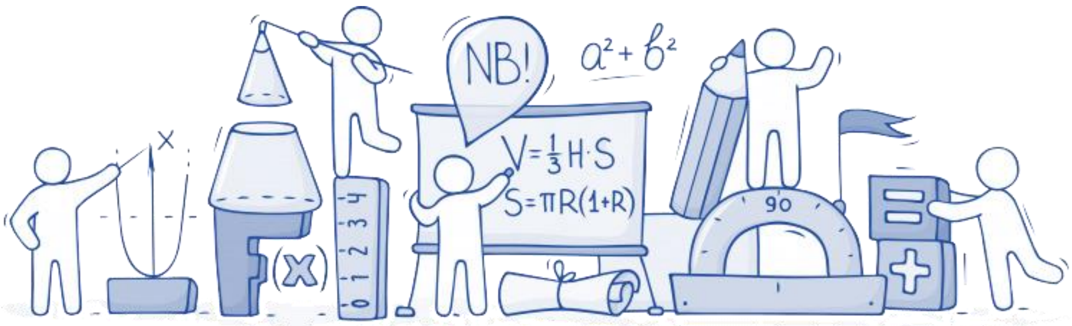
فصل چهارم

معادله ها و نامعادله



درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن

معادله درجه دوم

هر معادله به فرم $ax^۲+bx+c=۰$ که a و b و c اعداد حقیقی هستند و $a\neq ۰$ را یک معادله درجه دوم می نامیم.

$$ax^۲+bx+c=۰$$

توجه: a همیشه ضریب $x^۲$ ، b ضریب x و c عدد تنهاست و همواره همراه با علامت عدد معرفی می شوند.

مثال ۱ در معادلات درجه دوم زیر، ضرایب a و b و c را تعیین کنید.

آ) $۲x^۲-۷x+۴=۰$

ب) $x^۲-۲x=۵$

پ) $x^۲-۹=۸$

ت) $۲x^۲+۶x=۰$

ث) $-۳x^۲=۰$

ج) $(x-۱)(x+۲)=۰$

روش های حل معادله درجه دوم

۱) تجزیه

ویژگی حاصل ضرب صفر: اگر A و B دو عبارت جبری باشند و $A.B=۰$ باشد، آن گاه حداقل یکی از این دو عبارت صفر است یعنی:

$$A.B=۰\Rightarrow A=۰ \ or \ B=۰$$

در روش تجزیه به کمک اتحادهای مربع، جمله مشترک، مزدوج و یا فاکتورگیری عبارت را به صورت $A.B=۰$ در می آوریم و سپس از ویژگی ضرب صفر استفاده می کنیم تا جواب های معادله را به دست آوریم.

مثال ۲ معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

آ) $x^{۲}-۲x-۳=۰$

ب) $۳t^{۲}-t=۰$

پ) $x^{۲}-۳x=۱۰$

ت) $۳y^{۲}-۱۲=۰$

ث) $۲x^{۲}=۵x$

ج) $(۲x-۱)^{۲}=(x+۱)^{۲}$

چ) $x(۲x-۴)+۴=۲(x+۲)$

نکته اگر $c=0$ باشد، از روش فاکتورگیری استفاده می‌کنیم. در این حالت حتماً یکی از جواب‌ها صفر است.

۲) ریشه گیری

در حل معادلاتی به فرم کلی $X^2=k$، اگر a یک عدد حقیقی نامنفی (بزرگتر یا مساوی صفر) باشد، ریشه های معادله به صورت $X=\sqrt{k}$ و $X=-\sqrt{k}$ است.

مثال ۳ معادلات زیر را به روش ریشه گیری حل کنید.

آ) $x^2=4$

ب) $x^2-5=0$

پ) $2x^2-32=0$

ت) $(2x+1)^2-9=0$

ث) $(r-2)^2=16$

ج) $t^2+7=0$

چ) $5x^2=20$

ح) $(x+1)^2+4=0$

۳) مربع کامل

روش مربع کامل کردن یک معادله درجه دوم: ابتدا دو جمله شامل متغیر معادله (معمولا x) را یک طرف تساوی و بقیه را سمت دیگر می نویسیم. عدد $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ را به دو طرف معادله اضافه می کنیم. سه جمله سمت چپ یک اتحاد مربع است. پس از مرتب سازی، از روش ریشه گیری جواب های معادله را در صورت وجود به دست می آوریم.

توجه *برای استفاده از روش مربع کامل، باید $a=1$ باشد؛ پس اگر a عددی به جز ۱ بود ابتدا کل معادله را بر a تقسیم می کنیم.*

نکته *این چند اتحاد را به خاطر بسپارید:*

$x^2-2x+1=(x-1)^2$

$x^2+2x+1=(x+1)^2$

$x^2\pm 6x+9=(x\pm 3)^2$

$x^2\pm 4x+1=(x\pm 2)^2$

مثال ۴ معادلات زیر را به روش مربع کامل کردن حل کنید.

آ) $x^2-6x+8=0$

ب) $x^2-6x=-9$

پ) $x^{۲}-۴x-۶=۰$

ت) $x^{۲}-۶x+۴=۰$

ث) $n^{۲}-۴n+۵=۰$

ج) $t^{۲}+۳t=۳$

چ) $۲r^۲ + r - ۲ = ۰$

ح) $۲x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$

۴) فرمول کلی یا دلتا (Δ)

اگر معادله درجه دوم به صورت $ax^۲ + bx + c = ۰$ را به روش مربع کامل حل کنیم داریم:

روش استفاده از دلتا (Δ): ابتدا به کمک فرمول $\Delta = b^۲ - ۴ac$ مقدار Δ را به دست می آوریم. عدد دلتا مثبت، منفی یا صفر است:

۱) $\Delta \succ ۰ \rightarrow x_{۱,۲} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$ معادله دو ریشه متمایز (متفاوت) دارد

۲) $\Delta = ۰ \rightarrow x = \dfrac{-b}{۲a}$ معادله یک ریشه مضاعف (تکراری) دارد

۳) $\Delta \prec ۰ \rightarrow$ معادله ریشه حقیقی ندارد

نکته در روش دلتا، با ضرایب a و b و c سر و کار داریم. پس حتما به علامت اعداد توجه کنیم و ترجیحا معادله را از ابتدا مرتب بنویسیم.

نکته روش دلتا برای هر معادله درجه دومی قابل استفاده است.

مثال ۵ معادلات درجه دوم زیر را به روش فرمول کلی (دلتا) حل کنید.

آ) $x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$

ب) $۲x^۲ + x - ۳ = ۰$

پ) $x^۲ - ۳x - ۱ = ۰$

ت) $x^۲ + x + ۱ = ۰$

ث) $x^2+2x+1=0$

ج) $2x^2-7x-9=0$

چ) $x^2-3x=0$

ح) $x^2-25=0$

خ) $2x^2-3x+4=0$

د) $(2x+1)^2=x-3$

ذ) $(x-1)(x+1)=2x$

ر) $4x^2-5x+1=0$

ز) $-x^2+4x-4=0$

س) $-2x^2+x+3=0$

مثال ۶ از یک رشته سیم به طول ۵۰ متر، می خواهیم یک مستطیل به مساحت ۱۴۴ مترمربع بسازیم. طول و عرض این مستطیل را مشخص کنید.

دو حالت خاص حل معادله درجه دوم

$$\mathrm{I})\, a+b+c=۰ \Rightarrow x_۱=۱\,,\; x_۲=\frac{c}{a}$$

$$\mathrm{II})\, a+c=b \Rightarrow x_۱=-۱\,,\; x_۲=-\frac{c}{a}$$

نکته

۱) $b=۰ \Rightarrow$ ریشه‌ها قرینه هم هستند

۲) $a=c \Rightarrow$ ریشه‌ها عکس هم هستند

۳) $\frac{c}{a}\prec ۰ \Rightarrow \Delta \succ ۰ \Rightarrow$ معادله دارای دو ریشه مختلف العلامت است

مثال ۷

معادلات زیر را حل کنید و ریشه های آن ها را در صورت وجود به دست آورید.

آ) $۲x^۲+۳x+۱=۰$

ب) $x^۲-۴x+۳=۰$

پ) $x^۲-۴x=۰$

ت) $۲x^۲-۴=۰$

ث) $x^۲-۸x+۷=۰$

ج) $۳x^۲-۴x+۱=۰$

چ) $-۶x^۲+۷x-۱=۰$

ح) $۲x^۲-۳۲=۰$

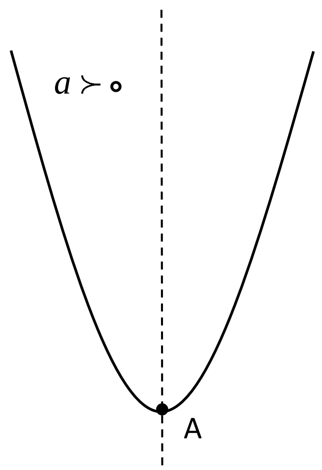
خ) $۲x^۲-۵x+۳=۰$

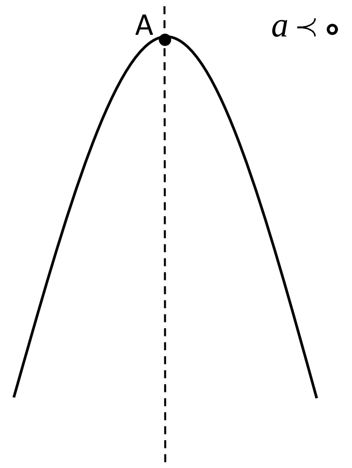
مثال ۸ طول اضلاع مثلث قائم الزاویه ای $۲x+۱$ و $۲x-۱$ و x است ($x\geq ۱$). طول ضلع متوسط کدام است؟ (سراسری ۷۶)

۱) ۱۳ ۲) ۱۵ ۳) ۱۷ ۴) ۱۹

درس دوم: سهمی

نمودار هر معادله به صورت $y=ax^2+bx+c$ را که در آن a و b و c اعداد حقیقی و $a\neq 0$ است را سهمی می نامیم که به یکی از فرم های زیر است:





مثال ۹ معادله یک سهمی به صورت $y=x^2-4x+5$ است. سمت راست این معادله را به شکل مربع کامل بنویسید، ریشه عبارت داخل پرانتز را به دست آورید و به کمک آن سهمی را رسم کنید.

