times n(n+1)}{2} \Rightarrow x = \frac{n}{2}a$$

x	$\frac{n}{2}a$
عبارت	- +

دشوار

۸- گزینه «۳»

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ نکته:}$$

ابتدا باید ریشه معادله را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} & (x+1) + (x+4) + (x+9) + \dots + (x+100) = 0 \\ & \Rightarrow (x+1^2) + (x+2^2) + (x+3^2) + \dots + (x+10^2) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (x+x+\dots+x) + (1^2+2^2+3^2+\dots+10^2) = 0$$

$$\Rightarrow 10x + \frac{(10)(11)(21)}{6} = 0 \Rightarrow 10x + 385 = 0 \Rightarrow x = \frac{-385}{10} = -38.5$$

x	-38.5
عبارت	- +

همان طور که ملاحظه می شود به ازای $x > -38.5$ بالای محور x قرار خواهد گرفت.



آسان

۱- گزینه «۴»

جدول تعیین علامت عبارت $ax + b$ به صورت مقابل می باشد.

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
ax + b	مخالف علامت a	موافق علامت a	

پس با توجه به جدول داده شده، $-\frac{3}{4}$ ریشه عبارت درجه اول بوده و علامت ضرب x باید منفی باشد، تنها در گزینه (۳) و گزینه (۴) ضرب x منفی است و از بین این دو گزینه $-\frac{3}{4}$ ریشه عبارت $-7x - 3$ می باشد، پس گزینه (۴) جواب است.

متوسط

۲- گزینه «۳»

ابتدا عبارت داده شده را ساده می کنیم و سپس ریشه آن را می یابیم.

$$x + 2(x-1) + (x+3) = x + 2x - 2 + x + 3 = 4x + 1$$

$$4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \text{ یافتن ریشه}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
4x + 1	-	+	
	مخالف علامت x ضرب	موافق علامت x ضرب	

متوسط

۳- گزینه «۲»

از جدول تعیین علامت مشخص است $x = 2$ ریشه معادله $-\frac{4}{5}x + \frac{m}{3} = 0$ است بنابراین:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{4}{5}(2) + \frac{m}{3} \Rightarrow -\frac{8}{5} + \frac{m}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{8}{5} = -\frac{m}{3} \\ \Rightarrow -5m &= -24 \Rightarrow m = \frac{-24}{-5} = 4.8 \end{aligned}$$

متوسط

۴- گزینه «۲»

معادله خط $y = ax + b$ می باشد که a (شیب خط) برابر تانژانت زاویه ای است که با جهت مثبت محور x ها می سازد ($\theta = 30^\circ$).

$$\text{شیب: } a = \tan 30^\circ \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

عرض از مبدأ این خط b برابر $-\sqrt{3}$ است؛ یعنی $b = -\sqrt{3}$ ، بنابراین:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 3$$

x	3
y	-
	(مخالف علامت a) (موافق علامت a)



آسان

-۱

$$-5x + 7 \leq 2 \Rightarrow -5x \leq 2 - 7 \Rightarrow -5x \leq -5 \xrightarrow{\div(-5)} x \geq \frac{5}{5} = 1$$



آسان

-۲

$$\begin{cases} 2x - 1 < \frac{x}{2} \xrightarrow{\times 2} 4x - 2 < x \Rightarrow 3x < 2 \Rightarrow x < \frac{2}{3} \\ 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

آسان

-۳

$$\begin{cases} 3x - 4 \leq x + 7 \Rightarrow 2x \leq 11 \Rightarrow x \leq \frac{11}{2} \\ x + 7 \leq 2x + 5 \Rightarrow -x \leq -2 \Rightarrow x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \in \left[2, \frac{11}{2}\right]$$

متوسط

-۴

$$x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$|x - 3| = 0 \Rightarrow x = 3$$

$$(x + 1)^4 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	0	3	6	$+\infty$
$x^2 - 6x$	+	+	0	-	-	+
$ x - 3 $	+	+	+	0	+	+
$(x + 1)^4$	+	0	+	+	+	+
P	+	+	+	-	-	+

$$x \in \{x \mid 0 \leq x < 3\} \cup \{x \mid 3 < x \leq 6\} = \{x \mid 0 \leq x \leq 6\} - \{3\}$$

$$\Rightarrow x \in [0, 6] - \{3\}$$

متوسط

-۵

$$x^3 \leq x \Rightarrow x^3 - x \leq 0 \Rightarrow P(x) = x(x - 1)(x + 1) \leq 0$$

$$P(x) \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$$

	$-\infty$	س	س	س	1	$+\infty$
P(x)	-	+	+	-	+	+

۹- گزینه «۴»

متوسط

$x = a$ ریشه معادله $2ax + a^2 - 27 = 0$ است.

$$0 = 2a(a) + a^2 - 27 \Rightarrow 2a^2 + a^2 - 27 = 0$$

$$\Rightarrow 3a^2 = 27 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$$

اگر $a = 3$ باشد، عبارت به صورت $y = 6x - 18$ در می آید و جدول تعیین علامت:

x	$-\infty$	3	$+\infty$
y	-	0	+

که با جدول تعیین علامت مسئله فرق دارد.

اگر $a = -3$ باشد، عبارت به صورت $y = -6x - 18$ در می آید و جدول تعیین علامت:

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
y	+	0	-

۱۰- گزینه «۴»

متوسط

$x = a$ ریشه معادله $-ax^3 + 16 = 0$ است؛ یعنی به ازای $x = a$ مقدار y برابر

صفر خواهد شد، بنابراین:

$$-a(a)^3 + 16 = 0 \Rightarrow -a^4 + 16 = 0 \Rightarrow a^4 = 16 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین معادله این خط به صورت $y = -(2)^3 x + 8$ ؛ یعنی $y = -4x + 8$

خواهد بود و جدول تعیین علامت آن.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	+	0	-

۱۱- گزینه «۳»

آسان

$$\begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ریشه صورت} \\ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ ریشه صورت} \\ x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ریشه مخرج} \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ ریشه مخرج} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 < x < 2 \text{ یا } 3 < x < 4 = (1, 2) \cup (3, 4)$$

x		1	2	3	4
$x - 1$	-	0	+	+	+
$x - 2$	-	-	0	+	+
$x - 3$	-	-	-	0	+
$x - 4$	-	-	-	-	0
P	+	+	-	+	-

$$P = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(x - 3)(x - 4)} < 0$$

حال با توجه به این که گزینه (۳) به صورت (۳، ۴) باشد، گزینه (۳) درست

است.

عبارت در بازه (۳، ۴) منفی است.

دشوار

-۱۱

$$1) f(x) \leq 0 \Rightarrow x \in \{2\} \cup [2, +\infty)$$

$$ب) f(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) - \{2\}$$

پ)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	2	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
f(x)	+	0	+	+	-
xf(x)	-	0	-	+	-

$$xf(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 2)$$

ت)

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	2	$+\infty$
x-1	-	-	0	+	+
f(x)	+	0	+	+	-
$\frac{f(x)}{x-1}$	-	0	-	0	-

$$\frac{f(x)}{x-1} \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup [2, +\infty)$$

متوسط

-۱۲

$$\begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta < 0 \Rightarrow m^2 - 12 < 0 \end{cases}$$

$$m^2 - 12 = 0 \Rightarrow m^2 = 12 \Rightarrow m = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

m	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$+\infty$
Δ	+	0	-	+

$$\Delta < 0 \Rightarrow -2\sqrt{3} < m < 2\sqrt{3}$$

متوسط

-۱۳

$$\begin{cases} a = m - 2 < 0 \Rightarrow m < 2 & (1) \\ \Delta < 0 \Rightarrow (3)^2 - 4(2)(m-2) < 0 \Rightarrow 9 - 8m + 16 < 0 \Rightarrow -8m + 25 < 0 \\ \Rightarrow -8m < -25 \Rightarrow m > \frac{25}{8} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cap (2) = \emptyset$$

متوسط

-۱۴

$$y = x^2 + 6x - k + 1$$

$$\text{دو زیر محور } x \text{ قرار نگیرد} \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow x^2 + 6x - k + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 1 > 0 \\ \Delta \leq 0 \Rightarrow 36 - 4(-k+1) \leq 0 \Rightarrow 4k \leq -32 \Rightarrow k \leq -8 \end{cases}$$

متوسط

-۶

$$\frac{1}{2x-1} < \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x - (2x-1)}{x(2x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{-x+1}{x(2x-1)} < 0$$

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
P(x)	+	0	-	0	-

$$P(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, +\infty)$$

آسان

-۷

$$\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$
P(x)	-	0	+	0	+

$$P(x) \geq 0 \Rightarrow x \in [-3, -\frac{1}{2}) \cup [3, +\infty)$$

آسان

-۸

$$3x^2 - 27 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow x \geq 3 \cup x \leq -3 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$$

$$-4x^2 + 1 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

دشوار

-۹

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2x^2+1} - \frac{1}{x^2-x+1} < 0 &\Rightarrow \frac{(x+1)(x^2-x+1) - (2x^2+1)}{(2x^2+1)(x^2-x+1)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{x^3+1-2x^2-1}{(2x^2+1)(x^2-x+1)} < 0 \Rightarrow \frac{x^2(x-2)}{(2x^2+1)(x^2-x+1)} < 0 \end{aligned}$$

عبارت $x^2(x-2)$ و $2x^2+1$ و x^2-x+1 همواره مثبت هستند بنابراین عبارت باید منفی باشد.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2(x-2)$	-	0	0	+

$$x^2(x-2) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) - \{0\}$$

بنابراین $m = 2$ و $n = 0$ خواهد بود و $2m - n = 4$

دشوار

-۱۰

$$\text{دو نامعادله } 3 < \frac{2x-1}{x+1} \text{ و } \frac{2x-1}{x+1} < -1 \text{ را جداگانه حل کرده و بین جواب‌هایشان}$$

اشتراک می‌گیریم.

$$1) \frac{2x-1}{x+1} < 3 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} - 3 < 0 \Rightarrow \frac{-x-4}{x+1} < 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (-1, +\infty)$$

$$2) \frac{2x-1}{x+1} > -1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+1} + 1 > 0 \Rightarrow \frac{3x}{x+1} > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$$

در این بازه پنج عدد صحیح $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$ قرار ندارند.

۱۵-

دشواری

عبارت‌های x^2, x^4 همواره نامنفی‌اند بنابراین عبارت $x^4 + x^2 + 1$ همواره مثبت است یعنی نمودار $y = x^4 + x^2 + 1$ همیشه بالای محور x هاست.

