

آسان

-۵

$$(2, x + 2y) = (x - y, 5) \Rightarrow x - y = 2, x + 2y = 5$$

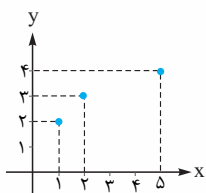
$$-1 \begin{cases} x - y = 2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = -2 \\ x + 2y = 5 \end{cases} \xrightarrow{+} 3y = 3 \Rightarrow y = 1$$

$$x - y = 2 \xrightarrow{y=1} x - 1 = 2 \Rightarrow x = 3$$

آسان

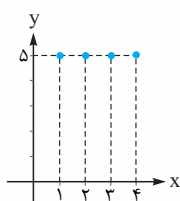
-۶

$$\{(1, 2), (2, 3), (5, 4)\}$$



(آ)

$$\{(1, 5), (2, 5), (3, 5), (4, 5)\}$$

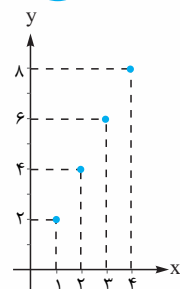
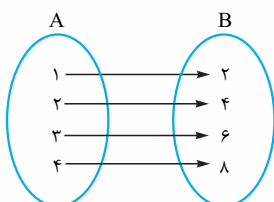


(ب)

آسان

-۷

$$\{(1, 2)(2, 4)(3, 6)(4, 8)\}$$



آسان

-۸

قسمت آ تابع نیست چون دو زوج مرتب $(1, 2), (1, -2)$ مؤلفه اول یکسان دارند ولی مؤلفه‌های دوم آن متفاوت است.

قسمت ب تابع است چون در تمام زوج مرتبها مؤلفه‌های اول یکسان نداریم.



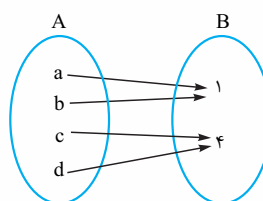
آسان

-۱

در قسمت آ چون از همه عضوهای A دقیقاً یک پیکان خارج شده است پس تابع می‌باشد. در قسمت ب نیز از تمام عضوهای A دقیقاً یک پیکان خارج شده است بنابراین تابع است. در قسمت پ از هر دو عضو مجموعه A فقط یک پیکان خارج شده است پس تابع است. در قسمت ت از عضو ۱ در A دو پیکان خارج شده است پس تابع نیست. در قسمت ث از عضو C در A پیکانی خارج نشده است پس تابع نمی‌باشد.

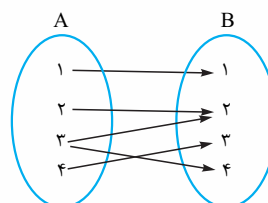
آسان

-۲



آسان

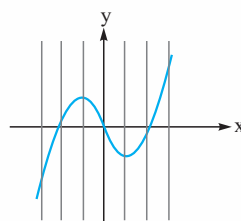
-۳



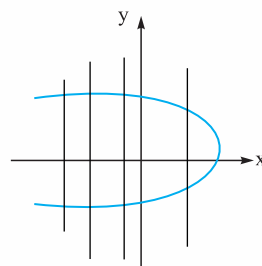
آسان

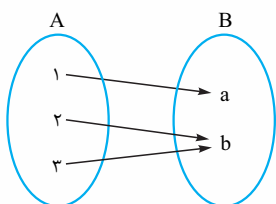
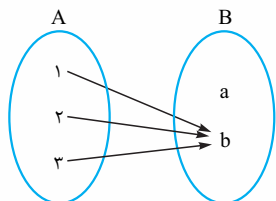
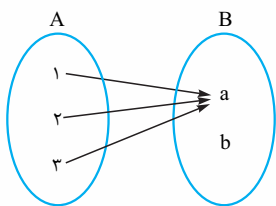
-۴

تابع است. (آ)



تابع نیست. (ب)





آسان

-۱۱

آ) تابع است $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$

ب) تابع نیست $\{(0,1), (2,0), (1,1), (1,2), (2,1)\}$

آسان

-۱۲

آ) در این رابطه هر عضو دامنه به مربع خود نسبت داده شده است بنابراین

ضابطه آن $f(x) = x^2$ است.

ب) در این رابطه هر عضو دامنه به عکس آن نسبت داده شده است بنابراین

ضابطه آن $f(x) = \frac{1}{x}$ است.

آسان

-۱۳

$$a = b + 5$$

b

$$\text{محیط} = 2(a + b) = 2(b + 5 + b) = 2(2b + 5) = 4b + 10$$

آسان

-۹

آ) در حالت کلی اگر هر عدد را به نصف آن نسبت دهیم هرگز یک عدد دو

نصف ندارد پس به ازای هر عدد صحیح نیز تنها و تنها یک عدد که نصف آن

است نسبت داده می‌شود این رابطه تابع است.

ب) می‌دانیم در هر مثلث متساوی‌الاضلاع محیط یعنی سه برابر یک ضلع و

این رابطه برای هر عدد منحصر بفرد است چون هر عدد تنها و تنها یک مقدار

مشخص به عنوان $\frac{1}{3}$ خود دارد پس رابطه تابع است.

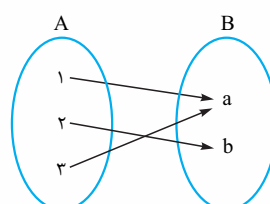
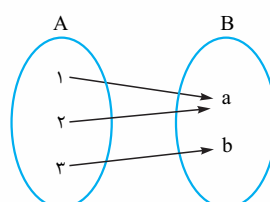
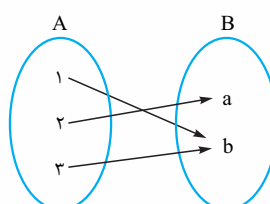
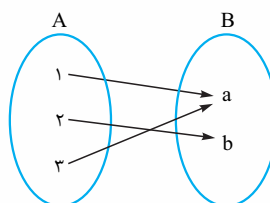
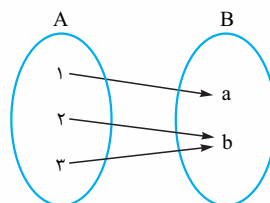
پ) در حالت کلی اگر مادر فقط و فقط یک فرزند داشته باشد این رابطه تابع

می‌باشد و مادری که بیش از یک فرزند دارد تابع نمی‌باشد. پس این رابطه

تابع نیست.

دشواری

-۱۰



آسان

۵- گزینه «۴»

یک فرد ۸۰ کیلوگرمی می‌تواند ۳۰ ساله یا ۳۲ ساله باشد.

آسان

۶- گزینه «۳»

نمودار داده شده در گزینه (۳) تابع نیست، زیرا از عضو ۳ در مجموعه اول دو فلش به دو عضو متفاوت در مجموعه دوم وصل شده است.

متوسط

۷- گزینه «۳»

اعضای مجموعه A عبارت است از:

$$A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

بنابراین چون در هر عضو رابطه R، باید شرط $x < y$ برقرار باشد، در هر زوج مرتب، مولفه اول از مولفه دوم کوچک‌تر است. داریم:

$$R = \{(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, 2), (-1, 0), (-1, 1), (-1, 2), (0, 1), (0, 2), (1, 2)\} \Rightarrow n(R) = 10$$

متوسط

۸- گزینه «۲»

یک رابطه جدولی تابع است، هرگاه مقادیر بالای جدول (مولفه اول) با هم برابر نباشند (مانند گزینه «۴») و یا اگر برابر باشند مقادیر پایینی آن‌ها (مولفه دوم آن‌ها) نیز با هم برابر باشند (مانند گزینه‌های «۱» و «۳»). در گزینه «۲» دو مقدار $\sqrt{4}, 2$ با هم برابرند، اما مولفه دوم آن‌ها به ترتیب $\sqrt{2}, 2$ شده است که با هم برابر نیستند، بنابراین این جدول بیانگر یک تابع نیست.

آسان

۹- گزینه «۴»

می‌دانیم که وقتی در یک مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب، مولفه‌های اول دو زوج مرتب دلخواه برابر باشند، برای آن که مجموعه تابع باشد، باید حتماً مولفه‌های دوم آن‌ها نیز با هم برابر باشند. بنابراین:

$$(-1, m-1) = (-1, 2m) \Rightarrow 2m = m-1 \Rightarrow 2m - m = -1 \Rightarrow m = -1$$

متوسط

۱۰- گزینه «۴»

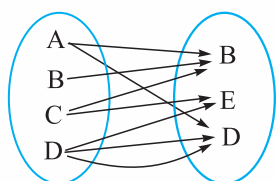
اگر در این نمودار خطی به موازات محورهای رسم کنیم نمودار را در دو نقطه قطع می‌کند.

آسان

۱۱- گزینه «۳»

با حذف دو پیکان از D و یک پیکان از C و یک پیکان از A نمودار تابع خواهد بود.

$$2 + 1 + 1 = 4$$



متوسط

۱- گزینه «۱»

باید دو زوج مرتب برابر باشند تا این مجموعه فقط یک عضو داشته باشد، بنابراین:

$$\begin{cases} 1-a = a-b \\ 3-b = a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=1 \\ a+2b=3 \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} 4a-2b=2 \\ a+2b=3 \end{cases}$$

$$5a = 5 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a + b = 2$$

متوسط

۲- گزینه «۴»

$$y - x = 9 \Rightarrow x - y = -9 \Rightarrow x^2 - y^2 = 45 \Rightarrow (x+y) \frac{-9}{(x-y)} = 45$$

$$\Rightarrow (x+y)(-9) = 45 \Rightarrow x+y = -5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y = -5 \\ x-y = -9 \end{cases} \Rightarrow 2x = -14 \Rightarrow x = -7$$

$$x+y = -5 \xrightarrow{x=-7} -7+y = -5 \Rightarrow y = 2$$

$$2x - y \xrightarrow{\frac{x=-7}{y=2}} 2(-7) - 2 = -16$$

دشوار

۳- گزینه «۲»

$$((x-4)^2 + (y+2)^2, z^3) = (0, xy) \Rightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y+2)^2 = 0 \\ z^3 = xy \end{cases}$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-4 = 0 \Rightarrow x = 4 \\ y+2 = 0 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$$

$$z^3 = xy \xrightarrow{\frac{x=4}{y=-2}} z^3 = -8 \Rightarrow z = -2$$

نکته: مجموع چند عبارت به صورت مربع کامل، زمانی برابر صفر است که هر

کدام از عبارت‌های آن صفر باشد.

دشوار

۴- گزینه «۴»

$$x^3 - 2x^2 = 5x - 6 \Rightarrow x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 - x - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2, -2, 3$$

$$3 - y^2 = y^2 - 5 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$$

بیش‌ترین مقدار $x - y$ برابر $3 + 2$ یعنی ۵ است.



۱۷- گزینه «۱»

متوسط

چون از عدد ۲ در نمودار ون دو پیکان خارج شده است، پس باید مقادیری که این پیکان‌ها از ۲ به آن‌ها وارد می‌شوند، یکسان باشند تا نمودار ون تابع باشد. لذا:

$$a + 1 = -2 \Rightarrow a = -3 (*)$$

به‌ازای $a = -3$ مقدار $a - 1$ در مجموعه اول برابر $-4 - 1 = -5$ می‌شود، بنابراین دو عضو -4 در مجموعه اول وجود نخواهد داشت، در نتیجه عضوهای متناظر آن‌ها در مجموعه دوم باید با هم برابر باشند تا نمودار ون تابع باشد، لذا:

$$\left. \begin{matrix} (-4, 7) \\ (a - 1, 2b + 1) \end{matrix} \right\} \xrightarrow{a-1=-4} 2b + 1 = 7 \Rightarrow 2b = 6$$

$$\Rightarrow b = 3 \xrightarrow{(*)} a + b = -3 + 3 = 0$$

۱۸- گزینه «۴»

متوسط

نکته: اگر f, g دو تابع به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب باشند، هر زیرمجموعه آن‌ها نیز تابع است.

$$(f - g) \subset f \Rightarrow f - g \text{ تابع است}$$

$$(f \cap g) \subset f, (f \cap g) \subset g \Rightarrow f \cap g \text{ تابع است}$$

$$(g - f) \subset g \Rightarrow g - f \text{ تابع است}$$

گزینه (۴) ممکن است تابع نباشند، مثلاً اگر $f = \{(1, 2)\}$ و $g = \{(1, 3)\}$ باشند، $f \cup g = \{(1, 3), (1, 2)\}$ ولی g, f هر دو تابع‌اند، ولی

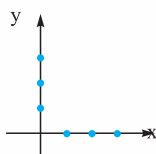
۱۹- گزینه «۳»

دشوار

رابطه R به‌صورت زیر است.

$$R = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0)\} \Rightarrow n(R) = 5$$

نمودار این تابع را در شکل زیر ببینید:



۲۰- گزینه «۱»

دشوار

باید ۳۰ بر $|y| + 1$ بخش‌پذیر باشد.

$$1 + |y| = 1 \Rightarrow |y| = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 30$$

$$1 + |y| = 2 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow x = 15$$

$$1 + |y| = 3 \Rightarrow |y| = 2 \Rightarrow y = \pm 2 \Rightarrow x = 10$$

$$1 + |y| = 5 \Rightarrow |y| = 4 \Rightarrow y = \pm 4 \Rightarrow x = 6$$

$$1 + |y| = 6 \Rightarrow |y| = 5 \Rightarrow y = \pm 5 \Rightarrow x = 5$$

$$1 + |y| = 10 \Rightarrow |y| = 9 \Rightarrow y = \pm 9 \Rightarrow x = 3$$

$$1 + |y| = 15 \Rightarrow |y| = 14 \Rightarrow y = \pm 14 \Rightarrow x = 2$$

$$1 + |y| = 30 \Rightarrow |y| = 29 \Rightarrow y = \pm 29 \Rightarrow x = 1$$

این رابطه ۱۵ عضو دارد که با حذف حداقل ۷ تای آن‌ها به تابع تبدیل می‌شود.

آسان

۱۲- گزینه «۳»

در نمودار گزینه «۳» هر خطی موازی محور y ها رسم کنیم، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

متوسط

۱۳- گزینه «۲»

باید x, y و مجموع مربعات x, y داخل مجموعه $A = \{-5, -4, \dots, 4, 5\}$

باشد، رابطه R به صورت زوج مرتب به صورت زیر است:

$$R = \left\{ \begin{matrix} (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, -1), (0, -2), (1, 0), (1, 1), (1, -1), (1, 2), (1, -2) \\ (-1, 0), (-1, 1), (-1, -1), (-1, 2), (-1, -2), (2, 0) \\ (2, 1), (2, -1), (-2, 0), (-2, 1), (-2, -1) \end{matrix} \right\}$$

رابطه R دارای ۲۱ زوج مرتب است.