نکته هر سهمی به صورت $y=a(x-h)^۲+k$ که $a\neq ۰$ است، دارای راسی با مختصات $A(h,k)$ و خط تقارنی با معادله $x=h$ است.

نکته برای رسم سهمی کافی است مختصات راس سهمی را به دست آورده، دو نقطه کمتر از x_A و دو نقطه بیشتر از x_A را جاگذاری کنیم و به کمک این پنج نقطه سهمی را رسم کنیم.

مثال ۱۰ در هریک از سهمی های زیر، راس را مشخص کرده و سهمی را رسم کنید.

آ) $y=(x+۳)^۲+۱$

ب) $y=-۲x^۲-۳$

نکته اگر سمت راست معادله $y=ax^۲+bx+c$ را به شکل مربع کامل بنویسیم داریم:

$$y=a\left(x+\frac{b}{۲a}\right)^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

در این حالت با توجه به نکته بالا مختصات راس سهمی $A\left(\frac{-b}{۲a},\frac{۴ac-b^۲}{۴c}\right)$ یا $A\left(\frac{-b}{۲a},\frac{-\Delta}{۴a}\right)$ است و معادله خط تقارن سهمی $x=\frac{-b}{۲a}$ است.

مثال ۱۱ مختصات راس سهمی و معادله محور تقارن سهمی های زیر را به دست آورید.

آ) $y = x^{۲} - ۴x + ۵$

ب) $y = ۲(x+۳)^{۲} + ۱$

نکته از مختصات راس سهمی داریم: $x_A = \frac{-b}{۲a}$ و $y_A = \frac{-\Delta}{۴a}$. اما برای محاسبه y_A همچنین می‌توان از جاگذاری x_A در معادله سهمی استفاده کرد.

مثال ۱۲ سهمی به معادلات زیر را رسم کنید.

آ) $y = x^{۲} + ۳$

ب) $y = x^{۲} - ۳x + ۴$

پ) $y = x^{۲} - ۴x$

ت) $y = -۲x^{۲} + ۴x - ۵$

نکته به عدد c عرض از مبدا سهمی می‌گوییم که همان محل برخورد سهمی با محور y است.

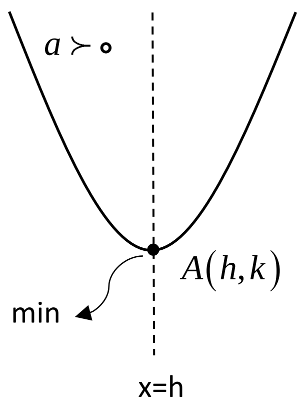
نکته همان طور که از مثال بالا نیز مشخص است اگر دو نقطه به فاصله یکسان از x_A قرار داشته باشند دارای عرض یکسان هستند زیرا سهمی نسبت به راس A متقارن است.

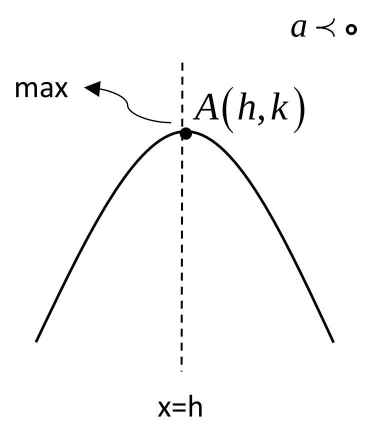
برعکس اگر دو نقطه دارای عرض یکسان باشند، مثلا $(x_{۱}, y_{۰})$ و $(x_{۲}, y_{۰})$، در این صورت معادله محور تقارن سهمی $x = \frac{x_{۱} + x_{۲}}{۲}$ است.

مثال ۱۳ اگر $(\circ,۳)$ و $(-۴,۳)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن این سهمی را بنویسید.

مثال ۱۴ اگر $(۲,-۱)$ و $(۵,-۱)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، معادله خط تقارن این سهمی را بنویسید.

نکته درحالتی که $a \succ \circ$ است، راس سهمی درپایین ترین نقطه سهمی قرار دارد و نقطه مینیمم سهمی است
ودرحالت $a \prec \circ$، راس سهمی نقطه ماکزیمم سهمی است.



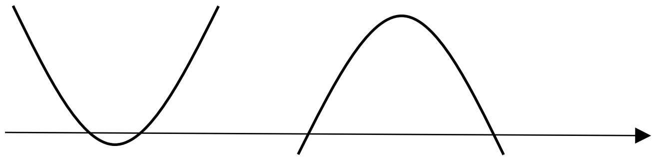


مثال ۱۵ مختصات نقاط ماکزیمم و مینیمم سهمی به معادلات زیر را بیابید.

آ) $y = x^۲ - ۴x + ۵$

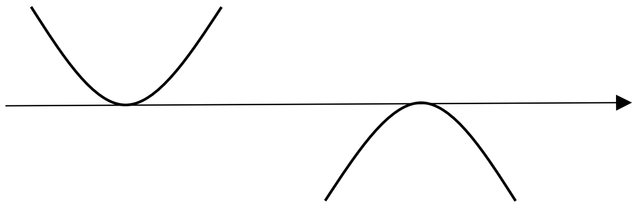
ب) $y = -۲x^۲ + ۱$

نکته تعداد نقاط برخورد سهمی با محور xها همان تعداد ریشه های معادله $ax^2+bx+c=0$ است و سه حالت کلی زیر رخ می دهد:



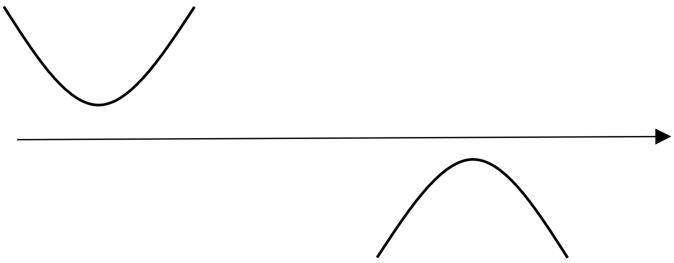
۱) معادله دو ریشه متمایز دارد $(\Delta \succ 0)$

در این صورت سهمی محور xها را در دو نقطه قطع می کند.



۲) معادله یک ریشه مضاعف دارد $(\Delta = 0)$

در این حالت سهمی بر محور xها مماس است.



۳) معادله ریشه ندارد $(\Delta \prec 0)$

در این حالت سهمی به طور کامل یا بالای محور xها یا زیر آن قرار می گیرد

نوشتن معادله از روی ریشه ها

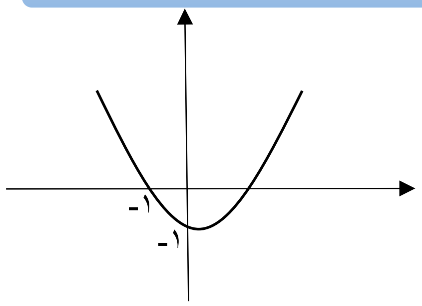
در سه حالت نکته قبل می توان معادله سهمی را نوشت:

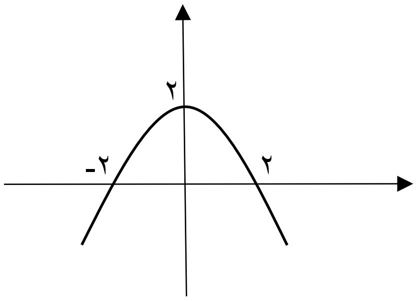
حالت اول: $y=a(x-x_1)(x-x_2)$

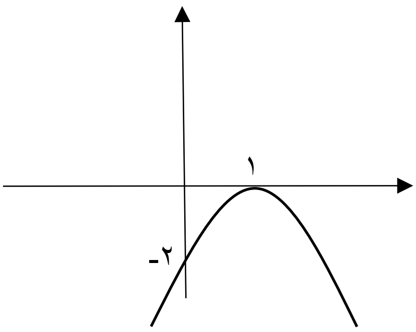
حالت دوم: $y=a(x-x_A)^2$

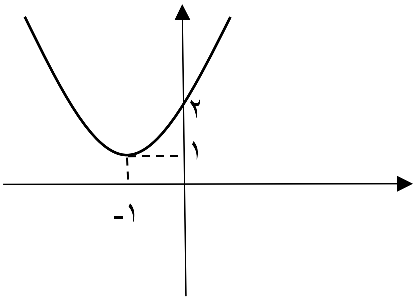
حالت سوم: $y=ax^2+bx+c$. با جایگذاری نقاط و استفاده از اطلاعات مساله ضرایب را تعیین می کنیم.

مثال ۱۶ در هر حالت، معادله سهمی را بنویسید.

آ)


ب)


پ)


ت)


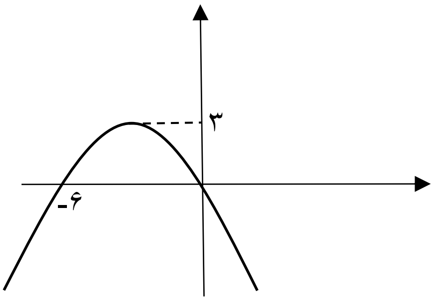
مثال ۱۷ معادله سهمی را بنویسید که محور طول ها را در دو نقطه به طول های ۱ و ۲ قطع کرده و از نقطه $(-۱,۳)$ نیز بگذرد.

