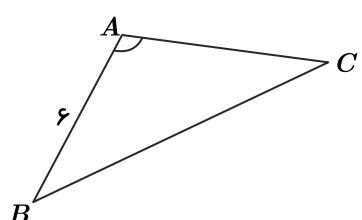
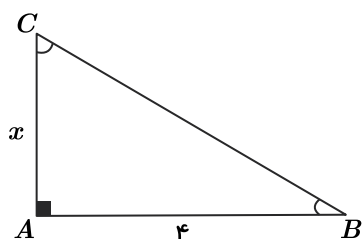


علوی

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: مثلثات دهم

۱-الف) در شکل مقابل اگر $\tan \hat{B} = \frac{2}{3}$ باشد، مقدار x را به دست آورید.



ب) مساحت مثلث مقابل برابر ۸ است. اگر $\cos \hat{A} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ باشد؛ اندازه

ضلع AC را به دست آورید.

پاسخ: الف)

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{x}{4} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

ب) می دانیم مساحت هر مثلث برابر با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن دو ضلع است؛

بنابراین ابتدا مقدار $\sin \hat{A}$ را به دست می آوریم:

$$\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} \Rightarrow \sin^2 \hat{A} = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \Rightarrow \sin \hat{A} = \pm \frac{2}{3}$$

چون \hat{A} زاویه مثلث و $0^\circ < \hat{A} < 180^\circ$ ؛ پس $\sin \hat{A} = \frac{2}{3}$ است.

حال داریم:

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \hat{A} \Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \times 6 \times AC \times \frac{2}{3} \Rightarrow 8 = 2AC \Rightarrow AC = 4$$

(صفحه ۳۱، ۳۳، ۴۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

الف)

$$\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB} \quad \text{یا} \quad \tan \hat{B} = \frac{x}{4} \quad (\text{نمره } ۰,۲۵)$$

$$x = \frac{8}{3} \quad (\text{نمره } ۰,۲۵)$$

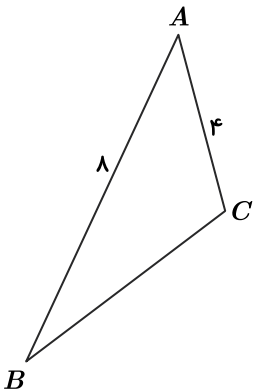


(ب)

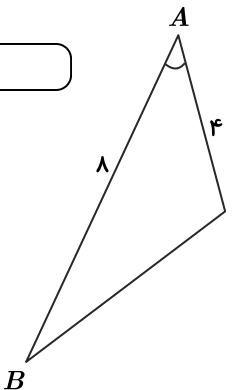
$$\sin^2 \hat{A} = 1 - \cos^2 \hat{A} \text{ (نمره ۰٫۲۵)} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{2}{3} \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$$

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin \hat{A} \text{ یا } ۸ = \frac{1}{2} \times ۶ \times AC \times \frac{2}{3} \text{ (نمره ۰٫۲۵)} \Rightarrow AC = ۴ \text{ (نمره ۰٫۲۵)}$$

۲- در شکل مقابل، مساحت مثلث ABC برابر ۱۲ است. مقدار $\cos \hat{A}$ را به دست آورید. (\hat{A} حاده است)



پاسخ: نکته: مساحت هر مثلث برابر است با نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آنها؛ بنابراین داریم:



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times AC \times \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow 12 = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin \hat{A} \Rightarrow 12 = 16 \sin \hat{A} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{3}{4}$$

اکنون مقدار $\cos \hat{A}$ را به دست می آوریم:

$$\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A} \Rightarrow \cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16} \xrightarrow{\hat{A} \text{ حاده}} \cos \hat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

(صفحة ۳۳ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:



$$\underbrace{12 = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times \sin \hat{A}}_{(نمره, 5)} \Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{3}{4} \quad (نمره, 25)$$

$$\underbrace{\cos^2 \hat{A} = 1 - \sin^2 \hat{A}}_{(نمره, 25)} \Rightarrow \underbrace{\cos^2 \hat{A} = 1 - \frac{9}{16}}_{(نمره, 25)} \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad (نمره, 25)$$

۳- اگر $\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = 2$ باشد، مقدار $\tan x$ را به دست آورید.