متوسط

۱۴- گزینه «۱»

زوج مرتب‌های رابطه R به صورت زیر هستند:

$$R = \{(-2, 0), (-1, -1), (-1, 1), (0, -2), (0, 2), (1, 1), (1, -1), (2, 0)\}$$

$$\Rightarrow n(R) = 8$$

متوسط

۱۵- گزینه «۴»

با توجه به دو زوج مرتب $(1, 3a - 4)$ و $(1, 2a + 1)$ که مولفه‌های اول برابر دارند، باید $3a - 4 = 2a + 1$ نیز برابر باشند.

$$2a + 1 = 3a - 4 \Rightarrow a = 5 \xrightarrow{\text{بازنویسی تابع}}$$

$$R = \{(1, 3(5) - 4), (1, 2(5) + 1), (\frac{5}{\Delta}, b), (\frac{\gamma}{\Delta + 2}, c)\}$$

$$\Rightarrow R = \{(1, 11), (1, 11), (1, b), (1, c)\}$$

با توجه به برابر بودن تمام مولفه‌های اول باید $b = c = 11$ باشند و لذا:

$$a + b + c = 5 + 11 + 11 = 27$$

متوسط

۱۶- گزینه «۱»

با توجه به دو زوج مرتب $(2a, 2b)$ و $(2a, \frac{1}{3})$ داریم:

$$2b = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{1}{6} (*)$$

همچنین با توجه به دو زوج مرتب $(a - 1, 2)$ و $(a - 1, \frac{a + b}{3})$ داریم:

$$2 = \frac{a + b}{3} \Rightarrow 4 = a + b \xrightarrow{(*)} 4 = a + \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow a = 4 - \frac{1}{6} = \frac{23}{6} \xrightarrow{(*)} a - b = \frac{23}{6} - \frac{1}{6} = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$$

آسان

-۵

$$f(-2) = \frac{2}{-2+1} = -2$$

$$f(0) = \frac{2}{0+1} = 2$$

$$f(-3) = \frac{2}{-3+1} = -1$$

n	-2	0	-3
f(n)	-2	2	-1

متوسط

-۶

$$3x-1=3 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow f\left(\frac{4}{3}\right)=3$$

$$3x-1=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=2$$

پس نتیجه می‌گیریم که $f(a) = a-1$

$$3a-1=a-1 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a=0$$

آسان

-۷

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{\frac{1}{2}} \quad f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} \quad f(5) = 5$$

آسان

-۸

$$f = \{(2,3), (-1,4), (\sqrt{5},7), (0,-6)\}$$

متوسط

-۹

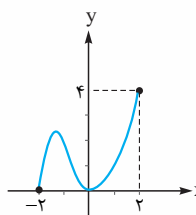
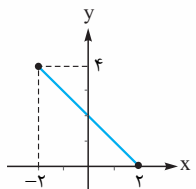
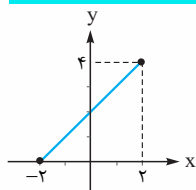
$$f = \{(1,2), (5,7), (9,-2)\} \quad g = \{(1,7), (5,-2), (9,2)\}$$

$$f \text{ دامنه } = g \text{ دامنه } = \{1,5,9\}$$

$$f \text{ برد } = g \text{ برد } = \{2,7,-2\}$$

متوسط

-۱۰



دشواری

۲۱- گزینه «۲»

باید ۷۲ بر $y^2 - 1$ بخش پذیر باشد بنابراین با توجه به صحیح بودن y داریم:

$$y^2 - 1 = -1 \Rightarrow y = 0$$

$$y^2 - 1 = 3 \Rightarrow y = \pm 2$$

$$y^2 - 1 = 8 \Rightarrow y = \pm 3$$

$$y^2 - 1 = 24 \Rightarrow y = \pm 5$$

$$f = \{(-72,0), (24,2), (24,-2), (9,3), (9,-3), (3,5), (3,-5)\}$$

f تابع نیست و با حذف حداقل سه عضو، تابع خواهد شد.



آسان

-۱

$$A) D_A = \{2,4,6\}$$

$$R_A = \{3,5,7\}$$

$$B) D_B = \{1,-1,0,2\}$$

$$R_B = \{4\}$$

آسان

-۲

$$f = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5)\}$$

آسان

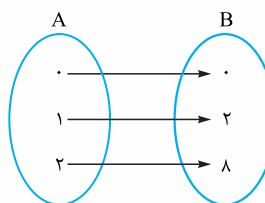
-۳

$$\left. \begin{aligned} n = -1 &\Rightarrow f(-1) = (-1)^2 - 2 = -1 \\ n = 0 &\Rightarrow f(0) = 0^2 - 2 = -2 \\ n = 2 &\Rightarrow f(2) = 2^2 - 2 = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \{-1, -2, 2\} \text{ برد}$$

آسان

-۴

$$\left. \begin{aligned} n = 0 &\Rightarrow f(0) = 2(0)^2 = 0 \\ n = 1 &\Rightarrow f(1) = 2(1)^2 = 2 \\ n = 2 &\Rightarrow f(2) = 2(2)^2 = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow R_f = \{0, 2, 8\}$$





آسان

۱- گزینه «۳»

با توجه به دامنه و برد داده شده به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

در (۱)، دامنه تابع به صورت $D = \{1, 2\}$ و برد تابع نیز به صورت $R = \{1, 2\}$ می‌باشد.

در (۲)، این رابطه تابع نیست، زیرا دو عضو $(2, 2)$ ، $(2, 1)$ مولفه اول یکسان و مولفه دوم نابرابر دارند.

در (۳)، $R = \{2, 1\}$ ، $D = \{1, 2, 3\}$ که با دامنه و برد داده شده در صورت سوال یکسان است و رابطه نیز تابع است، پس گزینه درست است.

در (۴)، $R = \{1, 2, 3\}$ ، $D = \{1, 2, 3\}$ ، همان‌طور که ملاحظه می‌کنید برد این تابع با مجموعه برد داده شده در صورت سوال یکسان نیست.

آسان

۲- گزینه «۴»

اگر تابع f را روی محور x ها تصویر کنیم، دامنه تابع به صورت $(-\infty, 6]$ می‌باشد.

دشوار

۳- گزینه «۲»

می‌دانیم $\sqrt{4} = 2$ ، پس با توجه به شرط تابع بودن f به علت وجود دو زوج مرتب $(\sqrt{4}, b)$ ، $(2, 1)$ که مولفه اول برابر دارند باید $b = 1$ باشد، با بازنویسی f داریم:

$$f = \{(2, 1), (1, 5), (\sqrt{3}, a^2 + 2)\}$$

با توجه به تابع f ، $D_f = \{2, 1, \sqrt{3}\}$ ، $R_f = \{1, 5, a^2 + 2\}$ چون دامنه f سه عضو دارد، پس طبق خواسته صورت تست برد f حداکثر باید دو عضو داشته باشد، بنابراین داخل مجموعه R_f ، باید دو عضو برابر وجود داشته باشد، لذا دو حالت زیر را داریم:

$$\begin{cases} a^2 + 2 = 5 \Rightarrow a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3} \\ a^2 + 2 = 1 \Rightarrow a^2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

دشوار

۴- گزینه «۴»

با توجه به برد تابع خطی داده شده، داریم:

$$y = -4x + \frac{1}{2} \xrightarrow{y \in \mathbb{N}} -4x + \frac{1}{2} \in \mathbb{N}$$

گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم:

$$1) x = -41 \Rightarrow y = -4(-41) + \frac{1}{2} = 164 \frac{1}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$2) x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = -4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$3) x = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -4\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$$

$$4) x = -\frac{5}{8} \Rightarrow y = -4\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 \in \mathbb{N}$$

آسان

۱۱-

$$\mathbb{R} = \text{دامنه } \bar{A} \quad \text{برد} = \{-2\}$$

$$[-2, 0] = \text{برد} \quad [-4, 4] = \text{دامنه } (b)$$

$$[-1, 1] = \text{برد} \quad [-2, 2] = \text{دامنه } (p)$$

متوسط

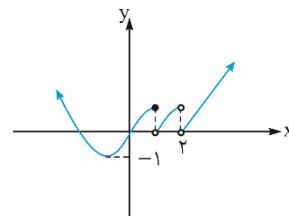
۱۲-

$$\left. \begin{aligned} \frac{3}{2x+1} = -2 &\Rightarrow -4x - 2 = 3 \Rightarrow x = -\frac{5}{4} \\ \frac{3}{2x+1} = 1 &\Rightarrow 2x + 1 = 3 \Rightarrow x = 1 \\ \frac{3}{2x+1} = 2 &\Rightarrow 4x + 2 = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = \left\{-\frac{5}{4}, 1, \frac{1}{4}\right\}$$

متوسط

۱۳-

دامنه به این شکل هم می‌تواند باشد: $D = (-\infty, -1] \cup (-1, 2) \cup (2, +\infty)$



$$D = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$R = [-1, +\infty)$$

آسان

۱۴-

$$1 \rightarrow 1 \quad 2 \rightarrow 4 \quad 3 \rightarrow 9 \quad 4 \rightarrow 16 \quad R = \{1, 4, 9, 16\}$$

آسان

۱۵-

$$f(1) = 5, \quad f(f(1)) = f(5) = -3 \Rightarrow f(1) + f(f(1)) = 5 - 3 = 2$$

آسان

۱۶-

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow f(f(1)) = f(0) = 0 \\ f(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0$$

آسان

۱۷-

قسمت (ب)

آسان

۱۸-

$$f(2) = \sqrt{2+2} - 4 - 2 = -4$$

$$f(-1) = \sqrt{-1+2} - (-1)^2 - (-1) = 1$$

$$\Rightarrow f(-1) + f(2) = 1 - 4 = -3$$

دشوار

۱۹-

$$x = 2 \Rightarrow f(2) + 2f(2) = 9 \Rightarrow 3f(2) = 9 \Rightarrow f(2) = 3$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) + 3 = 1 + 5 \Rightarrow f(1) = 3$$

دشوار

۲۰-

$$4 - x = t \Rightarrow x = 4 - t \Rightarrow f(t) = (4 - t)^2 \Rightarrow f(2x) = (4 - 2x)^2$$

دشوار

۱۴- گزینه «۲»

روش اول: با توجه به این که مقادیر x همگی اعداد طبیعی متوالی هستند، با کمی دقت متوجه می‌شویم مقادیر y از جمع اعداد $۴, ۶, ۸, ۱۰$ با جملات قبلی حاصل شده‌اند؛ یعنی:

$$f(2) = 3, f(3) = f(2) + 4 = 7, f(4) = f(3) + 6 = 13, f(5) = f(4) + 8 = 21, f(6) = f(5) + 10 = 31$$

بنابراین:

$$\begin{array}{c|cccccc} x & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ y & f(1) & 3 & 7 & 13 & 21 & 31 \end{array} \Rightarrow f(1) + 2 = 3 \Rightarrow f(1) = 1$$

روش دوم: با توجه به مقادیر جدول داریم:

$$f(2) = 3^2 - 1, f(3) = 3^2 - 2, f(4) = 4^2 - 3, f(5) = 5^2 - 4, f(6) = 6^2 - 5$$

بنابراین ضابطه تابع $f(x)$ به صورت $f(x) = x^2 - (x-1)$ یا به عبارتی $f(x) = x^2 - x + 1$ می‌باشد، در نتیجه:

$$f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$$

آسان

۱۵- گزینه «۲»

$$f(-1) = 3(-1) + 2 = -1 \Rightarrow f(\overbrace{f(-1)}) = f(-1) = -1$$

$$\Rightarrow f(\overbrace{f(f(-1))}) = f(-1) = -1$$

آسان

۱۶- گزینه «۲»

$$f(x) = 4x - \sqrt{1+2x}$$

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = 4\left(\frac{3}{4}\right) - \sqrt{1+2\left(\frac{3}{4}\right)} = 3 - \sqrt{1+\frac{3}{2}} = 3 - \sqrt{\frac{5}{2}} = 3 - \frac{\sqrt{10}}{2} = 4$$



متوسط

۱-

(آ) نادرست

(ب) درست زیرا:

$$f(x) = (x-1)^4 - (x+1)^4 + 1 = (x^2 - 2x + 1)^2 - (x^2 + 2x + 1)^2 + 1$$

$$= (x^2 - 2x + 1 - x^2 - 2x - 1)(x^2 - 2x + 1 + x^2 + 2x + 1) + 1$$

$$= -4x(2x^2 + 2) + 1 = -8x^2 - 8x + 1$$

(پ) نادرست

آسان

۵- گزینه «۳»

با توجه به زوج مرتب $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ در تابع f و $f(4) = \frac{3}{4}$ و با توجه به زوج مرتب $(\frac{3}{4}, -5)$ می‌باشد، بنابراین:

$$2f(4) - f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right) - (-5) = 3 + 5 = 8$$

گزینه (۳) جواب است. $2 + f(1) = 2 + 6 = 8 \Rightarrow$

آسان

۶- گزینه «۳»

$$f(2) = 5 \Rightarrow f(f(2)) = f(5) = 1$$

آسان

۷- گزینه «۳»

$$f(2) = 3, f(4) = 2 \Rightarrow 2f(2) - f(4) = 2 \times 3 - 2 = 4$$

آسان

۸- گزینه «۳»

$$f(x) = 3 + \sqrt{2x} \Rightarrow f(8) = 3 + \sqrt{16} = 7$$

متوسط

۹- گزینه «۲»

با توجه به نمودار و $f(4) = 0, f(0) = -1$ بنابراین:

$$f(\overbrace{f(-4)}) + f(\overbrace{f(-1)}) = f(0) + f(-1) = -1 + 7 = 6$$

متوسط

۱۰- گزینه «۳»

$$\begin{cases} g(x) = x - 4 \Rightarrow g(2) = 2 - 4 = -2 \\ f(x) = 2x + 3 \Rightarrow f(-1) = 2(-1) + 3 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{f(g(2))}{g(f(-1))} = \frac{f(-2)}{g(1)} = \frac{2(-2) + 3}{1 - 4} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

آسان

۱۱- گزینه «۲»

با توجه به تابع f داریم:

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(f(a)) = 3 \end{cases} \Rightarrow f(a) = -1 \xrightarrow{f(2)=-1} a = 2$$

آسان

۱۲- گزینه «۲»

f به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f = \{(1, 2(1)-1), (2, 2(2)-1), (3, 2(3)-1)\} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5)\}$$

$$\Rightarrow f(2) = 3 \Rightarrow f(f(2)) = f(3) = 5$$

آسان

۱۳- گزینه «۴»

با توجه به نمودارها $f(-1) = 3, g(-1) = -1$ و نیز $f(3) = 1, g(1) = 1$ داریم:

$$f(\underbrace{g(-1)}) + g(\underbrace{f(3)}) = f(-1) + g(1) = 3 + 1 = 4$$



آسان

۱- گزینه «۴»

زیرا یک چند جمله‌ای از جمع و تفریق چند یک جمله‌ای به دست می‌آید که توان متغیر x در آن‌ها اعداد حسابی هستند ولی در گزینه ۴ توان متغیر x برابر $\frac{1}{2}$ است.