۱۶-

متوسط

چون $xf(x) > 0$ است بنابراین $xy > 0$ خواهد بود یعنی x, y هم علامت‌اند بنابراین بخش‌هایی از نمودار را انتخاب می‌کنیم که x, y هم علامت باشند که تمام نقاط ناحیه اول و سوم جواب سوال خواهد بود.

$$x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$$



۱- گزینه «۳»

آسان

$$(x+2)(x+3) > (x-1)(x+4) \Rightarrow x^2 + 5x + 6 > x^2 + 3x - 4 \Rightarrow 2x > -10 \Rightarrow x > -5$$

۲- گزینه «۱»

آسان

ابتدا طرفین نامساوی $-\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3}$ را در -6 ضرب می‌کنیم که در این صورت جهت نامعادله عوض می‌شود؛ یعنی داریم:

$$-\frac{1}{2} < x \leq \frac{2}{3} \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شود}]{\times (-6)} 3 > -6x \geq -4 \xrightarrow{+1} 4 > -6x + 1 \geq -3 \Rightarrow -3 \leq -6x + 1 < 4 \Rightarrow (-6x + 1) \in [-3, 4)$$

۳- گزینه «۳»

آسان

ابتدا هر کدام از نامعادله‌ها را حل کرده و سپس بین مجموعه جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$\begin{cases} 2x - 1 < 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \\ 2 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -2 \xrightarrow[\div (-3)]{\text{جهت عوض می‌شود}} x < \frac{2}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x < \frac{1}{2}$$

۴- گزینه «۲»

آسان

$$x^2 + 4 > 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Rightarrow (x-2)^2 > 0$$

نامعادله فوق به‌ازای همه مقادیر x به جز $x = 2$ برقرار است، بنابراین گزینه (۲) درست است.

۵- گزینه «۴»

آسان

نکته:

(۱) عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است، اگر $\Delta < 0, a > 0$ باشد.

(۲) عبارت درجه دوم $ax^2 + bx + c$ همواره منفی است، اگر $\Delta < 0, a < 0$ باشد.

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(3) = -11, x^2 \text{ ضریب } 1 > 0$$

۶- گزینه «۱»

متوسط

$$\frac{x}{x-1} > 2 \Rightarrow \frac{x}{x-1} - 2 > 0 \Rightarrow \frac{x-2x+2}{x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-x+2}{x-1} > 0$$

x	$-\infty$	۱	۲	$+\infty$
$-x+2$	+	+	۰	-
$x-1$	-	۰	+	+
$P(x)$	-	+	۰	-

جواب: $1 < x < 2$

۷- گزینه «۲»

متوسط

$$x^5 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$|x+1| = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$(x+2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$$

x	$-\infty$	-۲	-۱	۰	۱	$+\infty$
x^5	-	-	-	۰	+	+
$ x+1 $	+	+	۰	+	+	+
$(x-1)^3$	-	-	-	-	۰	+
$(x+2)^2$	+	۰	+	+	+	+
$P(x)$	+	+	۰	+	-	+

$$\frac{x^5 |x+1|}{(x-1)^3 (x+2)^2} < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

۸- گزینه «۱»

متوسط

طرفین نامساوی اول را در ۲۴ و نامساوی دوم را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 24\left(\frac{x}{3} + \frac{x}{4} > \frac{y}{8}\right) \Rightarrow 8x + 6x > 21 \Rightarrow 4x > 21 \\ \Rightarrow x > \frac{21}{4} \Rightarrow x > \frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} x > 4$$

$$\begin{cases} 12\left(\frac{x}{3} - \frac{1}{3} > \frac{x}{4}\right) \Rightarrow 4x - 4 > 3x \Rightarrow x > 4 \end{cases}$$

۹- گزینه «۱»

متوسط

ابتدا طرفین نامساوی اول را در ۳ ضرب می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 3(x-1) \Rightarrow 2x+1 \geq 3x-3 \Rightarrow -x \geq -4 \Rightarrow x \leq 4 \\ x(x-4) \leq x^2-16 \Rightarrow x^2-4x \leq x^2-16 \Rightarrow -4x \leq -16 \Rightarrow x \geq 4 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\cap} x=4$$

۱۰- گزینه «۲»

متوسط

$$|x|=0 \Rightarrow x=0$$

$$x^3-3x+2 \leq 0 \Rightarrow x^3-3x+2=0 \Rightarrow (x-2)(x-1)=0 \Rightarrow x=2, x=1$$

X	$-\infty$	۰	۱	۲	$+\infty$
x	+	۰	+	+	+
x^3-3x+2	+	+	۰	-	+
عبارت	+	+	۰	-	+

$$|x|(x^3-3x+2) \leq 0 \Rightarrow x \in [1, 2] \cup \{0\}$$

۱۱- گزینه «۳»

متوسط

$$x^4-1 \leq 0 \Rightarrow x^4 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

۱۲- گزینه «۲»

متوسط

$$\begin{aligned} -(x-2)^2+1 &= -(x^2-4x+4)+1 = -x^2+4x-4+1 \\ &= -x^2+4x-3 = -(x^2-4x+3) \\ &= -(x-1)(x-3) \Rightarrow \begin{cases} (x-1)=0 \Rightarrow x=1 \\ (x-3)=0 \Rightarrow x=3 \end{cases} \end{aligned}$$

X	$-\infty$	۱	۳	$+\infty$
$-x^2+4x-3$	-	۰	۰	-

$$-x^2+4x-3 > 0 \Rightarrow x \in (1, 3)$$

۱۳- گزینه «۱»

متوسط

$$\Delta > 0 \text{ معادله } 2x^2+ax+a-\frac{3}{2}=0 \text{ وقتی دارای دو ریشه متمایز است که } \Delta > 0$$

باشد، بنابراین:

$$\Delta = a^2 - 4(2)(a - \frac{3}{2}) > 0 \Rightarrow a^2 - 8a + 12 > 0$$

حال باید $a^2 - 8a + 12$ را تعیین علامت کنیم.

$$a^2 - 8a + 12 = 0 \Rightarrow (a-2)(a-6) = 0 \Rightarrow a=2, a=6$$

X		۲	۶	
P	+	۰	۰	+
	جواب		جواب	

$$\Rightarrow a < 2 \text{ یا } a > 6$$

۱۴- گزینه «۲»

آسان

برای حل تست ابتدا عبارت سمت راست را به سمت چپ می‌بریم و مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x-1} > \frac{1}{x-3} \Rightarrow \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{(x-3)-(x-1)}{(x-1)(x-3)} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)} > 0 \Rightarrow \frac{-2}{(x-1)(x-3)} > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-3) < 0$$

X		۱	۳	
x-1	+	۰	+	+
x-3	-	-	۰	+
(x-1)(x-3)	+	۰	-	+

$$\Rightarrow 1 < x < 3$$

۱۵- گزینه «۱»

آسان

$$\begin{cases} 2x-1 < 0 \Rightarrow 2x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{2} \\ 1-x > 0 \Rightarrow -x > -1 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{اشتراک } x < \frac{1}{2}$$

۱۶- گزینه «۳»

آسان

ابتدا دستگاه نامعادله را به دو نامعادله جدا تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{cases} 2x-2 \leq x-1 \Rightarrow 2x-x \leq -1+2 \Rightarrow x \leq 1 \\ 3x-3 < 2x-2 \Rightarrow 3x-2x \leq -2+3 \Rightarrow x < 1 \end{cases} \xrightarrow{\cap} x < 1$$

۱۷- گزینه «۱»

آسان

$$\begin{cases} x-2 > \frac{x}{2} \xrightarrow{\times 2} 2x-4 > x \Rightarrow x > 4 \\ 2x-4 < 2-x \Rightarrow 2x+x < 2+4 \Rightarrow 3x < 6 \Rightarrow x < 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\cap} \emptyset$$

۱۸- گزینه «۴»

آسان

یادآوری: اتحاد زیر را به خاطر بیاورید.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$\frac{x^3-3x^2+3x-1}{x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x-1)^3}{x-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 \geq 0, x \in \mathbb{R} - \{1\} (x \neq 1)$$

۱۹- گزینه «۳»

متوسط

$$\frac{4x+7}{2x-1} > 5 \Rightarrow \frac{4x+7}{2x-1} - 5 > 0 \Rightarrow \frac{4x+7-5(2x-1)}{2x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x+7-10x+5}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-6x+12}{2x-1} > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -6x+12=0 \Rightarrow x=2 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases}$$

X	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	۲	$+\infty$
P	-	۰	+	-

$$P > 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < 2$$

متوسط

۲۵- گزینه «۲»

اگر تابع $f(x)$ زیر محور x ها قرار گیرد؛ یعنی $f(x) < 0$

$$f(x) = x^2(x-4) - (x-4) \Rightarrow f(x) = (x-4)(x^2-1) \\ \Rightarrow (x-4)(x+1)(x-1)$$

حال $f(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

	$-\infty$	-1	1	4	$+\infty$	
P(x)	-	•	+	•	-	+

همان‌طور که از جدول مشخص است $f(x)$ به ازای $x > -1$ در بازه $(1, 4)$ منفی می‌شود (زیر محور x ها قرار می‌گیرد). لذا بیش‌ترین مقدار $b - a$ برابر $3 = 4 - 1$ می‌شود.

متوسط

۲۶- گزینه «۲»

$$\begin{cases} (\Delta + x)(2 - x) > 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها } x = -\Delta, x = 2 \\ \frac{x - \Delta}{x - 2} > 0 \Rightarrow \text{ریشه‌ها } x = \Delta, x = 2 \end{cases}$$

	X	$-\infty$	$-\Delta$	2	$+\infty$
$\Delta + X$		-	•	+	+
$2 - X$		+	+	•	-
$(\Delta + X)(2 - X)$		-	•	+	•

	X	$-\infty$	2	Δ	$+\infty$
$X - \Delta$		-	-	•	+
$X - 2$		-	•	+	+
$\frac{X - \Delta}{X - 2}$		+	•	-	•

حال اشتراک جواب‌های دو جدول را می‌گیریم.

$$(-\Delta, 2) \cap \{(-\infty, 2) \cup (\Delta, +\infty)\} = (-\Delta, 2)$$

متوسط

۲۷- گزینه «۴»

دامنه نامعادله $x \geq 0$ است و عبارت $\sqrt{x} + 1$ همواره مثبت است.

X	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$x^2 - 2x$	+	•	-	•	+

$$x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x > 2 \text{ یا } x < 0 \xrightarrow{\cap (x \geq 0)} x > 2$$

متوسط

۲۸- گزینه «۱»

می‌دانیم که هر رادیکال با فرجه زوج بزرگ‌تر یا مساوی صفر است، بنابراین:

$$\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \quad (I)$$

حال برای آن که $\sqrt{x} \leq 0$ باشد، باید $3x^2 + 7x - 6 \leq 0$ باشد، که در این صورت داریم:

$$3x^2 + 7x - 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 49 - 4(3)(-6) = 49 + 72 = 121$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{2(3)} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \\ x = \frac{-11}{6} = -\frac{11}{6} \end{cases}$$

	X	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
P = $x^2 + 7x - 6$		+	•	-	•	+

$$\Rightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{2}{3} \quad (II)$$

$$(I) \cap (II) \Rightarrow (x \geq 0) \cap (-\frac{11}{6} \leq x \leq \frac{2}{3}) = 0 \leq x \leq \frac{2}{3}$$

متوسط

۲۹- گزینه «۱»

$$\frac{x-1}{x+2} > 2x \Rightarrow \frac{x-1}{x+1} - 2x > 0 \Rightarrow \frac{x-1-2x^2-2x}{x+1} > 0 \Rightarrow \frac{-2x^2-x-1}{p(x)} > 0$$

$$-2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = (-1)^2 - 4(-2)(-1) = 1 - 8$$

$= -7 \leq 0$ (فاقد ریشه حقیقی)

$$x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
P	+	•	-

$$P(x) > 0 \Rightarrow x < -1$$

متوسط

۳۰- گزینه «۱»

$$\begin{cases} 2n - 7 = 0 \Rightarrow n = \frac{7}{2} \text{ ریشه صورت} \\ 5n - 14 = 0 \Rightarrow n = \frac{14}{5} \text{ ریشه مخرج} \end{cases}$$

n	$-\infty$	$\frac{14}{5}$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
$2n - 7$	-	-	•	+
$5n - 14$	-	•	+	+
$\frac{2n - 7}{5n - 14}$	+	•	-	+

$$a_n < 0 \Rightarrow \frac{2}{8} < n < \frac{3}{5} \xrightarrow{n \in \mathbb{N}} n = 3$$