پاسخ: روش اول: با طرفین وسطین کردن رابطه داده شده داریم:

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = 2 \Rightarrow 3 \sin x - 4 \cos x = 2 \cos x - 4 \sin x$$

$$\Rightarrow 7 \sin x = 6 \cos x \Rightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{6}{7} \Rightarrow \tan x = \frac{6}{7}$$

روش دوم: صورت و مخرج کسر داده شده را به $\cos x$ تقسیم می‌کنیم: ($\cos x \neq 0$)

$$\frac{3 \sin x - 4 \cos x}{\cos x - 2 \sin x} = 2 \Rightarrow \frac{\frac{3 \sin x}{\cos x} - \frac{4 \cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos x}} = 2 \Rightarrow \frac{3 \tan x - 4}{1 - 2 \tan x} = 2$$

$$\Rightarrow 3 \tan x - 4 = 2 - 4 \tan x \Rightarrow 7 \tan x = 6 \Rightarrow \tan x = \frac{6}{7}$$

(صفحة ۴۲ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

روش اول:

$$3 \sin x - 4 \cos x = 2 \cos x - 4 \sin x \quad (نمره, 25) \Rightarrow 7 \sin x = 6 \cos x \quad (نمره, 25) \Rightarrow$$

$$\tan x = \frac{6}{7} \quad (نمره, 25)$$

روش دوم:

$$\frac{3 \sin x}{\cos x} - \frac{4 \cos x}{\cos x} = 2 \quad (نمره, 25) \Rightarrow \frac{3 \tan x - 4}{1 - 2 \tan x} = 2 \quad (نمره, 25)$$

$$\tan x = \frac{6}{7} \quad (نمره, 25)$$

۴- خط d با معادله $5x + 2y = c$ مفروض است. اگر زاویه‌ای که این خط با جهت مثبت محور طولها می‌سازد، برابر α باشد، حاصل $\sin \alpha$ را به دست آورید.

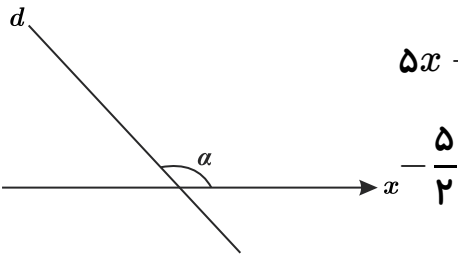


پاسخ: نکته: شیب هر خط با تانژانت زاویه‌ای که آن خط با جهت مثبت محور طول‌ها می‌سازد برابر است.

$$\text{شیب خط} = m = \tan \alpha$$

ابتدا m ، شیب خط داده شده را به دست می‌آوریم:

$$5x + 2y = c \Rightarrow 2y = -5x + c \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + \frac{c}{2} \Rightarrow m =$$



چون $m < 0$ ، پس زاویه‌ای که این خط با محور طول‌ها می‌سازد زاویه‌ای

$$\text{منفرجه است. } \tan \alpha = -\frac{5}{2} \text{ و } (90^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

حال داریم:

$$\tan \alpha = -\frac{5}{2} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{4}{25} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{29}{25} =$$

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{29}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{29}} \xrightarrow{90^\circ < \alpha < 180^\circ} \sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}}$$

(صفحة ۴۰، ۴۱، ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

$$m = -\frac{5}{2} \text{ (محاسبه شیب خط (۲۵، نمره))}$$

$$\tan \alpha = -\frac{5}{2} \text{ (نمره، ۲۵)}$$

(۲۵، نمره) اشاره به α منفرجه است یا اشاره به $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{29}} \text{ (نمره، ۵)}$$

۵- با ساده کردن سمت چپ تساوی‌های زیر، درستی اتحادهای داده شده را اثبات کنید.

الف) $\cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$

ب) $2 + \tan^2 x + \cot^2 x = \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2$

پاسخ: الف)



روش اول: $\cos^2 x - \sin^2 x = (\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1$

$= \cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x) - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

روش دوم: $\cos^2 x - \sin^2 x = (1 - \sin^2 x)^2 - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x + \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

(ب)

روش اول: $2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 1 + 1 + \tan^2 x + \cot^2 x = 1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x$

$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2$

روش دوم: $2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} =$

$\frac{2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x}$
 $= \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2$

روش سوم: می‌دانیم:

$\tan x \cdot \cot x = 1$

$2 + \tan^2 x + \cot^2 x = 2 \tan x \cot x + \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x + \cot x)^2$

$= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sin x \cos x}\right)^2$

(صفحة ۴۳ و ۴۴ کتاب درسی)

راهنمای تصحیح:

(الف)

$(\cos^2 x - \sin^2 x) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_1$ (نمره ۲۵)

$= (1 - \sin^2 x - \sin^2 x)$ (نمره ۲۵)

$= 1 - 2\sin^2 x$ (نمره ۲۵)

(ب)

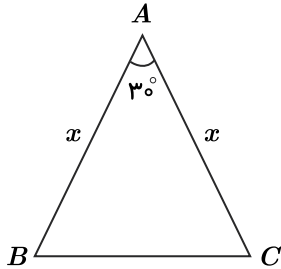


$$1 + \tan^2 x + 1 + \cot^2 x \quad (\text{نمره } ۲,۵)$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x} \quad (\text{نمره } ۵)$$

$$= \left(\frac{1}{\sin x \cos x} \right)^2 \quad (\text{نمره } ۵)$$

۶- مساحت مثلث متساوی الساقین ABC برابر ۹ است. اندازه x را به دست آورید.

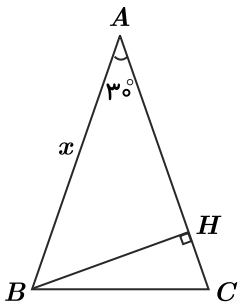


پاسخ:

روش اول:

$$S = \frac{1}{2} x^2 \sin 30^\circ = 9 \Rightarrow \frac{1}{2} \times x^2 \times \frac{1}{2} = 9 \xrightarrow{x > 0} x = 6$$

روش دوم:



$$\triangle ABH : \sin 30^\circ = \frac{BH}{AB} \Rightarrow BH = \frac{x}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{BH \times AC}{2} = \frac{\frac{x}{2} \times x}{2} = 9 \xrightarrow{x > 0} x = 6$$

۷- اگر $27^\circ < a < 36^\circ$ و $\tan a = \frac{-4}{3}$ ، نسبت‌های مثلثاتی $\cos a$ و $\cot a$ را به دست آورید.

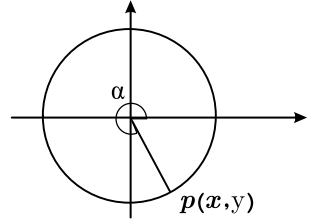
پاسخ: روش اول: استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow 1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \cos a = +\frac{3}{5}$$

$$\cot a = \frac{1}{\tan a} = -\frac{3}{4}$$



روش دوم: استفاده از دایره مثلثاتی



$$\tan a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{y}{x} = -\frac{4}{3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3}x$$

$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 1 \Rightarrow \frac{25}{9}x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{25} \xrightarrow{x > 0} x = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}, \cot a = -\frac{3}{4}$$

روش سوم:

$$\tan a = -\frac{4}{3} \Rightarrow \cot a = -\frac{3}{4}$$

$$\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sin a = -\frac{4}{3} \cos a$$

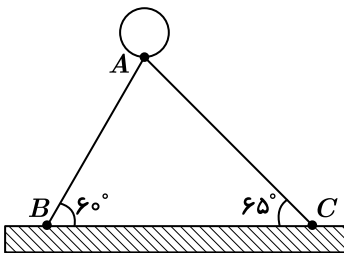
$$\cos^2 a + \frac{16}{9} \cos^2 a = 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{9}{25} \xrightarrow{\text{در ناحیه چهارم}} \cos a = \frac{3}{5}$$

۸- مطابق شکل مقابل، یک بالن توسط دو طناب AB و AC ، به زمین بسته شده است.

اگر طول طناب AB برابر ۳۶ متر باشد. با توجه به شکل، ابتدا ارتفاع بالن را

تعیین و سپس طول طناب AC را محاسبه کنید.

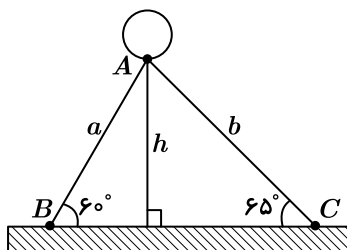
$$(\sin 65^\circ \cong 0,9)$$



پاسخ:

$$\sin 60 = \frac{h}{a} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{36} \rightarrow h = 18\sqrt{3}$$

$$\sin 65 = \frac{h}{b} \rightarrow \frac{9}{10} = \frac{18\sqrt{3}}{b} \rightarrow b = 20\sqrt{3}$$





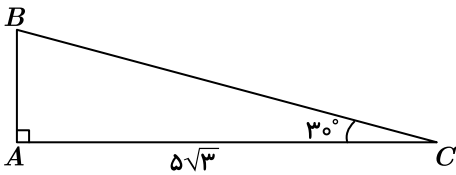
۹- با فرض بامعنی بودن عبارت مقابل، حاصل آن را محاسبه کنید.

