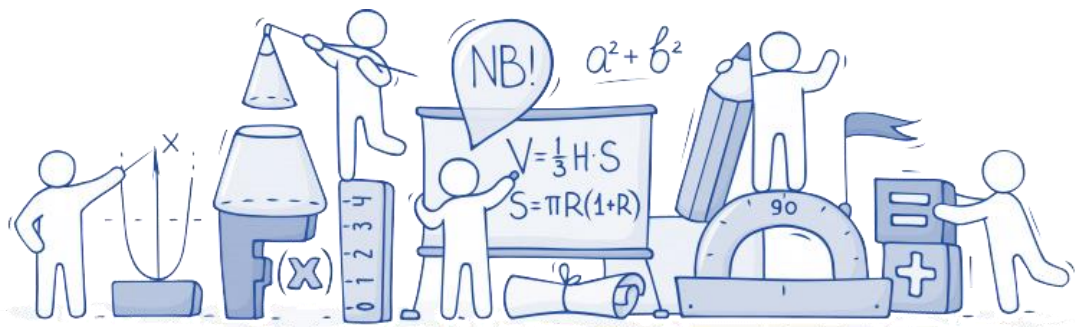


فصل چهارم

معادله ها و نامعادله



درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

معادله درجه دوم

هر معادله به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a \neq 0$ را یک معادله درجه دوم می‌نامیم.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

a همیشه ضریب x^2 ، b ضریب x و c علامت‌هاست و همواره همراه با علامت علامت معرفی می‌شوند.

توجه

در معادلات درجه دوم زیر، ضرایب a و b و c را تعیین کنید.

مثال ۱

۱) $2x^2 - 7x + 4 = 0$

ب) $x^2 - 2x = 5$

پ) $x^2 - 9 = 8$

ت) $2x^2 + 6x = 0$

ث) $-3x^2 = 0$

ج) $(x-1)(x+2) = 0$

۲

روش های حل معادله درجه دوم

۱) تجزیه

ویژگی حاصل ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $A.B = 0$ باشد، آن گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است یعنی:

$$A.B = 0 \Rightarrow A = 0 \text{ or } B = 0$$

در روش تجزیه به کمک اتحادهای مربع، جمله مشترک، مزدوج و یا فاکتورگیری عبارت را به صورت $A.B = 0$ در می‌آوریم و سپس از ویژگی ضرب صفر استفاده می‌کنیم تا جواب های معادله را به دست آوریم.



معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

مثال ۲

$$1) x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$ب) 3t^2 - t = 0$$

$$پ) x^2 - 3x = 10$$

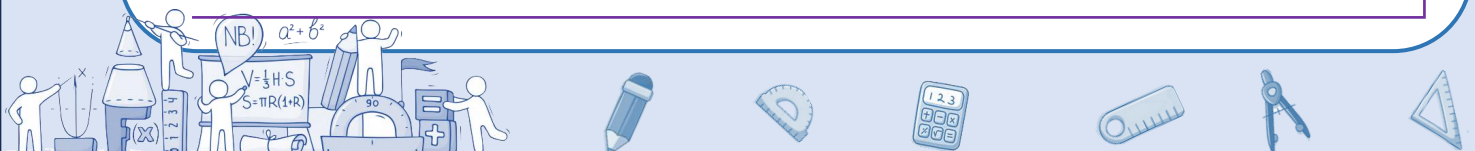
$$ت) 3y^2 - 12 = 0$$

۴

$$ث) 2x^2 = 5x$$

$$ج) (2x-1)^2 = (x+1)^2$$

$$چ) x(2x-4) + 4 = 2(x+2)$$



نکته

اگر $c = 0$ باشد، از روش فاکتورگیری استفاده می‌کنیم. در این حالت حتماً یکی از جواب‌ها صفر است.

۲) ریشه‌گیری

در حل معادلاتی به فرم کلی $X^2 = k$ ، اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه‌های معادله به صورت $X = \sqrt{k}$ و $X = -\sqrt{k}$ است.

معادلات زیر را به روش ریشه‌گیری حل کنید.

مثال ۳

ا) $x^2 = 4$

ب) $x^2 - 5 = 0$

پ) $2x^2 - 32 = 0$

ت) $(2x+1)^2 - 9 = 0$

ث) $(r-2)^2 = 16$

ج) $t^2 + 7 = 0$

چ) $5x^2 = 20$

ح) $(x+1)^2 + 4 = 0$



۳) مربع کامل

روش مربع کامل کردن یک معادله درجه دوم: ابتدا دو جمله شامل متغیر معادله (معمولا x) را یک طرف تساوی و بقیه را سمت دیگر می‌نویسیم. عدد $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم. سه جمله سمت چپ یک اتحاد مربع است. پس از مرتب سازی، از روش ریشه گیری جواب های معادله را در صورت وجود به دست می‌آوریم.

برای استفاده از روش مربع کامل، باید $a = 1$ باشد؛ پس اگر a عددی به جز ۱ بود ابتدا کل معادله را بر a تقسیم

توجه



می‌کنیم.

این چند اتحاد را به خاطر بسپارید:

نکته



$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x^2 \pm 4x + 4 = (x \pm 2)^2$$

$$x^2 \pm 6x + 9 = (x \pm 3)^2$$

معادلات زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

مثال ۴



الف) $x^2 - 6x + 8 = 0$

ب) $x^2 - 6x = -9$



$$\text{ج) } 2r^2 + r - 2 = 0$$

$$\text{ح) } 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

(۴) فرمول کلی یا دلتا (Δ)

اگر معادله درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$ را به روش مربع کامل حل کنیم داریم:



روش استفاده از دلتا (Δ): ابتدا به کمک فرمول $\Delta = b^2 - 4ac$ مقدار Δ را به دست می‌آوریم. عدد دلتا مثبت، منفی یا صفر است:

۱) $\Delta > 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

معادله دو ریشه متمایز (متفاوت) دارد

۲) $\Delta = 0 \rightarrow x = \frac{-b}{2a}$

معادله یک ریشه مضاعف (تکراری) دارد

۳) $\Delta < 0 \rightarrow$

معادله ریشه حقیقی ندارد

در روش دلتا، با ضرایب a و b و c سروکار داریم. پس حتماً به علامت اعداد توجه کنیم و ترجیحاً معادله را از ابتدا مرتب

نکته



بنویسیم.

روش دلتا برای هر معادله درجه دوم قابل استفاده است.

نکته



معادلات درجه دوم زیر را به روش فرمول کلی (دلتا) حل کنید.

مثال ۵



ا) $x^2 + 3x - 4 = 0$

ب) $2x^2 + x - 3 = 0$

پ) $x^2 - 3x - 1 = 0$

ت) $x^2 + x + 1 = 0$



$$\text{ث) } x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{ج) } 2x^2 - 7x - 9 = 0$$

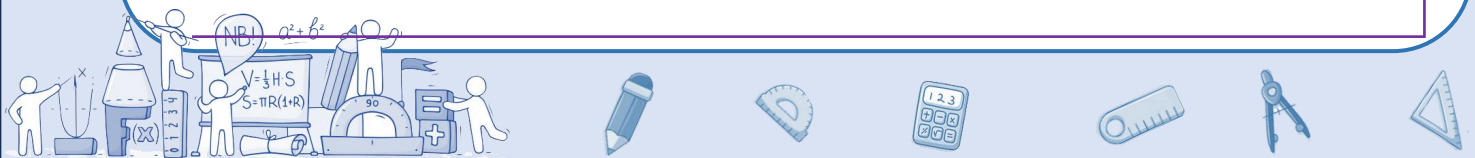
$$\text{ج) } x^2 - 3x = 0$$

$$\text{ح) } x^2 - 25 = 0$$

۹

$$\text{خ) } 2x^2 - 3x + 4 = 0$$

$$\text{د) } (2x+1)^2 = x-3$$



$$\text{ذ) } (x-1)(x+1) = 2x$$

$$\text{ر) } 4x^2 - 5x + 1 = 0$$

$$\text{ز) } -x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$\text{س) } -2x^2 + x + 3 = 0$$

مثال ۶



از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می‌خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.



دو حالت خاص حل معادله درجه دوم

$$I) a + b + c = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$$

$$II) a + c = b \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = -\frac{c}{a}$$

نکته



$$1) b = 0 \Rightarrow$$

ریشه‌ها قرینه هم هستند

$$2) a = c \Rightarrow$$

ریشه‌ها عکس هم هستند

$$3) \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \Rightarrow$$

معادله دارای دو ریشه مختلف علامت است

معادلات زیر را حل کنید و ریشه‌های آن‌ها را در صورت وجود به دست آورید.

مثال ۷



$$1) 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$ب) x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$پ) x^2 - 4x = 0$$

$$ت) 2x^2 - 4 = 0$$

$$ث) x^2 - 8x + 7 = 0$$



$$\text{ج) } 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\text{چ) } -6x^2 + 7x - 1 = 0$$

$$\text{ح) } 2x^2 - 32 = 0$$

$$\text{خ) } 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

۱۲

مثال ۸ طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $2x+1$ و $2x-1$ و x است ($x \geq 1$). طول ضلع متوسط کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱۹(۴)

۱۷(۳)

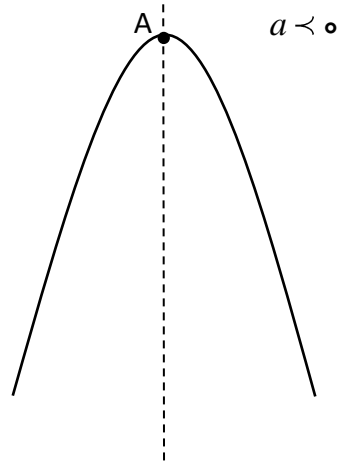
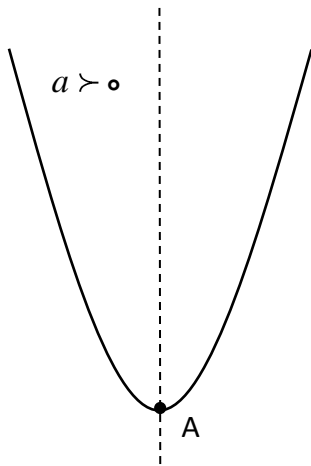
۱۵(۲)

۱۳(۱)



درس دوم: سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y = ax^2 + bx + c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی و $a \neq 0$ است را سهمی می‌نامیم که به یکی از فرم‌های زیر است:



مثال ۹ معادله یک سهمی به صورت $y = x^2 - 4x + 5$ است. سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید، ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و به کمک آن سهمی را رسم کنید.



نکته هر سهمی به صورت $y = a(x-h)^2 + k$ که $a \neq 0$ است، دارای راسی با مختصات $A(h, k)$ و خط تقارن $x = h$ با معادله $x = h$ است.

نکته برای رسم سهمی کافی است مختصات راس سهمی را به دست آورده، دو نقطه کمتر از x_A و دو نقطه بیشتر از x_A را جایگزین کنیم و به کمک این پنج نقطه سهمی را رسم کنیم.

مثال ۱۰ در هریک از سهمی های زیر، راس را مشخص کرده و سهمی را رسم کنید.

ا) $y = (x + 3)^2 + 1$

ب) $y = -2x^2 - 3$

نکته اگر سمت راست معادله $y = ax^2 + bx + c$ را به شکل مربع کامل بنویسیم داریم:

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

در این حالت با توجه به نکته بالا مختصات راس سهمی $A \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$ است و معادله خط تقارن

سهمی $x = \frac{-b}{2a}$ است.



مثال ۱۱

مختصات راس سهمی و معادله محور تقارن سهمی های زیر را به دست آورید.

ا) $y = x^2 - 4x + 5$

ب) $y = 2(x + 3)^2 + 1$

نکته از مختصات راس سهمی داریم: $x_A = \frac{-b}{2a}$ و $y_A = \frac{-\Delta}{4a}$ اما برای محاسبه y_A همچنین می‌توان از جایگزینی x_A در معادله سهمی استفاده کرد.

مثال ۱۲

سهمی به معادلات زیر را رسم کنید.

ا) $y = x^2 + 3$

ب) $y = x^2 - 3x + 4$



پ) $y = x^2 - 4x$

ت) $y = -2x^2 + 4x - 5$

به عرض C عرض از مبدأ سهمی می‌گوییم که همان محل برخورد سهمی با محور y است.

نکته



همان‌طور که از مثال بالا نیز مشخص است اگر دو نقطه به فاصله یکسان از x_A قرار داشته باشند دارای

نکته





عرض یکسان هستند زیرا سهمی نسبت به راست A متقارن است.


بر عکس اگر دو نقطه دارای عرض یکسان باشند مثلاً (x_1, y_0) و (x_2, y_0) در این صورت معادله محور تقارن سهمی

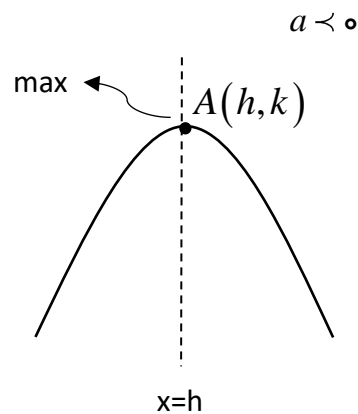
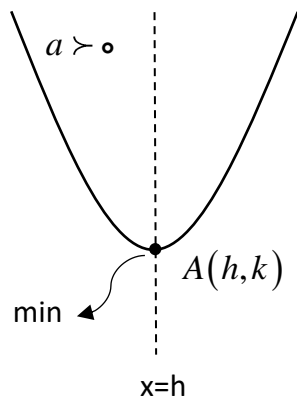
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ است.}$$



مثال ۱۳  اگر $(0, 3)$ و $(-4, 3)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن این سهمی را بنویسید.