متوسط

۳۱- گزینه «۴»

$$\frac{m^2(m^2+1)}{m-2} > 0 \xrightarrow{m^2+1>0} \frac{m^2}{\underbrace{m-2}_p} > 0$$

m	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
P	-	•	-	•

$p > 0 \Rightarrow m > \frac{2}{3}$

متوسط

۳۲- گزینه «۴»

طرفین نامعادله را در ۱۲ ضرب می‌کنیم:

$$6(2x+3)-9 > 4(4x+1) \Rightarrow 12x+18-9 > 16x+4 \Rightarrow -4x > 4-9 \Rightarrow x < \frac{5}{4}$$

متوسط

۳۳- گزینه «۱»

$$-4x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{x}\right) \geq -2x - \frac{1}{x} - 1 \Rightarrow -2x - \frac{4}{x} + 2x + \frac{1}{x} + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{x} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x} \geq 0 \xrightarrow{x>0} x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$$

X	$-\infty$	0	3	$+\infty$
X - 3	-	-	•	+
X	-	•	+	+
عبارت	+	•	-	•

متوسط

۳۳- گزینه «۲»

اگر $(m-1)x^2 + 6x + 2m + 1 > 0$ باشد، آن گاه $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت است.

$$m-1 > 0 \Rightarrow m > 1 \quad (I)$$

$$\Delta < 0 \Rightarrow 36 - 4(m-1)(2m+1) < 0 \Rightarrow 36 - 8m^2 + 4m + 4 < 0$$

$$\Rightarrow -2m^2 + m + 10 < 0$$

m	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$\frac{2}{5}$	$+\infty$
$-2m^2 + m + 10$	-	+	-	-

$$-2m^2 + m + 10 < 0 \Rightarrow m < -\frac{5}{2} \text{ یا } m > \frac{2}{5} \quad (II)$$

$I \cap II$ برابر $m > \frac{2}{5}$ است.

تذکر: چون ضریب x^2 برابر $m-1$ است. باید وضعیت عبارت به ازای $m=1$ نیز بررسی شود. به ازای $m=1$ عبارت تبدیل به عبارت خطی $6x+3$ می شود، که همواره مثبت نیست.

متوسط

۳۵- گزینه «۴»

می دانیم شرط این که معادله درجه دوم دارای ریشه حقیقی باشد، این است که $\Delta \geq 0$.

$$\Delta = 16 - 4(m+2)(m-1) \geq 0 \Rightarrow m^2 + m - 6 \leq 0 \Rightarrow (m+3)(m-2) \leq 0$$

m	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$m^2 + m - 6$	+	-	+	+

تذکر: دقت کنید اگر ضریب x^2 صفر باشد آن گاه معادله به درجه اول تبدیل می شود که باز هم ریشه حقیقی دارد.

متوسط

۳۶- گزینه «۱»

برای آن که معادله درجه دوم فاقد ریشه حقیقی باشد، باید $\Delta < 0$ باشد.

$$\Delta = (m+1)^2 - 4(2)(\frac{1}{2}m+2) < 0 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 - 4m - 16 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m - 15 < 0 \Rightarrow (m-5)(m+3) < 0$$

m	$-\infty$	-3	5	$+\infty$
$m^2 - 2m - 15$	+	-	+	+

$$(m-5)(m+3) < 0 \Rightarrow -3 < m < 5$$

متوسط

۳۷- گزینه «۳»

برای این که عبارت درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ همواره منفی باشد، باید دو شرط داشته باشیم:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ (a-1)^2 - 4(a-1)(1) < 0 \\ \Rightarrow a^2 - 2a + 1 - 4a + 4 < 0 \\ \Rightarrow a^2 - 6a + 5 < 0 \end{cases} \quad (I)$$

m	$-\infty$	-2	5	$+\infty$
$m^2 - 4m - 12$	+	-	+	+

$$a^2 - 6a + 5 < 0 \Rightarrow 1 < a < 5 \quad (II)$$

$$I \cap II = \emptyset$$

متوسط

۳۹- گزینه «۱»

$$P = (x^2 + x + 2)(x^2 - 4x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \\ x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) = 0 \\ \Rightarrow x = 1, x = 3 \end{cases}$$

$x^2 + x + 2 = 0$ چون Δ منفی و ضریب x^2 مثبت است، عبارت همواره مثبت است.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$x^2 + x + 2$	+	+	+	+
$x^2 - 4x + 3$	+	-	+	+
P	+	-	+	+

$$P > 0 \Rightarrow x < 1 \text{ یا } x > 3$$

آسان

۳۳- گزینه «۳»

عبارت داده شده را تعیین علامت می کنیم.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 2$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$	+	-	+	+

عبارت $x^2 - 3x + 2$ در بازه $(1, 2)$ منفی است و چون $\sqrt{3} \in (1, 2)$ است پس $\sqrt{3}$ جواب است.

آسان

۳۱- گزینه «۲»

$$n^2 - 10n + 16 = 0 \Rightarrow (n-2)(n-8) = 0 \Rightarrow n = 2, n = 8$$

n	$-\infty$	2	8	$+\infty$
$n^2 - 10n + 16$	+	-	+	+

$$\Rightarrow 2 < n < 8 \Rightarrow n = 3, 4, 5, 6, 7$$

با توجه به جدول در دنباله فوق جملات a_7, a_6, a_5, a_4, a_3 که پنج جمله می باشند، منفی هستند.

متوسط

۳۴- گزینه «۴»

$$(x+1)(x^2 + 2x - 2) - (x+1) > 0 \Rightarrow (x+1)[(x^2 + 2x - 2) - 1] > 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x+1)(x^2 + 2x - 3)}_P > 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \Rightarrow x = -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) = 0 \\ \Rightarrow x = -3, x = 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	-	+	+	+
$x^2 + 2x - 3$	+	-	-	+	+
P	-	+	-	+	+

$$\Rightarrow -3 < x < -1 \text{ یا } x > 1$$

متوسط

۳۳- گزینه «۲»

$$P = \frac{4-x^2}{3-2x} \begin{cases} 4-x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ 3-2x = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

	$-\infty$	-2	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$4-x^2$	-	+	+	-	-
$3-2x$	+	+	-	-	-
P	-	+	-	+	+

$$\text{جواب} = (-2, \frac{3}{2}) \cup (2, \infty)$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

باید اولاً $\Delta < 0$ و ثانیاً $a > 0$ باشد؛ بنابراین:

$$\begin{cases} a = m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2 \\ \Delta = 4m^2 - 4(m+2) < 0 \xrightarrow{\times \frac{1}{4}} m^2 - m - 2 < 0 \\ \Rightarrow (m+1)(m-2) < 0 \end{cases}$$

m	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$m^2 - m - 2$		+	-	+

جواب نهایی برابر $\{m \mid m > -2\} \cap \{m \mid -1 < m < 2\}$ می‌شود، پس جواب

برابر است با:

$$-1 < m < 2$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

برای این که منحنی تابع $y = ax^2 + bx + c$ بالای محور x ها و مماس بر آن باشد، باید $a > 0$ و $\Delta = 0$ باشد.

$$y = (m-2)x^2 - 3x + m + 2 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \\ \Delta = 0 \Rightarrow 9 - 4(m-2)(m+2) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ 9 - 4(m^2 - 4) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m = \frac{5}{2}, m = -\frac{5}{2} \end{cases} \xrightarrow{\cap} m = \frac{5}{2}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۲»

برای آن که نمودار سهمی بالاتر از محور x ها باشد، باید $\begin{cases} x^2 \text{ ضرب} > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ باشد.

$$1 - a > 0 \Rightarrow a < 1 \quad (1)$$

$$\Delta = (2\sqrt{6})^2 - 4(1-a)(-a) < 0 \Rightarrow 24 - 4(-a + a^2) < 0$$

$$\Rightarrow 24 + 4a - 4a^2 < 0 \xrightarrow{\div (-4)} a^2 - a - 6 > 0$$

$$a^2 - a - 6 = 0 \Rightarrow (a-3)(a+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -2 \end{cases}$$

a	$-\infty$	-2	3	$+\infty$
$a^2 - a - 6$		-	+	

$$(-\infty, -2) \cup (3, +\infty) \quad (2)$$

$$a^2 - a - 6 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty) \quad (2)$$

$$(1) \cap (2) \Rightarrow (-\infty, -2)$$

متوسط

۱۴- گزینه «۲»

$$2x^2 - 3x + 6 = \Delta x + a \Rightarrow 2x^2 - 3x + 6 - \Delta x - a = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - \Delta x + (6-a) = 0$$

با توجه به آن که خط بر سهمی مماس است، بنابراین Δ این معادله باید صفر باشد.

$$\Delta = (-\Delta)^2 - 4(2)(6-a) = 0 \Rightarrow 64 - 4\Delta + 8a = 0$$

$$\Rightarrow 8a + 16 = 0 \Rightarrow a = -2$$

متوسط

۳۸- گزینه «۴»

معادله برخورد ریشه حقیقی ندارد پس:

$$-x^2 + 2x = mx + 4 \Rightarrow x^2 - 2x + mx + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + (m-2)x + 4 = 0$$

$$\Delta = (m-2)^2 - 4(1)(4) < 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 4 - 16 < 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 4m - 12 < 0 \Rightarrow \underbrace{(m-6)(m+2)}_p < 0$$

m	$-\infty$	-2	6	$+\infty$
$m^2 - 4m - 12$		+	-	+

$$p < 0 \Rightarrow -2 < m < 6$$

متوسط

۳۹- گزینه «۴»

معادله حاصل از برابر قرار دادن ضابطه‌های دو تابع نباید جوابی داشته باشد لذا داریم:

$$(2x+1)(x+8) = mx \Rightarrow 2x^2 + 17x + 8 = mx$$

$$\Rightarrow 2x^2 + (17-m)x + 8 = 0$$

$$\Delta = (17-m)^2 - 4(2)(8) < 0$$

$$\Rightarrow 289 + m^2 - 34m - 64 < 0 \Rightarrow m^2 - 34m + 225 < 0$$

پس باید عبارت $m^2 - 34m + 225$ را تعیین علامت کنیم:

$$m^2 - 34m + 225 = 0 \xrightarrow{\Delta' = (\frac{b}{a})^2 - ac}$$

$$\Delta' = (\frac{34}{1})^2 - 225 = 289 - 225 = 64$$

$$m = 17 + 8 = 25, m = 17 - 8 = 9$$

m	$-\infty$	9	25	$+\infty$
$m^2 - 34m + 225$		+	-	+

$$m^2 - 34m + 225 < 0 \Rightarrow 9 < m < 25$$

متوسط

۴۰- گزینه «۱»

$$(m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m < 0 \Rightarrow \begin{cases} m-1 < 0 \quad (1) \\ \Delta < 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 3 - 4m(m-1) < 0 \Rightarrow 3 - 4m^2 + 4m < 0 \end{cases}$$

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
D		-	+	-

$$D < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{3}{2}, +\infty)$$

در نتیجه جواب نهایی به صورت زیر می‌شود:

$$(1) \cap (2) : m \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \Rightarrow m < -\frac{1}{2}$$

متوسط

۴۹- گزینه «۳»

برای اینکه معادله درجه دوم باشد:

$$2m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2} \quad (1)$$

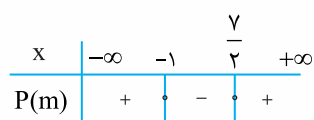
شرط اینکه معادله درجه دوم دو ریشه حقیقی متمایز داشته باشد این است

که $\Delta > 0$ باشد:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4(2m - 1)(m - 2) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} 9 - (2m^2 - 4m - m + 2) > 0 \Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2m - 7)(m + 1)}{P(m)} < 0$$



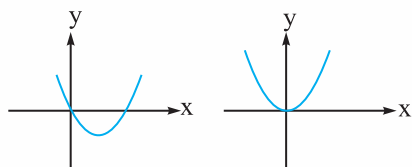
$$P(m) < 0 \Rightarrow -1 < m < \frac{7}{2} \xrightarrow{(1)} -1 < m < \frac{7}{2}, m \neq \frac{1}{2}$$

متوسط

۵۰- گزینه «۱»

سهمی از مبدأ مختصات عبور می کند. و چون از ناحیه سوم هم نمی گذرد باید

شکل آن به صورت های زیر باشد.