مثال ۱۸ نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ محور xها را در نقاطی به طول های ۱- و ۳ و محور y ها را در نقطه با عرض ۱- قطع می کند. عرض راس سهمی کدام است؟

۱) $\frac{-۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۳}$ ۴) $\frac{-۴}{۳}$

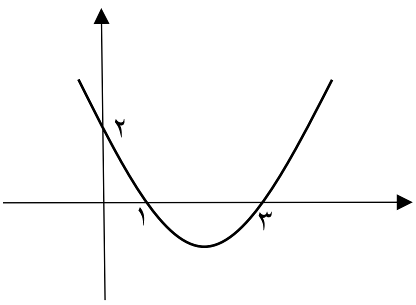
مثال ۱۹ با توجه به سهمی روبرو حاصل عبارت $\frac{-\sqrt{b^۲}}{a}$ کدام است؟

۱) ۴- ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۶



مثال ۲۰ شکل مقابل نمودار سهمی $y = ax^۲ + bx + c$ است. عرض پایین ترین نقطه این سهمی کدام است؟

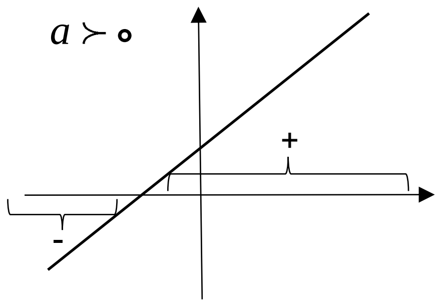
۱) $\frac{-۱}{۳}$ ۲) $\frac{-۲}{۳}$ ۳) $\frac{-۳}{۲}$ ۴) $\frac{-۱۲۸}{۲۷}$

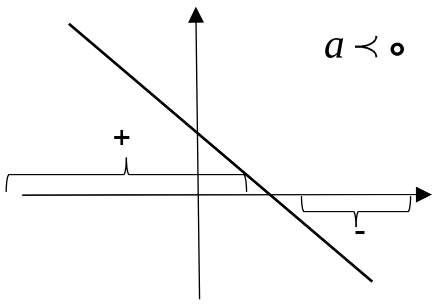


درس سوم: تعیین علامت

۱) تعیین علامت عبارت های درجه اول

به نمودارهای مربوط به معادله خطی $y = ax + b$ و علامت y توجه کنید:





همان طور که از شکل ها مشخص است، علامت y به ازای مقادیر کوچکتر از ریشه، با علامت a مخالف هم هستند و به ازای مقادیر بزرگتر از ریشه، با علامت a موافق هم هستند. در حالت کلی داریم:

$P(x) = ax + b$

x	$-\infty$	$x_۰$	$+\infty$
$ax+b$	مخالف علامت a		موافق علامت a

$ax + b = ۰$

$x = \dfrac{-b}{a}$

مثال ۲۱ عبارت های درجه اول زیر را تعیین علامت کنید.

آ) $P(x) = -۴x + ۸$

ب) $y = ۲x - ۳$

پ) $y = -۳x$

ت) $y = ۲x + ۲$

نکته ۱) تعیین علامت عبارت های $(ax+b)^{2n+1}$ یعنی عبارت های درجه اول با توان فرد نیز مانند عبارت های درجه اول معمولی است. در این حالت ریشه را مکرر فرد می نامیم.

۲) علامت عبارت های $(ax+b)^{2n}$ یعنی عبارت های درجه اول با توان زوج همواره مثبت است. در این حالت ریشه را مکرر زوج می نامیم. علامت عبارت $|ax+b|$ نیز شبیه توان زوج همواره مثبت است.

۳) تعیین علامت عبارت های ضربی با عوامل درجه اول به صورت ضرب علامت های تک تک عوامل است.

۴) تعیین علامت عبارت های کسری با عوامل درجه اول به صورت ضرب علامت های عوامل است با در نظر گرفتن اینکه در ریشه مخرج تعریف نشده (ت.ن.) است.

مثال ۲۲ هر یک از عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

آ) $A=(3x+1)(2x-1)$

ب) $B=(4x+5)^2$

پ) $C=x^3(7x-2)$

ت) $D=\dfrac{x-1}{3-2x}$

ث) $E=(x-۱)^{۲}(x+۳)^{۳}$

ج) $F=\dfrac{x^{۳}(۲x+۴)}{-x^{۲}|۳-x|}$

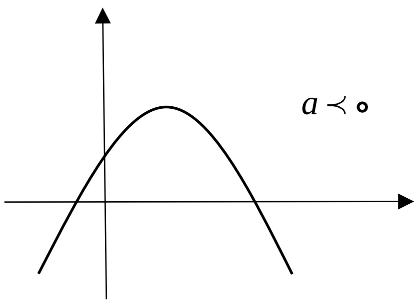
۲) تعیین علامت عبارت های درجه دوم

همانند عبارت های درجه اول، می توان برای عبارت های درجه دوم نیز تعیین علامت را با توجه به تعداد ریشه ها و علامت a انجام داد:

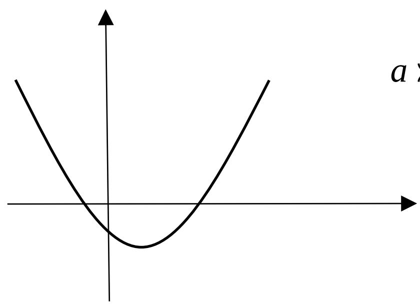
$$P(x)=ax^{۲}+bx+c \qquad a\neq ۰$$

الف) معادله $ax^{۲}+bx+c=۰$ دارای دو ریشه متمایز $x_{۱}, x_{۲}$ است $\leftarrow$ $\Delta \succ ۰$

x	$-\infty$	$x_{۱}$	$x_{۲}$	$+\infty$
P				



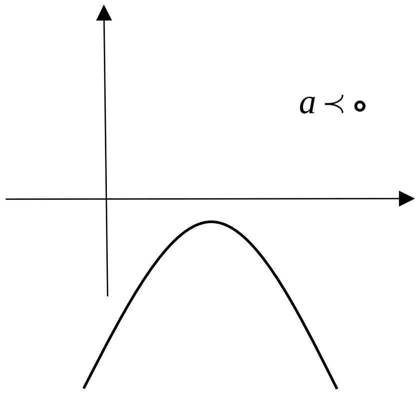
$a \prec ۰$

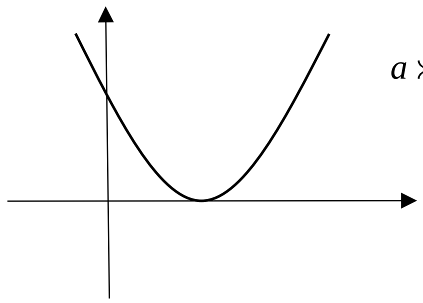


$a \succ ۰$

ب) معادله $ax^2+bx+c=0$ دارای یک ریشه مضاعف x_0 است ← $\Delta = 0$

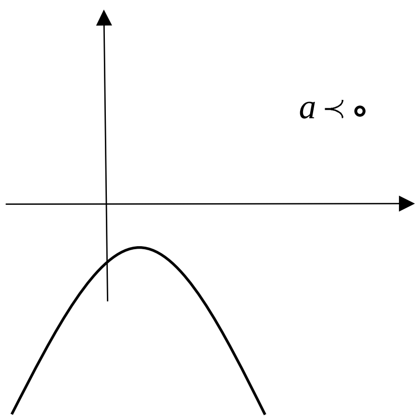
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
P			

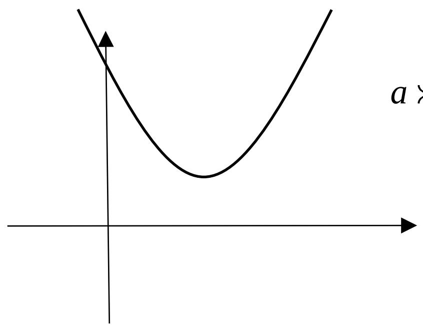




پ) معادله $ax^2+bx+c=0$ دارای ریشه حقیقی نیست ← $\Delta \prec 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
P		





مثال ۲۳ ریشه هریک از عبارت های زیر را در صورت وجود بیابید و عبارت را تعیین علامت کنید.

آ) $A=۲x^{۲}-x-۳$

ب) $B=x^{۲}-۴x+۴$

پ) $C=۳x^{۲}-۵x$

ت) $D=۲x^{۲}-x+۱$

ث) $E=\dfrac{x(x-۳)^{۲}}{x^{۲}+x-۲}$

ج) $F=(x^{۲}+۲x+۱)(x^{۲}-۴)$

چ) $G=\frac{x^{2}(x-3)^{3}}{x(2x+1)}$

ح) $H=\frac{-x^{2}+6x-9}{x^{2}+x+3}$

روش سریع برای تعیین علامت عبارت های ضربی و کسری

ریشه همه عبارت ها را پیدا کرده و در سطر اول جدول تعیین علامت، از کوچک به بزرگ می نویسیم.

علامت اولین ناحیه از سمت راست (بعد از بزرگترین ریشه) را تعیین کرده و سپس با عبور از ریشه ها ی ساده یا مکرر فرد، علامت را تغییر می دهیم و با عبور از ریشه مضاعف یا مکرر زوج یا عبارت قدرمطلق، علامت عوض نمی شود.

نکته

۱) ریشه های مخرج همواره تعریف نشده (ت.ن.) هستند.

۲) تعداد تکرارهای هر ریشه از صورت و مخرج با هم حساب می شوند.

مثال ۲۴ عبارت های زیر را تعیین علامت کنید.