مثال ۱۴  اگر $(2, -1)$ و $(5, -1)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن این سهمی را بنویسید.

نکته  در حالتی که $a > 0$ است، راس سهمی در پایین‌ترین نقطه سهمی قرار دارد و نقطه مینیمم سهمی است. در حالتی که $a < 0$ است، راس سهمی نقطه ماکزیمم سهمی است.



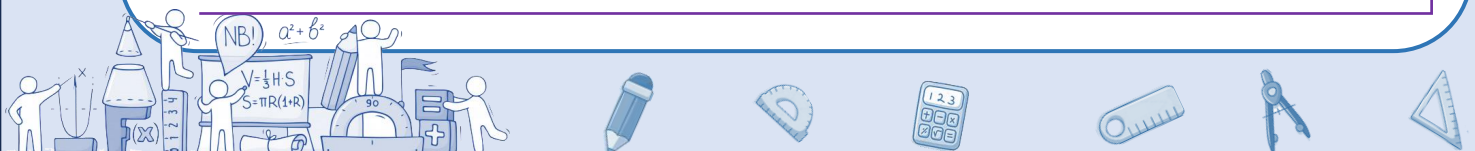
۱۷

مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم سهمی به معادلات زیر را بیابید.

مثال ۱۵ 

۱) $y = x^2 - 4x + 5$

ب) $y = -2x^2 + 1$

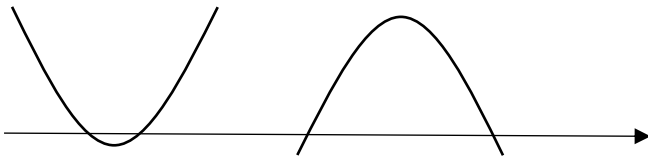


نکته



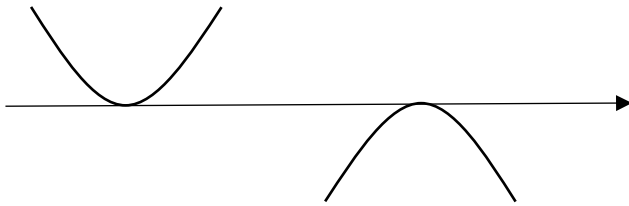
تعداد نقاط برخورد سهمی با محور x ها همان تعداد ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ است و سه حالت

طی زیر رخ می دهد:



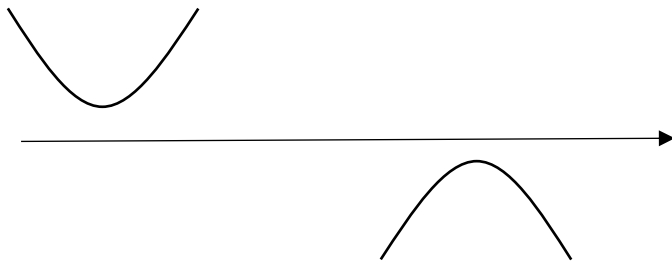
(۱) معادله دو ریشه متمایز دارد ($\Delta > 0$)

در این صورت سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می کند.



(۲) معادله یک ریشه مضاعف دارد ($\Delta = 0$)

در این حالت سهمی بر محور x ها مماس است.



(۳) معادله ریشه ندارد ($\Delta < 0$)

در این حالت سهمی به طور کامل یا بالای

محور x ها یا زیر آن قرار می گیرد.

نوشتن معادله از روی ریشه ها

در سه حالت نکته قبل می توان معادله سهمی را نوشت:

حالت اول: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$

حالت دوم: $y = a(x - x_A)^2$

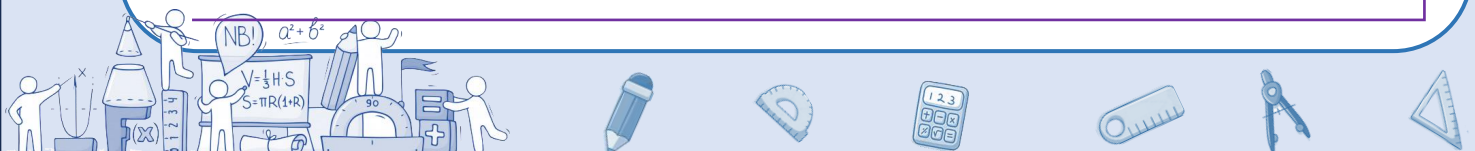
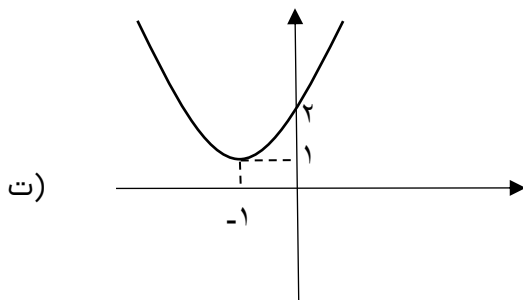
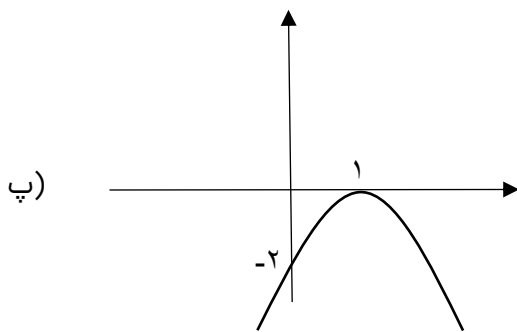
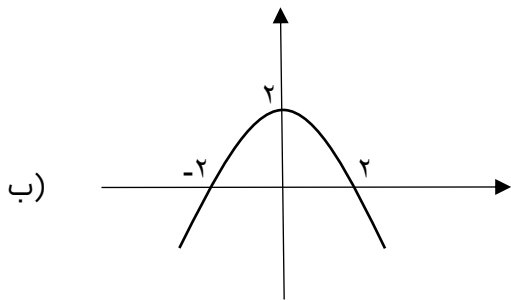
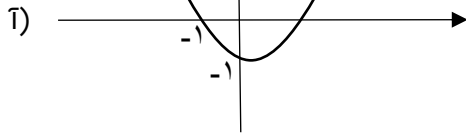
حالت سوم: $y = ax^2 + bx + c$. با جایگذاری نقاط و استفاده از اطلاعات

مساله ضرایب را تعیین می کنیم.



در هر حالت، معادله سهمی را بنویسید.

مثال ۱۶



مثال ۱۷

معادله سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در دو نقطه به طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده و از نقطه $(-۱, ۳)$ نیز بگذرد.

مثال ۱۸

نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور x ها را در نقاطی به طول‌های ۱- و ۳ و محور y ها را در نقطه با عرض ۱- قطع می‌کند. عرض راس سهمی کدام است؟

$$\frac{-۴}{۳} \quad (۴)$$

$$\frac{۴}{۳} \quad (۳)$$

$$\frac{۲}{۳} \quad (۲)$$

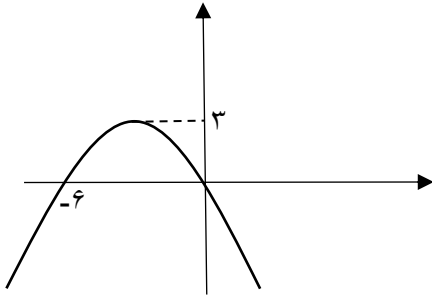
$$\frac{-۲}{۳} \quad (۱)$$



مثال ۱۹ با توجه به سهمی روبرو حاصل عبارت $\frac{-\sqrt{b^2}}{a}$ کدام است؟



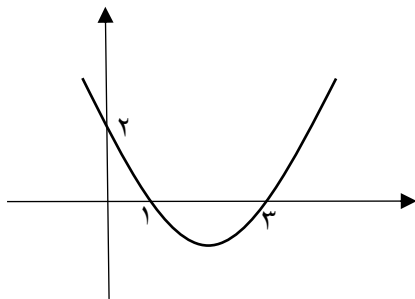
- (۱) -۴ (۲) ۲ (۳) -۱ (۴) ۶



مثال ۲۰ شکل مقابل نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ است. عرض پایین ترین نقطه این سهمی



کدام است؟



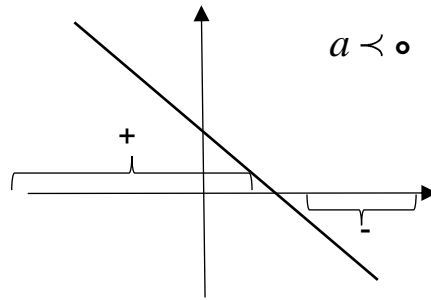
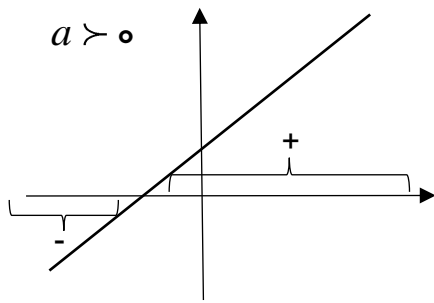
- (۱) $\frac{-1}{3}$ (۲) $\frac{-2}{3}$ (۳) $\frac{-3}{2}$ (۴) $\frac{-128}{27}$



درس سوم: تعیین علامت

۱) تعیین علامت عبارت‌های درجه اول

به نمودارهای مربوط به معادله خطی $y = ax + b$ و علامت y توجه کنید:



همان‌طور که از شکل‌ها مشخص است، علامت y به ازای مقادیر کوچکتر از ریشه، با علامت a مخالف هم هستند و به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه، با علامت a موافق هم هستند. در حالت کلی داریم:

$$P(x) = ax + b$$

$$ax + b = 0$$

$$x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$ax + b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

عبارت‌های درجه اول زیر را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۱

الف) $P(x) = -4x + 8$

ب) $y = 2x - 3$

پ) $y = -3x$

ت) $y = 2x + 2$



نکته

۱) تعیین علامت عبارت‌های $(ax + b)^{2n+1}$ یعنی عبارت‌های درجه اول باتوان فرد نیز مانند عبارت‌های درجه اول معمولی است. در این حالت ریشه راملر فرد می‌نامیم.

۲) علامت عبارت‌های $(ax + b)^{2n}$ یعنی عبارت‌های درجه اول باتوان زوج همواره مثبت است. در این حالت ریشه راملر زوج می‌نامیم. علامت عبارت $|ax + b|$ نیز شبیه توان زوج همواره مثبت است.

۳) تعیین علامت عبارت‌های ضربی با عوامل درجه اول به صورت ضرب علامت‌های تک‌تک عوامل است.

۴) تعیین علامت عبارت‌های کسری با عوامل درجه اول به صورت ضرب علامت‌های عوامل است. بار در نظر گرفتن اینکه در ریشه مخرج تعریف نشده (ت.ج.ا) است.