یعنی بایستی $a > 0$ باشد و همچنین نقطه برخورد دیگر سهمی با محور x ها

مثبت است.

$$y = 0 \Rightarrow x(ax + 3 + 2a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3+2a}{a} \end{cases}$$

$$-\frac{3+2a}{a} \geq 0 \xrightarrow{a>0} -3-2a \geq 0 \Rightarrow 2a \leq -3 \Rightarrow a \leq -\frac{3}{2}$$

اشتراک دو جواب $a > 0$ و $a \leq -\frac{3}{2}$ برابر $\emptyset$ است.

دشوار

۵۱- گزینه «۳»

$$-mx^2 + mx + 1 = -m - x \Rightarrow mx^2 - (1+m)x - m - 1 = 0$$

$$\Delta \leq 0 \Rightarrow (1+m)^2 + 4m(m+1) \leq 0 \Rightarrow (1+m)(1+5m) \leq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq m < -\frac{1}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = -1$$

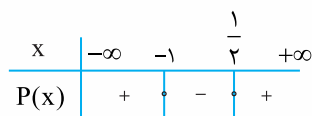
متوسط

۴۵- گزینه «۲»

$$(x-1)^2 > 4x^2 \Rightarrow (2x^2)^2 - (x-1)^2 < 0$$

$$\Rightarrow \frac{(2x^2 - x + 1)(2x^2 + x - 1)}{p(x)} < 0 \Rightarrow \frac{2x^2 + x - 1}{p(x)} < 0$$

همواره مثبت



$$p(x) < 0 \Rightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$$

پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{3}{2}$ است.

متوسط

۴۶- گزینه «۳»

این سوال را با عدد گذاری حل می کنیم. به ازای $x = 1$ رابطه $-1 < \frac{1}{3} < 3$

درست است و گزینه (۲) حذف می شود. به ازای $x = -5$ رابطه $-1 < \frac{11}{4} < 3$

به دست می آید که گزینه (۱) حذف می شود.

به ازای $x = 0$ رابطه $-1 < -1 < 3$ به دست می آید که برقرار نیست و در

نتیجه گزینه (۴) حذف می شود.

متوسط

۴۷- گزینه «۴»

به کمک عددگذاری سوال را حل می کنیم.

به ازای $x = 1/5$ رابطه به صورت $1 < \frac{2/5}{3} < 3$ تبدیل می شود و گزینه های

(۱ و ۲) حذف می شود و به ازای $x = 1$ رابطه به صورت $1 < 2 < 3$ تبدیل و

گزینه (۳) حذف می شود.

متوسط

۴۸- گزینه «۲»

اگر سهمی پایین محور x ها باشد، باید $\Delta < 0$ و $a < 0$ باشد.

$$y = (1-m)x^2 + 2(m-3)x - 1$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(m-3)^2 + 4(1-m)$$

$$\Delta = 4(m^2 - 6m + 9) + 4 - 4m < 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} m^2 - 6m + 9 + 1 - m < 0 \Rightarrow m^2 - 7m + 10 < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(m-5) < 0 \Rightarrow 2 < m < 5 \quad (1)$$

$$a = 1 - m < 0 \Rightarrow m > 1 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر (۲, ۵) است.

آسان

-۵

$$x^2 < 2x \Rightarrow x^2 - 2x < 0 \Rightarrow x(x-2) < 0$$

x	-∞	0	2	+∞
x^2 - 2x	+	0	-	+

$$\Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow B = |x| - 2 |x - 2| = x - 2(-x + 2) = 3x - 4$$

آسان

-۶

$$x^2 + x < 0 \Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 3 > 0 \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$|3 + x| - |x - 2| + 1 = 3 + x - (-x + 2) + 1 = 2x + 2$$

متوسط

-۷

$$x\sqrt{x^2} + 2\sqrt{x^3} = 1 \Rightarrow x|x| + 2x = 1 \xrightarrow{x < 0} -x^2 + 2x = 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

غلق قق

بنابراین معادله ریشه حقیقی ندارد.

متوسط

-۸

$$A = |5x + 10x| \stackrel{x \leq 0}{=} |5x - 10x| = |-5x| = -5x$$

متوسط

-۹

$$|x - 2| = 3x \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2: x - 2 = 3x \Rightarrow x = -1 \\ x < 2: -x + 2 = 3x \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{cases}$$

غلق قق

آسان

-۱۰

$$|x^6| |x^{13}| = x^6 |x^{12}x| = x^6 \times x^{12} \times |x| = x^{16} |x| = \begin{cases} x^{17} & x \geq 0 \\ -x^{17} & x < 0 \end{cases}$$

متوسط

-۱۱

$$آ) |3x + 4| = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{-10}{9} \\ 3x + 4 = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = -\frac{14}{9} \end{cases}$$

$$ب) |2x + 4| = |7x - 2| \Rightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 7x - 2 \Rightarrow x = \frac{6}{5} \\ 2x + 4 = -7x + 2 \Rightarrow x = -\frac{2}{9} \end{cases}$$

$$پ) |x - 1| + |x^2 - 1| + |x^3 - 1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \\ x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases} \cap \Rightarrow x = 1$$

$$ت) ||x - 1| - 2| = 3 \Rightarrow \begin{cases} |x - 1| - 2 = 3 \Rightarrow |x - 1| = 5 \\ |x - 1| - 2 = -3 \Rightarrow |x - 1| = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 5 \Rightarrow x = 6 \\ x - 1 = -5 \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

غلق قق

$$ث) |100 - x^2| = 100 - x^2 \Rightarrow 100 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 100$$

$$\Rightarrow |x| \leq 10 \Rightarrow -10 \leq x \leq 10$$

$$ج) |x^2 - 4x| = 4x - x^2 \Rightarrow x^2 - 4x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 4$$

آسان

۵۲-۵۳ «۳»

$$-4 < -\frac{1}{3-x} < 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{3-x} < 4$$

$$x = 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 4$$

$$x = 2 \Rightarrow 0 < 1 < 4$$

فقط همین دو عدد طبیعی در نامعادله صدق می‌کند. ضمناً برای $x > 3$

عبارت $\frac{1}{3-x}$ منفی است.



آسان

-۱

$$|5| = 5$$

$$|x^2 + 1| = x^2 + 1$$

$$|1 - \sqrt{2}| = -(1 - \sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$$

$$|-k^2| = -(-k^2) = k^2$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & x \geq 1 \\ 1 - x & x < 1 \end{cases}$$

$$x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x < 0 \end{cases}$$

متوسط

-۲

$$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \quad |x| + |-x| = -x + (-x) = -2x$$

آسان

-۳

$$\begin{cases} a > 0 > b \\ |b| > |a| \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 1 > 0 \\ b - 1 < 0 \Rightarrow |a + 1| - |b - 1| + |a + b| \\ a + b < 0 \end{cases}$$

$$= a + 1 - [-(b - 1)] + [-(a + b)] = a + 1 + b - 1 - a - b = 0$$

آسان

-۴

$$-2 < x < 2 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 < 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow |x - 2| + |x + 2| = -x + 2 + x + 2 = 4$$

متوسط

-۱۷

$$\text{وسط بازه} = \frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}, \quad \text{نصف طول بازه} = \frac{2-(-3)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow |x - (-\frac{1}{2})| > \frac{5}{2} \Rightarrow |2x+1| > 5 \Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{m}{n} = 4$$

متوسط

-۱۸

$$\frac{2x^2 - x - 1}{|x| + 2} > 0$$

مخرج کسر یعنی $|x| + 2$ همواره مثبت است بنابراین داریم:

$$2x^2 - x - 1 > 0 \Rightarrow (x-1)(2x+1) > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (1, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ n = 1 \end{cases}$$

متوسط

-۱۹

$$|3x-1| < |x+2| \Rightarrow (3x-1)^2 < (x+2)^2$$

$$\Rightarrow (3x-1)^2 - (x+2)^2 < 0 \Rightarrow (4x+1)(2x-3) < 0 \Rightarrow \frac{-1}{4} < x < \frac{3}{2}$$

متوسط

-۲۰

$$x^2 \leq |3x-4| \Rightarrow |x^2| \leq |3x-4| \Rightarrow \underbrace{(x^2 - 3x + 4)}_{\text{همواره ثابت}} (x^2 + 3x - 4) \leq 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 1$$

متوسط

-۲۱

$$|\frac{x+1}{2x-1}| \geq 1 \Rightarrow \frac{|x+1|}{|2x-1|} \geq 1$$

با شرط $x \neq \frac{1}{2}$ طرفین نامساوی را در $|2x-1|$ ضرب می‌کنیم.

$$|x+1| \geq |2x-1| \Rightarrow (x+1)^2 \geq (2x-1)^2 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 \geq 4x^2 - 4x + 1$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 6x \leq 0 \Rightarrow 3x(x-2) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2$$

با توجه به شرط $x \neq \frac{1}{2}$ داریم:

$$x \in [0, 2] - \{\frac{1}{2}\}$$

دشواری

-۲۲

$$x \geq 3: \quad x^2 + 4(x-3) - 7x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{غ ق} \\ x = 4 & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$x < 3: \quad x^2 + 4(-x+3) - 7x + 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 20 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11+\sqrt{41}}{2} & \text{غ ق} \\ x = \frac{11-\sqrt{41}}{2} & \text{ق ق} \end{cases}$$

بنابراین جواب‌های قابل قبول معادله $x = 4$ و $x = \frac{11-\sqrt{41}}{2}$ می‌باشند.