متوسط

۲- گزینه «۱»

عبارت داده شده را به صورت چند جمله‌ای تبدیل می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 2m(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 8x^2 + 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (1 - 2m)x^3 + (6m + 8)x^2 - 6mx + 2m + 1$$

چون چند جمله‌ای از درجه دوم است، پس باید ضریب جمله درجه سوم برابر صفر باشد:

$$1 - 2m = 0 \Rightarrow 2m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

اگر $m = \frac{1}{2}$ باشد، در این صورت داریم:

$$f(x) = (6 \times \frac{1}{2} + 8)x^2 - 6 \times \frac{1}{2}x + 2 \times \frac{1}{2} + 1 = 11x^2 - 3x + 2$$

بنابراین ضریب x^2 برابر ۱۱ خواهد بود.

متوسط

۳- گزینه «۳»

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) = -1 - 1 + 1 = -1$$

$$f(f(-1)) = f(-1) = -1$$

متوسط

۴- گزینه «۴»

$$f(x) = a^2x^2 + 2ax + a \Rightarrow f(2) = a^2(2)^2 + 2a(2) + a = -1$$

$$\Rightarrow 4a^2 + 4a + a = -1 \Rightarrow 4a^2 + 5a + 1 = 0$$

$$\Delta = (5)^2 - 4(4)(1) = 9$$

$$a_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2(4)} = \frac{-5 + 3}{8} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$a_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2(4)} = \frac{-5 - 3}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

آسان

۲-

(آ) چند جمله‌ای نیست.

(ب) چند جمله‌ای است.

(پ) چند جمله‌ای نیست.

متوسط

۳-

$$f(x) = ax^2 + bx - 4$$

$$\begin{cases} f(3) = 2 \\ f(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b - 4 = 2 \\ a - b - 4 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 6 \\ a - b = 6 \end{cases}$$

$$12a = 24 \Rightarrow a = 2 \xrightarrow{a-b=6} 2 - b = 6 \Rightarrow b = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 4x - 4 \Rightarrow f(1) = 2 - 4 - 4 = -6$$

متوسط

۴-

$$f(2) = 0 \Rightarrow 4a + 4b = 0 \Rightarrow b = -a$$

$$f(1) = 3 \Rightarrow a + b = 3 \xrightarrow{b=-a} a - a = 3 \Rightarrow a = -3 \Rightarrow b = 6$$

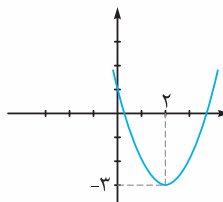
$$f(-1) = -a + b = 3 + 6 = 9$$

متوسط

۵-

معادله سهمی را به صورت $f(x) = ax^2 + bx + 1$ در نظر می‌گیریم و نقاط

داده شده را در آن صدق می‌دهیم:



$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(2) = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 1 = -2 \\ 4a + 2b + 1 = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = -3 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \xrightarrow{-} a = 1, b = -4$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$x_S = 2 \quad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & 2 & 4 \\ y & 1 & -3 & 1 \end{array}$$

$$D_f = \mathbb{R}, \mathbb{R}_f = [-3, +\infty)$$

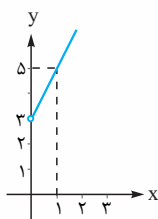


متوسط

-۱

چون دامنه $(0, +\infty)$ می‌باشد و با توجه به نمودار مقادیر y یا همان اعضای

برد به صورت $(3, +\infty)$ می‌باشند.



متوسط

-۲

$$y = ax + b \Rightarrow \begin{cases} x = 2, y = 5 \Rightarrow 5 = 2a + b \\ x = 0, y = 1 \Rightarrow 1 = 0a + b \Rightarrow b = 1 \end{cases}$$

$$5 = 2a + b \Rightarrow 5 = 2a + 1 \Rightarrow 4 = 2a \Rightarrow a = 2 \Rightarrow y = 2x + 1$$

متوسط

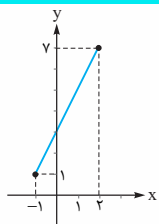
-۳

$$\begin{cases} y = 1 \Rightarrow 1 = 2x + 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ y = 5 \Rightarrow 5 = 2x + 1 \Rightarrow 4 = 2x \Rightarrow x = 2 \\ y = 7 \Rightarrow 7 = 2x + 1 \Rightarrow 6 = 2x \Rightarrow x = 3 \end{cases} \Rightarrow D = \{0, 2, 3\}$$

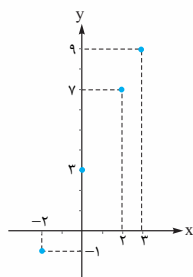
آسان

-۴

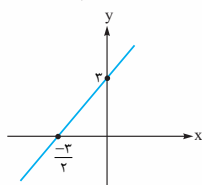
$$\text{آ)} \begin{array}{c|cc} x & -1 & 2 \\ \hline y & 1 & 7 \end{array}$$



$$\text{ب)} \begin{array}{c|cccc} x & -2 & 0 & 2 & 3 \\ \hline y & -1 & 3 & 7 & 9 \end{array}$$



پ)



متوسط

۵- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} f(x+1) - f(x-1) &= [a(x+1)^2 + b(x+1) + c] - [a(x-1)^2 + b(x-1) + c] = x \\ &= [ax^2 + 2ax + a + bx + b + c] - [ax^2 - 2ax + a + bx - b + c] = x \\ &= ax^2 + 2ax + a + bx + b + c - ax^2 + 2ax - a - bx + b - c = x \\ &= 4ax + 2b = x \Rightarrow \begin{cases} 4a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{4} \\ 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \end{cases} \Rightarrow a + b = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

متوسط

۶- گزینه «۲»

$$\begin{aligned} f(x+1) &= x^3 + 3x(x+1) \Rightarrow f(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x \\ f(x+1) &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 \Rightarrow f(x+1) = (x+1)^3 - 1 \\ \Rightarrow f(x) &= x^3 - 1 \\ f(\sqrt[3]{4}) &= (\sqrt[3]{4})^3 - 1 = (\sqrt[3]{2^2})^3 - 1 = \sqrt[3]{2^6} - 1 = 2 - 1 = 1 \end{aligned}$$

دشوار

۷- گزینه «۴»

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 + 5x)^2 + 1 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 24 \\ \Rightarrow f(x) &= (x^2 + 5x)^2 + 1 \cdot (x^2 + 5x) + 24 \\ \text{از تجزیه جمله مشترک (با جمله مشترک } x^2 + 5x \text{ استفاده می‌کنیم.} \\ \Rightarrow f(x) &= (x^2 + 5x + 6)(x^2 + 5x + 4) \\ \Rightarrow f(x) &= (x+2)(x+3)(x+1)(x+4) \\ \Rightarrow f(x-2) &= (x-2+2)(x-2+3)(x-2+1)(x-2+4) \\ \Rightarrow f(x-2) &= x(x+1)(x-1)(x+2) \\ &= x(x+2)(x^2-1) = (x^2+2x)(x^2-1) \end{aligned}$$

متوسط

۸- گزینه «۱»

$$f(x) = ax^2 + bx + c, f(1) = 0, f(2) = 7, f(-1) = -2$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0 \\ f(2) = 7 \Rightarrow 4a + 2b + c = 7 \\ f(-1) = -2 \Rightarrow a - b + c = -2 \end{cases}$$

معادله‌های اول و دوم و همچنین دوم و سوم را از هم کم می‌کنیم تا c حذف شود.

$$\begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a + 2b = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 7 \\ a + b = 3 \end{cases} \xrightarrow{-} 2a = 4 \Rightarrow a = 2, b = 1$$

$$a + b + c = 0 \xrightarrow{a=2, b=1} c = -3$$

$$f(0) = c = -3$$

دشوار

۹- گزینه «۲»

تابع درجه سوم را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$f(x) = a(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$f(0) = 24 \Rightarrow 6a = 24 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow f(x) = 4(x+1)(x-2)(x-3)$$

$$f(1) = 4 \times 2 \times (-1) \times (-2) = 16$$

آسان

۲- گزینه «۴»

نکته: مقادیر تابع خطی $y = mx + b$ که دامنه آن عدد طبیعی باشد، بیانگر یک دنباله حسابی با قدر نسبت m و جمله اول $m + b$ می‌باشد.
با توجه به نکته باید گزینه‌ای انتخاب شود که در آن ضریب برابر و به ازای $x = 1$ برابر ۲ شود.

آسان

۳- گزینه «۱»

نکته: در تابع خطی با دامنه $[a, b]$ و برد $[c, d]$ یکی از دو حالت زیر رخ می‌دهد:

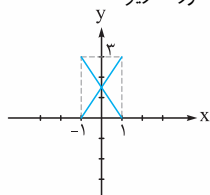
$$۱) f(a) = c, f(b) = d$$

در این حالت شیب مثبت است.

$$۲) f(b) = c, f(a) = d$$

در این حالت شیب منفی است.

بنابراین دو تابع خطی با دامنه $[-1, 1]$ و برد $[0, 3]$ به صورت زیر است:



متوسط

۴- گزینه «۴»

یادآوری: معادله خطی که از نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ می‌گذرد و از رابطه $y - y_1 = m(x - x_1)$ یا $y - y_2 = m(x - x_2)$ حاصل می‌شود که در

$$\text{آن } m \text{ شیب خط و برابر است با: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ابتدا معادله خطی که از دو نقطه $(1, 2)$ و $(3, -1)$ می‌گذرد را می‌نویسیم، داریم:

$$y - 2 = \frac{-1 - 2}{3 - 1}(x - 1) \Rightarrow y = -\frac{3}{2}(x - 1) + 2 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$$

اکنون نقطه $(5, a)$ در معادله صدق می‌دهیم:

$$a = -\frac{3}{2}(5) + \frac{7}{2} \Rightarrow a = -\frac{8}{2} = -4$$

متوسط

۵- گزینه «۴»

بررسی گزینه‌ها:

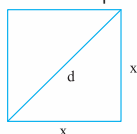
(۱) مساحت هر مربع برابر نصف حاصل ضرب قطرها می‌باشد، پس مساحت

مربعی به قطر a ، برابر $S = \frac{a^2}{2}$ می‌باشد که رابطه خطی بر حسب a نیست.

(۲) اگر شعاع دایره باشد داریم: $S = \pi r^2$ که این رابطه خطی بر حسب r نیست.

(۳) حجم یک مکعب به طول یال (ضلع) b از رابطه $V = b^3$ حاصل می‌شود که رابطه خطی نیست.

(۴) برای یک ضلع مربع به ضلع x و قطر d از رابطه فیثاغورس داریم:



$$x^2 + x^2 = d^2 \Rightarrow 2x^2 = d^2 \Rightarrow x^2 = \frac{d^2}{2} \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}d$$

که این رابطه تابع خطی بر حسب d است.

متوسط

۵-

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 2a + b = 11 \\ f(0) = b = 7 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 7 \Rightarrow f(1) = 9$$

آسان

۶-

$$b = 2 - b \Rightarrow b = 1, f(-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow 0 = -\frac{a}{2} + 1 \Rightarrow a = 2, f(x) = 2x + 1 \Rightarrow f(1) = 3$$

آسان

۷-

$$\begin{array}{c|cccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline y & 1 & 3 & 5 & 7 \end{array} \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

آسان

۸-

تابع f دارای شیب منفی است، پس:

$$\begin{cases} \frac{1-x}{3} = -1 \Rightarrow 1-x = -3 \Rightarrow x = 4 \\ \frac{1-x}{3} = 4 \Rightarrow 1-x = 12 \Rightarrow x = -11 \end{cases}$$

پس دامنه $[-11, 4]$ خواهد بود.



آسان

۱- گزینه «۳»

چون به ازای هر واحد افزایش x ، مقدار تابع ۱۰ واحد اضافه شده است،

می‌توان نوشت $1 = x_2 - x_1 = 10, y_2 - y_1$ ، پس شیب خط برابر است با:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{10}{1} = 10$$

چون $f(0) = 5$ ، داریم:

$$5 = 10(0) + h \Rightarrow h = 5 \Rightarrow f(x) = 10x + 5$$

این تابع، محور x ها را در نقطه‌ای به عرض صفر به صورت $A(\alpha, 0)$ قطع

می‌کند، بنابراین:

$$0 = 10\alpha + 5 \Rightarrow \alpha = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A = (-\frac{1}{2}, 0)$$

آسان

۱۰- گزینه «ا»

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \\ f(4) = -2 \end{cases} \Rightarrow R_f = [-2, 3]$$

متوسط

۱۱- گزینه «ا»

$$f(x) = ax + b$$

$$f(x-2) - 2f(3x+1) = 10x + 3$$

$$\Rightarrow a(x-2) + b - 2(a(3x+1) + b) = 10x + 3$$

$$\Rightarrow ax - 2a + b - 2(3ax + a + b) = 10x + 3$$

$$\Rightarrow ax - 2a + b - 6ax - 2a - 2b = 10x + 3$$

$$\Rightarrow -5ax - 4a - b = 10x + 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -5a = 10 \\ -4a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow f(1) = a + b = 3$$



آسان

۱-

$$f(5) = 5, f(\pi) = 5, f(-2) = 5$$

آسان

۲-

در تابع ثابت همه y ها مساوی اند بنابراین:

$$a + b = 5, b = 5 \Rightarrow a + 5 = 5 \Rightarrow a = 0$$

آسان

۳-

$$f = \{(1, 7), (2, 7), (3, 7), (4, 7)\}$$

متوسط

۴-

$$f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + \frac{1}{(\sqrt{x})^2} = x + \frac{1}{x}$$

$$(f(\sqrt{x}))^2 - f(x) = (x + \frac{1}{x})^2 - (x^2 + \frac{1}{x^2})$$

$$= x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 - x^2 - \frac{1}{x^2} = 2$$

$f(x)$ تابعی ثابت است.