مثال ۲۲

هر یک از عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

ت) $A = (3x + 1)(2x - 1)$

ب) $B = (4x + 5)^2$

پ) $C = x^3(7x - 2)$

ت) $D = \frac{x - 1}{3 - 2x}$



ث) $E = (x-1)^2(x+3)^3$

ج) $F = \frac{x^3(2x+4)}{-x^2|3-x|}$

۲) تعیین علامت های درجه دوم

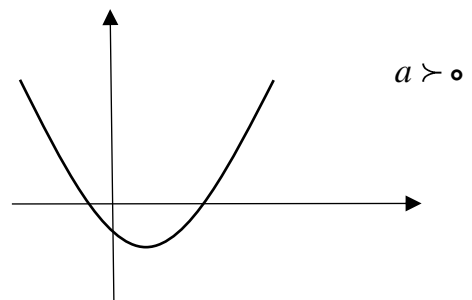
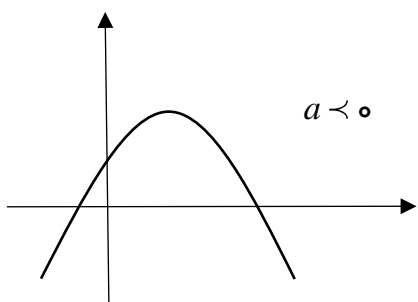
همانند عبارت های درجه اول، می توان برای عبارت های درجه دوم نیز تعیین علامت را با توجه به تعداد ریشه ها و علامت a انجام داد:

۲۴

$$P(x) = ax^2 + bx + c \quad a \neq 0$$

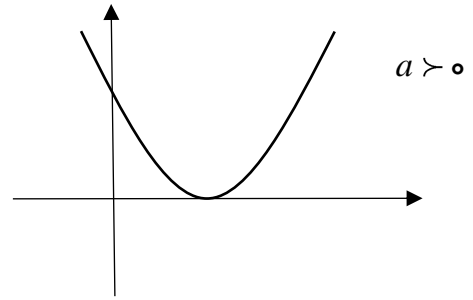
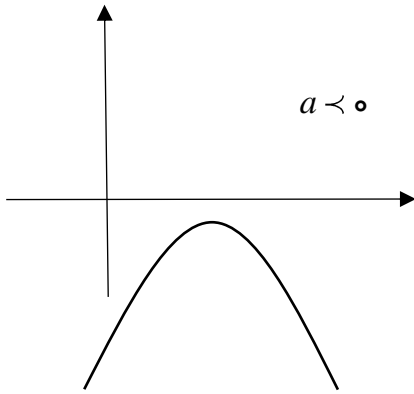
الف) معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای دو ریشه متمایز x_1, x_2 است $\Delta > 0 \leftarrow$

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
P				



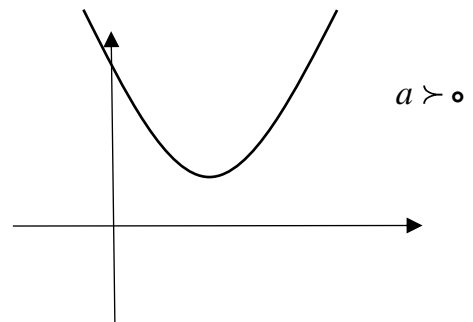
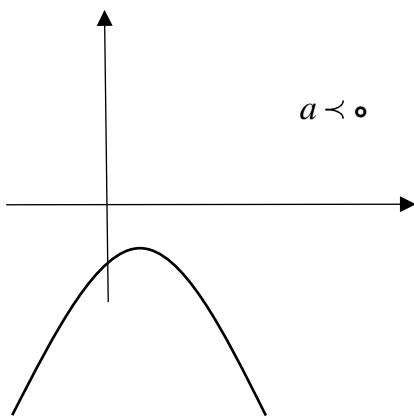
ب) معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای یک ریشه مضاعف x_0 است $\leftarrow \Delta = 0$

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P	----- ----- -----		



ب) معادله $ax^2 + bx + c = 0$ دارای ریشه حقیقی نیست $\leftarrow \Delta < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
P	----- -----	



ریشه هریک از عبارت های زیر را در صورت وجود بیابید و عبارت را تعیین علامت کنید.

ا) $A = ۲x^۲ - x - ۳$

ب) $B = x^۲ - ۴x + ۴$

پ) $C = ۳x^۲ - ۵x$

ت) $D = ۲x^۲ - x + ۱$

ث) $E = \frac{x(x-۳)^۲}{x^۲+x-۲}$

ج) $F = (x^۲ + ۲x + ۱)(x^۲ - ۴)$



$$\text{ج) } G = \frac{x^2(x-3)^3}{x(2x+1)}$$

$$\text{ح) } H = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$$

روش سریع برای تعیین علامت های ضربی و کسری

ریشه همه عبارت ها را پیدا کرده و در سطر اول جدول تعیین علامت، از کوچک به بزرگ می نویسیم. علامت اولین ناحیه از سمت راست (بعد از بزرگترین ریشه) را تعیین کرده و سپس با عبور از ریشه های ساده یا مکرر فرد، علامت را تغییر می دهیم و با عبور از ریشه مضاعف یا مکرر زوج یا عبارت قدرمطلق، علامت عوض نمی شود.

۲۷

۱) ریشه های مخرج همواره تعریف نشده (ت.ن.ح.) هستند.

نکته



۲) تعداد تکرارهای هر ریشه از صورت و مخرج با هم حساب می شوند.

عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

مثال ۲۴



$$\text{ط) } P(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+5)}$$



ب) $f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)(x - 6)^3}{(x - 5)^2}$

پ) $q(x) = \frac{(x^2 + 3x + 5)|x - 1|}{(x + 2)^3(x^2 - 4)}$

باردقت در جدول تعیین علامت عبارت‌های درجه دوم در حالتی که $\Delta < 0$ است، می‌بینیم که علامت عبارت،

نکته

همواره مثبت یا همواره منفی است. بنابراین داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c > 0$$

به عبارت علامت $p(x) = ax^2 + bx + c$ همواره مثبت است یا سهمی آن همواره بالای محور x ها قرار می‌گیرد

حالت دوم:

$$\begin{cases} \Delta < 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow ax^2 + bx + c < 0$$

به عبارت علامت $p(x) = ax^2 + bx + c$ همواره منفی است یا سهمی آن همواره زیر محور x ها قرار می‌گیرد



مثال ۲۵ به ازای کدام مقدار m ، نمودار سهمی به معادله $y = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ همواره بالای محور x ‌هاست؟

(۱) $m > -2$

(۲) $-2 < m < -1$

(۳) $-2 < m < 2$

(۴) $-1 < m < 2$

به ازای کدام مقدار a عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ همواره منفی است؟

مثال ۲۶

(۱) \mathbb{R}

(۲) $a < 1$

(۳) \emptyset

(۴) $1 < a < 5$

اگر $P(x) = ax^2 + bx + c$

نکته

۱) $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ مماس بر محور طول‌ها و روبه بالا است.

۲) $\begin{cases} \Delta = 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ مماس بر محور طول‌ها و روبه پایین است.

۳) $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a > 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ همواره نامنفی است. ($P(x) \geq 0$)

۴) $\begin{cases} \Delta \leq 0 \\ a < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$P(x)$ همواره نامشبه است. ($P(x) \leq 0$)



نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، چهار نامعادله به صورت زیر ساخته می‌شود:

نامعادله	می‌خوانیم
$A < B$	A کوچکتر از B است
$A \leq B$	A کوچکتر یا مساوی B است
$A > B$	A بزرگتر از B است
$A \geq B$	A بزرگتر یا مساوی B است

دو ویژگی کاربردی در نامعادلات

اگر A و B و C عبارت‌های جبری باشند:

$$1) A < B \Rightarrow A + C < B + C$$

$$2) A > B \Rightarrow \begin{cases} AC > BC & C > 0 \\ AC < BC & C < 0 \end{cases}$$

نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

مثال ۲۷

۱) $5x - 1 \geq 3x - 7$

۳۰

ب) $-2 < 3x - 1 \leq 8$

حل نامعادله درجه اول

همانند حل معادله درجه اول، مجهول‌ها را یک طرف و معلومات را طرف دیگر نامساوی قرار می‌دهیم. پس از ساده کردن و تنها کردن x ، مجموعه جواب نامعادله مشخص می‌شود.



نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید.

الف) $2x + 5 \leq x - 1$

ب) $-1 < 3x + 8 \leq 5$

پ) $0 \leq \frac{x+1}{5} < -2$

ت) $0 \leq \frac{x+1}{5} < -2$

حل نامعادلات کلی به کمک جدول تعیین علامت

ابتدا همه عبارت های جبری را در یک طرف نامساوی قرار می دهیم تا به یکی از شکل های $p < 0$ ، $p \leq 0$ ، $p > 0$ یا $p \geq 0$ برسیم.

با حل $p = 0$ ریشه های p را پیدا کرده و جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم. از روی سطر آخر، مجموعه جواب را با توجه به علامت نامعادله مشخص می کنیم.

نکته

نامعادله	انتخاب مجموعه جواب
$p < 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت منفی وجود دارد
$p \leq 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت منفی یا صفر وجود دارد
$p > 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت مثبت وجود دارد
$p \geq 0$	بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت مثبت یا صفر وجود دارد



نکته

در نامعادلات کسری، حواسمان به حذف ریشه‌های مخرج از بازه جواب باشد.

مثال ۲۹

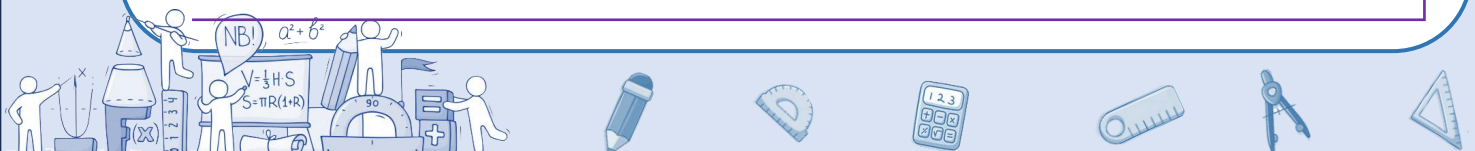
مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید و به صورت بازه نشان دهید.

ا) $x^2 - 3x + 2 > 0$

ب) $2x^2 + 4 \leq x^2 - 5x$

پ) $\frac{(2x+1)(x-3)}{(2-x)^2} < 0$

ت) $(x^2 - 3x + 4)(x^2 - 4) \leq 0$



ث) $x^2 \leq 4$

ج) $3x^2 - x - 2 \geq 0$

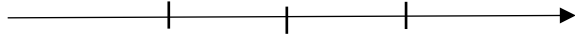
ج) $\frac{x^2 - 9}{2x + 1} \geq 0$

ج) $H = \frac{-x^2 + 6x - 9}{x^2 + x + 3}$

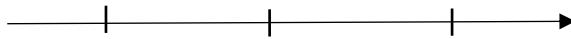


نامعادلات قدرمطلقى

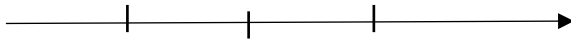
وقت می‌گوییم $|x| = 2$ ، منظور مقادیری از x است که فاصله آن‌ها تا مبدا برابر 2 است. پس $x = 2$ و $x = -2$.



بنابراین معنی $|x| \leq 3$ این است که مقادیری از x را بیابیم که فاصله آنها تا مبدا مختصات کوچکتر یا مساوی 3 باشد. یعنی $-3 \leq x \leq 3$.



همچنین $|x| \geq 2$ یعنی مقادیری از x که فاصله آنها تا مبدا مختصات بزرگتر یا مساوی 2 است. یعنی $x \leq -2$ یا $x \geq 2$.



اگر لایک عبارت جبری و a یک عدد حقیقی مثبت باشد:

توجه



۱) $|u| \leq a \Rightarrow -a \leq u \leq a$

۲) $|u| \geq a \Rightarrow u \leq -a \cup u \geq a$

نامعادلات قدرمطلقى زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید.

مثال ۳۰

ت) $|2x - 1| \geq 5$

ب) $|x - 4| < 1$

پ) $|2x + 3| \leq 4$



ت) $|2x| + 1 \geq 3$

ث) $\left| \frac{x}{3} + 1 \right| \leq \frac{2}{3}$

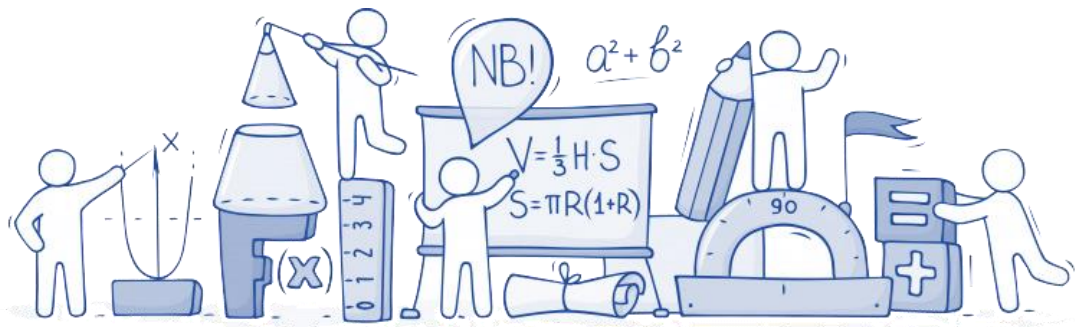
ج) $\left| \frac{x-1}{2} - 1 \right| \geq 4$

چ) $|x+3| \leq -1$

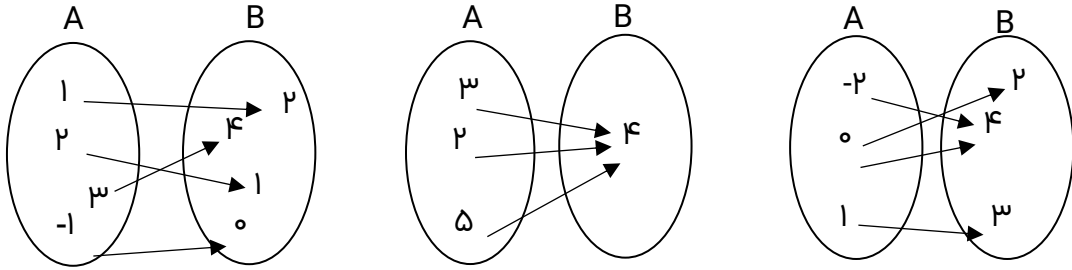


فصل پنجم

تابع



درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن



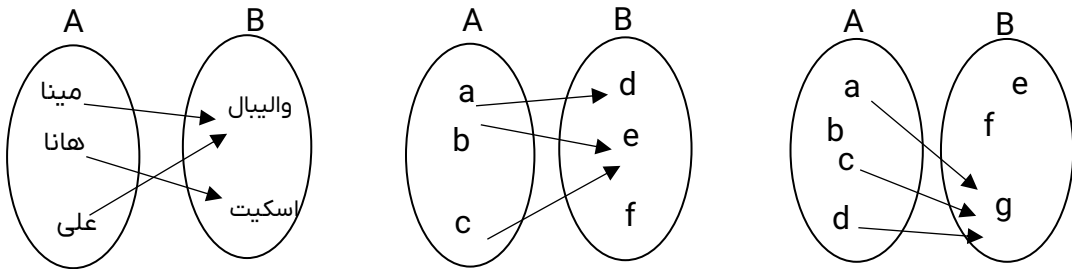
در نمودارهای پیکانی بالا، هر رابطه ای که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شده باشد، تابع است.