آ) $P(x)=\frac{(x-1)(x+1)(x-2)}{(x-3)(x+5)}$

ب) $f(x)=\dfrac{(x^{۲}-۳x+۲)(x-۶)^{۳}}{(x-۵)^{۲}}$

پ) $q(x)=\dfrac{(x^{۲}+۳x+۵)|x-۱|}{(x+۲)^{۳}(x^{۲}-۴)}$

نکته با دقت در جدول تعیین علامت عبارت های درجه دوم در حالتی که $\Delta \prec ۰$ است، می بینیم که علامت عبارت، همواره مثبت یا همواره منفی است. بنابراین داریم:

حالت اول:

$$\begin{cases}\Delta \prec ۰ \\ a \succ ۰\end{cases} \Rightarrow ax^{۲}+bx+c \succ ۰$$

به عبارتی علامت $p(x)=ax^{۲}+bx+c$ همواره مثبت است یا سهمی آن همواره بالای محور x ها قرار می گیرد.

حالت دوم:

$$\begin{cases}\Delta \prec ۰ \\ a \prec ۰\end{cases} \Rightarrow ax^{۲}+bx+c \prec ۰$$

به عبارتی علامت $p(x)=ax^{۲}+bx+c$ همواره منفی است یا سهمی آن همواره زیر محور x ها قرار می گیرد.

مثال ۲۵ به ازای کدام مقدار m، نمودار سهمی به معادله $y=(m+۲)x^۲-۲mx+۱$ همواره بالای محور xهاست؟

۱) $m \succ -۲$

۲) $-۲ \prec m \prec -۱$

۳) $-۲ \prec m \prec ۲$

۴) $-۱ \prec m \prec ۲$

مثال ۲۶ به ازای کدام مقدار a عبارت $(a-۱)x^۲+(a-۱)x+۱$ همواره منفی است؟

۱) $\mathbb{R}$

۲) $a \prec ۱$

۳) $\varnothing$

۴) $۱ \prec a \prec ۵$

نکته اگر $P(x)=ax^۲+bx+c$:

۱) $\begin{cases}\Delta=۰\\ a\succ ۰\end{cases} \Rightarrow$ $P(x)$ مماس بر محور طول‌ها و رو به بالاست.

۲) $\begin{cases}\Delta=۰\\ a\prec ۰\end{cases} \Rightarrow$ $P(x)$ مماس بر محور طول‌ها و رو به پایین است.

۳) $\begin{cases}\Delta\le ۰\\ a\succ ۰\end{cases} \Rightarrow$ $P(x)$ همواره نامنفی است. $(P(x)\ge ۰)$

۴) $\begin{cases}\Delta\le ۰\\ a\succ ۰\end{cases} \Rightarrow$ $P(x)$ همواره نامثبت است. $(P(x)\le ۰)$

نامعادله

اگر A و B دو عبارت جبری باشند، چهار نامعادله به صورت زیر ساخته می شود:

نامعادله	می خوانیم
$A \prec B$	A کوچکتر از B است
$A \leq B$	A کوچکتر یا مساوی B است
$A \succ B$	A بزرگتر از B است
$A \geq B$	A بزرگتر یا مساوی B است

دو ویژگی کاربردی در نامعادلات

اگر A و B و C عبارت های جبری باشند:

۱) $A \prec B \Rightarrow A+C \prec B+C$

۲) $A \succ B \Rightarrow \begin{cases} AC \succ BC & C \succ ۰ \\ AC \prec BC & C \prec ۰ \end{cases}$

مثال ۲۷ نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه بنویسید.

آ) $۵x-۱ \geq ۳x-۷$

ب) $-۲ \prec ۳x-۱ \leq ۸$

حل نامعادله درجه اول

همانند حل معادله درجه اول، مجهول ها را یک طرف و معلومات را طرف دیگر نامساوی قرار می دهیم.
پس از ساده کردن و تنها کردن x، مجموعه جواب نامعادله مشخص می شود.

مثال ۲۸ نامعادلات زیر را حل کنید و مجموعه جواب را به صورت بازه نشان دهید.

آ) $2x+5 \le x-1$

ب) $-1 \prec 3x+8 \le 5$

پ) $0 \le \frac{x+1}{5} \prec -2$

ت) $0 \le \frac{x+1}{5} \prec -2$

حل نامعادلات کلی به کمک جدول تعیین علامت

ابتدا همه عبارت های جبری را در یک طرف نامساوی قرار می دهیم تا به یکی از شکل های $p \prec 0$ ، $p \le 0$ ، $p \succ 0$ و یا $p \ge 0$ برسیم.

با حل $p=0$ ریشه های p را پیدا کرده و جدول تعیین علامت را تشکیل می دهیم.

از روی سطر آخر، مجموعه جواب را با توجه به علامت نامعادله مشخص می کنیم.

نکته

انتخاب مجموعه جواب	نامعادله
بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت منفی وجود دارد	$p \prec 0$
بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت منفی یا صفر وجود دارد	$p \le 0$
بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت مثبت وجود دارد	$p \succ 0$
بازه هایی که در آن ها در سطر آخر علامت مثبت یا صفر وجود دارد	$p \ge 0$

نکته در نامعادلات کسری، حواسمان به حذف ریشه های مخرج از بازه جواب باشد.

مثال ۲۹ مجموعه جواب نامعادلات زیر را بیابید و به صورت بازه نشان دهید.

آ) $x^{۲}-۳x+۲\succ ۰$

ب) $۲x^{۲}+۴\le x^{۲}-۵x$

پ) $\dfrac{(۲x+۱)(x-۳)}{(۲-x)^{۲}}\prec ۰$

ت) $(x^{۲}-۳x+۴)(x^{۲}-۴)\le ۰$

ث) $x^۲ \le ۴$

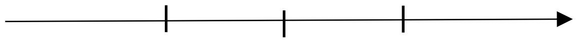
ج) $۳x^۲ - x - ۲ \ge ۰$

چ) $\frac{x^۲ - ۹}{۲x + ۱} \ge ۰$

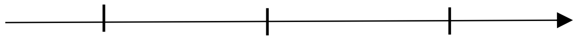
ح) $H = \frac{-x^۲ + ۶x - ۹}{x^۲ + x + ۳}$

نامعادلات قدرمطلق

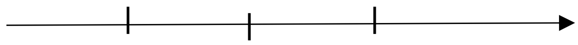
وقت می گوییم $|x|=2$، منظور مقادیری از x است که فاصله آن ها تا مبدا برابر ۲ است. پس $x=2$ و $x=-2$.



بنابراین معنی $|x|\le 3$ این است که مقادیری از x را بیابیم که فاصله آنها تا مبدا مختصات کوچکتر یا مساوی ۳ باشد. یعنی $-3\le x\le 3$.



همچنین $|x|\ge 2$ یعنی مقادیری از x که فاصله آنها تا مبدا مختصات بزرگتر یا مساوی ۲ است. یعنی $x\ge 2$ یا $x\le -2$.



توجه اگر u یک عبارت جبری و a یک عدد حقیقی مثبت باشد:

۱) $|u|\le a \quad \Rightarrow \quad -a\le u\le a$

۲) $|u|\ge a \quad \Rightarrow \quad u\le -a \ \cup \ u\ge a$

مثال ۳۰ نامعادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید.

آ) $|2x-1|\ge 5$

ب) $|x-4|\prec 1$

پ) $|2x+3|\le 4$

ت) $|۲x|+۱\geq ۳$

ث) $\left|\frac{x}{۳}+۱\right|\prec\frac{۲}{۳}$

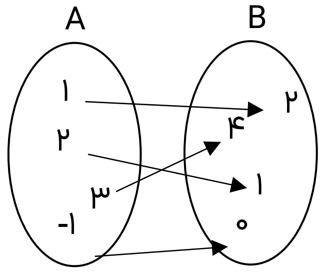
ج) $\left|\frac{x-۱}{۲}-۱\right|\geq ۳$

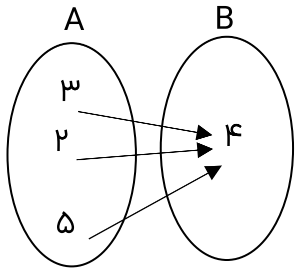
چ) $|x+۳|\leq -۱$

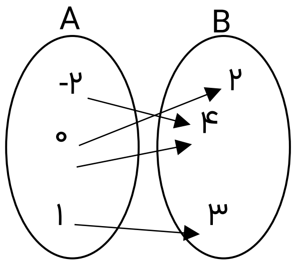
فصل پنجم

تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن





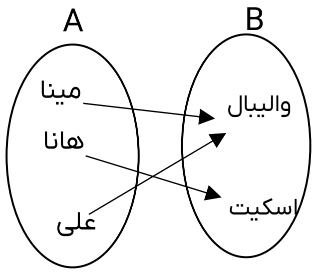


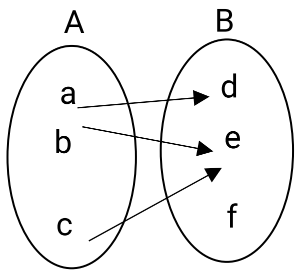
در نمودارهای پیکانی بالا، هر رابطه ای که از هر عضو A دقیقا یک پیکان خارج شده باشد، تابع است.

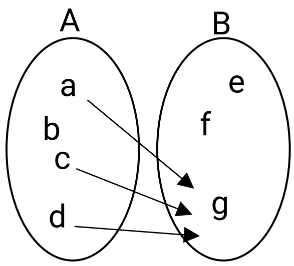
معرفی تابع

تابع رابطه ای بین دو مجموعه A و B است که در آن به هر عضو از A دقیقا یک عضو از B نسبت داده می شود.

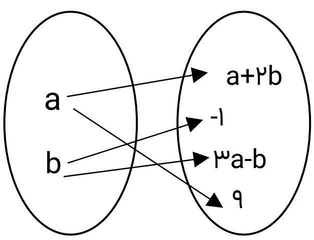
مثال ۱ تعیین کنید هریک از نمودارهای پیکانی زیر تابع است یا نه.