آسان

۵-

$$k = m - 1 \Rightarrow m - k = 1$$

متوسط

۶- گزینه «ا»

با توجه به اطلاعات مسئله، این تابع خطی از دو نقطه $(0, -1), (\sqrt{3}, 0)$ عبور می کند، تابع خطی $f(x) = mx + h$ در نظر می گیریم:

$$f(x) = mx + h$$

$$f(0) = -1 \Rightarrow m(0) + h = -1 \Rightarrow h = -1 \Rightarrow f(x) = mx - 1$$

$$f(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow m(\sqrt{3}) - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{3}m = 1$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 1$$

$$f(\sqrt{12}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{12} - 1 = \sqrt{\frac{12}{3}} - 1 = \sqrt{4} - 1 = 2 - 1 = 1$$

متوسط

۷- گزینه «ب»

میزان سود بازرگان (y هزار تومان) بر حسب تعداد کالای فروخته شده (x کالا) رابطه خطی است. با فروش هیچ کالایی بازرگان ۱۰۵۰ تومان ضرر می دهد، پس رابطه سود بازرگان به صورت زیر می باشد:

$$y = mx - 1050$$

طبق نمودار، به ازای فروش ۳۰ کالا ($x = 30$) بازرگان نه سود می دهد و نه ضرر ($y = 0$)، بنابراین:

$$0 = 30m - 1050 \Rightarrow m = \frac{1050}{30} = 35 \Rightarrow y = 35x - 1050$$

اگر بخواهیم سود بازرگان بیش از ۴۰۰ هزار تومان باشد، برای یافتن تعداد کالای فروخته شده باید x را از نامعادله زیر بیابیم:

$$y > 400 \Rightarrow 35x - 1050 > 400 \Rightarrow 35x > 1450 \Rightarrow x > \frac{1450}{35} \Rightarrow x \geq 42$$

پس باید حداقل ۴۲ کالا بفروشد تا بیش از ۴۰۰ هزار تومان سود کند.

دشوار

۸- گزینه «ب»

تابع خطی را به صورت $f(x) = mx + h$ در نظر می گیریم:

$$f(x+3) = f(x) - 6 \Rightarrow m(x+3) + h = mx + h - 6$$

$$\Rightarrow mx + 3m + h = mx + h - 6 \Rightarrow 3m = -6$$

$$\Rightarrow m = -2 \Rightarrow f(x) = -2x + h$$

$$f(3) = 13 \Rightarrow -2(3) + h = 13 \Rightarrow -6 + h = 13$$

$$\Rightarrow h = 19 \Rightarrow f(x) = -2x + 19$$

$$f(2) = -2(2) + 19 = 15$$

دشوار

۹- گزینه «ب»

تابع خطی را به صورت $f(x) = mx + h$ در نظر می گیریم:

$$f(x) + f(-x) = -6 \Rightarrow mx + h + m(-x) + h = -6$$

$$\Rightarrow 2h = -6 \Rightarrow h = -3 \Rightarrow f(x) = mx - 3$$

$$f(2) = 7 \Rightarrow m(2) - 3 = 7 \Rightarrow 2m = 10 \Rightarrow m = 5 \Rightarrow f(x) = 5x - 3$$

$$f(t) = 22 \Rightarrow 5t - 3 = 22 \Rightarrow 5t = 25 \Rightarrow t = 5$$



آسان

۳- گزینه «۴»

می‌دانیم در توابع ثابت تنها یک عضو دارد، لذا گزینه «۴» درست است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

(۱) تابع نیست؛ زیرا خطی موازی محور y ها از هر دو نقطه آن می‌گذرد.

(۲) با ضرب xy در رابطه $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2$ داریم:

تابع همانی است

$$xy\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2\right) \Rightarrow x^2 + y^2 = 2xy \Rightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 0$$

$$\Rightarrow (x - y)^2 = 0 \Rightarrow y = x$$

(۴) برد دو مقدار $\{-1, 1\}$ دارد بنابراین تابع ثابت نیست.

متوسط

۴- گزینه «۱»

$$\frac{1+a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 4$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{a}{b} = 4 + \frac{3}{4} = \frac{19}{4}$$

متوسط

۵- گزینه «۴»

چون f ثابت است پس:

$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2, \quad b - 2a = 0 \xrightarrow{a=2} b - 4 = 0 \Rightarrow b = 4$$

$$f(-1) = 3 - 2c \Rightarrow a + b + c = 3 - 2c \xrightarrow{a=2, b=4} 6 + c = 3 - 2c \Rightarrow 3c = -3 \Rightarrow c = -1$$

$$6 + c = 3 - 2c \Rightarrow 3c = -3 \Rightarrow c = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = a + b + c = 5 \Rightarrow f(a) + f(b) + f(c) = 5 + 5 + 5 = 15$$

آسان

۴- گزینه «۳»

چون تابع $f(x) = b - 3ax$ ثابت است پس $a = 0$ خواهد بود. تابع

$g(x) = c - (3b - 3)x$ نیز ثابت است پس $b = 1$ است.

$$f + g = 5 \Rightarrow b + c = 5 \xrightarrow{b=1} c = 4 \Rightarrow bc = 4$$

آسان

۷- گزینه «۳»

$$f(x) = (ax + 2)(b - x) - 7x^2 = abx - ax^2 + 2b - 2x - 7x^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (-a - 7)x^2 + (ab - 2)x + 2b$$

چون تابع f ثابت است پس:

$$\begin{cases} -a - 7 = 0 \Rightarrow a = -7 \\ ab - 2 = 0 \Rightarrow -7b - 2 = 0 \Rightarrow b = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

$$f(x) = -\frac{4}{7} \Rightarrow R_f = \left\{-\frac{4}{7}\right\}$$

متوسط

۶-

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 + a(x^2 - 2x + 1) + bx - 3b$$

$$= (1+a)x^2 + (2-2a+b)x + 1+a-3b$$

f ثابت است پس:

$$1+a=0 \Rightarrow a=-1$$

$$2-2a+b=0 \xrightarrow{a=-1} 4+b=0 \Rightarrow b=-4$$

$$f(x) = 1-1-3(-4) = 12 \Rightarrow f\left(-\frac{1}{\pi}\right) = 12$$

متوسط

۷-

فرض می‌کنیم $f(x) = c$ باشد در این صورت:

$$f(2) = f(6) = f(-1) = c$$

$$3f(2)f(6) = f(-1) \Rightarrow 3.c.c = c \xrightarrow{c \neq 0} 3c = 1$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{3} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow f(0) = \frac{1}{3}$$

متوسط

۸-

با فرض $f(x) = c$ داریم:

$$\frac{c+c}{c+1} = 4 \Rightarrow 2c = 4c + 4 \Rightarrow 2c = -4 \Rightarrow c = -2$$

$$f(100) = -2$$



دشواری

۱- گزینه «۱»

$$f(x) = (x+a)(bx+c) \Rightarrow f(x)$$

$$= bx^2 + cx + abx + ac = bx^2 + (ab+c)x + ac$$

تابع ثابت باید مستقل از x باشد؛ یعنی ضرایب x, x^2 باید صفر باشد، بنابراین:

$$b = 0$$

$$ab + c = 0 \xrightarrow{b=0} a \times 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود هیچ الزامی برای صفر شدن a وجود ندارد.

متوسط

۲- گزینه «۲»

چون باید برد تابع ثابت تنها یک عضو داشته باشد، لذا داریم:

$$\begin{cases} a + 4 = 3 \Rightarrow a = -1 \\ b^2 - 2b = 3 \Rightarrow b^2 - 2b - 3 = 0 \Rightarrow b = -1 \text{ یا } b = 3 \end{cases}$$

اگر $b = -1$ باشد $|a+b| = |-1+3| = 2$ و اگر $b = 3$ باشد $|a+b| = |-1+3| = 2$

لذا گزینه (۲) درست است.



دشوار

۱- گزینه «ب»

$$f(x) = \frac{2ax^4 - 4bx^3}{3x^3 + 2x^2} \Rightarrow f(x) = \frac{x^3(2ax - 4b)}{x^2(3x + 2)} \\ \Rightarrow f(x) = x \left(\frac{2ax - 4b}{3x + 2} \right)$$

چون تابع f همانی است بنابراین:

$$\frac{2a}{3} = -\frac{4b}{2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow a + b = 1$$

متوسط

۲- گزینه «ب»

ضابطه تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است. بنابراین مولفه‌های اول و دوم آن با هم برابرند.

$$3m + 2n = 2n + 6 \Rightarrow 3m = 6 \Rightarrow m = 2 \\ m^2 + 1 = 2n - 1 \Rightarrow (2)^2 + 1 = 2n - 1 \Rightarrow 5 = 2n - 1 \\ \Rightarrow 2n = 6 \Rightarrow n = 3 \\ \Rightarrow m + n = 5, n = 3, m = 2$$

متوسط

۳- گزینه «ا»

f تابع همانی است، بنابراین $f(x) = x$ و g تابع ثابت است، بنابراین $g(x) = k$.

$$g(2) = -3 \Rightarrow g(-1) = -3 \Rightarrow f(g(-1)) = f(-3) = -3 \\ f(-2) = -2 \Rightarrow g(f(-2)) = g(-2) = -3 \\ \Rightarrow f(g(-1)) - g(f(-2)) = (-3) - (-3) = 0$$

آسان

۴- گزینه «ب»

تابع ثابت $f \Rightarrow f(x) = k$

تابع همانی $g \Rightarrow g(x) = x$

$$f(2) + g(3) = 8 \Rightarrow k + 3 = 8 \Rightarrow k = 5$$

$$f(3) + g(2) = k + 2 = 5 + 2 = 7$$

متوسط

۵- گزینه «ا»

$f \Rightarrow f(3) = f(4) = f(x) = C$, تابع همانی $g \Rightarrow g(3) = 3$

$$(f(3))^2 + g(3) = 4f(4) \Rightarrow C^2 + 3 = 4C \Rightarrow C^2 - 4C + 3 = 0$$

$$C = 3 \Rightarrow g(5) + f(5) = 5 + 3 = 8$$

$$C = 1 \Rightarrow g(5) + f(5) = 5 + 1 = 6$$

در بین گزینه‌های داده شده فقط ۸ وجود دارد.



آسان

۱-

$$f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \quad f(6) = 6$$

آسان

۲-

$$a = 2, b = -5, c = 0 \Rightarrow a + b + c = 2 + (-5) + 0 = -3$$

آسان

۳-

$$f = \{(0,0), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (6,6)\}$$

متوسط

۴-

$g(x)$ تابع ثابت است پس $a = 0, g(x) = 3$ خواهد بود.

f تابع همانی است بنابراین $f(x) = x$ است.

$$\frac{f(2) + f(3)}{g(2) + g(3)} = \frac{2 + 3}{3 + 3} = \frac{5}{6}$$

آسان

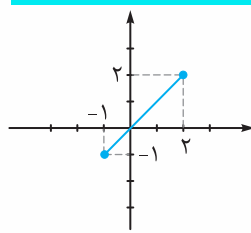
۵-

$$2f(5) - f(3) = f(k + 4) \Rightarrow 2 \times 5 - 3 = k + 4$$

$$\Rightarrow k + 4 = 7 \Rightarrow k = 3$$

آسان

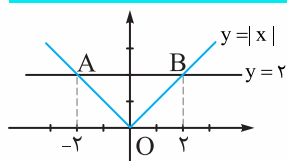
۶-



$$y = x$$

متوسط

-۶



$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$$



متوسط

۱- گزینه «پ»

$$f(-144) = \sqrt{-144 + 2} - 144 = \sqrt{-142} + 288 = \sqrt{144} = 12$$

$$f(f(-144)) = f(12) = \sqrt{12 + 2} - 12 = \sqrt{14} - 12 = 6$$

دشوار

۲- گزینه «س»

$$f(x) = 2 - |x - 2| \Rightarrow f(f(x)) = 2 - |f(x) - 2| = 2 - |2 - |x - 2|| = 2 - |2 - |x - 2|| = 2 - |x - 2| = f(x)$$

آسان

۳- گزینه «د»

$$f(x) = x\sqrt{x^2 + 5}$$

$$f(-2) = -2\sqrt{(-2)^2 + 5} = -2\sqrt{9} = -2 \times 3 = -6$$

$$g(x) = |2x - 1|$$

$$g(-2) = |2(-2) - 1| = |-5| = 5 \Rightarrow f(-2)g(-2) = -6 \times 5 = -30$$

متوسط

۴- گزینه «د»

$$f(-2) = |(-2)^2 - 5| = |-1| = 1$$

$$g(2) = \frac{2}{1+2^2} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{1+f(-2)}{g(2)} = \frac{1+1}{\frac{2}{5}} = \frac{2}{\frac{2}{5}} = 5$$

متوسط

۵- گزینه «پ»

f تابع قدرمطلق است، پس $f(-1) = |-1| = 1$ در نتیجه $a = 1$ ، همچنین

دامنه توابع f, g برابر هستند، لذا:

$$c = f(b) = f(3) = |3| = 3, b = 3$$

بنابراین:

$$a + b + c = 1 + 3 + 3 = 7$$

آسان

۶- گزینه «پ»

چون تابع همانی است، دامنه و برد برابر است.

$$\left. \begin{aligned} 3 &= \sqrt{k} \Rightarrow k = 3^2 = 9 \\ a + 1 &= -4 \Rightarrow a = -5 \\ 2 &= b - 3 \Rightarrow b = 5 \\ d + 2 &= 2d \Rightarrow d = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{a+b+k}{d} = \frac{-5+5+9}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

آسان

۷- گزینه «س»

تابع همانی به هر عدد حقیقی، خود آن عدد را نظیر می‌کند.