معرفی تابع

تابع رابطه ای بین دو مجموعه A و B است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می شود.

تعیین کنید هریک از نمودارهای پیکانی زیر تابع است یا نه.

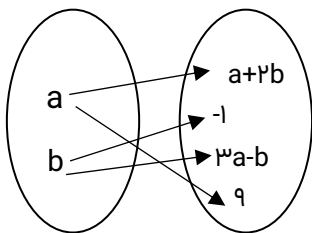
مثال ۱



۳۷

اگر نمودار مقابل یک تابع باشد، حاصل $\frac{2a+b}{3}$ کدام است؟

مثال ۲



۱ (۱)

۲ (۲)

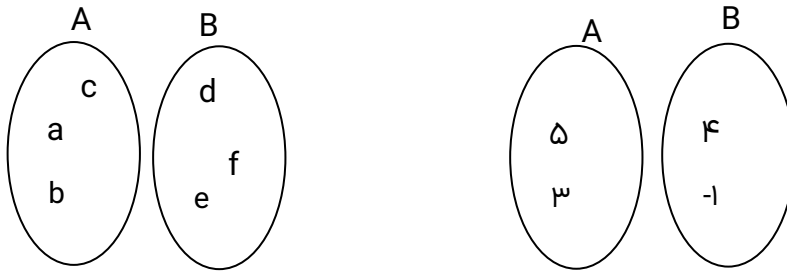
۳ (۳)

۴ (۴)



مثال ۳

از مجموعه A به B طوری نمودار پیکانی رسم کنید که f تابع باشد و g تابع نباشد.



نمایش تابع به صورت زوج مرتبی و نمودار مختصاتی



نکته

۱) در نمایش زوج مرتبی (a, b) به (b, a) متفاوت است.

۲) در زوج مرتبی (a, b) به a مولفه اول و به b مولفه دوم می‌گوییم.

۳) در زوج مرتبی (a, b) و (c, d) مساوی هستند اگر $a=c$ و $b=d$.

مثال ۴

هریک از زوج مرتب های زیر را به فرم نمودار پیکانی درآوردید و تعیین کنید تابع هستند یا نه.

الف) $R = \{(2, 5), (0, 1), (2, 9), (-1, 10)\}$

ب) $f = \{(1, 3), (5, 4), (-1, 3), (2, 1)\}$

تشخیص تابع از روی زوج مرتب

رابطه ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متفاوتی در آن دارای مولفه اول یکسان و مولفه های دوم متفاوت نباشند.

نکته اگر در تابعی، دو زوج مرتب مولفه های یکسان داشته باشند، لزوماً مولفه های دوم آنها نیز باید یکسان باشد.



کدامیک از مجموعه های زیر نشان دهنده یک تابع است؟



الف) $f = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 1)\}$

ب) $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 2), (4, 1)\}$

پ) $h = \{(-2, 3), (5, -2), (7, -4), (3, 1)\}$

ت) $k = \left\{ (2, 1), (3, 5), \left(2, \frac{4}{\sqrt{16}} \right) \right\}$

ث) رابطه ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد.

ج) رابطه ای که به هر عدد، ریشه های دوم آن را نسبت می دهد.

چ) رابطه ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

ح) رابطه ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.

خ) رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را نسبت می دهد.



(د) رابطه ای که به یک ضلع مربع، محیط آن را نسبت می دهد.

مثال ۶ اگر رابطه $R = \{(3, m^2), (2, 1), (-2, m), (m, 4), (3, m-2)\}$ تابع باشد، مقدار m

کدام است؟ (سراسری تجربی)

(۱) -۲

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) هیچ مقدار m

مثال ۷ اگر $R = \{(-2, 2), (1, x^2 + xy), (-2, x + y), (1, 2\lambda), (-3, 6)\}$ تابع باشد، مقدار

$x - y$ کدام است؟

(۱) ۱

(۲) -۱

(۳) ۲

(۴) -۲

مثال ۸ اگر رابطه زیر بیانگر یک تابع باشد، مقدار b کدام است؟

$$R = \left\{ (1, m^2 - n^2), (3, 4), \left(2, \frac{2b-1}{3}\right), (3, m-n), (1, 20), (m+n-3, 5) \right\}$$

(۱) ۸

(۲) $\frac{61}{7}$

(۳) $\frac{13}{2}$



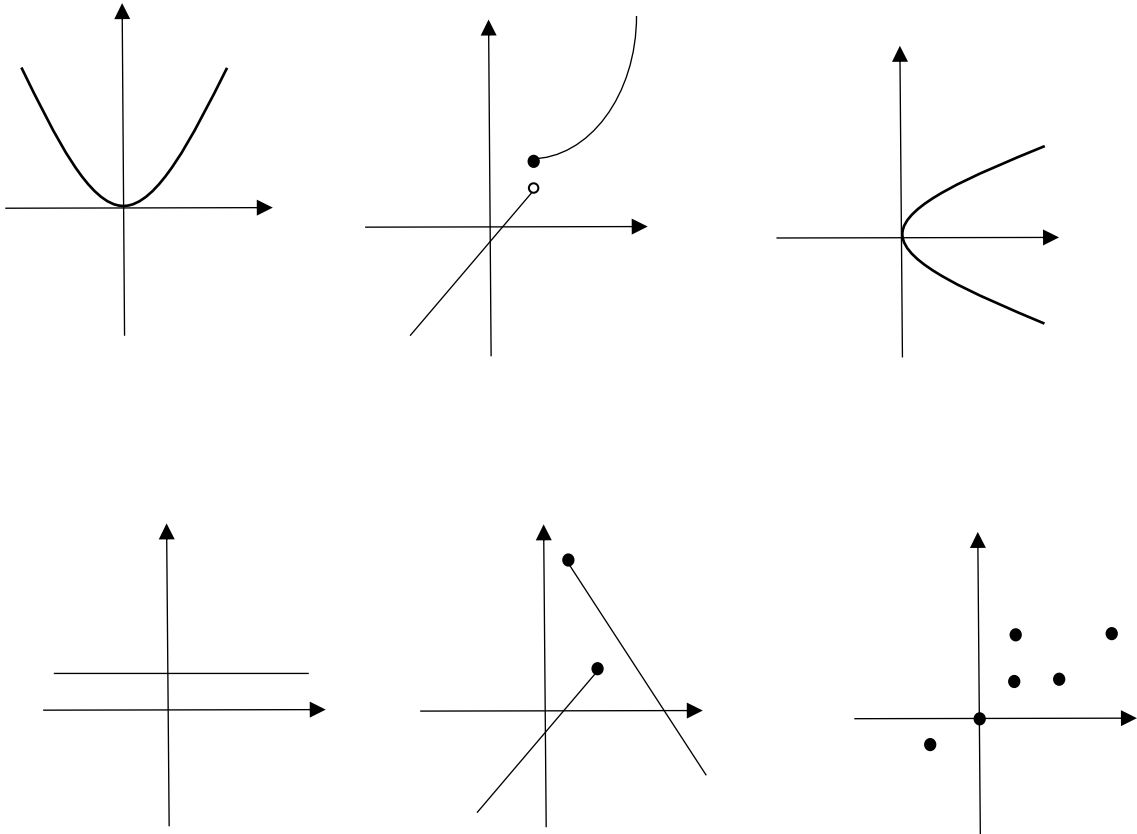
(۴) هر مقدار دلخواه

تشخیص تابع از روی نمودار مختصاتی

اگر هر خط عمودی موازی محور عرضها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نمودار، تابع است. در غیر اینصورت تابع نیست.

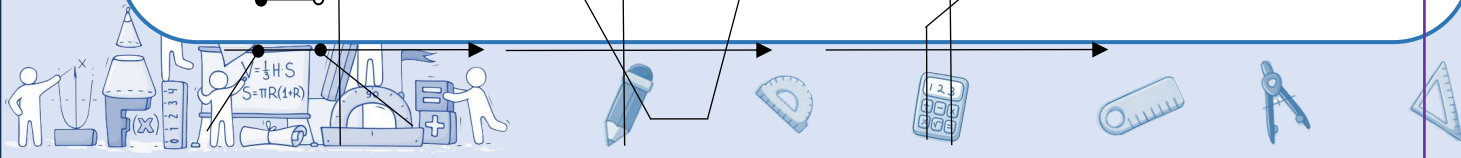
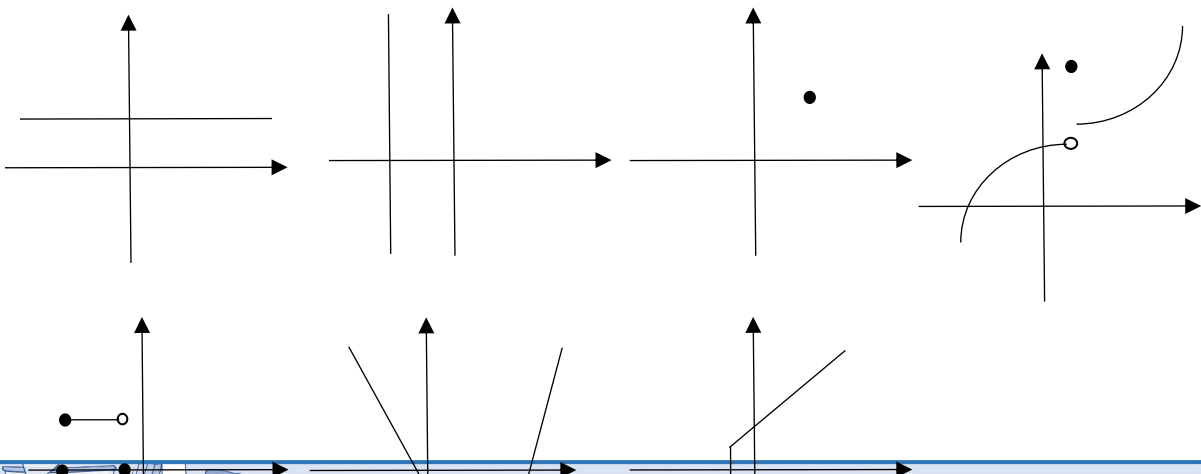
تعیین کنید هر نمودار نشان دهنده یک تابع هست یا نه.

مثال ۹



چند تا از نمودارهای زیر نمایش یک تابع هستند.

مثال ۱۰



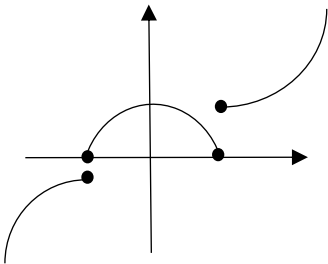
۱ (۱) ۲ (۲)

۳ (۳) ۴ (۴)

مثال ۱۱ نمودار زیر با حذف حداقل چند نقطه به یک تابع تبدیل می‌شود؟



۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)



درس دوم: دامنه و برد تابع

مجموعه همه مولفه های اول زوج مرتب های تشکیل دهنده یک تابع را "دامنه" تابع و مجموعه مولفه های دوم آن را "برد" تابع می نامیم.

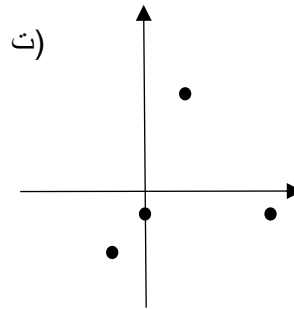
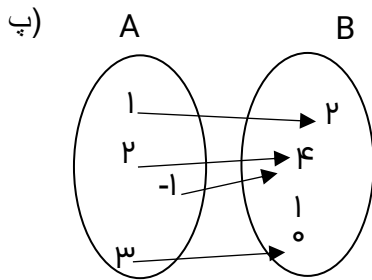
دامنه تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می دهیم.

دامنه و برد هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

مثال ۱۲

الف) $f = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3), (4, 1)\}$

ب) $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$



الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

مثال ۱۳

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

پ) در نمودار پلکانی، آیا همیشه برد f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید.