مثال ۲ اگر نمودار مقابل یک تابع باشد، حاصل $\frac{2a+b}{3}$ کدام است؟



۱) ۱

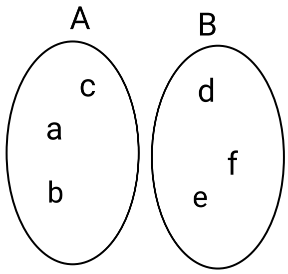
۲) ۲

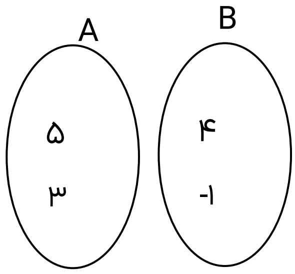
۳) ۳

۴) ۴

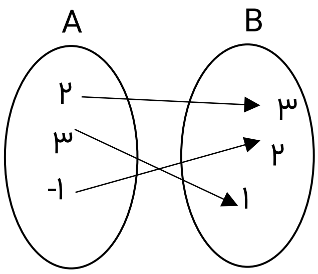
مثال ۳

از مجموعه A به B طوری نمودار پیکانی رسم کنید که f تابع باشد و g تابع نباشد.

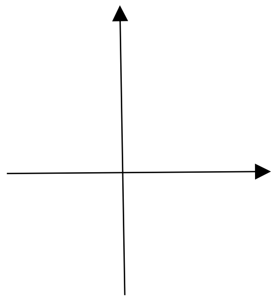




نمایش تابع به صورت زوج مرتبی و نمودار مختصاتی



$f = \{ \qquad \}$



نکته

۱) درنمایش زوج مرتبی (۲,۳) با (۳,۲) متفاوت است.

۲) در زوج مرتب (a,b) به a مولفه اول و به b مولفه دوم می گوییم.

۳) دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) مساوی هستند اگر a=c و b=d .

مثال ۴

هریک از زوج مرتب های زیر را به فرم نمودار پیکانی درآورید و تعیین کنید تابع هستند یا نه.

الف) $R = \{(۲,۵),(۰,۱),(۲,۹),(-۱,۱۰)\}$

ب) $f = \{(۱,۳),(۵,۴),(-۱,۳),(۲,۱)\}$

تشخیص تابع از روی زوج مرتب

رابطه ای تابع است که هیچ دو زوج مرتب متفاوتی در آن دارای مولفه اول یکسان و مولفه های دوم متفاوت نباشند.

نکته اگر در تابعی، دو زوج مرتب مولفه های یکسان داشته باشند، لزوما مولفه های دوم آنها نیز باید یکسان باشد.

مثال ۵ کدامیک از مجموعه های زیر نشان دهنده یک تابع است؟

الف) $f=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۱)\}$

ب) $g=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۱)\}$

پ) $h=\{(-۲,۳),(۵,-۲),(۷,-۴),(۳,۱)\}$

ت) $k=\left\{(۲,۱),(۳,۵),(۲,\frac{۴}{\sqrt{۱۶}})\right\}$

ث) رابطه ای که به هر دانش آموز، دوستان او را نسبت می دهد.

ج) رابطه ای که به هر عدد، ریشه های دوم آن را نسبت می دهد.

چ) رابطه ای که به هر عدد، ریشه سوم آن را نسبت می دهد.

ح) رابطه ای که به هر فرد، گروه خونی او را نسبت می دهد.

خ) رابطه ای که به هر فرد، دمای بدن او را نسبت می دهد.

د) رابطه ای که به یک ضلع مربع، محیط آن را نسبت می دهد.

مثال ۶ اگر رابطه $R=\{(۳,m^۲),(۲,۱),(-۲,m),(m,۴),(۳,m-۲)\}$ تابع باشد، مقدار m کدام است؟ (سراسری تجربی)

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۲

۴) هیچ مقدار m

مثال ۷ اگر $R=\{(-۲,۲),(۱,x^۲+xy),(-۲,x+y),(۱,۲۸),(-۳,۶)\}$ تابع باشد، مقدار $x-y$ کدام است؟

۱) ۱

۲) -۱

۳) ۲

۴) -۲

مثال ۸ اگر رابطه زیر بیانگر یک تابع باشد، مقدار b کدام است؟

$$R=\left\{(۱,m^۲-n^۲),(۳,۴),(۲,\frac{۲b-۱}{۳}),(۳,m-n),(۱,۲۰),(m+n-۳,۵)\right\}$$

۱) ۸

۲) $\frac{۶۱}{۷}$

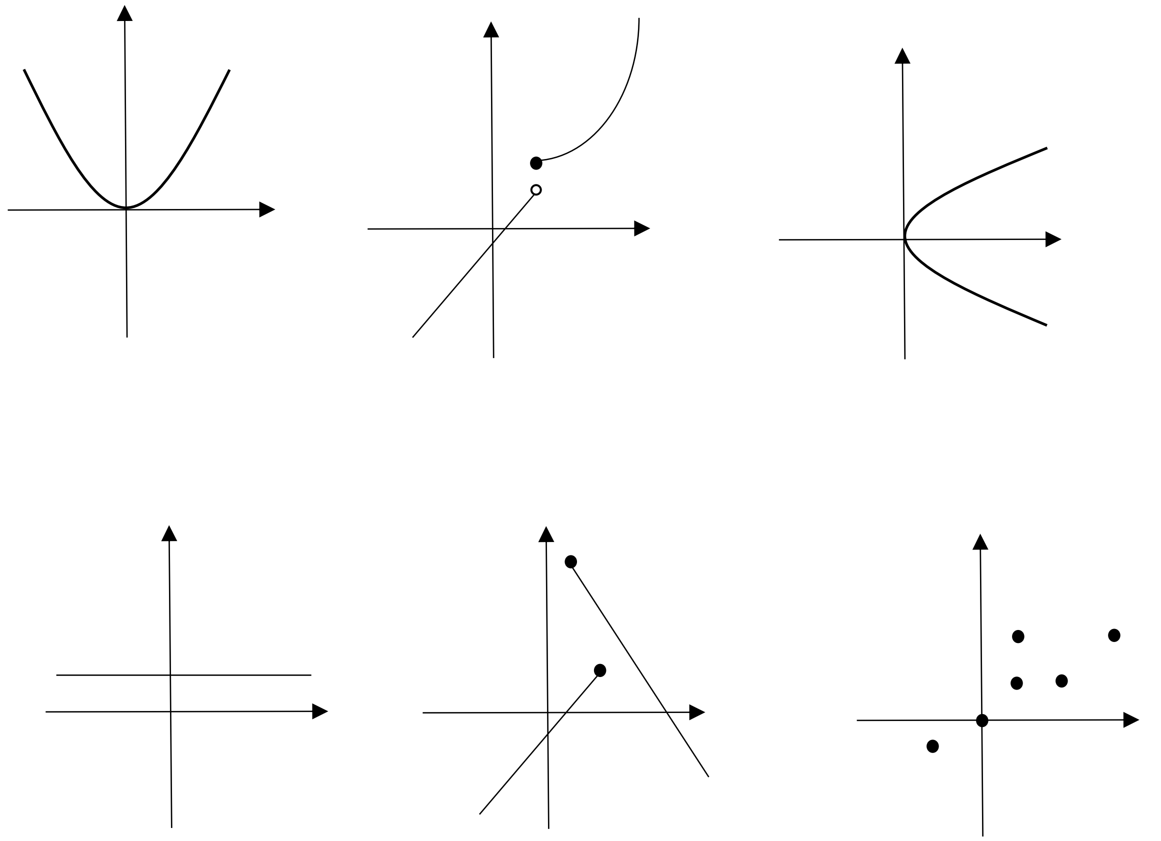
۳) $\frac{۱۳}{۲}$

۴) هر مقدار دلخواه

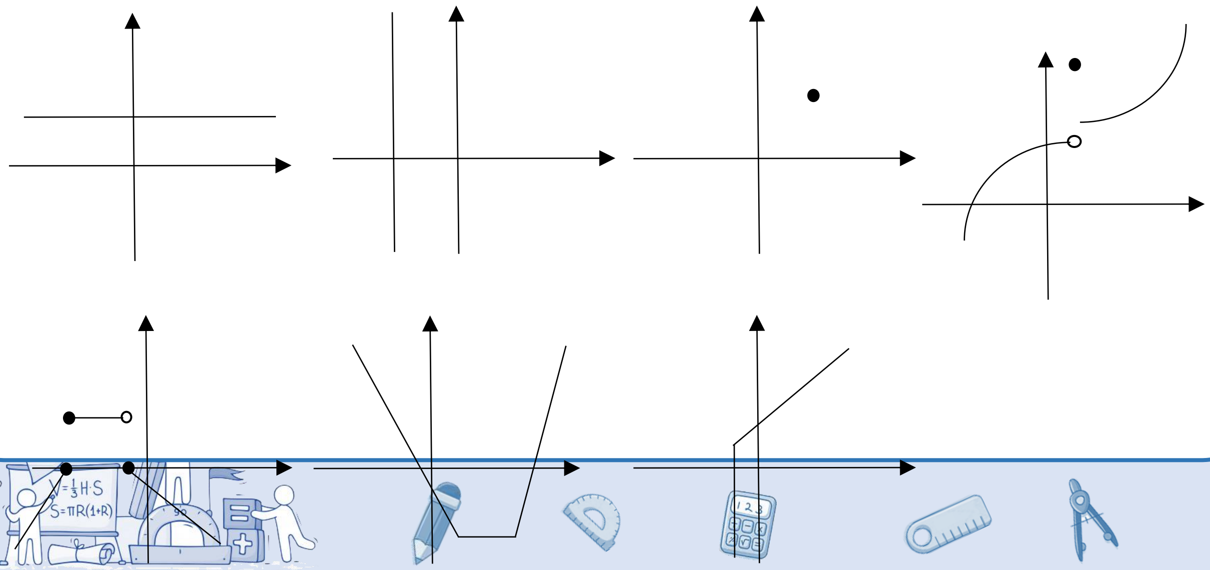
تشخیص تابع از روی نمودار مختصاتی

اگر هر خط عمودی موازی محور عرضها، نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، نمودار، تابع است. در غیر اینصورت تابع نیست.