آسان

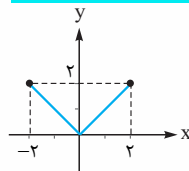
۱-

$$f(-3) = |-3| = 3 \quad f(2) = |2| = 2$$

$$f(1 - \sqrt{2}) = |1 - \sqrt{2}| = -1 + \sqrt{2}$$

آسان

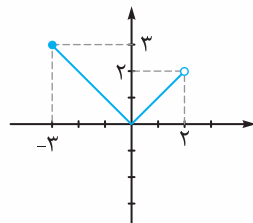
۲-



آسان

۳-

$$R = [0, 3]$$



متوسط

۴-

اگر $1 < x < 4$ باشد آن‌گاه عبارتهای $x+2, x+1, x-1$ همگی مثبت‌اند.

بنابراین:

$$f(x) = x - 1 + x + 1 + x + 2 - 3x = 2 \Rightarrow f(x) = 2$$

متوسط

۵-

$$f = \{(2, 5), (3, -4), (4, -1), (6, 7)\} \Rightarrow |f| = \{(2, 5), (3, 4), (4, 1), (6, 7)\}$$

آسان

-۳

$$f(2) = \frac{2}{2} = 1$$

$$f(4) = -4$$

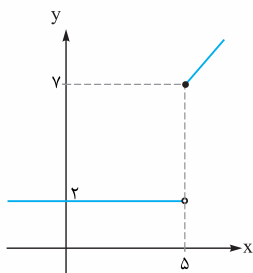
$$f(-3) = (-3)^3 = -27$$

$$f(0) = \frac{0}{2} = 0$$

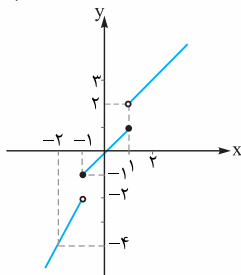
متوسط

-۴

آ)



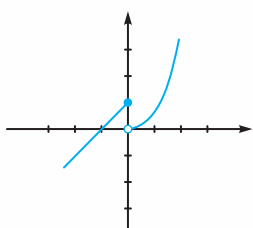
ب)



متوسط

-۵

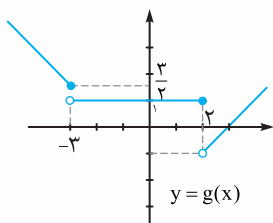
آ)

 $y = f(x)$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty) = \mathbb{R}$$

$$R_f = \mathbb{R}$$

ب)

 $y = g(x)$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$R_g = (-1, +\infty)$$

$$f(0) = 1, f(5) = 25, f(-2) = -8$$

$$g(0) = 1, g(2) = 1, g(-\frac{1}{5}) = 1$$

متوسط

گزینه «۳»

عبارات داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$1 < x < 2 \xrightarrow{-1} 0 < x - 1 < 1 \xrightarrow{x-1 > 0} |x-1| = x-1$$

$$1 < x < 2 \xrightarrow{\times(-1)} -1 > -x > -2 \xrightarrow{+3} 2 > 3-x > +1$$

$$\xrightarrow{3-x > 0} |3-x| = 3-x$$

$$1 < x < 2 \xrightarrow{\times 2} 2 < 2x < 4 \xrightarrow{-1} 1 < 2x-1 < 3$$

$$\xrightarrow{2x-1 > 0} |2x-1| = 2x-1$$

$$\Rightarrow f(x) = x-1 + 3-x - (2x-1) = x-x-2x-1+3+1 = -2x+3$$

متوسط

گزینه «۴»

با توجه به این که $|ax| = a|x|$ ، داریم:

$$y = ||3x| - |x|| \xrightarrow{|3x|=3|x|} y = |3|x| - |x|| \Rightarrow y = |2|x||$$

$$\xrightarrow{2|x| \geq 0} y = 2|x|$$

دشوار

گزینه «۱»

با توجه به اتحاد مربع دو جمله‌ای $g(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ داریم:

$$g(1-\sqrt{2}) = (1-\sqrt{2}+1)^2 = (2-\sqrt{2})^2 = 4+2-4\sqrt{2} = 6-4\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) = f(6-4\sqrt{2}) = |6-4\sqrt{2}|$$

$$= |6 - \sqrt{16 \times 2}| = |6 - \sqrt{32}| \xrightarrow{\sqrt{32} \leq 6} 6 - \sqrt{32} = 6 - 4\sqrt{2}$$

$$f(1-\sqrt{2}) = |1-\sqrt{2}| \xrightarrow{\frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}} < 0} \sqrt{2}-1$$

$$g(f(1-\sqrt{2})) = g(\sqrt{2}-1) = (\sqrt{2}-1+1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow f(g(1-\sqrt{2})) - g(f(1-\sqrt{2}))$$

$$= 6 - 4\sqrt{2} - 2 = 4 - 4\sqrt{2} = 4(1-\sqrt{2})$$



بخش ۸

آسان

-۱

$$\text{آ)} D_f = \{x | x \geq 0\} \cup \{x | x < -2\} = (-\infty, -2) \cup [0, +\infty)$$

$$\text{ب)} D_f = \{x | x > 2\} \cup \{x | x < 2\} = \mathbb{R} - \{2\}$$

آسان

-۲

$$\text{آ)} -1 \leq \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب)} -1 \leq 0/2 \leq 1 \Rightarrow f(0/2) = (0/2)^2 = 0/4$$

$$\text{پ)} -1 \leq 0 \leq 1 \Rightarrow f(0) = 0$$



آسان

۱- گزینه «ب»

$$f(-2) = 3 \Rightarrow 3 = a(-2) - 3 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3$$

از طرفی نمودار f از نقطه $A(2, -3)$ می‌گذرد، پس مختصات این نقطه در ضابطه تابع (ضابطه پایین) صدق می‌کند.

$$A(2, -3) \in f \Rightarrow f(2) = -3 \xrightarrow{f(x) = 2bx^2 + 5} -3 = 2b(2)^2 + 5 \\ \Rightarrow -3 = 8b + 5 \Rightarrow 8b = -8 \Rightarrow b = -1$$

بنابراین:

$$b - a = (-1) - (-3) = 2$$

آسان

۲- گزینه «ب»

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} + 1 = \sqrt{\frac{1}{4}} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$f\left(f\left(\frac{3}{4}\right)\right) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2\left(\frac{3}{2}\right)} + 1 = \sqrt{3} + 1 = 2$$

متوسط

۳- گزینه «ب»

ابتدا $f(-8)$ سپس $f(f(-8))$ و در نهایت $f(f(f(-8)))$ را به دست می‌آوریم:

$$f(-8) = \sqrt{-(-8)} = \sqrt{8}$$

$$f(f(-8)) = f(\sqrt{8})$$

$$\Rightarrow f(\sqrt{8}) = -\frac{1}{\sqrt{8}} \Rightarrow f(f(f(-8))) = \sqrt{-\left(-\frac{1}{\sqrt{8}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{8}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{8}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}}$$

$$= 2^{\left(-\frac{3}{4}\right)} = 2^a \Rightarrow a = -\frac{3}{4}$$

آسان

۴- گزینه «ب»

با توجه به ضابطه تابع:

$$\begin{cases} f(5) = 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 5 - 3 = 2 \Rightarrow f(f(5)) \\ = f(2) = 2(2) + 3 = 7 \\ f(1) = 2(1) + 3 = 5 \Rightarrow f(f(1)) = f(5) \\ \xrightarrow{5 > 3} 5 - \sqrt{5+4} = 5 - \sqrt{9} = 2 \end{cases} \\ \Rightarrow f(f(5)) + f(f(1)) = 7 + 2 = 9$$

متوسط

۶-

تابع از سه ضابطه تشکیل یافته است از سمت چپ ضابطه‌ها را می‌نویسیم.

(۱) ضابطه سمت چپ پاره‌خطی است که از دو نقطه $(-2, -4)$ و $(0, 0)$ عبور می‌کند بنابراین شیب آن برابر ۲ و ضابطه آن $y = 2x$ است البته x هم در بازه $[-2, 0]$ تغییر می‌کند.

(۲) ضابطه وسط تابع ثابت $y = 1$ با دامنه $(0, 2)$ خواهد بود.

(۳) ضابطه سمت راست نیم خطی است که از نقاط $(2, 2)$ و $(4, 0)$ عبور می‌کند.

$$m = \frac{2-0}{2-4} = -1 \Rightarrow y-0 = -1(x-4) \Rightarrow y = 4-x$$

بنابراین ضابطه تابع f به صورت زیر خواهد بود.

$$f(x) = \begin{cases} 2x & -2 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x < 2 \\ 4-x & x \geq 2 \end{cases}$$

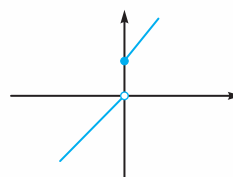
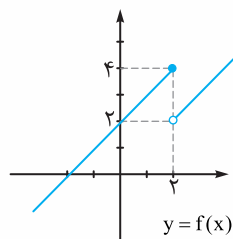
$$D_f = [-2, +\infty)$$

$$R_f = (-\infty, 2]$$

متوسط

۷-

هر دو رابطه تابع است زیرا اشتراکی در دامنه‌های تعریف هر ضابطه وجود ندارد.



۸- گزینه «۴»

متوسط

$$f(2) = f(2 \times 2) = f(4)$$

$$f(4) = 2 \times 4 = 8$$

$$f(f(2)) = f(8) = f(4) = 8$$

۹- گزینه «۳»

متوسط

$$\Delta \in P \Rightarrow f(\Delta) = 2(\Delta) - 1 = 9$$

$$9 \notin P \Rightarrow f(f(\Delta)) = f(9) = 2(9) - 1 = 17$$

$$4 \notin P \Rightarrow f(4) = 2(4) - 1 = 7$$

$$13 \in P \Rightarrow f(f(4)) = f(7) = 2(7) - 1 = 13$$

$$\Rightarrow f(f(\Delta)) - f(f(4)) = 17 - 13 = 4$$

۱۰- گزینه «۲»

دشوار

$$x > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} = -x$$

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}$$

$$x < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = x$$

$$f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

۱۱- گزینه «۱»

دشوار

با توجه به ضابطه تابع f می‌توان نتیجه گرفت که تابع f همواره مثبت است.

پس داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x > 0 \\ 1 & x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) > 0 \Rightarrow -f(x) < 0$$

$$\Rightarrow f(-f(x)) = 1$$

۱۲- گزینه «۴»

دشوار

عبارت $-\frac{1}{3}x^2 - 1$ همواره منفی است. پس برای محاسبه $f(-\frac{1}{3}x^2 - 1)$ از رابطه پایینی تابع f استفاده می‌کنیم:

$$f(-\frac{1}{3}x^2 - 1) = 1 - 2(-\frac{1}{3}x^2 - 1) = 1 + x^2 + 2 = x^2 + 3 \quad (*)$$

از طرفی عبارت $x^2 + 1$ همواره مثبت است. برای محاسبه $f(1 + x^2)$ از ضابطه بالایی تابع f استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x^2 + 1) &= -(x^2 + 1)^2 + 1 \\ &= -(x^4 + 2x^2 + 1) + 1 = -x^4 - 2x^2 \quad (***) \end{aligned}$$

بنابراین داریم:

$$2f(-\frac{1}{3}x^2 - 1) + f(x^2 + 1) \xrightarrow{(**), (*)} 2(x^2 + 3) - x^4 - 2x^2 = 6 - x^4$$

۵- گزینه «۴»

متوسط

ابتدا معادله خط سمت چپ را به دست می‌آوریم. این خط از دو نقطه $B(0, 0)$ و $A(-2, -6)$ می‌گذرد.

$$m_1 = \frac{-6 - 0}{-2 - 0} = 3$$

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \xrightarrow{B(0,0)} y - 0 = 3(x - 0) = y = 3x$$

معادله خط راست را به دست می‌آوریم. این خط از دو نقطه $C(0, 1)$ و $D(2, -3)$ می‌گذرد.

$$m_2 = \frac{-3 - 1}{2 - 0} = -2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{C(0,1)} y - 1 = -2(x - 0) \Rightarrow y = -2x + 1$$

بنابراین ضابطه تابع به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 1 & 0 < x \leq 2 \\ 3x & -2 < x \leq 0 \end{cases}$$

$$f(1) = -2(1) + 1 = -1$$

$$f(f(1)) = f(-1) = 3(-1) = -3$$

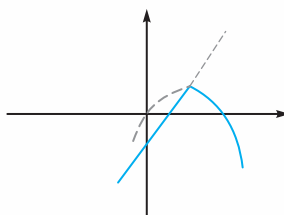
۶- گزینه «۲»

متوسط

$$y = -x^2 + 2x \quad x > 1$$

$$\begin{array}{c|c} x & 1 \\ \hline y & 1 \end{array}$$

$$y = 2x - 1$$



۷- گزینه «۱»

متوسط

شرط آن که این رابطه یک تابع باشد این است که به ازای $x = 3$ فقط یک مقدار برای y وجود داشته باشد. بنابراین $x = 3$ را در هر دو ضابطه قرار می‌دهیم و حاصل را مساوی هم در نظر می‌گیریم.

$$f_1(3) = \frac{\lambda(3)}{3-1} = \frac{24}{2} = 12$$

$$f_7(3) = a(3)^2 + a^2(3) = 9a^2 + 9a$$

$$f_1(3) = f_7(3) \Rightarrow 12 = 9a^2 + 9a \Rightarrow 3a^2 + 9a - 12 = 0$$

$$\xrightarrow{\div(3)} a^2 + 3a - 4 = 0$$

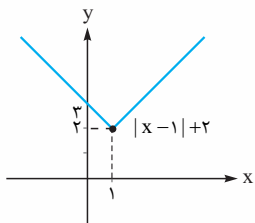
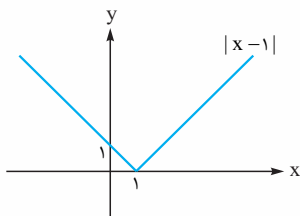
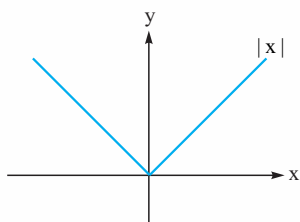
$$\Rightarrow (a+4)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -4, a = 1$$



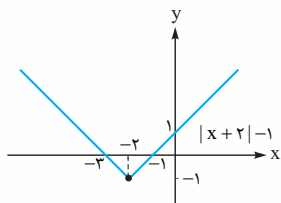
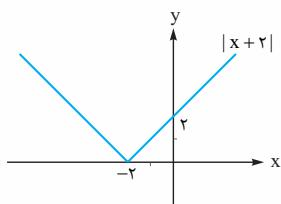
آسان