متوسط

-۱۲

$$\bar{A}) |3x-2| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq 3x-2 \leq 1 \Rightarrow -1+2 \leq 3x \leq 1+2$$

$$\Rightarrow 1 \leq 3x \leq 3 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \Rightarrow x \in [\frac{1}{3}, 1]$$

$$\text{ب)} | -x+7 | > 5 \Rightarrow -x+7 > 5 \text{ یا } -x+7 < -5$$

$$\Rightarrow -x > 5-7 \text{ یا } -x < -5-7$$

$$\Rightarrow -x > -2 \text{ یا } -x < -12$$

$$\Rightarrow x < 2 \text{ یا } x > 12 \Rightarrow x \in (-\infty, 2) \cup (12, +\infty)$$

متوسط

-۱۳

$$x \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty) \Rightarrow x \leq 2 \text{ یا } x \geq 4 \xrightarrow{\frac{4+2}{2}=3}$$

$$x-3 \leq 2-3 \text{ یا } x-3 \geq 4-3$$

$$x-3 \leq -1 \text{ یا } x-3 \geq 1 \Rightarrow x-3 \leq -1$$

$$\text{یا } x-3 \geq 1 \Rightarrow |x-3| \geq 1$$

آسان

-۱۴

$$|2x-1| < \frac{3}{4} \Rightarrow -\frac{3}{4} < 2x-1 < \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{8} < x < \frac{5}{8}$$

$$(k+1, n) = (\frac{1}{\lambda}, \frac{\gamma}{\lambda}) \Rightarrow \begin{cases} k+1 = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow k = -\frac{\gamma}{\lambda} \\ n = \frac{\gamma}{\lambda} \end{cases}$$

متوسط

-۱۵

$$|x-1| < x^2+1$$

عبارت x^2+1 همواره مثبت است. بنابراین:

$$-x^2-1 < x-1 < x^2+1 \Rightarrow \begin{cases} -x^2-1 < x-1 \Rightarrow x^2+x > 0 \\ \Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0 \\ -x^2-1 < x-1 < x^2+1 \Rightarrow \\ x-1 < x^2+1 \Rightarrow x^2-x+2 > 0 \\ \xrightarrow{\Delta < 0} \text{همواره برقرار است} \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x < -1 \text{ یا } x > 0$$

متوسط

-۱۶

$$\bar{A}) |3x+7| < 3 \Rightarrow -3 < 3x+7 < 3 \Rightarrow \frac{-10}{3} < x < \frac{-4}{3}$$

$$\text{ب)} |\frac{5+x}{-3}| > 2 \Rightarrow \begin{cases} \frac{5+x}{-3} > 2 \Rightarrow 5+x < -6 \Rightarrow x < -11 \\ \frac{5+x}{-3} < -2 \Rightarrow 5+x > 6 \Rightarrow x > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -11) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{پ)} |x^2+x| < 2 \Rightarrow -2 < x^2+x < 2 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+x < 2 \Rightarrow x^2+x-2 < 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) < 0 \Rightarrow -2 < x < 1 \\ x^2+x > -2 \Rightarrow x^2+x+2 > 0 \xrightarrow{\Delta < 0} x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2 < x < 1$$



آسان

۱- گزینه «ب»

$$-3 < a < 2 \Rightarrow \begin{cases} a-2 < 0 \Rightarrow |a-2| = 2-a \\ a+3 > 0 \Rightarrow |a+3| = a+3 \end{cases}$$

$$2|a+3| - 4|a-2| = 2(a+3) - 4(2-a) = 6a-2 \\ \Rightarrow (6a-2) - (5a) = a-2$$

متوسط

۲- گزینه «ب»

$$x < 0 \Rightarrow |4x+|7x|| = |4x-7x| = |-3x| = -3x$$

متوسط

۳- گزینه «ب»

$$-x^2 > x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0 \Rightarrow -1 < x < 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \\ -2 < x-1 < -1 \end{cases}$$

هر دو عبارت $x - \frac{1}{2}$ و $x-1$ منفی هستند پس خلاصه شده عبارت فوق به

صورت زیر است:

$$|x-1| - |x - \frac{1}{2}| = -(x-1) + (x - \frac{1}{2}) = -x+1+x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

متوسط

۴- گزینه «ب»

حالت ۱: $\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1+1+1 = 3$

حالت ۲: $\begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1-1+1 = -1$

حالت ۳: $\begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1-1-1 = -1$

حالت ۴: $\begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1+1-1 = -1$

مقادیر ممکن برای x دو مقدار ۳ و -۱ هستند. بنابراین:

$$-1+3=2$$

متوسط

۵- گزینه «ا»

عبارت $x^2 - 1$ همواره منفی و عبارت $|x|$ همواره نامنفی است. بنابراین

تساوی هیچ‌گاه برقرار نیست و معادله جواب ندارد.

دشوار

۳۳-

$$|2x-1|-3|x|=-3$$

عبارت‌های داخل قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

x	$-\infty$	۰	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
x	-	۰	+	+
2x-1	-	-	۰	+

$$x \leq 0 : -2x+1-3(-x)=-3$$

(زیرا در محدوده $x \leq 0$ قرار دارد) قابل قبول $x = -4$

$$0 < x \leq \frac{1}{2} : -2x+1-3x=-3 \Rightarrow -5x=-4$$

(زیرا در محدوده $0 < x \leq \frac{1}{2}$ قرار ندارد) غ ق $x = \frac{4}{5}$

$$x > \frac{1}{2} : 2x-1-3x=-3 \Rightarrow -x=-2$$

(زیرا در محدوده $x > \frac{1}{2}$ قرار دارد) قابل قبول $x = 2$

دشوار

۳۴-

مسئله را در دو حالت بررسی می‌کنیم.

حالت اول:

$$x \geq 0 \Rightarrow x(x+1) \leq 2x \Rightarrow x(x+1-2) \leq 0 \Rightarrow x(x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 1 \xrightarrow{\cap(x \geq 0)} 0 \leq x \leq 1 \text{ (I)}$$

حالت دوم:

$$x < 0 \Rightarrow -x(x+1) \leq 2x \Rightarrow x(-x-1-2) \leq 0 \Rightarrow x(-x-3) \leq 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$$

$$\xrightarrow{\cap(x < 0)} x \in (-\infty, -3] \text{ (II)}$$

اجتماع (I), (II) جواب سوال است. پس:

$$x \in (-\infty, -3] \cup [0, 1]$$

دشوار

۳۵-

نامعادله $|x^2 - 3x| < 1$ زمانی جواب دارد که $x > 0$ باشد.

$$|x^2 - 3x| < 2x \xrightarrow{x > 0} -2x < x^2 - 3x < 2x$$

$$\xrightarrow{\div x} -2 < x - 3 < 2 \xrightarrow{+3} 1 < x < 5$$

$$\xrightarrow{\cap(x > 0)} 1 < x < 5$$

۶- گزینه «۲»

متوسط

$$\left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} \right| = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1} = 0$$

وقتی حاصل یک کسر صفر باشد صورت را برابر صفر قرار می‌دهیم و جواب‌هایی را می‌پذیریم که مخرج را صفر نمی‌کنند.

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق. ق. ریشه مخرج} \\ x = 2 \text{ ق. ق.} \end{cases}$$

۷- گزینه «۴»

متوسط

$$|2x - 3| = |x| \Rightarrow \begin{cases} 2x - 3 = x \Rightarrow x = 3 \\ 2x - 3 = -x \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ریشه‌ها} = 3 + 1 = 4$$

۸- گزینه «۳»

متوسط

می‌توان معادله را به صورت:

$$(x^2 - 5x - 6) = -(x^2 - 5x - 6) \mid \text{نوشت، این تساوی در حالتی برقرار است}$$

$$\text{که } x^2 - 5x - 6 \leq 0 \text{ باشد بنابراین:}$$

$$(x+1)(x-6) \leq 0 \Rightarrow$$

x	$-\infty$	-1	6	$+\infty$
P		+	-	+

$$\Rightarrow -1 \leq x \leq 6 \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow \text{معادله 6 جواب دارد.}$$

۹- گزینه «۱»

متوسط

$$|3x + x^3| = 3x + x^3 \Rightarrow 3x + x^3 \geq 0$$

$$\Rightarrow x(3 + x^2) \geq 0 \xrightarrow{3+x^2 > 0} x \geq 0$$

۱۰- گزینه «۲»

متوسط

$$x \geq 0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow \text{معادله ریشه حقیقی ندارد.}$$

$$x < 0 \Rightarrow -x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases} \xrightarrow{x < 0} x = -2$$

۱۱- گزینه «۲»

متوسط

$$|x+1| = 4+2x \Rightarrow \begin{cases} x+1 = 4+2x \Rightarrow x = -3 \\ x+1 = -4-2x \Rightarrow x = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{4+2x \geq 0} \begin{cases} x = -3 \text{ غیر قابل قبول} \\ x = -\frac{5}{3} \text{ قابل قبول} \end{cases}$$

۱۲- گزینه «۴»

آسان

$$|x^2 - 2| = 2 \Rightarrow x^2 - 2 = \pm 2$$

$$\Rightarrow x^2 = \pm 2 + 2 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \\ x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases} \text{ سه ریشه}$$

۱۳- گزینه «۲»

متوسط

$$||x-1|-3|=4 \Rightarrow \begin{cases} |x-1|-3=4 \\ |x-1|-3=-4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |x-1|=7 \Rightarrow \begin{cases} x-1=7 \Rightarrow x=8 \\ x-1=-7 \Rightarrow x=-6 \end{cases} \\ |x-1|=-1 \Rightarrow \text{ریشه حقیقی ندارد} \end{cases}$$

پس مجموع ریشه‌ها $8-6=2$ خواهد بود.

۱۴- گزینه «۲»

متوسط

$$|1+x^4-2\sqrt{x}|+3=0 \Rightarrow |1+x^4-2\sqrt{x}|=-3$$

معادله جواب ندارد $\Rightarrow$ (قدرمطلق برابر عددی منفی نمی‌شود)

$$||x+2|-3|=2 \Rightarrow \begin{cases} |x+2|-3=2 \\ |x+2|-3=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |x+2|=5 \\ |x+2|=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=\pm 5 \Rightarrow x=3, -7 \\ x+2=\pm 1 \Rightarrow x=-1, -3 \end{cases}$$

پس معادله چهار جواب دارد.

۱۵- گزینه «۱»

آسان

$$|2-3x| > 5 \Rightarrow \begin{cases} 2-3x > 5 \Rightarrow -3x > 3 \Rightarrow x < -1 \\ 2-3x < -5 \Rightarrow -3x < -7 \Rightarrow x > \frac{7}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{7}{3}, +\infty) \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-1, \frac{7}{3}]$$

۱۶- گزینه «۴»

متوسط

نامعادله $|x-2| < \frac{1}{2}$ را به فرم $b < 3x+a < 2$ تبدیل می‌کنیم.

$$|x-2| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x-2 < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} < 3x-6 < \frac{3}{2} \\ \xrightarrow{+\frac{1}{2}} -1 < 3x - \frac{11}{2} < 2$$

حال اگر جواب به دست آمده را با نامساوی $b < 3x+a < 2$ مقایسه کنیم

آن‌گاه:

$$b = -1, a = -\frac{11}{2} \Rightarrow a+b = -\frac{13}{2}$$

متوسط

۲۰- گزینه «۲»

$$|2x-1| < |x+5| \Rightarrow (2x-1)^2 < (x+5)^2$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 - (x+5)^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(3x+4) < 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} < x < 6 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{6}{-\frac{4}{3}} = -\frac{9}{2}$$

آسان

۲۱- گزینه «۲»

دامنه این نامعادله $x \geq 0$ است با این فرض مسئله را حل می‌کنیم:

$$|x| < \sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان دو}} x > x^2 \Rightarrow x^2 - x < 0 \Rightarrow 0 < x < 1$$

متوسط

۲۲- گزینه «۲»

$$|x^2 + x| < 2 \Rightarrow -2 < x^2 + x < 2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + x < 2 \Rightarrow x^2 + x - 2 < 0 \Rightarrow -2 < x < 1 \\ x^2 + x > -2 \Rightarrow x^2 + x + 2 > 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده، بازه $(-2, 1)$ است، پس حداکثر مقدار $b-a$ برابر $3 = (-2) - (-5)$ است.