مثال ۹ تعیین کنید هر نمودار نشان دهنده یک تابع هست یا نه.



مثال ۱۰ چند تا از نمودارهای زیر نمایش یک تابع هستند.

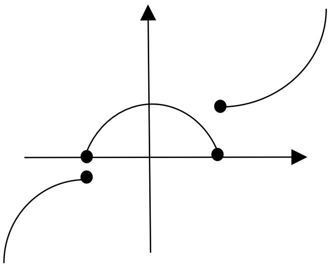


۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

مثال ۱۱ نمودار زیر با حذف حداقل چند نقطه به یک تابع تبدیل می شود؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴



درس دوم: دامنه و برد تابع

مجموعه همه مولفه های اول زوج مرتب های تشکیل دهنده یک تابع را "دامنه" تابع و مجموعه مولفه های دوم آن را "برد" تابع می نامیم.

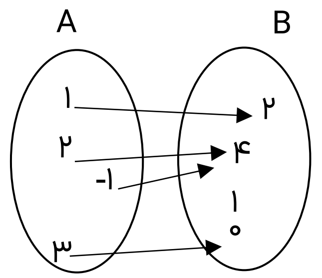
دامنه تابع f را با D_f و برد آن را با R_f نشان می دهیم.

مثال ۱۲ دامنه و برد هریک از توابع زیر را مشخص کنید.

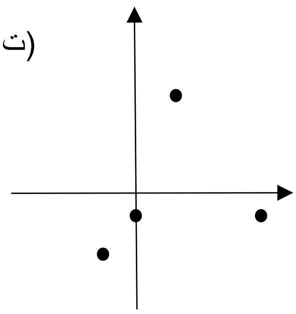
الف) $f=\{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۱)\}$

ب) $g=\{(۱,۱),(۲,۱),(۳,۱),(۴,۱)\}$

پ)



ت)



مثال ۱۳ الف) تابعی مثال بزنید که دامنه آن سه عضو و برد آن دو عضو داشته باشد.

ب) آیا تابعی وجود دارد که دامنه آن دو عضو و برد آن سه عضو داشته باشد؟

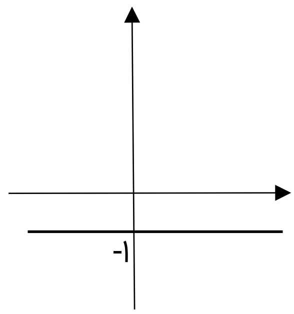
پ) در نمودار پلکانی، آیا همیشه برد f با مجموعه B برابر است؟ مثال بزنید.

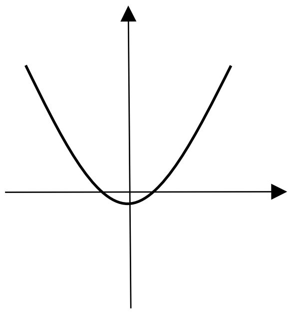
تشخیص دامنه و برد تابع از روی نمودار

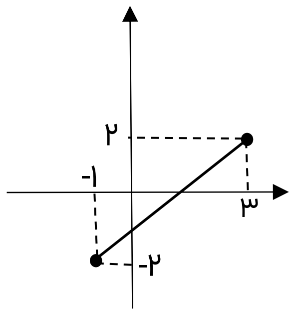
دامنه، بخش هایی از محور طولهاست که توسط نمودار پوشانده می شود (تابع روی آن نمودار دارد).

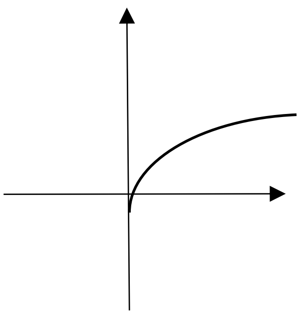
برد، بخش هایی از محور عرضهاست که توسط نمودار پوشانده می شود (تابع روی آن نمودار دارد).

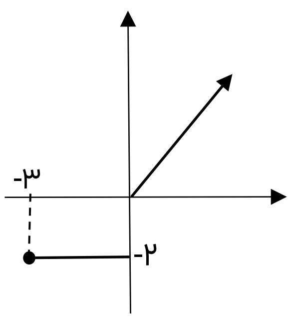
مثال ۱۴ دامنه و برد توابع زیر را از روی نمودار تعیین کنید.

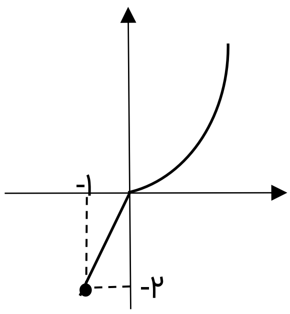


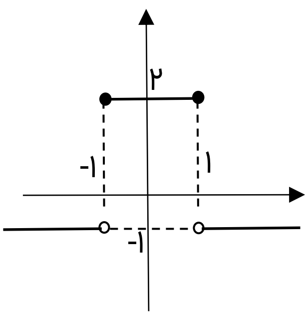












نمایش جبری تابع (ضابطه)

$f(x)$ نمادی از تابع f است که روی x عملیاتی انجام می دهد و خروجی آن y هایی است که در برد تابع قرار دارند.

مثلا $f(x)=x+۲$ را در نظر بگیرید و جدول مربوط به f را برای دامنه $D=\{-۱,۲,۳,۴\}$ بکشید و نمودار آن را رسم کنید.

مثال ۱۵ جدول زیر را کامل کنید و نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید.

تابع	$f(x)=-۳x$	$g(x)=-۳x$	$h(x)=-۳x$	$k(x)=-۳x$
دامنه	$\{-۱,۰,۱,۲\}$	$\mathbb{R}$	$[-۳,۲)$	مجموعه اعداد حقیقی نامثبت
برد				

مثال ۱۶ اگر تابعی با نمایش جبری $f(n)=n^۲+۱$ داشته باشیم و دامنه آن $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ باشد، برد تابع f را به دست آورید.

مثال ۱۷ اگر $f(x)=۲x-۱$ باشد، مقدار هریک از عبارت های زیر را بیابید.

$f(-۳)=$ $\qquad$ $f(۲)=$

$f(\sqrt{۲})=$ $\qquad$ $f(۵)=$

$f(a)=$ $\qquad$ $f(\frac{۱}{۲})=$

$f(۰)=$ $\qquad$ $f(\frac{۲}{۷})=$

مثال ۱۸ اگر $f(x)=\frac{x}{۲}-۱$ و $g(x)=۳x+۲$ باشند، حاصل هریک از عبارت های زیر را بیابید.

$g(۳)$ $\qquad$ $f(-۲)$

$g(\frac{۱}{۳})$ $\qquad$ $f(\frac{۱}{۲})$

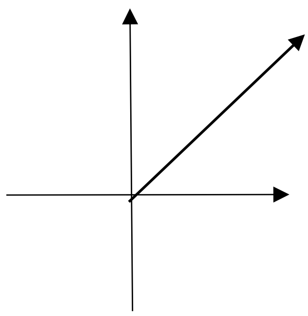
$g(f(-۲))$ $\qquad$ $f(g(-۲))$

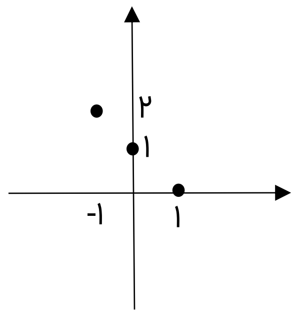
مثال ۱۹ اگر $g(۰)=۱, g(۱)=۲, g(۲)=۴, g(۳)=۸$ باشند، تابع $g(x)$ را به شکل مجموعه ای از زوج های مرتب بنویسید و نمودار آن را رسم کنید.

درس سوم: انواع تابع

۱) تابع خطی: هر تابعی که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می شود. در حالت کلی دامنه توابع خطی $\mathbb{R}$ و برد آن نیز $\mathbb{R}$ است.

مثال ۲۰ کدامیک از توابع زیر خطی هستند؟ دامنه و برد آنها را تعیین کنید.





$g(x)=(x+1)^2-(x-1)^2$

$f(x)=\dfrac{x+1}{2}$

$y=x$

$h(x)=x^2-2x+1$

$k=\{(3,1),(4,3),(5,5),(6,7)\}$

مثال ۲۱ تابع خطی $f(x)=۱-۳x$ را داریم. یکبار آن را با $D=\mathbb{N}$ و بار دیگر با $D=[-۱,۱]$ در نظر بگیرید و برد تابع را در هر مورد بدست آورده و رسم کنید.

مثال ۲۲ جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید.

الف) تعداد .... تابع خطی وجود دارد که دامنه آن $[۰,۲]$ و برد آن $[-۲,۱]$ باشد.

ب) تعداد .... تابع خطی وجود دارد که دامنه آن $[-۱,۳]$ باشد.

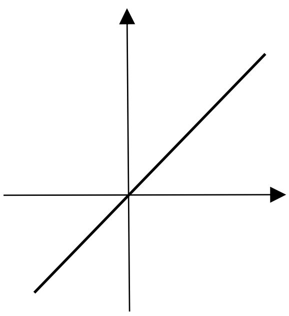
مثال ۲۳ الف) ضابطه تابع خطی $f(x)$ که از نقطه $(۲,۱۱)$ میگذرد و $f(۰)=۵$ است را بنویسید.

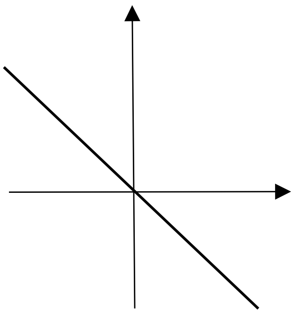
ب) مقدار $f(-۱)$ را محاسبه کنید.