-۱

آ)



ب)



دشواری

۱۳-۵ گزینه «۱»

ابتدا $f(\sin^2 x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & x \geq 0 \\ x+1 & x < 0 \end{cases} \xrightarrow{\sin^2 x \geq 0} f(\sin^2 x) = \sin^2 x - 1$$

$$= -(1 - \sin^2 x) = -\cos^2 x$$

$$(*) : f(f(\sin^2 x)) = f(-\cos^2 x)$$

با توجه به فرض سوال $-1 < \cos^2 x < 0$ بنابراین برای محاسبه $f(-\cos^2 x)$ از

ضابطه پایین استفاده می‌کنیم:

$$f(f(\sin^2 x)) = f(-\cos^2 x) = (-\cos^2 x) + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

آسان

۱۴-۱ گزینه «۲»

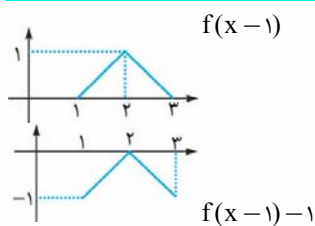
به‌ازای $x = -1$ و $x = 1$ دو ضابطه را برابر قرار می‌دهیم.

$$\sqrt{1+3} + 2a = a + 5 \Rightarrow a = 3$$

$$f(a) = f(3) = 3(3)^2 + 5 = 32$$

متوسط

-۶



$$D = [0, 2]$$

$$R = [0, 1]$$

آسان

-۷

$$۱) \text{ع} : D = \mathbb{R} \quad ۲) \text{پ} : D = \mathbb{R} \quad ۳) \text{ا} : D = \mathbb{R}$$

$$R = (-\infty, -2] \quad R = [0, +\infty) \quad R = [-3, +\infty)$$

$$۴) \text{د} : D = \mathbb{R} \quad ۵) \text{ب} : D = \mathbb{R} \quad ۶) \text{ر} : D = \mathbb{R}$$

$$R = [-2, +\infty) \quad R = (-\infty, 2] \quad R = [-3, +\infty)$$

$$۷) \text{ت} : D = \mathbb{R} \quad ۸) \text{ج} : D = \mathbb{R} \quad ۹) \text{د} : D = \mathbb{R}$$

$$R = [0, +\infty) \quad R = (-\infty, 0] \quad R = [3, +\infty)$$

$$۱۰) \text{ع} : D = \mathbb{R} \quad ۱۱) \text{ت} : D = \mathbb{R} \quad ۱۲) \text{ج} : D = \mathbb{R}$$

$$R = [-\frac{1}{2}, +\infty) \quad R = (-\infty, 0] \quad R = [0, +\infty)$$



آسان

۱- گزینه «۲»

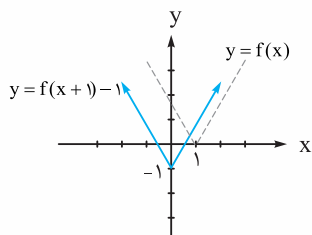
نمودار تابعی که از مبدأ گذشته نمودار $y = x^2$ است. منحنی که به سمت راست منتقل شده $(x-3)^2$ و منحنی که به بالا منتقل شده $x^2 + 2$ می‌باشد. بنابراین $b = 2, a = -3$ پس:

$$(a, b) = (-3, 2)$$

آسان

۲- گزینه «۱»

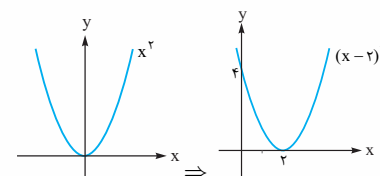
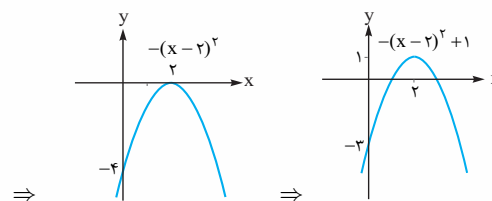
با توجه به نمودار تابع f برای رسم تابع $g(x) = f(x+1) - 1$ کافی است نمایشی هندسی نمودار f را یک واحد به سمت چپ و یک واحد به سمت پایین منتقل کنیم که نمودار آن به صورت زیر می‌شود.



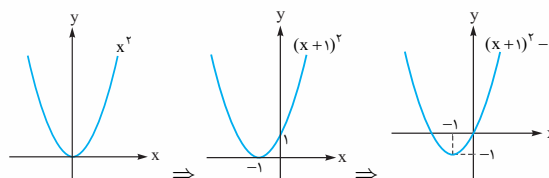
آسان

-۲

آ)



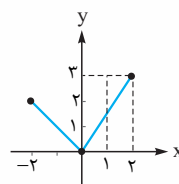
ب)



آسان

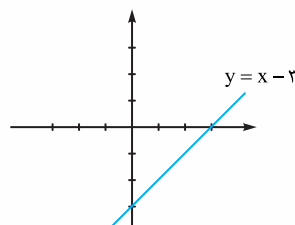
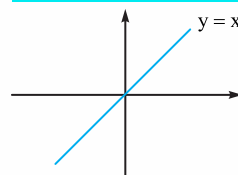
-۳

باید نمودار $f(x)$ را دو واحد در راستای محور y ها بالا ببریم.



آسان

-۴



متوسط

-۵

آ) نادرست

ب) نادرست

متوسط

۵- گزینه «۲»

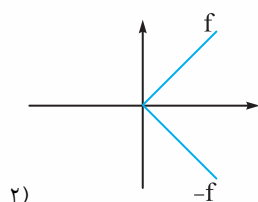
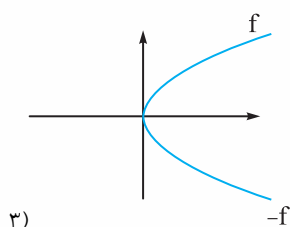
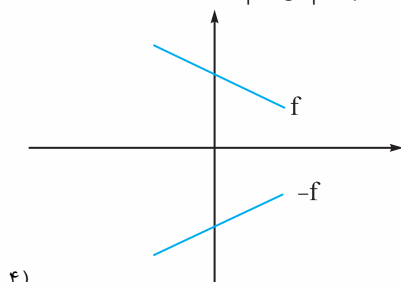
$$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \xrightarrow{+4} x^2 + 4 > 4 \Rightarrow f(x) > 4 \Rightarrow R_f = (4, +\infty)$$

متوسط

۶- گزینه «۱»

چون تابع g قرینه تابع f می‌باشد، باید برای رسم نمودار g قرینه تابع f را نسبت به محور x ‌ها بیابیم.

در (۱) توابع f, g نسبت به محور x ‌ها قرینه‌اند، پس این گزینه جواب صحیح است، اما سایر گزینه‌ها به این صورت نیستند.
در زیر $-f$ را برای سه گزینه دیگر رسم می‌کنیم.



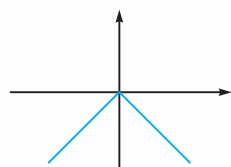
متوسط

۷- گزینه «۱»

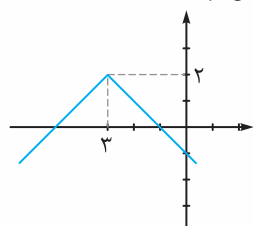
$$y = -\sqrt{x^2 + 6x + 9} + 2 \Rightarrow y = -\sqrt{(x+3)^2} + 2$$

$$\Rightarrow y = -|x+3| + 2$$

شکل نمودار $y = -|x|$ به صورت زیر است:



که اگر این نمودار را ۳ واحد به سمت چپ و دو واحد به سمت بالا منتقل کنیم، نمودار تابع $y = -|x+3| + 2$ حاصل می‌شود.

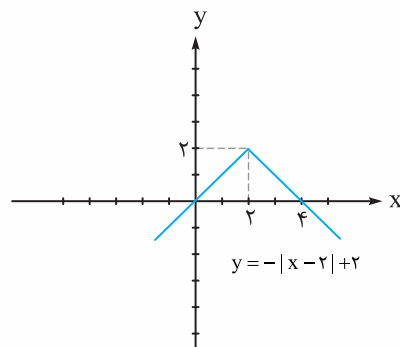
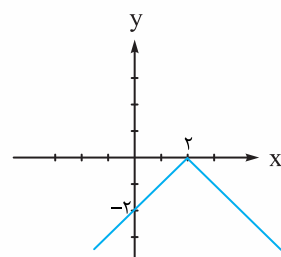
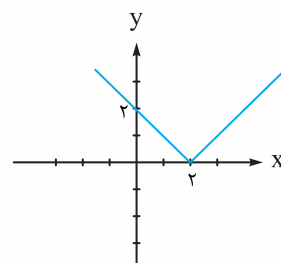


همان‌طور که ملاحظه می‌شود این نمودار از ناحیه اول محور مختصات عبور نمی‌کند.

آسان

۳- گزینه «۴»

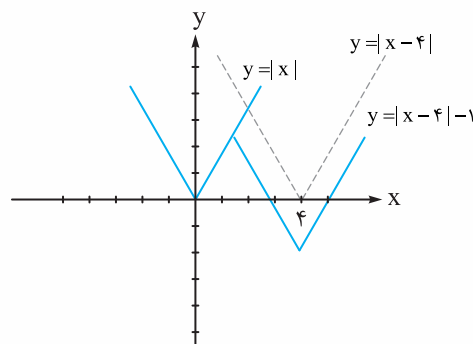
برای رسم تابع داده شده، ابتدا تابع $y = |x|$ را به اندازه ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا تابع $y = |x-2|$ به دست آید، سپس نمودار حاصل را نسبت به محور x ‌ها قرینه کرده و دو واحد به بالا انتقال می‌دهیم.



متوسط

۴- گزینه «۴»

برای رسم تابع $y = |x-4|-1$ ابتدا نمودار $y = |x|$ را ۴ واحد به راست و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل می‌کنیم. همان‌طور که مشخص است نمودار تابع نهایی محاور x ‌ها را در دو نقطه و محور y ‌ها را در یک نقطه قطع می‌کند، پس نمودار تابع $y = |x-4|-1$ محاورهای مختصات را در ۳ نقطه قطع می‌کند.



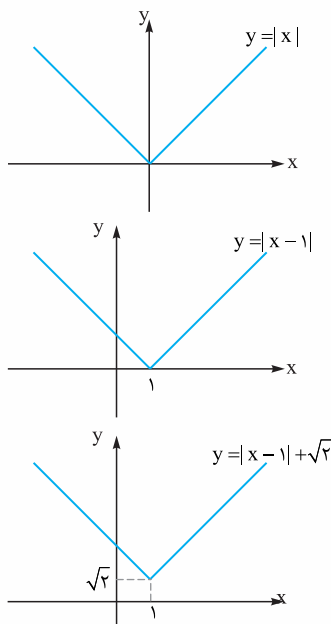
متوسط

۱۲- گزینه «۴»

روش اول: دقت کنید چون $|x-1| \geq 0$ پس $|x-1| + \sqrt{2} \geq \sqrt{2}$ ، لذا $y \geq \sqrt{2}$ ، بنابراین y مقادیر منفی نمی‌گیرد و در نتیجه تابع هیچ‌گاه از ربع‌های سوم یا چهارم عبور نمی‌کند، پس گزینه (۴) جواب است.

روش دوم:

نمودار را رسم کنیم.

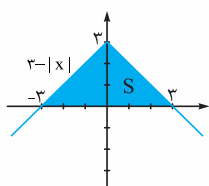


پس این نمودار فقط از نواحی اول و دوم محورهای مختصات عبور می‌کند.

متوسط

۱۳- گزینه «۴»

برای رسم ابتدا نمودار $y = |x|$ را نسبت به محور x ها قرینه کرده و سپس ۳ واحد نمودار به سمت بالا حرکت می‌دهیم. لازم است مساحت مثلث سایه خورده را محاسبه کنیم:



$$S = \frac{1}{2} \times 3 \times (3+3) = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

ابتدا در ضابطه تابع عدد ۴ را اضافه و کم می‌کنیم تا بتوانیم آن را به فرم مربع کامل در بیاوریم:

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 3 \Rightarrow y = (x-2)^2 - 1 \\ \xrightarrow[x \rightarrow x+2]{\text{واحدانتقال به چپ}} y &= (x+2-2)^2 - 1 \Rightarrow y = x^2 - 1 \\ \xrightarrow[\text{واحدانتقال به بالا}]{3} y &= x^2 - 1 + 3 \Rightarrow y = x^2 + 2 \end{aligned}$$

متوسط

۸- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 5 \xrightarrow[\text{به سمت راست}]{\text{انتقال دو واحد}} y = -2(x-2)^2 + 5 \\ \xrightarrow[\text{پایین}]{\text{انتقال چهار واحد به}} y &= -2(x-2)^2 + 5 - 4 \\ \Rightarrow y &= -2(x^2 - 4x + 4) + 1 \Rightarrow y = -2x^2 + 8x - 7 \end{aligned}$$

متوسط

۹- گزینه «۲»

برای یافتن $f(x)$ ، نمودار تابع $g(x)$ را دو واحد به پایین و یک واحد به چپ حرکت می‌دهیم:

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-2)^2 - 2 \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{دو واحد}} y = (x-2)^2 - 2 \\ \xrightarrow[\text{به چپ}]{\text{یک واحد}} f(x) &= ((x+1)-2)^2 - 2 \\ &= (x-1)^2 - 2 = x^2 - 2x - 1 \end{aligned}$$

متوسط

۱۰- گزینه «۳»

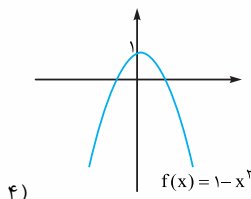
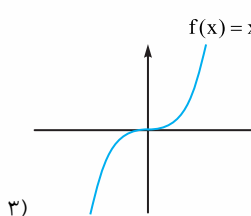
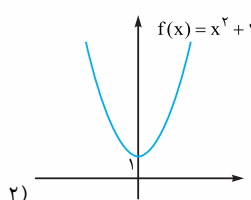
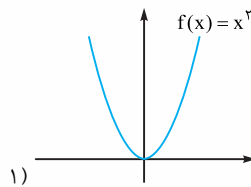
از خواص تابع قدرمطلق داریم $|x-1| = -(1-x) = |1-x|$ ، پس تابع y را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} y &= 1 + |1-x| \Rightarrow y = 1 + |x-1| \\ \xrightarrow[\text{به راست}]{\text{انتقال یک واحد}} y &= 1 + |(x-1)-1| = 1 + |x-2| \\ \xrightarrow[\text{به پایین}]{\text{دو واحدانتقال}} y &= 1 + |x-2| - 2 \Rightarrow y = |x-2| - 1 \end{aligned}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۴»

نمودارهای داده شده در گزینه‌ها را رسم می‌کنیم:



نمودار رسم شده در گزینه «۴» از هر ۴ ناحیه محورهای مختصات می‌گذرد.