متوسط

۲۳- گزینه «۳»

$$|2x-1| < |x| \Rightarrow (2x-1)^2 < x^2 \Rightarrow (2x-1)^2 - x^2 < 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(3x-1) < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1 \Rightarrow x \in (\frac{1}{3}, 1)$$

بیشترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{2}{3}$ است.

متوسط

۲۴- گزینه «۴»

$$4x^2 + x - 5 < 0 \Rightarrow -\frac{5}{4} < x < 1$$

$$|x-a| < b \Rightarrow -b < x-a < b \Rightarrow a-b < x < a+b$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-\frac{5}{4} \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = -\frac{1}{4} \Rightarrow a = -\frac{1}{8}, b = \frac{9}{8} \Rightarrow a+2b = \frac{17}{8}$$

دشواری

۲۵- گزینه «۴»

$$|x| > x^2 - 2x$$

$$(1) x \geq 0 \Rightarrow x > x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x < 0$$

$$\Rightarrow 0 < x < 3 \xrightarrow{\cap(x \geq 0)} 0 < x < 3$$

$$(2) x < 0 \Rightarrow -x > x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - x < 0$$

$$\Rightarrow 0 < x < 1 \xrightarrow{\cap(x < 0)} x \in \emptyset$$

جواب نهایی اجتماع جواب‌های به دست آمده است یعنی برابر $(0, 3)$ می‌باشد.

متوسط

۱۷- گزینه «۲»

روش اول:

$$A < 4x - 3 < B \Rightarrow \frac{A+3}{4} < x < \frac{B+3}{4}$$

اگر بازه $a < x < b$ مجموعه جواب نامعادله $|x-\alpha| < \beta$ باشد داریم:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a+b}{2} \\ \beta = \frac{b-a}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A+3}{4} + \frac{B+3}{4} = 2 \Rightarrow A+B=1 \\ \frac{B+3}{4} - \frac{A+3}{4} = 0/2 \end{cases}$$

روش دوم:

$$|x-2| < 0/2 \Rightarrow -0/2 < x-2 < 0/2 \Rightarrow 1/8 < x < 2/2$$

$$\Rightarrow 7/2 < 4x < 8/8 \Rightarrow 4/2 < 4x-3 < 5/8$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A=4/2 \\ B=5/8 \end{cases} \Rightarrow A+B=1$$

دشواری

۱۸- گزینه «۳»

$$1) |2x-3| < 3 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} -3 < 2x-3 < 3 \Rightarrow 0 < x < 3$$

$$\Rightarrow x \in (0, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 3)$$

$$2) |x-1| \leq 0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=0$$

$$3) |2x-3| < 1 \Rightarrow -1 < 2x-3 < 1 \Rightarrow 1 < x < 2 \Rightarrow x \in (1, 2)$$

$$4) |x+2| > 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 > 1 \Rightarrow x > -1 \\ \text{یا} \\ x+2 < -1 \Rightarrow x < -3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (-1, +\infty)$$

فقط مجموعه جواب در گزینه ۳ به صورت یک بازه است.

متوسط

۱۹- گزینه «۳»

$$|2x-1| \geq |x-3| \Rightarrow (2x-1)^2 \geq (x-3)^2$$

$$\Rightarrow (2x-1)^2 - (x-3)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow ((2x-1) - (x-3))((2x-1) + (x-3)) \geq 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(3x-4) \geq 0$$

x	-\infty	-2	4/3	+\infty
P		+	-	+

$$\Rightarrow x \leq -2 \text{ یا } x \geq \frac{4}{3}$$

جواب نامعادله شامل نقاط صحیح $1, 0, -1$ نمی‌باشد.



متوسط

۳۰- گزینه «۱»

$$|2x^2 - 4| < 2x \xrightarrow{x > 0} |2x^2 - 4| < 2x$$

$$\Rightarrow (2x^2 - 4 - 2x)(2x^2 - 4 + 2x) < 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 2) < 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x-2)(x-1)(x+2) < 0$$

X	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
P		+	-	+	-	+

مسئله برای x های مثبت جواب دارد پس جواب، بازه (۱, ۲) است. در نتیجه

$$\text{Max}(b-a) = 1 \text{ است.}$$

متوسط

۳۱- گزینه «۱»

$$15x^2 + 73x + 14 < 0 \Rightarrow (5x+1)(3x+14) < 0$$

$$\Rightarrow \frac{-14}{3} < x < \frac{-1}{5} \quad (1)$$

$$|\frac{x-1}{2} - 1| > 3 \Rightarrow |\frac{x-3}{2}| > 3 \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-3}{2} > 3 \\ \frac{x-3}{2} < -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x > 9 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty, -3) \cup (9, +\infty) \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با:

$$-\frac{14}{3} < x < -3$$

بنابراین:

$$\text{max}(b-a) = \frac{14}{3} - 3 = \frac{5}{3}$$

دشوار

۳۶- گزینه «۲»

$$|\frac{2-x}{2x-3}| > 1 \xrightarrow{x \neq \frac{3}{2}} |2-x| > |2x-3|$$

$$\Rightarrow (2-x+2x-3)(2-x-2x+3) > 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(5-3x) > 0 \Rightarrow x \in (1, \frac{5}{3}) - \{\frac{3}{2}\}$$

دشوار

۳۷- گزینه «۲»

$$\frac{|3x-1|}{|x-7|} \geq 4 \xrightarrow{x \neq 7} |3x-1| \geq |4x-28|$$

$$\Rightarrow (3x-1)^2 - (4x-28)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow (-x+27)(7x-29) \geq 0 \Rightarrow \frac{29}{7} \leq x \leq 27$$

اعداد صحیح در این مجموعه جواب عبارتند از: $x = 5, 6, \dots, 27$ که تعداد

آنها برابر $27 - 5 + 1 = 23$ است که اگر عدد $x = 7$ را از آن کم کنیم

تعداد ۲۲ عدد خواهد بود.

متوسط

۳۸- گزینه «۱»

روش اول:

$$|x^2 - 1| \leq |x+1| \xrightarrow{\text{توان دو}} (x^2 - 1)^2 \leq (x+1)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)^2 - (x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow (x^2 - 1 - x - 1)(x^2 - 1 + x + 1) \leq 0$$

$$\Rightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x) \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x)(x+1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x(x+1)^2(x-2)}{P} \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq x \leq 2, x = -1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{-1, 0, 1, 2\}$$

X	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
P		+	+	-	+

روش دوم:

$$|x^2 - 1| \leq |x+1| \Rightarrow |x-1||x+1| - |x+1| \leq 0$$

$$\Rightarrow |x+1|(|x-1| - 1) \leq 0$$

$$\xrightarrow{|x+1| \geq 0} |x-1| - 1 \leq 0, |x+1| = 0 \Rightarrow |x-1| \leq 1, x = -1$$

$$\Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 1, x = -1 \Rightarrow 0 \leq x \leq 2,$$

$$x = -1 \xrightarrow{x \in \mathbb{Z}} x \in \{0, 1, 2, -1\}$$

متوسط

۳۹- گزینه «۴»

این مسئله فقط در x های مثبت جواب دارد:

$$|x^2 - 2x| < x \Rightarrow -x < x^2 - 2x < x \xrightarrow{\div x} -1 < x-2 < 1$$

$$\xrightarrow{+2} 1 < x < 3$$

متوسط

-۷

دهانه سهمی رو به پایین است پس $a = -1$ خواهد بود.

$$-\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow \frac{-b}{-1} = 2 \Rightarrow b = 2$$

نقطه $(2, 1)$ روی سهمی قرار دارد پس:

$$1 = 4a + 2b + c \xrightarrow{a=-1, b=2} 1 = -4 + 4 + c \Rightarrow c = 1$$

$$-x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \sqrt{2} \\ \beta = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 = 2(1 + 2) = 6$$

آسان

-۸

$$x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$-x - 5 = 0 \Rightarrow x = -5$$

$$2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1, -\frac{3}{2}$$

X	$-\infty$	-5	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$
P		-	+	-	+	-

آسان

-۹

$$\frac{x}{2} - 1 \leq 2x + 3 \xrightarrow{\times 2} x - 2 \leq 4x + 6 \Rightarrow 3x \geq -8 \Rightarrow x \geq -\frac{8}{3} \quad (1)$$

$$2x + 3 \leq 3x \Rightarrow x \geq 3 \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر $x \geq 3$ است.

آسان

-۱۰

$$\Delta = 4 + 12(m+1) < 0 \Rightarrow m+1 < -\frac{1}{3} \Rightarrow m < -\frac{4}{3} \quad (1)$$

$$a = m+1 < 0 \Rightarrow m < -1 \quad (2)$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده $m < -\frac{4}{3}$ است.

آسان

-۱۱

$$x^2 + 2x < 2x^2 - 5x \Rightarrow x^2 - 7x > 0 \Rightarrow x(x-7) > 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (7, +\infty)$$

متوسط

-۱۲

آ) $p(x) > 2 \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (0, 2)$

ب) $p(x) \leq 0 \Rightarrow x \in [-3, -2] \cup [3, +\infty)$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۱

آسان

-۱

$$x^2 + 7x = -10 \xrightarrow{+\frac{49}{4}} x^2 + 7x + \frac{49}{4} = -10 + \frac{49}{4}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{7}{2})^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{7}{2} = \frac{3}{2} \\ x + \frac{7}{2} = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -5 \end{cases}$$

متوسط

-۲

طول و عرض را به ترتیب x, y در نظر می‌گیریم.

$$2(x+y) = 40 \Rightarrow x+y = 20 \Rightarrow y = 20-x$$

$$xy = 75 \Rightarrow x(20-x) = 75 \Rightarrow x^2 - 20x + 75 = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-15) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=5 \Rightarrow y=15 \\ x=15 \Rightarrow y=5 \end{cases}$$

یعنی طول و عرض مستطیل ۵، ۱۵ است.

آسان

-۳

$$9(2x-1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} 3(2x-1) = 4 \\ 3(2x-1) = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x = 7 \\ 6x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{6} \\ x = -\frac{1}{6} \end{cases}$$

آسان

-۴

$$\Delta = 0 \Rightarrow m^2 - 4m = 0 \Rightarrow m(m-4) = 0 \xrightarrow{m \neq 0} m = 4$$

آسان

-۵

$$x = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{محور تقارن}$$

آسان

-۶

$$y = a(x-2)^2 - 2 \xrightarrow{(0,1)} 1 = 4a - 2 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{3}{4}(x-2)^2 - 2$$

آسان

-۴

$$\Delta < 0 \Rightarrow 9 - 28m < 0 \Rightarrow 28m > 9 \Rightarrow m > \frac{9}{28}$$

آسان

-۵

عرض این دو نقطه یکسان است پس میانگین طول آن‌ها خط تقارن خواهد بود.

$$x = \frac{1-3}{2} = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x = -1 \end{cases} \Rightarrow -1 - 2y = 5 \Rightarrow -2y = 6 \Rightarrow y = -3$$

بنابراین دو خط در نقطه $(-1, -3)$ متقاطع‌اند.