نکته مهمترین توابع خطی، خطوط نیمساز ربع اول و سوم ($y = x$) و نیمساز ربع دوم و چهارم ($y = -x$) هستند.

۲) تابع همانی:

به تابع $f(x) = x$ تابع همانی می گوییم که به هر x همان مقدار را نسبت می دهد.





مثال ۲۴ اگر $f = \{(a+b,1-a),(b,a-2)\}$ همانی باشد، ab کدام است؟

۱) -۲

۲) -۱

۳) ۲

۴) ۱

مثال ۲۵ اگر تابع $f(x) = \dfrac{bx^2 + ax + c}{x+2}$ یک تابع همانی باشد، مقدار $\dfrac{a+c}{2b}$ کدام است؟

۱) -۱

۲) ۱

۳) -۲

۴) ۲

۳) تابع ثابت:

هر تابع با ضابطه $y=a$ که در آن a یک عدد حقیقی است را تابع ثابت می نامیم. دامنه توابع ثابت، $\mathbb{R}$ و برد آن مجموعه تک عضوی $\{a\}$ است.

نمودار این تابع، خطی افقی موازی محور x ها می باشد که از عدد a روی محور y ها می گذرد.

مثال ۲۶ نمودار توابع ثابت $f(x)=۲$ و $g(x)=-۱$ را رسم کنید و $f(۵)$ و $g(-۲)$ را بیابید.

مثال ۲۷ نمودار f یک خط راست موازی محور xهاست و $f(۵)=۴$. اگر نمودار تابع g نیمساز ناحیه اول و سوم باشد، آنگاه حاصل $۲f(۹)-g(۸)$ را محاسبه کنید.

مثال ۲۸ اگر $f(x)=-۲$ باشد، الف) مقادیر $f(-۹)$ ، $f(۷)$ ، $f(۲)$ و $f(-\sqrt{۳})$ را محاسبه کنید.

ب) اگر دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی باشد، نمودار آن را رسم کنید و برد را بیابید.

پ) اگر دامنه آن بازه $[۱,۳]$ باشد، نمودار آن را رسم کنید و برد را بیابید.

مثال ۲۹ اگر $f(x)=\dfrac{x^{۲}+(a-۱)x+b}{۲x^{۲}+۳x-۱}$ یک تابع ثابت باشد، مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) $۱/۲$

۲) $-۱/۲$

۳) $۵/۲$

۴) ۲

مثال ۳۰ اگر f تابع ثابت و g تابع همانی باشد و داشته باشیم $\dfrac{۲f(۳)}{۵g(-۱)}=۱$، حاصل $(f\times g)(۲)$ کدام است؟

۱) ۲

۲) ‎-۵

۳) ۵

۴) $-۵/۲$

۴) توابع چندجمله ای:

توابعی که نمایش جبری آنها چندجمله ای های جبری از یک متغیر است. مانند $f(x)=x^{۳}+x-۱$ و $g(x)=t^{۲}-\dfrac{۱}{۳}$ و $h(x)=۳x$.

توجه درجه هر چندجمله ای برابر با بزرگترین توان متغیر آن است.

دامنه توابع چندجمله ای همواره $\mathbb{R}$ است.

مثال ۳۱ نمودار تابع چندجمله ای درجه دوم f ، محور y ها را در نقطه ای به عرض ۱ قطع می کند. اگر $f(۱)=۲$ و $f(-۱)=-۴$ باشد، $f(۲)$ کدام است؟

۱) ۰

۲) ۱-

۳) ۱

۴) ۲

۴) توابع چندضابطه ای(قطعه ای):

توابع چندضابطه ای(قطعه ای): تابع f به صورت زیر را که روی چند بازه متفاوت، ضابطه ای جداگانه تعریف شده است تابع چندضابطه ای می نامیم.

$$f(x)=\begin{cases} f_۱(x) & x\in D_۱ \\ f_۲(x) & x\in D_۲ \\ f_n(x) & x\in D_n \end{cases}$$

$$D_f=D_۱\cup D_۲\cup ...\cup D_n$$

که در آن $D_۱$ و $D_۲$ و... D_n بازه های دو به دو مجزا هستند (اشتراک ندارند)

$$R=R_۱\cup R_۲\cup ...\cup R_n$$

مثال ۳۲ اگر $f(x)=\begin{cases} ۱-x^۲ & x\le ۱ \\ \sqrt{x}+۵ & x\succ ۱ \end{cases}$ ، حاصل هریک از عبارت های زیر را بیابید.

$f(۰)=$

$f(۱)=$

$f(۹)=$

$f(\sqrt{۲})=$

$f(-۳)=$

مثال ۳۳

اگر $f(x)=\begin{cases} x-۲ & x\geq ۱ \\ ۴x+a & x\leq ۱ \end{cases}$ ضابطه یک تابع باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۲

۲) ۳

۳) -۲

۴) -۵

مثال ۳۴

نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۴-x^{۲} & x\prec ۰ \\ x+۴ & x\geq ۰ \end{cases}$ از کدام ناحیه مختصاتی نمی گذرد؟

۱) اول

۲) دوم

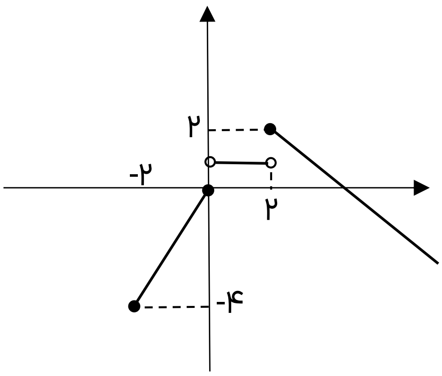
۳) سوم

۴) چهارم

مثال ۳۵

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳ & x\leq ۱ \\ ۳ & ۱\prec x\prec ۳ \\ x^{۲}-۲ & x\geq ۳ \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

مثال ۳۶ نمودار تابع قطعه ای f داده شده است. ضابطه آن را بنویسید و دامنه و برد آن را مشخص کنید.



۴) تابع قدرمطلق: تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می کند.

تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ یا $y=x$ نشان می دهیم.

توجه: *دامنه تابع قدرمطلق $\mathbb{R}$ و برد آن $[0,+\infty]$ است.*

ضابطه تابع قدرمطلق را می توان به صورت دو ضابطه ای نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x\prec 0 \end{cases}$$

مثال ۳۷ نمودار تابع قدرمطلق را رسم کنید.

مثال ۳۸ تابع چندضابطه ای $f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\geq -۳ \\ |x| & x\prec -۳ \end{cases}$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را بدست آورید.

رسم برخی توابع به کمک انتقال

فرض کنیم k عددی مثبت باشد و نمودار تابع f را داشته باشیم. در هریک از حالت های زیر می توانیم نمودار تابع را به کمک نمودار تابع f رسم کنیم:

نمودار تابع f به اندازه k واحد به بالا منتقل می شود	۱) $y=f(x)+k$
نمودار تابع f به اندازه k واحد به پایین منتقل می شود	۲) $y=f(x)-k$
نمودار تابع f به اندازه k واحد به چپ منتقل می شود	۳) $y=f(x+k)$
نمودار تابع f به اندازه k واحد به راست منتقل می شود	۴) $y=f(x-k)$

مثال ۳۹ نمودار هریک از توابع زیر را به کمک انتقال سهمی $y=x^{۲}$ رسم کنید.

آ) $f(x)=x^{۲}-۱$

ب) $g(x)=(x+۱)^{۲}$

پ) $h(x)=(x-3)^2$

ت) $k(x)=x^2+2$

مثال ۴۰ نمودار توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

آ) $y=|x-2|$

ب) $y=(x-1)^2+3$

پ) $y=|x+1|-2$

ت) $y=(x+1)^2-5$

ث) $y=|x|+۱$

قرینه کردن: اگر نمودار تابع f را داشته باشیم:

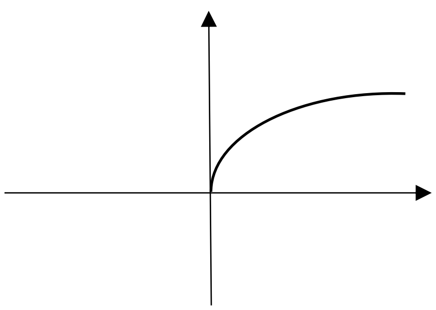
نمودار تابع f نسبت به محور x ها قرینه می شود	$-f(x)$
نمودار تابع f نسبت به محور y ها قرینه می شود	$f(-x)$

مثال ۴۱ نمودار هریک از توابع زیر را به کمک انتقال رسم کنید.

$g(x)=۳-|x+۱|$ $\qquad$ $f(x)=-(x+۱)^۲+۳$

مثال ۴۲ نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ به صورت زیر است. نمودار توابع خواسته شده را رسم کنید.

آ) $y=\sqrt{x-۱}$



ب) $y=\sqrt{x}+1$

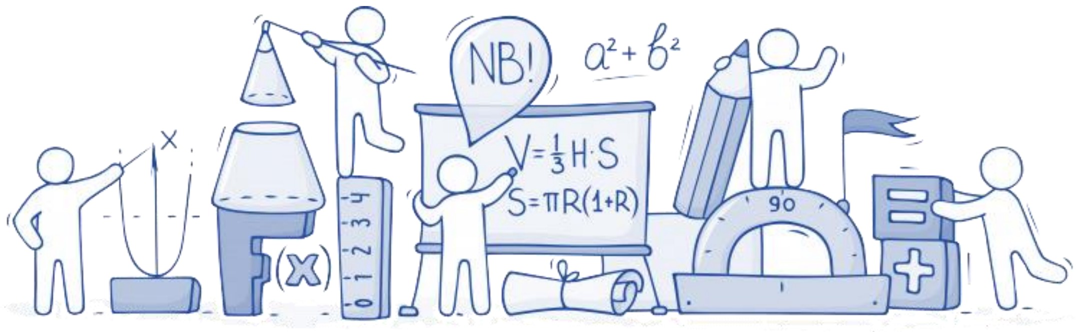
پ) $y=-\sqrt{x}$

ت) $y=\sqrt{-x}$

ث) $y=-\sqrt{-x}$

فصل ششم

شمارش بدون شمردن



درس اول: شمارش

اصل جمع و اصل ضرب

مثال ۱ اگر یک مربی فوتبال بخواهد از بین ۶ هافبک و ۸ مدافع یک تیم، یک نفر را به تیم ملی دعوت کند، این عمل به چند طریق امکان پذیر است (چند انتخاب دارد)؟

اصل جمع: اگر کاری را بتوان به دو روش انجام داد به طوری که در روش اول m انتخاب و در روش دوم n انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام این کار، m+n روش وجود دارد.