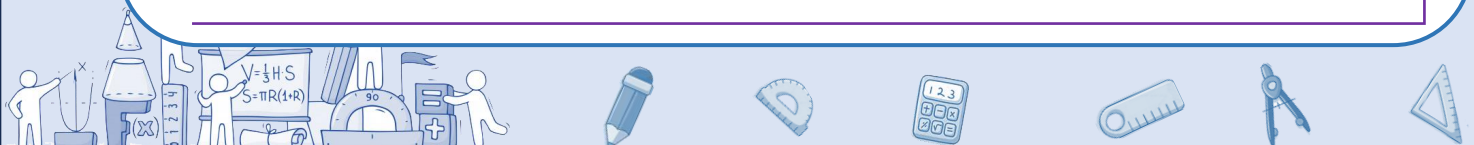
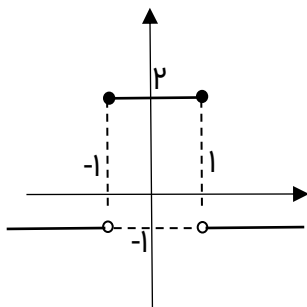
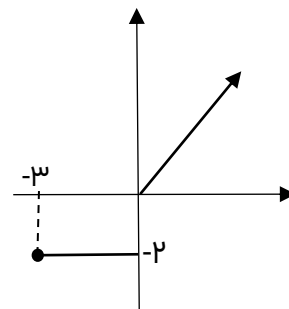
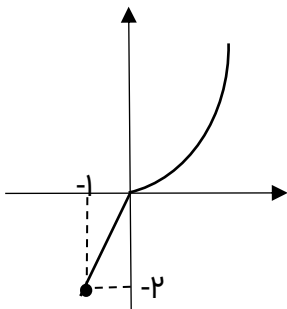
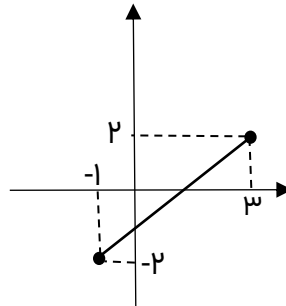
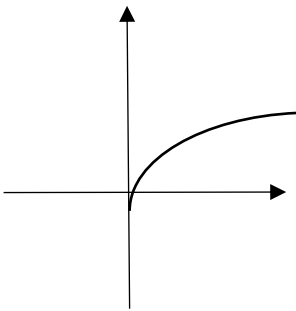
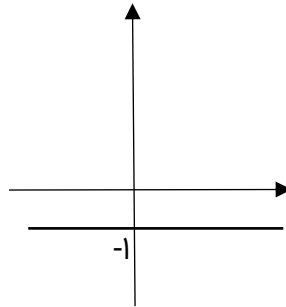
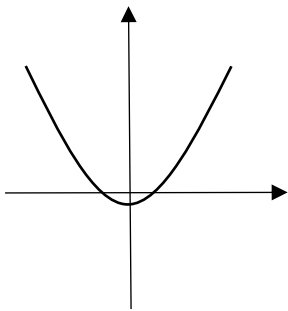


تشخیص دامنه و برد تابع از روی نمودار

دامنه، بخش‌هایی از محور طولهاست که توسط نمودار پوشانده می‌شود (تابع روی آن نمودار دارد).
 برد، بخش‌هایی از محور عرضهاست که توسط نمودار پوشانده می‌شود (تابع روی آن نمودار دارد).

دامنه و برد توابع زیر را از روی نمودار تعیین کنید.

مثال ۱۴



نمایش جبری تابع (ضابطه)

$f(x)$ نمادی از تابع f است که روی x عملیاتی انجام می‌دهد و خروجی آن y هایی است که در برد تابع قرار دارند.

مثلاً $f(x) = x + 2$ را در نظر بگیرید و جدول مربوط به f را برای دامنه $D = \{-1, 2, 3, 4\}$ بکشید و نمودار آن را رسم کنید.

مثال ۱۵

جدول زیر را کامل کنید و نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

تابع	$f(x) = -3x$	$g(x) = -3x$	$h(x) = -3x$	$k(x) = -3x$
دامنه	$\{-1, 0, 1, 2\}$	\mathbb{R}	$[-3, 2)$	مجموعه اعداد حقیقی نامثبت
برد				

مثال ۱۶

اگر تابعی با نمایش جبری $f(n) = n^2 + 1$ داشته باشیم و دامنه آن $A = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.



مثال ۱۷

اگر $f(x) = 2x - 1$ باشد، مقدار هریک از عبارت های زیر را بیابید.

$$f(2) =$$

$$f(-3) =$$

$$f(5) =$$

$$f(\sqrt{2}) =$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$f(a) =$$

$$f\left(\frac{2}{5}\right) =$$

$$f(0) =$$

مثال ۱۸

اگر $f(x) = \frac{x}{2} - 1$ و $g(x) = 3x + 2$ باشند، حاصل هریک از عبارت های زیر را بیابید.

$$f(-2)$$

$$g(3)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$g\left(\frac{1}{3}\right)$$

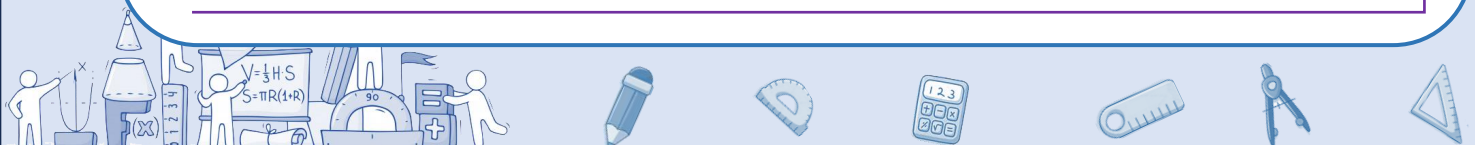
$$f(g(-2))$$

$$g(f(-2))$$

مثال ۱۹

اگر $g(0) = 1, g(1) = 2, g(2) = 4, g(3) = 8$ باشند، تابع $g(x)$ را به شکل مجموعه

ای از زوج های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

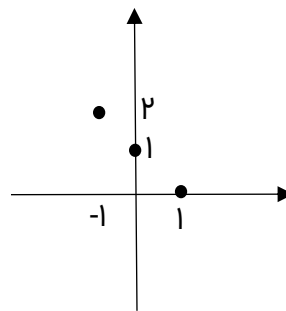
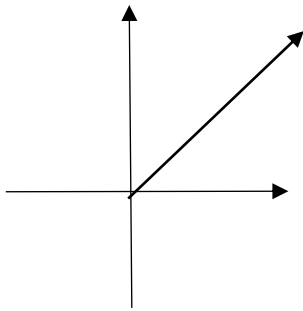


درس سوم: انواع تابع

◀▶▶ (۱) تابع خطی: هر تابعی که بتوان آن را به شکل $y = ax + b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود. در حالت کلی دامنه توابع خطی \mathbb{R} و برد آن نیز \mathbb{R} است.

کدامیک از توابع زیر خطی هستند؟ دامنه و برد آنها را تعیین کنید.

مثال ۲۰ 



$$f(x) = \frac{x+1}{2}$$

$$g(x) = (x+1)^2 - (x-1)^2$$

$$h(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$y = x$$

$$k = \{(3, 1), (4, 3), (5, 5), (6, 7)\}$$



مثال ۲۱ تابع خطی $f(x) = 1 - 3x$ را داریم. یکبار آن را با $D = \mathbb{N}$ و بار دیگر با $D = [-1, 1]$ در نظر بگیرید و برد تابع را در هر مورد بدست آورده و رسم کنید.

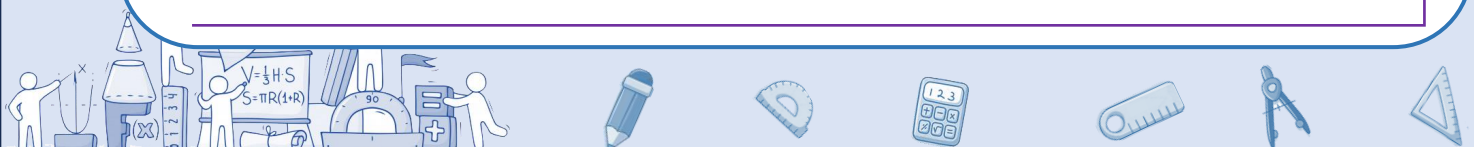
مثال ۲۲ جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

الف) تعداد تابع خطی وجود دارد که دامنه آن $[0, 2]$ و برد آن $[-2, 1]$ باشد.

ب) تعداد تابع خطی وجود دارد که دامنه آن $[-1, 3]$ باشد.

مثال ۲۳ الف) ضابطه تابع خطی $f(x)$ که از نقطه $(2, 11)$ میگذرد و $f(0) = 5$ است را بنویسید.

ب) مقدار $f(-1)$ را محاسبه کنید.

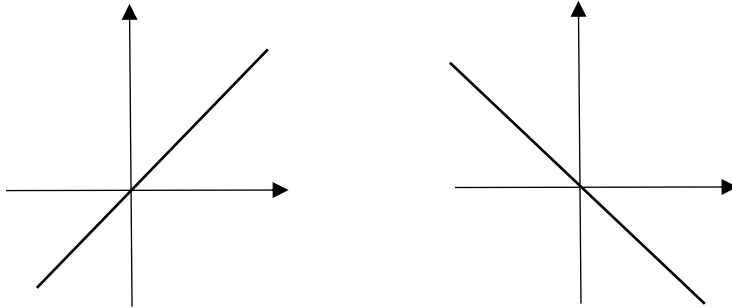


مهمترین توابع خطی، خطوط نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) و نیمساز ربع دوم و چهارم ($y = -x$) هستند.

نکته



۲) تابع همانی: به تابع $f(x) = x$ تابع همانی می‌گوییم که به هر x همان مقدار را نسبت می‌دهد.



اگر $f = \{(a+b, 1-a), (b, a-2)\}$ همانی باشد، ab کدام است؟

مثال ۲۴

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۲

۴) ۱

اگر تابع $f(x) = \frac{bx^2 + ax + c}{x+2}$ یک تابع همانی باشد، مقدار $\frac{a+c}{2b}$ کدام است؟

مثال ۲۵

۱) -۱

۲) ۱

۳) -۲

۴) ۲



◀▶▶ (۳) تابع ثابت: هر تابع با ضابطه $y = a$ که در آن a یک عدد حقیقی است را تابع ثابت می‌نامیم. دامنه توابع ثابت، \mathbb{R} و برد آن مجموعه تک عضوی $\{a\}$ است. نمودار این تابع، خطی افقی موازی محور x ها می‌باشد که از عدد a روی محور y ها می‌گذرد.

نمودار توابع ثابت $f(x) = 2$ و $g(x) = -1$ را رسم کنید و $f(5)$ و $g(-2)$ را بیابید.

مثال ۲۶ 

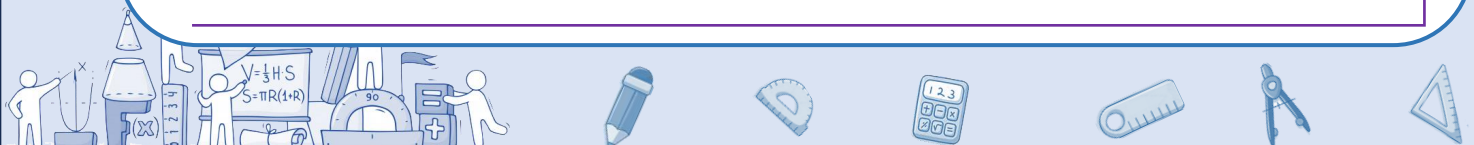
نمودار f یک خط راست موازی محور x هاست و $f(5) = 4$. اگر نمودار تابع g نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، آنگاه حاصل $2f(9) - g(8)$ را محاسبه کنید.

مثال ۲۷ 

اگر $f(x) = -2$ باشد، الف) مقادیر $f(-9)$ ، $f(7)$ ، $f(2)$ و $f(-\sqrt{3})$ را محاسبه کنید.

مثال ۲۸ 

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید و برد را بیابید.
پ) اگر دامنه آن بازه $[1, 3]$ باشد، نمودار آن را رسم کنید و برد را بیابید.



مثال ۲۹ اگر $f(x) = \frac{x^2 + (a-1)x + b}{2x^2 + 3x - 1}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $a + b$ کدام است؟

(۱) $\frac{1}{2}$

(۲) $-\frac{1}{2}$

(۳) $\frac{5}{2}$

(۴) ۲

مثال ۳۰ اگر f تابع ثابت و g تابع همانی باشد و داشته باشیم $\frac{2f(3)}{5g(-1)} = 1$ ، حاصل

$(f \times g)(2)$ کدام است؟

(۱) ۲

(۲) -۵

(۳) ۵

(۴) $-\frac{5}{2}$

۴) توابع چندجمله‌ای: توابعی که نمایش جبری آنها چندجمله‌ای‌های جبری از یک متغیر

است. مانند $f(x) = x^3 + x - 1$ و $g(x) = t^2 - \frac{1}{3}$ و $h(x) = 3x$.

توجه درجه هر چندجمله‌ای برابر با بزرگترین توان متغیر آن است.

دامنه توابع چندجمله‌ای همواره \mathbb{R} است.