متوسط

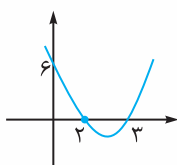
-۶

$$y = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

محل برخورد سهمی با محور x ها ۲ و ۳ هستند و دهانه سهمی رو به بالاست.

نمودار سهمی را ببینید، اگر آن را حداقل سه واحد به سمت چپ انتقال دهیم

نمودار آن محور x ها را با طول مثبت قطع نخواهد کرد.



متوسط

-۷

معادله برخورد آن‌ها باید ریشه مضاعف بدهد.

$$x^2 + kx + 6 = x + 2 \Rightarrow x^2 + (k-1)x + 4 = 0$$

$$\Delta = (k-1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} k-1=4 \\ k-1=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k=5 \\ k=-3 \end{cases}$$

$$k=5 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_S = -2 \Rightarrow S(-2, 0)$$

$$k=-3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x_S = 2 \Rightarrow S(2, 0)$$

آسان

-۸

$$|x+1|=0 \Rightarrow x=-1$$

$$-x^2 - 5 = 0 \text{ فاقد ریشه حقیقی}$$

$$3x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-\frac{4}{3} \end{cases}$$

X	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	-1	1	$+\infty$
P	-	+	+	-	-

متوسط

-۱۳

$$|x-2| \leq 2x+1 \Rightarrow (x-2)^2 - (2x+1)^2 \leq 0 \Rightarrow (x-2+2x+1)(x-2-2x-1) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(3x-1)(-x-3)}_P \leq 0$$

X	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
P	-	+	-	-

$$P \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [\frac{1}{3}, +\infty)$$

متوسط

-۱۴

$$\alpha = \frac{-2+5}{2} = \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{5+2}{2} = \frac{7}{2}$$

$$|x-\alpha| < \beta \Rightarrow |x-\frac{3}{2}| < \frac{7}{2}$$



آسان

-۱

$$2x^2 + x - 3 = 0 \Rightarrow (2x^2 - 2) + (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 1) + (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2(x+1)+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 2x+3=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

متوسط

-۲

اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم طول آن $3x-1$ خواهد بود.

$$x(3x-1) = 24 \Rightarrow 3x^2 - x - 24 = 0$$

$$\Delta = 1 + 12 \times 24 = 289 \Rightarrow x = \frac{1 \pm 17}{6} \xrightarrow{x>0} x=3, 3x-1=8$$

متوسط

-۳

طرفین معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:

$$2x^2 + 8x - 24 = 0 \xrightarrow{\div 2} x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$\Delta = 16 + 48 = 64 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm 8}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -6 \end{cases}$$



آزمون تستی پایانی

آسان

۱- گزینه «ب»

برای اینکه معادله، درجه اول باشد باید ضریب x^2 در معادله صفر باشد پس:

$$4m - 3 = m + 1 \Rightarrow 3m = 4 \Rightarrow m = \frac{4}{3}$$

آسان

۲- گزینه «ا»

$$(x+1)(3x+k)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ 3x+k=0 \Rightarrow x=-\frac{k}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\frac{k}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow k = -1$$

آسان

۳- گزینه «ب»

اگر یکی از ریشه‌ها صفر باشد $c=0$ است.

$$m+1=0 \Rightarrow m=-1 \Rightarrow x_1 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{-1} = -2$$

متوسط

۴- گزینه «ب»

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9m^2 - 36m = 0 \Rightarrow 9m(m-4) = 0$$

$$\xrightarrow{m \neq 0} m = 4 \Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{3m}{2 \times 9} = \frac{m}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

آسان

۵- گزینه «ا»

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 = 12$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

پس ریشه بزرگتر $2 + \sqrt{3}$ است.

متوسط

۶- گزینه «ا»

به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$(x+11)^2 = (x+10)^2 + (x+3)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + 22x + 121 = x^2 + 20x + 100 + x^2 + 6x + 9$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-6 \end{cases} \xrightarrow{x>0} x=2 \Rightarrow \frac{x+11}{x+3} = \frac{13}{5} = \frac{26}{10} = 2\frac{2}{5}$$

متوسط

۹-

$$(1) \frac{x}{2} - 1 \leq \frac{x}{3} \xrightarrow{\times 6} 3x - 6 \leq 2x \Rightarrow x \leq 6$$

$$(2) \frac{x}{3} \leq x + 2 \xrightarrow{\times 3} x \leq 3x + 6 \Rightarrow x \geq -3$$

$$(1) \cap (2): -3 \leq x \leq 6$$

آسان

۱۰-

$$(1) \Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4m < 0 \Rightarrow m > 1$$

$$(2) a > 0 \Rightarrow m > 0$$

اشتراک جواب‌های به دست آمده $m > 1$ است.

متوسط

۱۱-

$$x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

x	$-\infty$	-3	-1	$-\frac{1}{2}$	5	$+\infty$
P		+	-	+	-	+

متوسط

۱۲-

x	$-\infty$	-4	-2	-1	1	2	4
P		+	-	+	+	-	-

متوسط

۱۳-

$$|5x+3| \leq |6x+3| \Rightarrow (5x+3)^2 - (6x+3)^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow (5x+3+6x+3)(5x+3-6x-3) \leq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(11x+6)}_P (-x) \leq 0$$

$$P \leq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -\frac{6}{11}] \cup [0, +\infty)$$

x	$-\infty$	$-\frac{6}{11}$	0	$+\infty$
P		-	+	-

متوسط

۱۴-

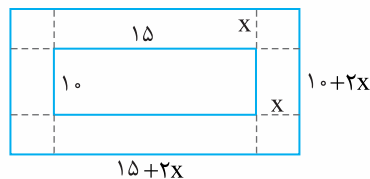
$$\alpha = \frac{-2+4}{2} = 1, \beta = \frac{4+2}{2} = 3$$

$$|x - \alpha| < \beta \Rightarrow |x - 1| < 3$$

۷- گزینه «۳»

متوسط

فاصله لبه‌ها را تا قاب برابر x در نظر می‌گیریم.



مساحت قاب برابر ۳۰۰ سانتی‌متر مربع است. پس:

$$(10 + 2x)(15 + 2x) = 300 \Rightarrow (5 + x)(15 + 2x) = 150$$

$$\Rightarrow 75 + 10x + 15x + 2x^2 = 150 \Rightarrow 2x^2 + 25x - 75 = 0$$

$$\Delta = (25)^2 - 4 \times 25 \times (-75) = 25(25 + 24) = 25 \times 49$$

$$\Rightarrow x = \frac{-25 \pm 5 \times 7}{4} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{-25 + 35}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2P = 2(15 + 2x + 10 + 2x) = 2(25 + 4x)$$

$$\xrightarrow{x=5/2} 2(25 + 10) = 70$$

۸- گزینه «۳»

متوسط

اگر سن فعلی دبیر را x فرض کنیم خواهیم داشت:

$$x + 21 = (x - 21)^2 \Rightarrow x + 21 = x^2 - 42x + 441$$

$$\Rightarrow x^2 - 43x + 420 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = (-43)^2 - 4(1)(420) = 1849 - 1680 = 169$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{43 \pm 13}{2} \Rightarrow x_1 = 15, x_2 = 28$$

۹- گزینه «۲»

آسان

چون $a > 0$ است پس سهمی $\min$ دارد و مختصات $\min$ آن برابر $(3, -1)$

است.

۱۰- گزینه «۳»

آسان

محور تقارن هر سهمی به صورت $x = -\frac{b}{2a}$ است بنابراین:

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-a}{2} = \frac{-1}{2} \Rightarrow a = 1$$

۱۱- گزینه «۳»

آسان

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-4)^2 - 4(1)(9)}{4(1)} = -\frac{-20}{4} = 5$$

۱۲- گزینه «۴»

آسان

در این تابع $c = 0$ است پس یکی از طول‌های برخورد $x = 0$ است یعنی سهمی از مبدأ مختصات عبور می‌کند. ضمناً $a > 0$ است پس دهانه سهمی رو به بالاست.

$$y = x(x + \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

پس طول برخورد دوم منفی است.

۱۳- گزینه «۱»

متوسط

روش اول:

$$x_s = -\frac{b}{2a} = 20 \Rightarrow y(20) = -\frac{1}{40}(20)^2 + 20 = 10$$

روش دوم:

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1)}{-0.1} = 10$$

۱۴- گزینه «۲»

آسان

$$\frac{x-3}{2} + \frac{1}{3} < \frac{x}{3} \xrightarrow{\times 6} 3(x-3) + 2 < 2x$$

$$\Rightarrow 3x - x < 9 - 2 \Rightarrow 2x < 7 \Rightarrow x < \frac{7}{2}$$

۱۵- گزینه «۲»

متوسط

ابتدا نوع ریشه و مقدار آن‌ها را تعیین می‌کنیم، سپس از تعیین علامت سریع، علامت عبارت را تعیین می‌کنیم.

$$4 - x^2 = 0 \Rightarrow (2-x)(2+x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ ریشه‌های ساده}$$

$$x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (مضاعف)}$$

$$(x^2 - 5)^3 = 0 \Rightarrow (x - \sqrt{5})^3 (x + \sqrt{5})^3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} \text{ (مرتبه فرد)}$$

$$|x + 3| = 0 \Rightarrow x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (قدرمطلق)}$$

	س	س	م	س	س	م	س
x	$-\infty$	-3	$-\sqrt{5}$	-2	0	2	$\sqrt{5}$
P		$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

عبارت P در مجموعه $(-\sqrt{5}, -2) \cup (2, \sqrt{5})$ مثبت است که با توجه به

گزینه‌ها گزینه (۲) درست است.

۱۶- گزینه «۱»

آسان

$$x + 1 \leq \frac{x}{2} + 3 \xrightarrow{\times 2} 2x + 2 \leq x + 6 \Rightarrow x \leq 4 \quad (1)$$

$$\frac{x}{2} + 3 < 2x + 1 \xrightarrow{\times 2} x + 6 < 4x + 2 \Rightarrow -3x < -4$$

$$\xrightarrow{\div (-3)} x > \frac{4}{3} \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب نهایی نامعادله است پس:

$$\frac{4}{3} < x \leq 4$$



۱- گزینه «۲»

اگر عدد اول را x بگیریم، عدد دوم $x+10$ است. وقتی در رقم دهگان ۴ واحد اشتباه رخ می‌دهد

پس در حاصل ضرب آن‌ها ۴۰ واحد اختلاف ایجاد می‌شود بنابراین:

$$\frac{x(x+10)-40}{22} = \frac{x}{39}$$

$$\Rightarrow x^2 + 10x - 40 = 39x + 22 \Rightarrow x^2 - 29x - 62 = 0$$

$$\Rightarrow (x-31)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=31 \\ x=-2 \end{cases} \xrightarrow{x \in \mathbb{N}} x=31$$

۲- گزینه «۴»

α ریشه معادله است پس در معادله صادق است بنابراین:

$$3\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha^2 = -\alpha + 2 \\ 3\alpha^2 + \alpha = 2 \end{cases}$$

پس:

$$A = \frac{3\alpha^2}{\alpha-2} - (3\alpha^2 + \alpha) = \frac{-\alpha+2}{\alpha-2} - (2) = -1-4 = -5$$

۳- گزینه «۳»

با توجه به نمودار داریم:

$$a > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$b < 0 \Rightarrow m-3 < 0 \Rightarrow m < 3$$

$$c < 0 \Rightarrow m-2 < 0 \Rightarrow m < 2$$

اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به صورت $(0, 2)$ است.