آسان

-۲

برای آن که f تابع باشد باید مولفه اول تکراری نداشته باشد بنابراین $m \neq 4, m \neq 2$ باشد تا f تابع باشد.

$$\begin{cases} m=2 \rightarrow f = \{(2,3), (4,5), (2,3)\} \\ m=4 \rightarrow f = \{(2,3), (4,5), (4,5)\} \end{cases}$$

m هر مقداری می تواند باشد.

متوسط

-۳

$$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=3 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{2}, b=\frac{1}{2}$$

آسان

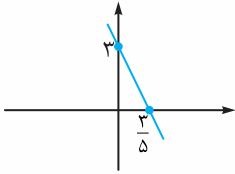
-۴

$$f = \{(1,2), (4,2), (-1,3), (0,3)\}$$

متوسط

-۵

تابع را به فرم $f(x) = ax + b$ در نظر می گیریم:



$$\begin{cases} f(1) = -2 \\ f(0) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b=-2 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow a=-5 \Rightarrow f(x) = -5x+3$$

آسان

-۶

$$f(x) = 3x^2$$

متوسط

-۷

الف) $f(1) = 3(1) - 2 = 1$ ، $g(f(1)) = g(1) = (1)^2 + 1 = 2$

$$f(g(f(1))) = f(2) = 3(2) - 2 = 4$$

ب) $g(0) = 1 \Rightarrow g(g(0)) = g(1) = 2$

$$f(g(g(0))) = f(2) = 4 \Rightarrow g(f(g(g(0)))) = g(4) = 4^2 + 1 = 17$$

آسان

-۸

چون f شامل دو زوج $(b, m-1), (b, 4)$ است بنابراین:

$$m-1=4 \Rightarrow m=5$$

متوسط

-۹

چون f ثابت است بنابراین برد آن تک عضوی است.

$$n=1 \Rightarrow n+k=m \Rightarrow \begin{cases} n=1 \\ m=1 \\ k=0 \end{cases}$$

متوسط

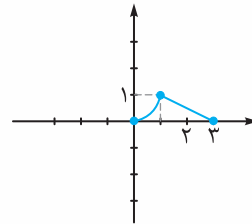
۱۵- گزینه «۴»

ابتدا نمودار $f(x-2) + 3$ را ۴ واحد به سمت چپ انتقال می دهیم تا نمودار $f(x+2) + 3$ حاصل شود. اکنون نمودار حاصل را ۶ واحد به سمت پایین منتقل می کنیم تا نمودار $f(x+2) - 3$ حاصل شود.

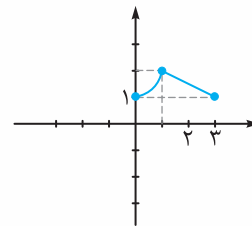
متوسط

۱۶- گزینه «۱»

ابتدا نمودار $y = f(x+1)$ را یک واحد به سمت راست منتقل می کنیم تا $y = f(x)$ به دست آید:



اکنون نمودار $y = f(x)$ را یک واحد به سمت بالا منتقل می کنیم تا $y = f(x) + 1$ به دست آید:



متوسط

۱۷- گزینه «۱»

$$1 \leq x-1 < 2 \xrightarrow{+1} 2 \leq x < 3 \quad D_{f(x-1)+1} = [2, 3)$$

متوسط

۱۸- گزینه «۳»

ابتدا $f(x)$ را ۴ واحد به چپ منتقل می کنیم، سپس نسبت به محور x ها قرینه می کنیم.

$$f(x) \xrightarrow{\text{۴ واحد به چپ}} f(x+4) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به X ها}} -f(x+4)$$



آسان

-۱

فقط قسمت (آ) تابع است. زیرا از هر عضو A یک پیکان خارج شده و به یکی از عضوهای B نظیر شده است.



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

آسان

-۱

$$\begin{cases} 4a - 3b = 2a - 2 \\ 3b + 2a = 3b - 4 \end{cases} \Rightarrow a = -2$$

$$3b = 2a + 2 = 2(-2) + 2 = -2 \Rightarrow b = -\frac{2}{3}$$

متوسط

-۲

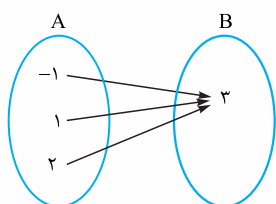
$$a + b = 7$$

$$a^2 - b^2 = 7 \Rightarrow (a - b)(a + b) = 7 \Rightarrow a - b = 1$$

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ a - b = 1 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a = 8 \Rightarrow a = 4, b = 3$$

آسان

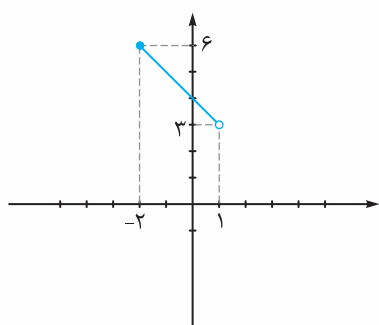
-۳



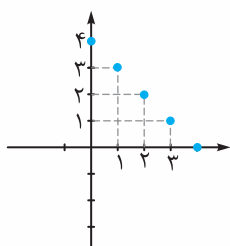
آسان

-۴

ا))



ب))



متوسط

-۱۰

چون f یک تابع همانی است پس هر ورودی با خروجی خود برابر است.

$$f(-1) = -1 \Rightarrow m = -1$$

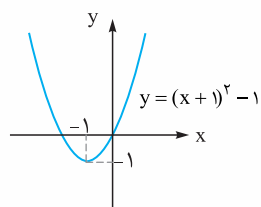
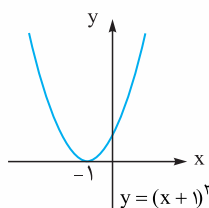
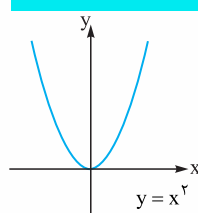
$$f(2) = 2 \Rightarrow n = 2$$

$$f(k) = 6 \Rightarrow k = 6$$

$$2m + n - k = -2 + 2 - 6 = -6$$

آسان

-۱۱



آسان

-۱۲

$$f(4) = \sqrt{4} = 2$$

$$f(9) = \sqrt{9} = 3$$

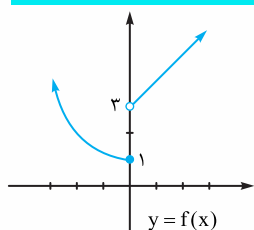
$$f(-1) = (-1)^2 - 1 = 0$$

$$f(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$f(4) + f(9) + f(-1) - f(0) = 2 + 3 + 0 - 0 = 5$$

متوسط

-۱۱



نمودار $f(x)$ تابع است و دامنه آن $\mathbb{R}$ و برد آن $[1, +\infty)$ می‌باشد.



آسان

۱- گزینه «۳»

$$(\sqrt{2y+x}, x^2+3x) = (-x, -3x-9) \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2y+x} = -x \\ x^2+3x = -3x-9 \end{cases}$$

$$x^2+3x = -3x-9 \Rightarrow x^2+6x+9 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)^2 = 0 \Rightarrow x+3 = 0 \Rightarrow x = -3$$

$$\sqrt{2y+x} = -x \xrightarrow{x=-3} \sqrt{2y-3} = 3$$

$$\xrightarrow{0^2} 2y-3 = 9 \Rightarrow 2y = 12 \Rightarrow y = 6$$

$$\Rightarrow x+y = -3+6 = 3$$

آسان

۲- گزینه «۴»

$$x=1 \Rightarrow 2+y \leq 7 \Rightarrow y \leq 5 \Rightarrow y = (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)$$

$$x=2 \Rightarrow 4+y \leq 7 \Rightarrow y \leq 3 \Rightarrow y = (2,1), (2,2), (2,3)$$

$$x=3 \Rightarrow 6+y \leq 7 \Rightarrow y = (3,1)$$

$$R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1)\}$$

۹ عضو دارد.

آسان

۳- گزینه «۱»

یک رابطه که به صورت زوج مرتب داده شده است، در صورتی تابع است که

هیچ دو زوج مرتبی مولفه اول یکسان و مولفه دوم متفاوت نداشته باشند و اگر

مولفه‌های اول آن یکسان بود، مولفه‌های دوم آن نیز یکسان باشد.

$$1-2a = -7 \Rightarrow -2a = -8 \Rightarrow a = 4$$

$$\Rightarrow f = \{(\sqrt{4}+1, -1), (3, b), (1, -7)\}$$

$$\Rightarrow f = \{(3, -1), (3, b), (1, -7)\} \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow f = \{(3, -1), (1, -7)\} \Rightarrow a+b = 4+(-1) = 3$$

آسان

-۵

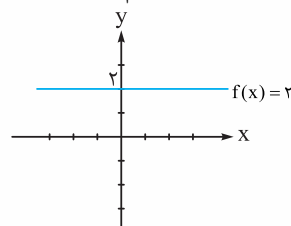
$$\text{آ) } \begin{cases} D = \{-1, 3, 2\} \\ R = \{6, 5\} \end{cases}$$

$$\text{ب) } \begin{cases} D = \{0, 1, -1\} \\ R = \{3, 2, 4\} \end{cases}$$

آسان

-۶

$$f(\sqrt{7}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) = f(0) = f(-4) = 2$$



آسان

-۷

اگر ضلع مثلث متساوی الاضلاع را x و محیط آن p را در نظر بگیریم $p = 3x$ خواهد بود.

آسان

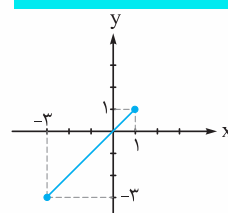
-۸

$$\text{آ) } f(-4) = 2, f(f(-4)) = f(2) = 0$$

$$\text{ب) } 2f(2) + f(1) = 2 \times 0 + 2 = 2$$

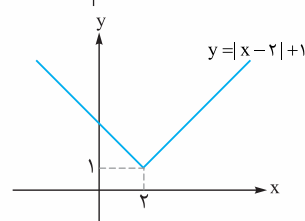
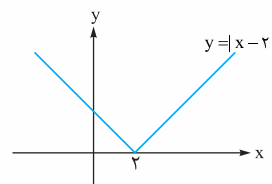
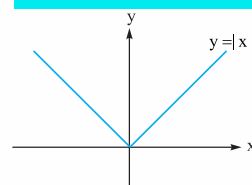
آسان

-۹



متوسط

-۱۰





۸- گزینه «ا»

متوسط

$$f(\sqrt{2}) = \underbrace{|\sqrt{2}-1|}_{\text{منفی}} + \underbrace{|\sqrt{2}-2|}_{\text{مثبت}} = (\sqrt{2}-1) + (2-\sqrt{2}) = 1$$

$$f(f(\sqrt{2})) = f(1) = |1-1| + |2-1| = 0 + 1 = 1$$

۹- گزینه «ا»

متوسط

$$y = -x^2 + 4x \Rightarrow y = -x^2 + 4x - 4 + 4$$

$$\Rightarrow y = -(x^2 - 4x + 4) + 4 \Rightarrow y = -(x-2)^2 + 4$$

بنابراین نمودار باید دو واحد به سمت راست و چهار واحد به سمت بالا حرکت کند.

۱۰- گزینه «ب»

متوسط

ابتدا معادله خط سمت چپ را به دست می‌آوریم. این خط از نقاط $A(-2, 0), B(0, -1)$ عبور می‌کند.

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \xrightarrow{A(-2, 0)} y - 0 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x - 1$$

$$m_1 = \frac{-1 - 0}{0 - (-2)} = -\frac{1}{2}$$

اکنون معادله سمت راست را به دست می‌آوریم. این خط از نقاط $D(1, -\frac{5}{2}), C(0, -\frac{1}{2})$ عبور می‌کند.

$$y - y_0 = m_2(x - x_0) \xrightarrow{C(0, -\frac{1}{2})} y + \frac{1}{2} = -2(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -2x - \frac{1}{2}$$

$$m_2 = \frac{-\frac{5}{2} - (-\frac{1}{2})}{1 - 0} = -2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x - 1 & -2 \leq x < 0 \\ -2x - \frac{1}{2} & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

۱۱- گزینه «ا»

آسان

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ x + 3 = 7 - x \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = -2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 8 \Rightarrow 4 + 4 + 1 = 9$$

۱۲- گزینه «ا»

آسان

$$f = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$$

تابع نیست و ۵ عضو دارد.

۱۳- گزینه «ب»

آسان

هر عدد طبیعی در بازه $(1, 5)$ را به ده برابر آن به اضافه ۲ نسبت می‌دهد.