مثال ۳۱

نمودار تابع چندجمله‌ای درجه دوم f ، محور y ‌ها را در نقطه‌ای به عرض 1 قطع می‌کند. اگر $f(1) = 2$ و $f(-1) = -4$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

- (۱)
- (۲)
- (۳)
- (۴)

۴) توابع چندضابطه‌ای (قطعه‌ای): تابع f به صورت زیر را که روی چند بازه متفاوت، ضابطه‌ای جداگانه تعریف شده است تابع چندضابطه‌ای می‌نامیم.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in D_1 \\ f_2(x) & x \in D_2 \\ \vdots & \vdots \\ f_n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

$$D_f = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$$

که در آن D_1 و D_2 و ... D_n بازه‌های دو به دو مجزا هستند (اشتراک ندارند)

$$R = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_n$$

مثال ۳۲

اگر $f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & x \leq 1 \\ \sqrt{x}+5 & x > 1 \end{cases}$ ، حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بیابید.

$$f(0) =$$

$$f(1) =$$

$$f(9) =$$

$$f(\sqrt{2}) =$$

$$f(-3) =$$



اگر $f(x) = \begin{cases} x-2 & x \geq 1 \\ 4x+a & x \leq 1 \end{cases}$ ضابطه یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

مثال ۳۳



۲ (۱)

۳ (۲)

-۲ (۳)

-۵ (۴)

نمودار تابع با ضابطه $f(x) = \begin{cases} 4-x^2 & x < 0 \\ x+4 & x \geq 0 \end{cases}$ از کدام ناحیه مختصاتی نمی‌گذرد؟

مثال ۳۴



اول (۱)

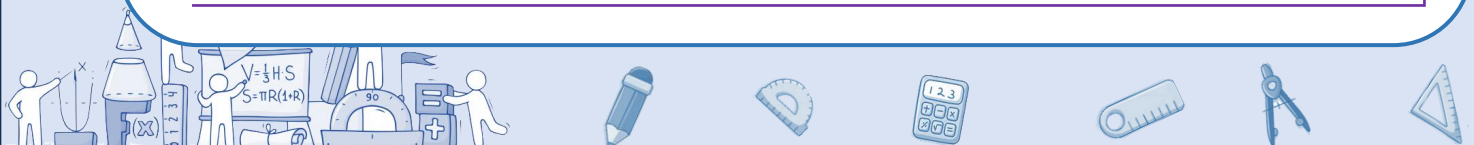
دوم (۲)

سوم (۳)

چهارم (۴)

نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} x^2-3 & x \leq 1 \\ 3 & 1 < x < 3 \\ x^2-2 & x \geq 3 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

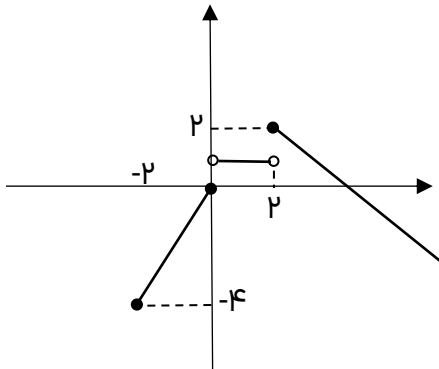
مثال ۳۵



مثال ۳۶

نمودار تابع قطعه ای f داده شده است. ضابطه آن را بنویسید و دامنه و برد آن را

مشخص کنید.



۴) **تابع قدرمطلق:** تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می کند.

تابع قدرمطلق را با $f(x) = |x|$ یا $y = x$ نشان می دهیم.

توجه دامنه تابع قدرمطلق \mathbb{R} و برد آن $[0, +\infty)$ است.

ضابطه تابع قدرمطلق را می توان به صورت دو ضابطه ای نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۳۷

نمودار تابع قدرمطلق را رسم کنید.



تابع چندضابطه‌ای $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq -3 \\ |x| & x < -3 \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست

مثال ۳۸



آورید.

رسم برخی توابع به کمک انتقال

فرض کنیم k عددی مثبت باشد و نمودار تابع f را داشته باشیم. در هریک از حالت‌های زیر می‌توانیم نمودار تابع را به کمک نمودار تابع f رسم کنیم:

۱) $y = f(x) + k$ نمودار تابع f به اندازه k واحد به بالا منتقل می‌شود

۲) $y = f(x) - k$ نمودار تابع f به اندازه k واحد به پایین منتقل می‌شود

۳) $y = f(x + k)$ نمودار تابع f به اندازه k واحد به چپ منتقل می‌شود

۴) $y = f(x - k)$ نمودار تابع f به اندازه k واحد به راست منتقل می‌شود

نمودار هریک از توابع زیر را به کمک انتقال سهمی $y = x^2$ رسم کنید.

مثال ۳۹



۱) $f(x) = x^2 - 1$

ب) $g(x) = (x + 1)^2$



پ) $h(x) = (x - 3)^2$

ت) $k(x) = x^2 + 2$

نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

مثال ۴۰ 

پ) $y = |x - 2|$

ب) $y = (x - 1)^2 + 3$

پ) $y = |x + 1| - 2$

ت) $y = (x + 1)^2 - 5$



ث) $y = |x| + 1$

◀◀◀ **قرینه کردن:** اگر نمودار تابع f را داشته باشیم:

نمودار تابع f نسبت به محور x ها قرینه می شود $-f(x)$

نمودار تابع f نسبت به محور y ها قرینه می شود $f(-x)$

نمودار هریک از توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

مثال ۴۱

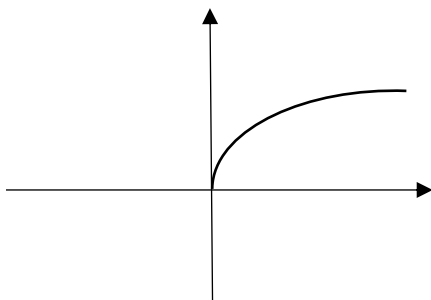
$f(x) = -(x+1)^2 + 3$

$g(x) = 3 - |x+1|$

نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ به صورت زیر است. نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

مثال ۴۲

۱) $y = \sqrt{x-1}$

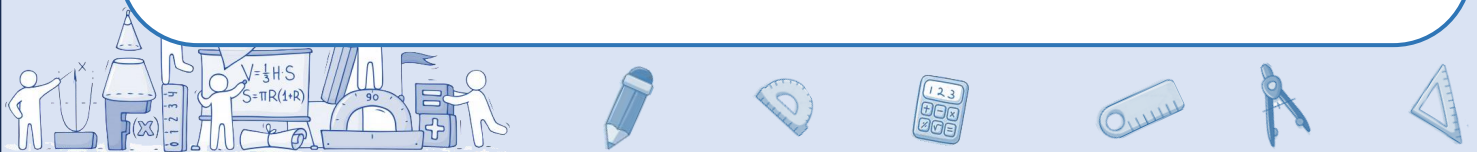


ب) $y = \sqrt{x} + 1$

پ) $y = -\sqrt{x}$

ت) $y = \sqrt{-x}$

ث) $y = -\sqrt{-x}$



درس اول: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

مثال ۱ اگر یک مربی فوتبال بخواهد از بین ۶ هافبک و ۸ مدافع یک تیم، یک نفر را به تیم ملی دعوت کند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است (چند انتخاب دارد)؟

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام این کار، $m+n$ روش وجود دارد.


مثال ۲ هانا برای رفتن به مدرسه، می تواند از ۳ خط اتوبوس، ۲ خط تاکسی و یا ۲ مسیر پیاده روش استفاده کند. او برای رفتن به مدرسه چند انتخاب دارد؟


تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب و ... در روش k ام، m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام این کار، $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ روش وجود دارد.

مثال ۳ هومان برای هدیه تولدش، می تواند ۳ نوع گوشی موبایل، ۲ نوع لپتاپ یا ۲ نوع پلی استیشن بخرد. او چند انتخاب برای هدیه تولدش دارد؟





◀▶▶ **اصل ضرب:** اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هر کدام از این m روش، مرحله دوم به n روش قابل انجام باشد، در کل کار مورد نظر را می‌توان با $m \times n$ روش انجام داد.

مثال ۴  مدرسه ای می‌خواهد دانش آموزان را برای اردو ابتدا به یک سینما از بین ۲ سینما و سپس یک موزه از بین ۳ موزه ببرد. به چند روش می‌تواند اردو را برگزار کند؟

مثال ۵  علی با داشتن ۴ پیراهن، ۳ کت و ۲ کفش، به چند طریق می‌تواند هر سه را با هم بپوشد؟

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله k ام، m_k روش وجود داشته باشد، کل این کار با $m_1 \times m_2 \times \dots \times m_k$ روش قابل انجام است.

مثال ۶  برای سفر از تهران به چالوس، ۲ مسیر از تهران تا کرج و ۴ مسیر از کرج تا چالوس وجود دارد. چند انتخاب برای سفر به چالوس با عبور از کرج وجود دارد؟

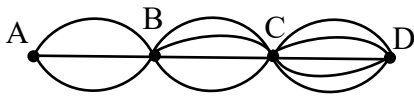
مثال ۷  در یک رستوران ۶ نوع پیش غذا، ۵ نوع غذا و ۲ نوع دسر وجود دارد. به چند روش می‌توان یک پیش غذا، یک نوع غذا و یک نوع دسر انتخاب کرد؟



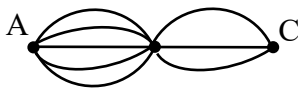
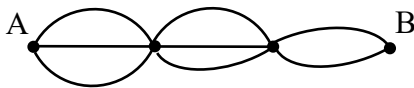
مثال ۸ میلاد می خواهد در یک آزمون با ۵ سوال ۴ گزینه ای شرکت کند. چند روش برای امتحان دادن وجود دارد؟ (لازم است به همه سوالات پاسخ داده شود)

مثال ۹ به چند طریق می توان به یک آزمون با ۳۰ سوال ۲ گزینه ای پاسخ داد؟ (لازم است به همه سوالات پاسخ داده شود)

مثال ۱۰ برای رفتن از شهر A به شهر B سه مسیر، برای رفتن از B به C چهار مسیر و برای رفتن از C به D پنج مسیر مطابق شکل وجود دارد. به چند طریق می توان از A به D رفت و برگشت به طوری که از هر جاده حداکثر یک بار عبور کنیم.



مثال ۱۱ خانواده ای می خواهد برای تعطیلات به مسافرت برود. او می تواند مقصد B یا C را انتخاب کند. برای هر مقصد مطابق شکل زیر جهت عبور از شهرهای بین راهی تعدادی مسیر وجود دارد. او به چند طریق می تواند مسیری برای سفر خود انتخاب کند؟



مثال ۱۲ به چند طریق می‌توان رمزی سه حرفی با استفاده از حروف فارسی و انگلیسی ساخت که حروف هم زبان کنار هم نباشند؟

مثال ۱۳ به چند طریق می‌توان با ارقام $\{1, 4, 5\}$ یک عدد سه رقمی ساخت؟

مثال ۱۴ به چند طریق می‌توان با ارقام $\{2, 3, 7\}$ یک عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام ساخت؟

مثال ۱۵ با ارقام $\{1, 2, 3, 4, 5, 0\}$ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت به طوری که : (ارقام تکراری نباشند)

الف) هیچ شرط خاصی برای ارقام نداشته باشیم.

ب) فرد باشد.

پ) زوج باشد.

ت) مضرب ۵ باشد.

ث) بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد.

ج) بزرگتر از ۳۰۰۰ و کوچکتر از ۵۰۰۰ باشد.



مثال ۱۶ با ارقام $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ چند عدد سه رقمی با رقم‌های متمایز می‌توان نوشت که الف) زوج باشد.

ب) بزرگتر از ۲۴۰ باشد.

مثال ۱۷ یک آزمون چند گزینه‌ای شامل ۱۰ سوال چهارگزینه‌ای و ۵ سوال دو گزینه‌ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به صورت تصادفی به سوالات پاسخ دهد. او به چند روش می‌تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) بخواهد به همه سوالات پاسخ دهد.

ب) امکان پاسخ ندادن به سوالات نیز وجود داشته باشد.

مثال ۱۸ با حروف کلمه "computer" چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که حرف اول آن بی صدا باشد؟

(۱) ۴۲۰۰

(۲) ۳۸۰۰

(۳) ۲۴۰۰

(۴) ۱۲۰۰

مثال ۱۹ تعداد کلمات چهارحرفی که با حروف کلمه "پرستیژ" می‌توان ساخت به طوری که حرف اول نقطه دار بوده و حرف آخر نقطه دار نباشد کدام است؟

(۱) ۴۱۲

(۲) ۳۲۴

(۳) ۲۸۸

(۴) ۴۳۲



معرفی نماد فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از n تا 1 را با $n!$ نشان می‌دهیم و n -فاکتوریل می‌خوانیم.

$$1! = 1$$

$$2! = 2 \times 1$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$0! = 1$$

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots \times 3 \times 2 \times 1$$

مثال ۲۰ محاسبه کنید.

$$5! =$$

$$4! =$$

$$n! = n(n-1)!$$

نکته

مثلاً: $4! = 4 \times \underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3!} = 4 \times 3!$ همچنین می‌توان نوشت: $4! = 4 \times 3 \times 2!$

از این نکته برای ساده کردن کسرهای شامل فاکتوریل استفاده می‌کنیم.
کسرهای زیر را ساده کنید.

مثال ۲۱

الف) $\frac{8!}{3!}$

ب) $\frac{7!}{5!}$

پ) $\frac{6!}{2! 3!}$

ت) $\frac{(n+1)!}{n!}$

ث) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$

ج) $\frac{n!}{(n-4)!}$

چ) $\frac{n!}{(n-k)!}$

به کمک فاکتوریل بنویسید.