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x} \times \cot x$$

$$\frac{\sin x - \sin^3 x}{\cos^3 x} \times \cot x = \frac{\sin x(1 - \sin^2 x)}{\cos^3 x} \times \cot x = \frac{\sin x \times \cos^2 x}{\cos^3 x} \times \cot x$$

پاسخ: $= \frac{\sin x}{\cos x} \times \cot x = \tan x \times \cot x = 1$

۱۰- مساحت مثلث ABC را به دست آورید.



پاسخ:

$$\cos 30^\circ = \frac{AC}{BC} \Rightarrow BC = 10$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \times BC \times AC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 10 \times 5\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$$

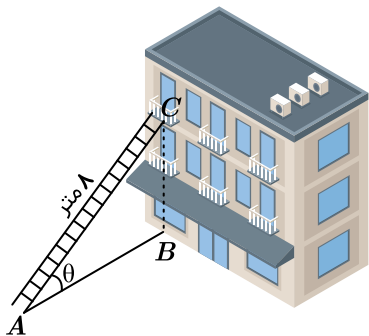
۱۱- با فرض بامعنی بودن کسرها، درستی تساوی مقابل را ثابت کنید.

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

پاسخ:

$$\frac{1}{\cos \alpha} - \tan \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \times \frac{1 + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)} =$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha(1 + \sin \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha}$$



۱۲- مطابق شکل، نردبانی به طول ۸ متر در زیر پنجره ساختمانی قرار گرفته است. اگر زاویه نردبان با سطح زمین $\theta = 30^\circ$ باشد، ارتفاع پنجره تا زمین را محاسبه کنید. فاصله پای نردبان تا ساختمان چقدر است؟

پاسخ: با توجه به مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$\sin \theta = \frac{BC}{8} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BC}{8} \Rightarrow 2BC = 8 \Rightarrow BC = 4$$

اکنون به کمک رابطه فیثاغورس داریم:

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 64 - 16 = 48 \Rightarrow AB = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$$

۱۳- اگر خط d با جهت مثبت محور x زاویه 45° بسازد و عرض از مبدأ آن 2 باشد، معادله خط d را

بنویسید.

پاسخ:

$$m = \tan 45^\circ = 1, A(0, 2) \Rightarrow y - 2 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x + 2$$

۱۴- اگر $\tan 15^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ باشد، مقدار سایر نسبت‌های مثلثاتی 15° را به دست آورید.

پاسخ:

$\theta = 15^\circ$ در ناحیه دوم مثلثاتی قرار دارد. در ناحیه دوم مثلثاتی، سینوس مثبت و بقیه منفی‌اند. بنابراین

داریم:

$$1 + \tan^2 15^\circ = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} \Rightarrow 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 15^\circ} \Rightarrow 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{\cos^2 15^\circ}$$

$$\Rightarrow \cos^2 15^\circ = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos 15^\circ = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \xrightarrow{\cos 15^\circ < 0} -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 15^\circ = \sqrt{1 - \cos^2 15^\circ} = \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cot 15^\circ = \frac{1}{\tan 15^\circ} = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

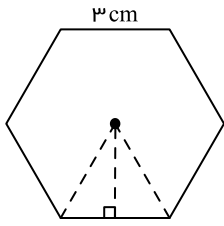
۱۵- حاصل عبارت $\frac{2 \tan 45^\circ + 8 \sin^2 30^\circ}{\cot^2 30^\circ + 8 \cos 60^\circ}$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\frac{2 \tan 45^\circ + 8 \sin^2 30^\circ}{\cot^2 30^\circ + 8 \cos 60^\circ} = \frac{2(1) + 8\left(\frac{1}{2}\right)^2}{(\sqrt{3})^2 + 8\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2 + 2}{3 + 4} = \frac{4}{7}$$



علوی



۱۶- مساحت شش ضلعی منتظم زیر را به دست آورید.