۱۴- گزینه «ب»

آسان

$$\begin{cases} (3, 5) \in f \\ (3, m+4) \in f \end{cases} \Rightarrow m+4=5 \Rightarrow m=1$$

۱۴- گزینه «ب»

آسان

تصویر تابع بر محور x ها دامنه و تصویر آن بر محور y ها برد است

$$D_f = [-4, 3], R_f = (-1, 2]$$

۵- گزینه «ب»

متوسط

$$f(x) = mx + h \Rightarrow f(2x) = m(2x) + h = 2mx + h$$

$$f(x) - f(2x) = 2x \Rightarrow (mx + h) - (2mx + h) = 2x \Rightarrow -mx = 2x \Rightarrow m = -2$$

$$\begin{cases} f(x) = -2x + h \\ f(2) = -1 \end{cases} \Rightarrow (-2)(2) + h = -1 \Rightarrow -4 + h = -1 \Rightarrow h = 3$$

$$f(x) = -2x + 3 \Rightarrow f(-2) = -2(-2) + 3 = 7$$

۶- گزینه «ب»

آسان

ضابطه تابع خطی را به صورت $f(x) = mx + h$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} f(-1) = 3 \Rightarrow m(-1) + h = 3 \Rightarrow -m + h = 3 \\ f(1) = 7 \Rightarrow m(1) + h = 7 \Rightarrow m + h = 7 \end{cases} \xrightarrow{+} 2h = 10 \Rightarrow h = 5$$

$$m + h = 7 \xrightarrow{h=5} m + 5 = 7 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow f(x) = 2x + 5$$

$$f(x-1) = 2(x-1) + 5 \Rightarrow f(x-1) = 2x - 2 + 5 \Rightarrow f(x-1) = 2x + 3$$

$$f(f(x-1)) = f(2x+3) = 2(2x+3) + 5 = 4x + 6 + 5 = 4x + 11$$

۷- گزینه «ب»

متوسط

تابع ثابت به صورت $f(x) = k$ است $(k \in \mathbb{R})$. بنابراین در تابع $f(x)$ ضرایب x, x^2 باید صفر باشد.

$$a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow (a-1)(a+3) = 0 \Rightarrow a = 1, a = -3 \quad (1)$$

$$2a + 6 = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \quad (2)$$

با توجه به رابطه $(1), (2)$ نتیجه می‌گیریم $a = -3$ است. بنابراین:

$$f(x) = (-2)(-3) = 6$$

تابع همانی به صورت $g(x) = x$ است. بنابراین در تابع $g(x)$ ضریب x^2 باید صفر و ضریب x باید ۱ باشد.

$$b - a = 1 \xrightarrow{a=-3} b - (-3) = 1 \Rightarrow b + 3 = 1 \Rightarrow b = -2$$

$$4c - b = 0 \xrightarrow{b=-2} 4c - (-2) = 0 \Rightarrow 4c + 2 = 0 \Rightarrow 4c = -2$$

$$\Rightarrow c = -\frac{1}{2}$$

$$\text{تابع ثابت } f \Rightarrow f(a) = f(-3) = 6$$

$$\text{تابع همانی } g \Rightarrow g(b) = g(-2) = -2$$

$$g(c) = g(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{f(a)}{g(b)g(c)} = \frac{6}{(-2)(-\frac{1}{2})} = 6$$



۱- گزینه «ا»

$$g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) - f(x) + \frac{x}{2}f(1)$$

$$= \left(\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right) - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \frac{x}{2}(1+1) = x$$

پس تابع g همانی است.

۲- گزینه «ب»

ضابطه تابع همانی $y = x$ است. پس باید صورت x برابر مخرج باشد.

$$x^3 + x^2 + 4x \equiv x^3 + x^2 + mx \Rightarrow m = 4$$

۳- گزینه «د»

x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$\frac{x-}{xf(x)}$	+	تن	-	تن	+	تن	-

در نتیجه با شرط $x > 0$ خواهیم داشت: $D_f = [1, 2)$

۴- گزینه «ا»

دامنه تابع $\{k, 0, 1\} - \mathbb{R}$ است. پس ریشه‌های مخرج $x = k, 0, 1$ است.

$$x^3 + 4x^2 + mx = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4x + m) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 4x + m = 0 \end{cases}$$

می‌توان نتیجه گرفت که $x = 1$ و $x = k$ ریشه‌های معادله $x^2 + 4x + m = 0$ است.

$$x^2 + 4x + m = 0 \xrightarrow{x=1} 1 + 4 + m = 0 \Rightarrow m = -5$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = 1, x = -5$$

پس $k = -5$ است.

۵- گزینه «ب»

نکته: به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ رابطه $\frac{-1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$ برقرار است.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{3x}{1+x^2} = 1 + 3 \times \frac{x}{1+x^2}$$

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{\times 3} \frac{-3}{2} \leq \frac{3x}{1+x^2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\xrightarrow{+1} \frac{-1}{2} \leq f(x) \leq \frac{5}{2}$$

برد تابع $f(x)$ شامل ۳ عدد درست است.

آسان

۱۵- گزینه «ا»

تابع داده شده باید معادل با $y = x$ باشد.

$$\begin{cases} a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3 \\ b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 6$$

آسان

۱۶- گزینه «ا»

تابع ثابت است بنابراین:

$$\begin{cases} m + n = 0 \\ k + m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = -2, k = 2 \Rightarrow km = -4$$

آسان

۱۷- گزینه «ب»

تابع $y = \frac{x^2+3}{x}$ چند جمله‌ای نیست.

متوسط

۱۸- گزینه «ب»

تابع را به فرم $f(x) = ax^2 + bx + c$ در نظر می‌گیریم. $f(0) = 1$ استبنابراین $c = 1$ خواهد بود و f به صورت $f(x) = ax^2 + bx + 1$ تبدیل

می‌شود.

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f(-1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + 1 = 2 \\ a - b + 1 = 2 \end{cases} \xrightarrow{+} 2a + 2 = 4 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(2) - f(-2) = 0$$

آسان

۱۹- گزینه «ب»

$$f(x^2) - 2f(x) + 1 = \frac{x^2}{x^2-1} - \frac{2x}{x-1} + 1$$

$$= \frac{x^2 - 2x(x+1) + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \frac{2x+1}{1-x^2}$$

آسان

۲۰- گزینه «ب»

$$f(x) \Rightarrow f(x) - 1 \Rightarrow -f(x) + 1$$

$$-f(x) + 1 = f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow |x| - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{3}{2}$$



۱۱- گزینه «۲»

باید به ازای هر x ، فقط یک y داشته باشیم.

$$۱) x = -\frac{1}{y} \Rightarrow y^2 - y = 0 \Rightarrow y = 0, 1 \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

$$۲) \begin{cases} x > 0 \Rightarrow |y| = \sin \pi = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x < 0 \Rightarrow |y| = \sin(-\pi) = 0 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

$$۳) |x-1| + |y^2-1| = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm 1 \end{cases}$$

$$۴) x = 2/5 \Rightarrow y = 3/5, 1/5$$

۱۲- گزینه «۳»

ریشه همه مخرج‌ها را به دست می‌آوریم و در انتها از $\mathbb{R}$ کم می‌کنیم.

$$۱) x = 0$$

$$۲) 1 + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow x = -1$$

$$۳) 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = -1$$

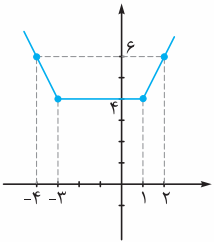
$$\Rightarrow 1 + \frac{1}{x} = -1 \Rightarrow \frac{1}{x} = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$D_f = \mathbb{R} - \{0, -\frac{1}{2}, -1\}$$

۱۳- گزینه «۴»

پس با رسم شکل تابع $f(x)$ نتیجه می‌شود که تابع در بازه $[-3, 1]$ ثابت است.



۱۴- گزینه «۱»

$$f(x) = ax + b \Rightarrow \begin{cases} f(3x+1) = a(3x+1) + b = 3ax + a + b \\ f(2x+1) = a(2x+1) + b = 2ax + a + b \\ f(x+1) = a(x+1) + b = ax + a + b \end{cases}$$

$$3[3ax + a + b] + 5[2ax + a + b] - 7[ax + a + b] = 17x - 2$$

$$\Rightarrow 12ax + a + b = 17x - 2 \Rightarrow \begin{cases} 12a = 17 \Rightarrow a = \frac{17}{12} \\ a + b = -2 \Rightarrow b = \frac{-41}{12} \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{17}{12}x - \frac{41}{12} \Rightarrow f(1) = \frac{-24}{12} = -2$$

۶- گزینه «۲»

در توابع چندجمله‌ای زمانی درجه تعریف نمی‌شود که ضابطه آن $f(x) = 0$ باشد.

$$f(x) = (x^2 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^2 + 3x^2 + 3x + 1) + ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow f(x) = (a-6)x^2 + bx + c - 2$$

برای آن که $f(x) = 0$ معادل با تابع $f(x) = 0$ شود باید:

$$\begin{cases} a-6=0 \\ b=0 \\ c-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=6 \\ b=0 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow a+b+c=8$$

۷- گزینه «۲»

$$f(x) = x - |3x| = \begin{cases} -2x & x \geq 0 \\ 4x & x < 0 \end{cases}$$

در نتیجه:

$$f(f(x)) = \begin{cases} -2x - |-6x| & x \geq 0 \\ 4x - |12x| & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(f(x)) = \begin{cases} -8x & x \geq 0 \\ 16x & x < 0 \end{cases}$$

پس تنها گزینه ۲ درست است زیرا:

$$4x - 12|x| = \begin{cases} -8x & x \geq 0 \\ 16x & x < 0 \end{cases}$$

۸- گزینه «۱»

اگر شعاع r فرض شود.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{rV}{\frac{4}{3}\pi} = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$$

$$S = 4\pi r^2 = 4\pi \sqrt[3]{\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^2} = 4\pi \sqrt[3]{\frac{9V^2}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{64\pi^3 \times 9V^2}{16\pi^2}} = \sqrt[3]{36\pi V^2}$$

۹- گزینه «۳»

$$\frac{x-3}{x+1} = 3 \Rightarrow 3x+3 = x-3 \Rightarrow 2x = -6 \Rightarrow x = -3$$

$$f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{x-1}{-2x+1} \xrightarrow{x=-3} f(3) = \frac{-3-1}{6+1} = -\frac{4}{7}$$

۱۰- گزینه «۱»

گزینه‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم.

(۱)

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 = -x^3 - x + 1 \Rightarrow (y+1)^3 = -x^3 - x + 1$$

$$\Rightarrow y = -1 + \sqrt[3]{-x^3 - x + 1} \Rightarrow \text{رابطه تابع است}$$

(۲)

$$y^2 + 2y + 1 = x \Rightarrow (y+1)^2 = x$$

$$x=1 \Rightarrow (y+1)^2 = 1 \Rightarrow |y+1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y+1=1 \Rightarrow y=0 \\ y+1=-1 \Rightarrow y=-2 \end{cases} \Rightarrow \text{تابع نیست}$$

(۳)

$$x=0 \Rightarrow |y-1| = 1 \Rightarrow \begin{cases} y-1=1 \Rightarrow y=2 \\ y-1=-1 \Rightarrow y=0 \end{cases} \Rightarrow \text{رابطه تابع نیست}$$

(۴)

$$x=1 \Rightarrow |y| = 1 \Rightarrow y = \pm 1 \Rightarrow \text{رابطه تابع نیست}$$



۱۸- گزینه «ا»

روش اول:

$$\begin{aligned} f\left(x + \frac{1}{x}\right) &= x^{\frac{1}{2}}(x+1) + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{x} + 1\right) \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \\ \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) &= \left(x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right) + \left(x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \\ \Rightarrow f\left(x + \frac{1}{x}\right) &= \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} + \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

اگر $x + \frac{1}{x} = A$ باشد، آن‌گاه:

$$f(A) = A^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{A^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}} = 4$$

نکته:

$$a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} = (a+b)^{\frac{1}{2}} - \frac{ab}{a+b}$$

$$a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} = (a+b)^{\frac{3}{2}} - \frac{3ab(a+b)}{a+b}$$

روش دوم:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 1^{\frac{1}{2}}(1+1) + \frac{1}{1^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{1} + 1\right) = 2 + 2 = 4$$

۱۹- گزینه «ب»

$$x^{\frac{1}{2}} < x \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} - x < 0$$

$$\frac{x^{\frac{1}{2}} - x}{x^{\frac{1}{2}} - x} \left| \begin{array}{c} -\infty \\ 0 \\ 1 \\ +\infty \end{array} \right. \begin{array}{c} + \\ - \\ - \\ + \end{array} \Rightarrow 0 < x < 1$$

$$f(x-2) = \sqrt{1+x^2} - 2x = \sqrt{(1-x)^2} = \underbrace{|1-x|}_{\text{مثبت}} = 1-x$$

$$\begin{cases} f(x-2) = 1-x \\ x-2 = A \Rightarrow x = A+2 \end{cases} \Rightarrow f(A) = 1 - (A+2) \Rightarrow f(A) = -A-1$$

$$\Rightarrow f(x) = -(x+1) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -\left(\frac{1}{x} + 1\right) = -\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

۲۰- گزینه «ا»

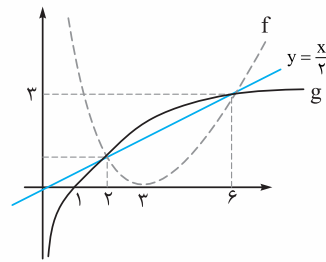
$$f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

$$f(f(\sqrt[3]{x})) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{x}$$

۱۵- گزینه «ب»

$$\frac{f(x) \times g(x)}{2f(x) - x} \geq 0 \text{ باید داشته باشیم}$$

	۰	۱	۲	۳	۶	$+\infty$
$f(x)$	+	+	+	+	+	+
$g(x)$	-	+	+	+	+	+
$2f(x) - x$	+	+	-	-	-	+
$\frac{f(x) \times g(x)}{2f(x) - x}$	-	+	-	-	-	+



$$D_h = [1, 2] \cup (6, +\infty)$$

۱۶- گزینه «ب»

می‌دانیم دامنه تابع $\sqrt{xf(x)}$ برابر $xf(x) \geq 0$ است، بنابراین باید مجموعه مقادیریاز x پیدا کنیم که $xf(x) \geq 0$ یعنی $f(x) \geq 0, x \geq 0$ یا $f(x) \leq 0, x \leq 0$ باشد، دربازه $[-3, 0]$ ، $f(x) \leq 0, x \leq 0$ و در بازه $[1, 2]$ ، $f(x) \geq 0, x \geq 0$ ، بنابراین دامنه اینتابع $[-3, 0] \cup [1, 2]$ است.

۱۷- گزینه «ب»

$$y = 2\cos^2 x - 4\sin x \Rightarrow y = 2(1 - \sin^2 x) - 4\sin x$$

$$\Rightarrow y = 2 - 2\sin^2 x - 4\sin x$$

$$\Rightarrow y = 2 - 2\sin^2 x - 4\sin x - 2 + 2$$

$$\Rightarrow y = -2\sin^2 x - 4\sin x - 2 + 4$$

$$\Rightarrow y = -2(\sin^2 x + 2\sin x + 1) + 4$$

$$\Rightarrow y = -2(\sin x + 1)^2 + 4$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \xrightarrow{+1} 0 \leq \sin x + 1 \leq 2 \xrightarrow{0^2} 0 \leq (\sin x + 1)^2 \leq 4$$

$$\xrightarrow{\times(-2)} -8 \leq -2(\sin x + 1)^2 \leq 0$$

$$\xrightarrow{+4} -4 \leq -2(\sin x + 1)^2 + 4 \leq 4 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$$

$$\Rightarrow R_f = [-4, 4]$$