مثال ۲۲

الف) $9 \times 8 = \frac{9!}{7!}$

ب) $9 \times 8 \times 7 \times 6 =$

پ) $8 =$

ت) $n(n-1) =$

ث) $11 \times 10 \times 9 =$

ج) $n(n-1)(n-2)(n-3) =$



درس دوم: جایگشت

جایگشت (permutation): قرار گرفتن تعدادی شیء کنار هم.

تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر است با $n!$.

مثال ۲۳ تعداد جایگشت های حروف کلمه "اردبیهشت" را بدست آورید.

توجه در جایگشت، ترتیب قرار گرفتن اشیاء یا افراد کنار هم مهم است. بنابراین در حروف، کلمات و اعداد و ارقام از جایگشت استفاده می‌کنیم.

مثال ۲۴ الف) ۱۰ نفر به چند طریق می‌توانند برای گرفتن بلیط یک فیلم در صف بایستند؟

ب) تعداد جایگشت های حروف کلمه "دریا" را بدست آورید.

مثال ۲۵ به چند طریق ۷ نفر می‌توانند دور یک میز گرد برای برگزاری یک سمینار بنشینند؟

نکته تعداد حالت های قرار گرفتن n شیء به صورت دایره ای کنار هم $(n-1)!$ است.

مثال ۲۶ ۵ نفر به چند حالت می‌توانند به صورت دایره ای بایستند؟



مثال ۲۷

۵ دوست که دو تای آنها خواهر هستند، می خواهند برای گرفتن عکس کنار هم بایستند. به چند طریق می توان این کار را انجام داد اگر:
الف) دو خواهر کنار هم بایستند.

ب) دو خواهر اول و آخر ردیف بایستند.

مثال ۲۸

حروف کلمه "PANAMA" را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد به طوری که هر سه حرف A مجاور باشند؟ (گزینه دو-۹۳)

(۱) ۳!

(۲) ۳! ۳!

(۳) ۴!

(۴) ۴! ۳!

مثال ۲۹

با حروف کلمه "computer" چند کلمه ۸ حرفی با حروف متمایز می توان ساخت که با حرف m شروع شود و سه حرف r و e و t کنار هم بگیرند؟ (کاج ۹۶)

(۱) ۵!

(۲) ۶!

(۳) ۶! ۳!

(۴) ۷!



$$p(n, n) = n!$$

$$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{1} = n!$$

$$p(n, n-1) = n!$$

$$\frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1} = n!$$

نکته

جایگشت با تکرار: اگر n شیء داشته باشیم که k_1 تا از آنها از یک نوع، k_p تا از آنها از یک نوع

و ... k_r تا از آنها از یک نوع باشند، تعداد جایگشت های این n شیء برابر است با $\frac{n!}{k_1! k_p! \dots k_r!}$

تعداد جایگشت های حروف کلمه "شهریور" را بیابید.

مثال ۳۴

$$\frac{9!}{2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = 360$$

شده یکی و ۱
از دو بار تکرار شده

چند عدد شش رقمی با ارقام ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۱ می توان نوشت؟

مثال ۳۵

$$\frac{6!}{2! \times 2! \times 3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 90$$

۲ برای ۳
۲ برای ۲

گردشگر به چند روش می توانند در سه چادر ۲ و ۳ و ۴ نفره استراحت کنند؟

مثال ۳۶

$$\frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1260$$

۱۲ دانش آموز شرکت کننده در یک اردو را به چند طریق می توان در اتاق های ۵ و ۳ و ۴ نفره یک هتل جای داد؟

مثال ۳۷

$$\frac{12!}{4! \cdot 3! \cdot 5!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1} = 11 \times 28 \times 90$$



درس سوم: ترکیب

ترکیب (combination): در انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز وقتی ترتیب قرار گرفتن

اشیاء کنار هم اهمیتی نداشته باشد:

$$c(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \quad 0 \leq r \leq n$$

به چند طریق می‌توان از بین ۷ شاخه گل مختلف، ۳ شاخه گل انتخاب کرد؟

مثال ۳۸

ترتیب اهمیت ندارد \leftarrow ترکیب

$$C(7, 3) = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!(7-3)!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$$

به چند طریق می‌توان از بین ۱۲ نفر حاضر هر یک کلاس، ۵ نفر را برای بردن به اردو

مثال ۳۹

انتخاب کرد؟

ترتیب این ۵ نفر اهمیت ندارد \leftarrow ترکیب

$$\binom{12}{5} = \frac{12!}{5! \times 7!} = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 7!} = \frac{72 \times 11}{1} = 792$$

به چند طریق می‌توان از بین ۶ کتاب مختلف، ۴ کتاب انتخاب کرد به طوری که:

مثال ۴۰

الف) بخواهیم در یک قفسه کنار هم بچینیم. \leftarrow ترتیب

ترتیب مهم است

$$P(6, 4) = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 360$$

ب) برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم. \leftarrow ترکیب

ترتیب اهمیت ندارد \leftarrow ترکیب

$$C(6, 4) = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4! \times 2 \times 1} = 15$$



مثال ۴۱

در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

$$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \times 5!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5!}{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5!} = 18 \times 7 = 126$$

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟ دو ایرانی و یک روسی و یک ژاپنی

$$\binom{4}{1} \times \binom{3}{1} \times \binom{2}{1} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

$$\frac{4!}{1! \times 3!} = \frac{4 \times 3!}{1 \times 3!} = 4$$

$\binom{n}{1} = n$

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقاً ۲ داور ایرانی داشته باشد؟

۴ ایرانی
۳ ژاپنی
۲ روسی

$$\binom{4}{2} \binom{5}{3} = \frac{4 \times 3 \times 2}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 6 \times 10 = 60$$

۲ داور ایرانی
۳ داور غیر ایرانی

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

۳ ایرانی یا ۲ ایرانی یا ۱ ایرانی

$$\binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} + \binom{4}{1} \binom{5}{4} = 4 \times 10 + 1 \times 5 = 40 + 5 = 45$$

ت) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

$$\binom{4}{3} \times \binom{3}{2} \times \binom{2}{2} = 4 \times 3 \times 1 = 12$$

ایرانی ژاپنی روسی

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

۱ یا ۲ یا ۳ یا ۴

۱ ایرانی، ۲ ژاپنی، ۲ روسی یا ۲ ایرانی، ۳ ژاپنی، ۱ روسی یا ۱ ایرانی، ۳ ژاپنی، ۱ روسی یا ۱ ایرانی، ۲ ژاپنی، ۲ روسی

$$= \binom{4}{1} \binom{5}{4} + \binom{4}{2} \binom{5}{3} + \binom{4}{3} \binom{5}{2} + \binom{4}{4} \binom{5}{1} = 4 \times 5 + 6 \times 10 + 4 \times 10 + 1 \times 5 = 20 + 60 + 40 + 5 = 125$$

مثال ۴۲ از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

$$\binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{5}{2} = 28 \times 15 \times 10 = 4200$$

$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$
 $\binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2 \times 6!} = 28$
 $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = 15$

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند.

$$\binom{8}{1} \binom{6}{1} \binom{5}{1} = 8 \times 6 \times 5 = 240$$

پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

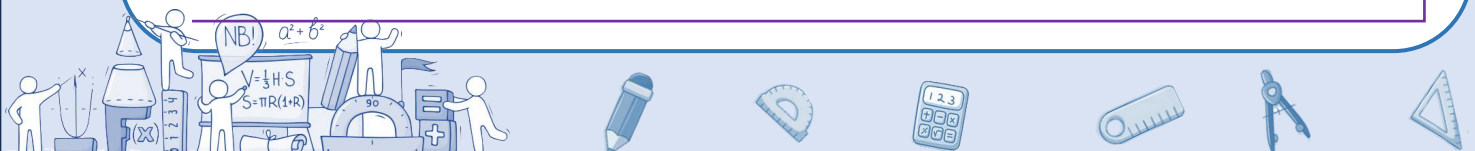
$$\binom{8}{1} \binom{11}{1} + \binom{8}{2} \binom{11}{0} = 88 + 28 = 116$$

$\binom{n}{0} = 1$
 $\binom{11}{0} = \frac{11!}{0! \times 11!} = 1$

مثال ۴۳ روی محیط یک دایره هفت نقطه وجود دارد.

الف) چند وتر روی دایره می توان با این نقاط رسم کرد؟

ب) چند مثلث می توان با این نقاط رسم کرد؟



مثال ۴۴

تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی از یک مجموعه ۵ عضوی را بیابید.

مثال ۴۵

در کیسه ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز داریم. ۳ مهره به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است تعداد حالت‌هایی که:

الف) هر سه مهره سفید باشند.

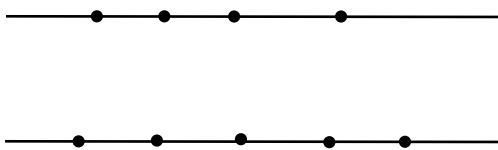
ب) هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

پ) مهره‌ها از سه رنگ متفاوت باشند.

ت) فقط یکی از مهره‌ها سفید باشد.

مثال ۴۶

از بین نقاط زیر به چند طریق می‌توان ۳ نقطه انتخاب کرد و مثلث تشکیل داد:



چند ویژگی مهم ترکیب

$$۱) \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$۲) \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

$$۳) \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

$$۴) \binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}$$

قانون پاسکال

$$۵) \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی

به کمک ویژگی های بالا محاسبه کنید.

مثال ۴۷

$$\binom{7}{0} =$$

$$\binom{7}{6} =$$

$$\binom{7}{1} =$$

$$\binom{5}{5} =$$

$$\binom{5}{2} =$$

$$\binom{5}{3} =$$

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} =$$

$$\binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{7}{4} =$$

$$\binom{10}{0} + \binom{10}{1} + \dots + \binom{10}{10} =$$

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{6}{5} =$$



مثال ۴۸ الف) اگر $p(n, 2) = 20$ باشد، حاصل $(n-3)!$ را بیابید.

ب) اگر $p(n, k) = 6c(9, k)$ باشد، مقدار k را بیابید.

مثال ۴۹ در هر یک از معادلات زیر مقدار n را بیابید.

الف) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$

ب) $\binom{n+1}{n-1} = 21$



مثال ۵۰ گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف به چند طریق می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف موجود باشد؟ (سراسری تجربی ۹۸)

(۱) ۱۲۶

(۲) ۱۴۰

(۳) ۱۵۴

(۴) ۱۶۸

مثال ۵۱ از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنها ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که هیچ دو نفر انتخاب شده، از یک مدرسه نیاشند؟ (تجربی خارج ۹۸)

(۱) ۱۳۵

(۲) ۲۷۰

(۳) ۳۲۰

(۴) ۶۴۰

مثال ۵۲ به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب دریافت کنند؟ (تجربی خارج ۹۹)

(۱) ۱۰۵

(۲) ۱۲۵

(۳) ۱۳۵

(۴) ۱۵۰

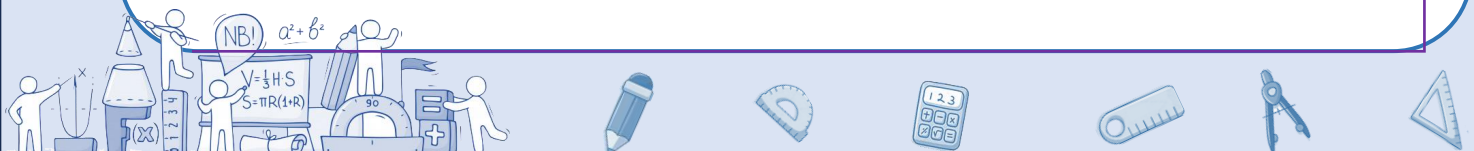
مثال ۵۳ به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که ۲ نفر آنها نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟ (سراسری تجربی ۹۹)

(۱) ۸۴

(۲) ۸۷

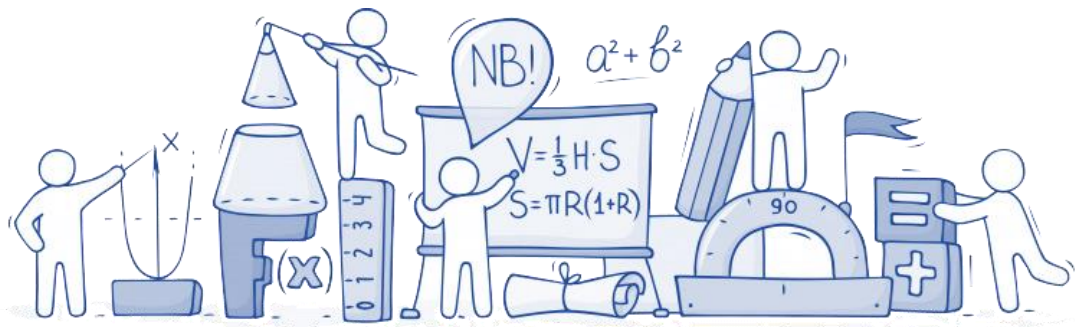
(۳) ۹۱

(۴) ۹۵



فصل هفتم

آمار و احتمال



پیشامد: هر زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای را یک پیشامد تصادفی می نامیم.