۴- گزینه «۳»

$$\frac{1}{x-2} > x-2 \Rightarrow \frac{1}{x-2} - x + 2 > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-x^2+4x-4}{x-2} > 0 \Rightarrow P(x) = \frac{-x^2+4x-3}{x-2} > 0$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
P(x)	+	0	-	0	-

$$P(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (2, 3) \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow b-a=3-2=1$$

متوسط

۱۷- گزینه «۳»

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{x^2+x-2-x^2+3x-2}{x^2-3x+2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x-4}{x^2-3x+2} < 0$$

اکنون عبارت $P = \frac{4x-4}{x^2-3x+2}$ را تعیین علامت می‌کنیم.

$$4x-4=0 \Rightarrow x=1 \quad (\text{ریشه ساده})$$

$$x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1, 2 \quad (\text{ریشه‌های ساده})$$

$x=1$ ریشه صورت و مخرج است پس رفتار ریشه مضاعف در جدول را خواهد

داشت.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
P	-	0	-	+

$$P < 0 \rightarrow x \in (-\infty, 1) - \{1\}$$

متوسط

۱۸- گزینه «۴»

شرط داشتن ریشه حقیقی در معادله درجه‌ی دوم آن است که $\Delta \geq 0$ بنابراین:

$$\Delta = (-(m+4))^2 - 4(m+2)(2) \geq 0$$

$$\Rightarrow m^2 + 8m + 16 - 8m - 16 \geq 0 \Rightarrow m^2 \geq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R}$$

متوسط

۱۹- گزینه «۲»

چون $y < 0$ است پس $20y < 0$ است و در نتیجه $|20y| = -20y$ حال A

را حساب می‌کنیم:

$$A = |5y + 20y| = |5y - 20y| = |-15y|$$

می‌دانیم $y < 0$ است پس $-15y > 0$ است در نتیجه:

$$A = | -15y | = -15y$$

متوسط

۲۰- گزینه «۲»

$$-x^2 > x \Rightarrow x^2 + x < 0 \Rightarrow x(x+1) < 0$$

$$\Rightarrow -1 < x < 0 \Rightarrow \begin{cases} -\frac{3}{2} < x - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} \\ -2 < x-1 < -1 \end{cases}$$

هر دو عبارت $x-1$ و $x-\frac{1}{2}$ منفی هستند پس خلاصه شده‌ی عبارت فوق

به صورت زیر است:

$$|x-1| - |x-\frac{1}{2}| = -(x-1) + (x-\frac{1}{2}) = -x+1+x-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



گزینه «۲»

برای حل دستگاه نامعادلات بایستی هر دو نامعادله را حل کنیم سپس اشتراک جواب‌ها را محاسبه کنیم.

$$P(x) = \frac{(2+3x)(x-1)}{x}$$

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$	۰	۱	$+\infty$
P	-	+	+	-	+

$$P(x) < 0 \Rightarrow (-\infty, -\frac{2}{3}) \cup (1, +\infty) \quad (1)$$

$$q(x) = \frac{x+2}{x-2}$$

x	$-\infty$	-۲	۲	$+\infty$
q(x)	+	-	+	+

$$q(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty) \quad (2)$$

اشتراک (۱) و (۲) برابر است با $(-\infty, -2)$.

گزینه «۱»

چون عبارت‌های $\sqrt{x^2+3}$ و $\sqrt{x^2+1}$ همواره مثبت‌اند پس در تعیین علامت نقشی ندارند.

$$\begin{aligned} -(x+2)^2(x^2+x-2) &> 0 \\ \Rightarrow -(x+2)^2(x+2)(x-1) &> 0 \Rightarrow -(x+2)^3(x-1) > 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-۲	۱	$+\infty$
$-(x+2)^3(x-1)$	-	+	-	+

$$\Rightarrow -2 < x < 1$$

گزینه «۹»

در تابع $g(x) = \frac{(x-1)^2}{xf(x)}$ صورت همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر است

بنابراین برای آن که $g(x)$ تعریف شده و مثبت باشد کافی است که مخرج

یعنی $xf(x)$ مثبت باشد و صورت کسر صفر نشود که مقادیر آن را به

ازای x های طبیعی ۱، ۲ و ۳ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} 1 \times f(1) > 0 \Rightarrow g(x) = 0 \\ 2 \times f(2) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \\ 3 \times f(3) > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \end{cases}$$

بنابراین عبارت $g(x)$ فقط به ازای دو x طبیعی ۲ و ۳ مثبت است.

گزینه «۳»

نمودار تابع از خط $y=1$ بالاتر نیست پس کمتر یا مساوی آن است و از خط $y=-1$

پایین‌تر نیست یعنی بزرگ‌تر یا مساوی آن است. در نتیجه: $-1 \leq \frac{2x-1}{2x+3} \leq 1$ بنابراین:

$$(1) \quad \frac{2x-1}{2x+3} \leq 1 \Rightarrow \frac{2x-1}{2x+3} - 1 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x-1-2x-3}{2x+3} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{2x+3} \leq 0 \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$(2) \quad -1 \leq \frac{2x-1}{2x+3} \Rightarrow \frac{2x-1}{2x+3} + 1 \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-1+2x+3}{2x+3} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x+2}{2x+3} \geq 0$$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
P	+	+	-	+

$$\xrightarrow{P \geq 0} x < -\frac{3}{2} \text{ یا } x \geq -\frac{1}{2}$$

اشتراک جواب‌های نامعادلات (۱) و (۲) برابر است با:

$$x \geq -\frac{1}{2}$$

گزینه «۲»

زیر محور x ها یعنی نقاطی که تابع منفی باشد پس:

$$x^3 - 4x^2 - x + 4 < 0 \Rightarrow x^2(x-4) - (x-4) < 0$$

$$\Rightarrow (x-4)(x^2-1) < 0$$

باید عبارت $P = (x-4)(x^2-1)$ را تعیین علامت کنیم:

$$x-4=0 \Rightarrow x=4 \quad (\text{ریشه ساده})$$

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1 \quad (\text{ریشه‌های ساده})$$

x	-۱	۱	۴
P	-	+	-

$$\xrightarrow{(P < 0, x > -1)} x \in (1, 4)$$

$$\Rightarrow \max(b-a) = 4-1 = 3$$



۱۴- گزینه «۴»

$$\Delta = (m + 5)^2 - 4m(9) = 0 \Rightarrow m^2 + 10m + 25 - 36m = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 26m + 25 = 0 \Rightarrow (m - 1)(m - 25) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m - 1 = 0 \Rightarrow m = 1 \\ m - 25 = 0 \Rightarrow m = 25 \end{cases}$$

$$m = 1 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$m = 25 \Rightarrow 25x^2 + 30x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-30}{50} = -\frac{3}{5}$$

پس ریشه مضاعف بیشتر از ۱- برابر ۰/۶- است.

۱۵- گزینه «۱»

$$\Delta = \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{b^2}{4} - \frac{16a}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{b^2 - 64a}{16} = 0 \Rightarrow b^2 - 64a = 0$$

حالا دلتای معادله دوم را حساب می‌کنیم:

$$\Delta = (-8\sqrt{a})^2 - 4(1)\left(\frac{3}{4}b^2\right) = 64a - 3b^2$$

$$\Delta = -(3b^2 - 64a) = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{8\sqrt{a}}{2} = 4\sqrt{a}$$

۱۶- گزینه «۴»

در این معادله $a = 1$ و $b = 2$ و $c = -3$ و $d = -6$ است پس

$$\text{بنابراین: } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = -\frac{1}{3}$$

$$(x^3 + 2x^2) + (-3x - 6) = 0 \Rightarrow x^2(x + 2) - 3(x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 2)(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

ریشه کوچک‌تر ۲- است پس $(-2)^2 = 4$ پاسخ سؤال است.

۱۷- گزینه «۱»

$$6x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

در این معادله درجه سوم داریم $a = 6$ و $b = -2$ و $c = -3$ و $d = 1$ و بین

ضرایب رابطه $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = -2$ برقرار است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$2x^2(3x - 1) - (3x - 1) = 0 \Rightarrow (3x - 1)(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

بنابراین بزرگ‌ترین ریشه معادله $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

۱۰- گزینه «۳»

این نامعادله برای $x \geq 0$ قابل قبول است پس:

$$-x \leq x - 2 \leq x \Rightarrow \begin{cases} x - 2 \leq x \Rightarrow -2 \leq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \\ x - 2 \geq -x \Rightarrow x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$$

۱۱- گزینه «۴»

اگر $0 < a < 1$ باشد آن‌گاه $\frac{1}{a} > a$ خواهد بود پس $a - \frac{1}{a} < 0$ است. ضمناً

برای هر $0 < a < 1$ داریم $a^2 < a$ پس $a^2 - a < 0$ خواهد بود.

$$a(|a^2 - a| - |a - \frac{1}{a}|) = a(a - a^2 + a - \frac{1}{a}) = a(a - a^2 + a - \frac{1}{a}) = 2a^2 - a^3 - 1$$

۱۲- گزینه «۱»

با توجه به خاصیت (۲۰) قدرمطلق‌ها داریم:

$$x^3 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x^3 - 1) + (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) + (x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x^3 - 1) + (-4x + 4) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) - 4(x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)[(x^2 + x + 1) - 4] = 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$$

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm 1$$

ریشه‌های مشترک هر سه قدر مطلق فقط $x = 1$ است بنابراین معادله فقط

یک ریشه دارد.

۱۳- گزینه «۳»

معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$(x^2 - 15x + 44)(x^2 - 15x + 54) + 16 = 0$$

قرار می‌دهیم $y = x^2 - 15x + 44$ پس:

$$y(y + 10) + 16 = 0 \Rightarrow y^2 + 10y + 16 = 0 \Rightarrow y = -8, -2$$

$$y = -8 \Rightarrow x^2 - 15x + 52 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = -2 \Rightarrow x^2 - 15x + 46 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{41}}{2}$$

بنابراین معادله دارای ۴ ریشه متمایز است.

۱۸-۵ گزینه «۲»

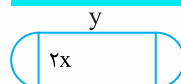
$$3x + 2y = 4 \Rightarrow y = 2 - \frac{3}{2}x$$

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = x(2 - \frac{3}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = (\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2})x^2 + 2x$$

$$x_0 = \text{طول رأس سهمی} = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2})}$$

$$= \frac{4}{6 - \sqrt{3}} \times \frac{6 + \sqrt{3}}{6 + \sqrt{3}} = \frac{4(\sqrt{3} + 6)}{33}$$

۱۹-۵ گزینه «۲»



$$2y + 2\pi x = 1500 \Rightarrow y = 750 - \pi x$$

$$S = 2xy + x^2\pi = 2x(750 - \pi x) + x^2\pi$$

$$= -\pi x^2 + 1500x$$

$$S_{\text{ماکسیم}} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(1500)^2}{4(-\pi)} = \frac{55500}{\pi}$$

۲۰-۵ گزینه «۲»

اگر در یک سهمی $\Delta = 4$ باشد مثلث تشکیل شده با نقطه رأس و دو نقطه برخورد با محور x ها، در رأس سهمی قائمه است.

$$\Delta = (1)^2 - 4(-1)(k) = 4 \Rightarrow 4k = 3 \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$