هر ۶ ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی الاضلاع تشکیل شده است.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin \hat{B}$$

n ضلعی منتظم برابر است

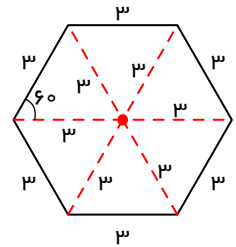
$$\theta = \frac{(n-2)}{n} \times 180$$

پاسخ: می دانیم:

$$S_{\text{مثلث}} = 6 S_{\text{ضلعی}}$$

$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$$

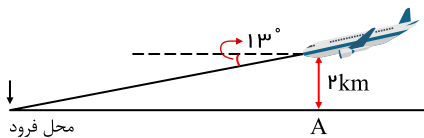
$$S_{\text{ضلعی}} = 6 \times \frac{9\sqrt{3}}{4} = \frac{27\sqrt{3}}{2}$$



خلی

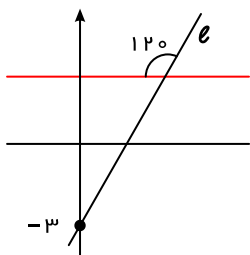
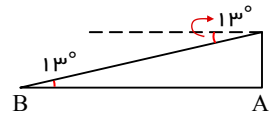
۱۷- یک هواپیما در ارتفاع 2 km از سطح زمین در حال فرود آمدن است. اگر زاویه هواپیما با افق حدود 13° باشد، هواپیما در چه فاصله‌ای از نقطه A فرود می آید.

$$\tan 13^\circ \simeq 0,23$$



$$\tan \alpha = \frac{\text{طول ضلع مقابل}}{\text{طول ضلع مجاور}} \quad \text{پاسخ: می دانیم:}$$

$$\tan 13^\circ = \frac{2}{AB} \Rightarrow 0,23 = \frac{2}{AB} \Rightarrow AB = \frac{2 \times 100}{23} \simeq 8,7 \text{ km}$$



۱۸- با توجه به شکل زیر، معادله l را به دست آورید.

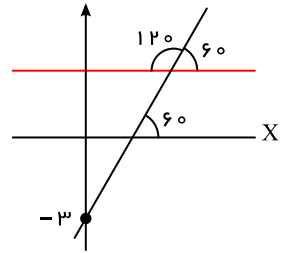


شیب خط، تانژانت زاویه‌ای است که خط با جهت مثبت محور x ها می‌سازد.

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

پاسخ: می‌دانیم:

$$\begin{cases} m = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ (0, -3) \end{cases} \Rightarrow y - (-3) = \sqrt{3}(x - 0) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 3$$



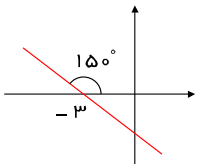
۱۹- اگر $\sin \alpha = a + 2b$ و $\cos \alpha = 2a - 3b$ و همچنین $5a^2 + 13b^2 = 17$ باشد، آنگاه حاصل ab را بیابید.

پاسخ:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \rightarrow (a + 2b)^2 + (2a - 3b)^2 = 1$$

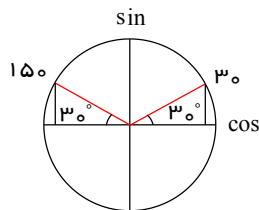
$$a^2 + 4b^2 + 4ab + 4a^2 + 9b^2 - 12ab = 1 \Rightarrow \underbrace{5a^2 + 13b^2}_{17} - 8ab = 1$$

$$\Rightarrow 17 - 8ab = 1 \Rightarrow 8ab = 16 \Rightarrow ab = 2$$



۲۰- معادله‌ی خط روبرو را بنویسید.

پاسخ: $m = \tan \alpha$ با توجه به دایره‌ی مثلثاتی، در رابطه با زاویه‌ی 150° داریم:



$$180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

$$\sin 150^\circ = \sin 30^\circ$$

$$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ$$

$$m = \tan 150^\circ = \frac{\sin 150^\circ}{\cos 150^\circ} = \frac{\sin 30^\circ}{-\cos 30^\circ} = -\tan 30^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$



$$y = \frac{-\sqrt{3}x}{3} + b \xrightarrow{(-3,0)} 0 = \frac{-\sqrt{3}}{3} \times (-3) + b \Rightarrow 0 = \sqrt{3} + b \Rightarrow b = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{-\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$$