مثال ۲ در پرتاب دو تاس با هم پیشامدهای خواسته شده زیر را بنویسید.

(الف) مجموع تعداد رو شده در دو تاس ۶ باشد.

(ب) اعداد رو شده یکسان باشند.

(پ) اعداد رو شده زوج باشند.

(ت) اعداد رو شده اول باشند.

(ث) مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۱ باشد.

مثال ۳ در پرتاب دو تاس پیشامد آنکه حداقل یک بار "رو" بیاید را بنویسید.



مثال ۴

خانواده ای دارای ۴ فرزند است. تعداد عضوهای فضای نمونه را مشخص کنید و پیشامد آن که فرزندان یک در میان دختر . پسر باشند را بنویسید.

مثال ۵

در کیسه ای ۳ مهره زرد و ۲ مهره بنفش وجود دارد. ۳ مهره از داخل آن بیرون می آوریم. فضای نمونه چند عضو دارد؟
پیشامد آنکه مهره ها هم‌رنگ باشند چند عضو دارد؟

مثال ۶

در پرتاب یک تاس و یک سکه با هم پیشامدهای زیر را بنویسید.


الف) تاس عدد زوج و سکه پشت بیاید.


ب) تاس عدد زوج یا سکه پشت بیاید.



◀◀ **احتمال رخ دادن یک پیشامد:** اگر S فضای نمونه و A پیشامدی از آن باشد، احتمال وقوع پیشامد A از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$p(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

توجه  از آنجایی که $A \subseteq S$ است، پس $0 \leq n(A) \leq n(S)$ و در نتیجه: $0 \leq p(A) \leq 1$.

مثال ۷  خانواده ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه آن را بنویسید و سپس احتمالات زیر را به دست آورید.

(الف) فرزند اول دختر باشد.

(ب) فرزندان یک در میان دختر و پسر باشند.

(پ) دقیقا دو فرزند پسر باشند.

(ت) حداقل دو فرزند پسر باشند.

(ث) حداکثر یک فرزند دختر باشد.



مثال ۸

در پرتاب دو تاس با هم احتمال اینکه الف) مجموع اعداد رو شده ۱۲ باشد را به دست آورید.

ب) حاصل ضرب اعداد رو شده حداکثر ۳۶ باشد را بیابید.

مثال ۹

با ارقام ۲ و ۳ و ۵ اعداد سه رقمی متمایز نوشته ایم و یکی را به تصادف انتخاب کرده ایم. احتمال اینکه عدد انتخابی مضرب ۵ باشد چقدر است؟

مثال ۱۰

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $A \subseteq B$ ، ثابت کنید $p(A) \leq p(B)$.

مثال ۱۱

در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آنها جهت آزمایش انتخاب شود، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟

مثال ۱۲

در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره های خارج شده هم‌رنگ هستند؟ (سراسری تجربی ۹۲)

$$\frac{1}{6} \quad (1) \quad \frac{3}{14} \quad (2)$$

$$\frac{2}{9} \quad (3) \quad \frac{5}{14} \quad (4)$$



عملیات روش پیشامدها و احتمالات آنها

(۱) اجتماع دو پیشامد A و B: حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهند:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$$

(۲) اشتراک دو پیشامد A و B: هر دو پیشامد A و B با هم رخ دهند.

پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای A و B را ناسازگار گوئیم اگر هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند:

$$A \cap B = \phi$$

$$\Rightarrow p(A \cap B) = 0 \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

برای مثال، در پرتاب یک تاس، دو پیشامد "زوج بودن عدد رو شده" و "فرد بودن عدد رو شده" ناسازگارند.


پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گوئیم اگر رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تاثیری نداشته باشد، در این صورت داریم:

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

برای مثال، پیشامدهای "قبولی رها در امتحان ریاضی ۱" و "قبولی یاسمن در امتحان ریاضی ۱" دو پیشامد مستقل هستند.

$$p(A') = 1 - p(A)$$


(۳) متمم یک پیشامد: پیشامد A رخ ندهد:

مثال ۱۳  نشان دهید اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه A و B و A' و B' دو به دو نسبت به هم مستقل هستند.



(۴) تفاضل دو مجموعه: پیشامد $A - B$ یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد:

$$p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$$


مثال ۱۴  در گروه زنان ساکن در روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنها مهارت قالی بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰)


(۱) ۰/۷


(۲) ۰/۷۵

(۳) ۰/۸

(۴) ۰/۸۵

مثال ۱۵  ۳۰ درصد افراد جامعه ای گروه خونی A و ۲۰ درصدشان گروه خونی B دارند. اگر فردی به نصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی گروه خونی A یا B دارد؟

مثال ۱۶  اگر $p(A) = \frac{1}{4}$ ، $p(B) = \frac{2}{3}$ و $p(A \cap B) = \frac{1}{12}$ باشد، حاصل $p(A \cup B)$ را بیابید.

مثال ۱۷  اگر $p(A') = \frac{3}{5}$ و $p(B) = \frac{1}{5}$ و A و B ناسازگار باشند، $p(A \cup B)$ را بیابید.



مثال ۱۸ اگر $p(A \cup B) = \frac{5}{12}$ ، $p(A') = \frac{2}{3}$ و $p(B) = \frac{1}{4}$ باشد، $p(A \cap B)$ را بدست آورید.

مثال ۱۹ اگر $p(A) = \frac{1}{6}$ ، $p(B) = \frac{1}{7}$ و $p(A \cap B) = \frac{1}{2}$ باشند، آنگاه $p(A' \cap B)$ را بیابید.

مثال ۲۰ از جعبه ای حاوی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه متوالی و بدون جایگذاری، ۳ مهره خارج می‌کنیم. با کدام احتمال مهره های اول و سوم هم‌رنگ هستند؟ (گزینه دو ۹۱)

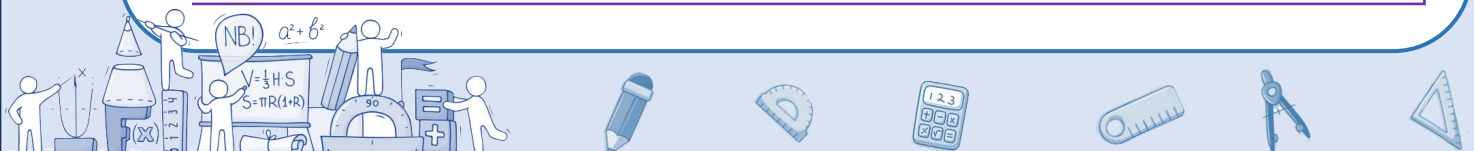
$$\frac{3}{7} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$\frac{4}{7} \quad (2)$$

$$\frac{12}{29} \quad (4)$$

مثال ۲۱ در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره بیرون می‌آوریم. با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می‌شود؟ (سراسری)



مثال ۲۲ ۵ کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده اند. با کدام احتمال کتاب های هم زبان، کنار هم قرار می گیرند؟ (سراسری تجربی ۹۹)

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{14} & (1) \\ \frac{1}{21} & (2) \\ \frac{1}{28} & (3) \\ \frac{1}{56} & (4) \end{array}$$

مثال ۲۳ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آن ها در کنار هم نیستند؟ (تجربی خارج ۹۹)

$$\begin{array}{ll} \frac{2}{3} & (1) \\ \frac{3}{4} & (2) \\ \frac{4}{5} & (3) \\ \frac{9}{10} & (4) \end{array}$$

مثال ۲۴ در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون دیدن خارج می کنیم. سپس از بین بقیه مهره ها ۲ مهره بیرون می کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر، سفید هستند؟ (سراسری تجربی ۹۸)

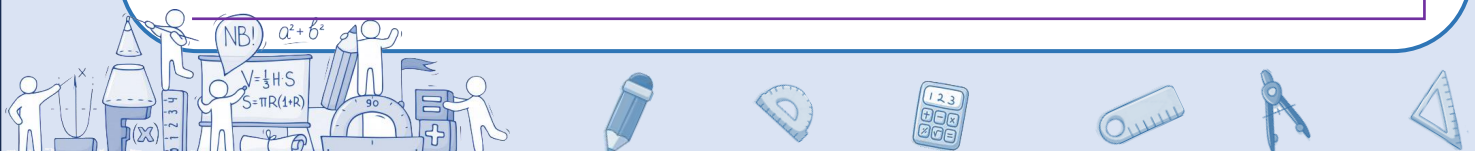
$$\begin{array}{ll} \frac{1}{11} & (1) \\ \frac{2}{11} & (2) \\ \frac{4}{11} & (3) \\ \frac{5}{22} & (4) \end{array}$$

مثال ۲۵ ظرف A شامل ۵ مهره با شماره های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال حاصل ضرب آن ها از ۱۰ بیشتر است؟ (سراسری ریاضی)

$$\begin{array}{ll} ۰/۶ & (1) \\ ۰/۷ & (2) \\ ۰/۶۵ & (3) \\ ۰/۷۵ & (4) \end{array}$$

مثال ۲۶ دو تاس را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال اعداد ظاهر شده متوالی و برابر نیستند؟ (سراسری تجربی ۰۳)

$$\begin{array}{ll} \frac{5}{12} & (1) \\ \frac{5}{9} & (2) \\ \frac{2}{3} & (3) \\ \frac{1}{6} & (4) \end{array}$$



درس دوم: مقدمه ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش هایی است که شامل جمع آوری اعداد و ارقام، سازماندهی و نمایش و تحلیل و تفسیر داده ها و در نهایت نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی است.



جامعه یا جمعیت: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن ها تحقیق صورت می گیرد. به هر یک از افراد یا اشیاء عضو جامعه می گویند.

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند.

نمونه: بخشی از یک جامعه که برای مطالعه انتخاب می شود را نمونه گوئیم. هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده را عضو نمونه گوئیم.

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند.

سرشماری: اگر همه افراد یک جامعه را مورد بررسی و تحقیق قرار دهیم، سرشماری کرده ایم.

مثال ۲۷ می خواهیم در مورد کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید.

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه



کدام جمله درست و کدام نادرست است؟

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.

ب) اعضای نمونه همان اعضای جامعه اند.

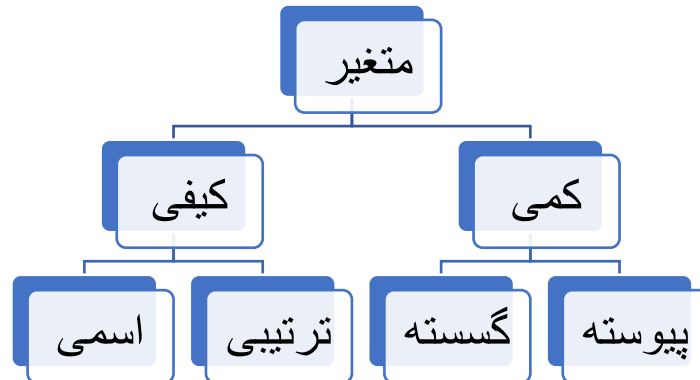
پ) نمونه، زیر مجموعه ای از جامعه است.

درس سوم: متغیر و انواع آن

متغیر: یک ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می شود و معمولا از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند.

مقداری که یک متغیر به خود اختصاص می دهد، مقدار متغیر است.

انواع متغیر:



متغیر کمی: متغیری که قابل اندازه گیری است.

- **کمی پیوسته:** بین هر دو مقدار می تواند مقدار دیگری نیز بگیرد.
- **گسسته:** بین هر دو مقدار نمی تواند مقدار دیگری بگیرد.

متغیر کیفی: متغیری که قابل اندازه گیری نیست.

- **ترتیبی:** نوعی ترتیب طبیعی در آن وجود دارد.
- **اسمی:** هیچ ترتیب ذاتی در آن وجود ندارد.



نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید. (کمی (گسسته - پیوسته)، کیفی (ترتیبی - اسمی))

- الف) سن کارمندان یک بخش شرکت
- ب) مراحل رشد یک انسان (کودک- نونهال- نوجوان- جوان- میانسال- کهن سال)
- پ) رنگ پوست افراد (سفید- زرد- سیاه)
- ت) رنگ موی افراد (مشکی- قهوه ای- بلوند)
- ث) کیفیت هلوی یک باغ (درجه ۱- درجه ۲- درجه ۳)
- ج) میزان بارندگی در یک شهر بر حسب سانتی متر
- چ) انواع بارندگی (برف- باران)
- ح) تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند
- خ) گروه خونی افراد یک خانواده
- د) انواع وضعیت هوا (آفتابی- ابری- بارانی- برفی)
- ذ) شدت بارندگی (کم- متوسط- زیاد)
- ر) سن دانش آموزان یک کلاس
- ز) نمره ریاضی پایه دهم در یک مدرسه
- س) قد و وزن دانشجویان یک دانشکده
- ش) رنگ ماشین های یک نمایشگاه اتومبیل
- ص) جنسیت کارمندان یک اداره
- ض) مدرک تحصیلی یک فرد در طول زندگی (دیپلم- لیسانس- فوق لیسانس- دکترا)
- ط) فشار هوا در قله کوه
- ظ) مدت مکالمه تلفنی در یک روز در یک مرکز مشاوره