مثال ۲ هانا برای رفتن به مدرسه، می تواند از ۳ خط اتوبوس، ۲ خط تاکسی و یا ۲ مسیر پیاده روش استفاده کند. او برای رفتن به مدرسه چند انتخاب دارد؟

تعمیم اصل جمع: اگر کاری را بتوان به k روش انجام داد به طوری که در روش اول m_1 انتخاب، در روش دوم m_2 انتخاب و ... در روش k ام، m_k انتخاب وجود داشته باشد، برای انجام این کار، $m_1+m_2+\dots+m_k$ روش وجود دارد.

مثال ۳ هومان برای هدیه تولدش، می تواند ۳ نوع گوشی موبایل، ۲ نوع لپتاپ یا ۲ نوع پلی استیشن بخرد. او چند انتخاب برای هدیه تولدش دارد؟

اصل ضرب: اگر کاری شامل دو مرحله باشد، به طوری که برای انجام مرحله اول m روش و برای هرکدام از این m روش، مرحله دوم به n روش قابل انجام باشد، در کل کار موردنظر را می توان با $m \times n$ روش انجام داد.

مثال ۴ مدرسه ای می خواهد دانش آموزان را برای اردو ابتدا به یک سینما از بین ۲ سینما و سپس یک موزه از بین ۳ موزه ببرد. به چند روش می تواند اردو را برگزار کند؟

مثال ۵ علی با داشتن ۴ پیراهن، ۳ کت و ۲ کفش، به چند طریق می تواند هر سه را با هم بپوشد؟

تعمیم اصل ضرب: اگر انجام کاری شامل k مرحله باشد به طوری که برای انجام مرحله اول m_1 روش، برای انجام مرحله دوم m_2 روش، ... و برای انجام مرحله kام، m_k روش وجود داشته باشد، کل این کار با $m_1 \times m_2 \times ... \times m_k$ روش قابل انجام است.

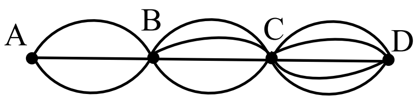
مثال ۶ برای سفر از تهران به چالوس، ۲ مسیر از تهران تا کرج و ۴ مسیر از کرج تا چالوس وجود دارد. چند انتخاب برای سفر به چالوس با عبور از کرج وجود دارد؟

مثال ۷ در یک رستوران ۶ نوع پیش غذا، ۵ نوع غذا و ۲ نوع دسر وجود دارد. به چند روش می توان یک پیش غذا، یک نوع غذا و یک نوع دسر انتخاب کرد؟

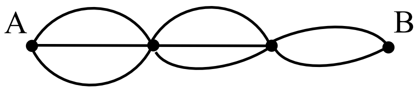
مثال ۸ میلاد می خواهد در یک آزمون با ۵ سوال ۴ گزینه ای شرکت کند. چند روش برای امتحان دادن وجود دارد؟ (لازم است به همه سوالات پاسخ داده شود)

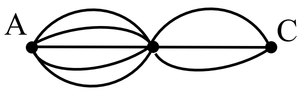
مثال ۹ به چند طریق می توان به یک آزمون با ۳۰ سوال ۲ گزینه ای پاسخ داد؟ (لازم است به همه سوالات پاسخ داده شود)

مثال ۱۰ برای رفتن از شهر A به شهر B سه مسیر، برای رفتن از B به C چهار مسیر و برای رفتن از C به D پنج مسیر مطابق شکل وجود دارد. به چند طریق می توان از A به D رفت و برگشت به طوری که از هر جاده حداکثر یک بار عبور کنیم.



مثال ۱۱ خانواده ای می خواهد برای تعطیلات به مسافرت برود. او می تواند مقصد B یا C را انتخاب کند. برای هر مقصد مطابق شکل زیر جهت عبور از شهرهای بین راهی تعدادی مسیر وجود دارد. او به چند طریق می تواند مسیری برای سفر خود انتخاب کند؟





مثال ۱۲ به چند طریق می توان رمزی سه حرفی با استفاده از حروف فارسی و انگلیسی ساخت که حروف هم زبان کنار هم نباشند؟

مثال ۱۳ به چند طریق می توان با ارقام $\{1,4,5\}$ یک عدد سه رقمی ساخت؟

مثال ۱۴ به چند طریق می توان با ارقام $\{2,3,7\}$ یک عدد سه رقمی بدون تکرار ارقام ساخت؟

مثال ۱۵ با ارقام $\{1,2,3,4,5,0\}$ چند عدد چهار رقمی می توان نوشت به طوری که : (ارقام تکراری نباشند)

الف) هیچ شرط خاصی برای ارقام نداشته باشیم.

ب) فرد باشد.

پ) زوج باشد.

ت) مضرب ۵ باشد.

ث) بزرگتر از ۴۰۰۰ باشد.

ج) بزرگتر از ۳۰۰۰ و کوچکتر از ۵۰۰۰ باشد.

مثال ۱۶ با ارقام $\{1,2,3,4,5,0\}$ چند عدد سه رقمی با رقم های متمایز می توان نوشت که

الف) زوج باشد.

ب) بزرگتر از ۲۴۰ باشد.

مثال ۱۷ یک آزمون چند گزینه ای شامل ۱۰ سوال چهارگزینه ای و ۵ سوال دو گزینه ای (بله - خیر) است. فردی قصد دارد به صورت تصادفی به سوالات پاسخ دهد. او به چند روش می تواند این کار را انجام دهد اگر:

الف) بخواهد به همه سوالات پاسخ دهد.

ب) امکان پاسخ ندادن به سوالات نیز وجود داشته باشد.

مثال ۱۸ با حروف کلمه "computer" چند کلمه ۵ حرفی می توان نوشت که حرف اول آن بی صدا باشد؟

۱) ۴۲۰۰

۲) ۳۸۰۰

۳) ۲۴۰۰

۴) ۱۲۰۰

مثال ۱۹ تعداد کلمات چهارحرفی که با حروف کلمه "پرستیژ" می توان ساخت به طوری که حرف اول نقطه دار بوده و حرف آخر نقطه دار نباشد کدام است؟

۱) ۴۱۲

۲) ۳۲۴

۳) ۲۸۸

۴) ۴۳۲

معرفی نماد فاکتوریل: اگر n یک عدد طبیعی باشد، حاصل ضرب اعداد طبیعی و متوالی از n تا ۱ را با $n!$ نشان می دهیم و n-فاکتوریل می خوانیم.

$۰!=۱$ $\quad$ $۳!=۳\times۲\times۱$ $\quad$ $۲!=۲\times۱$ $\quad$ $۱!=۱$

$$n!=n(n-۱)(n-۲)...\times۳\times۲\times۱$$

مثال ۲۰ محاسبه کنید.

$۴!=$ $\qquad$ $۵!=$

نکته

$$n!=n(n-۱)!$$

مثلا: $۴!=۴\times\underbrace{۳\times۲\times۱}_{۳!}=۴\times۳!$. همچنین می توان نوشت: $۴!=۴\times۳\times۲!$.

از این نکته برای ساده کردن کسرهای شامل فاکتوریل استفاده می کنیم.

مثال ۲۱ کسرهای زیر را ساده کنید.

الف) $\dfrac{۸!}{۳!}$ $\qquad$ ب) $\dfrac{۷!}{۵!}$

پ) $\dfrac{۶!}{۲!\,۳!}$ $\qquad$ ت) $\dfrac{(n+۱)!}{n!}$

ث) $\dfrac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$ $\qquad$ ج) $\dfrac{n!}{(n-۴)!}$

چ) $\dfrac{n!}{(n-k)!}$

مثال ۲۲ به کمک فاکتوریل بنویسید.

الف) $۹\times۸=\dfrac{۹!}{۷!}$ $\qquad$ ب) $۹\times۸\times۷\times۶=$

پ) $۸=$ $\qquad$ ت) $n(n-۱)=$

ث) $۱۱\times۱۰\times۹=$ $\qquad$ ج) $n(n-۱)(n-۲)(n-۳)=$

درس دوم: جایگشت

جایگشت(permutation): قرار گرفتن تعدادی شیء کنار هم.

تعداد جایگشت های n شیء متمایز برابر است با $n!$.

مثال ۲۳ تعداد جایگشت های حروف کلمه "اردیبهشت" را بدست آورید.

توجه *در جایگشت، ترتیب قرار گرفتن اشیاء یا افراد کنار هم مهم است، بنابراین در حروف، کلمات و اعداد و ارقام از جایگشت استفاده می‌کنیم.*

مثال ۲۴ الف) ۱۰ نفر به چند طریق می توانند برای گرفتن بلیط یک فیلم در صف بایستند؟

ب) تعداد جایگشت های حروف کلمه "دریا" را بدست آورید.

مثال ۲۵ به چند طریق ۷ نفر می توانند دور یک میز گرد برای برگزاری یک سمینار بنشینند؟

نکته *تعداد حالت های قرار گرفتن n شیء به صورت دایره ای کنار هم $(n-1)!$ است.*

مثال ۲۶ ۵ نفر به چند حالت می توانند به صورت دایره ای بایستند؟

مثال ۲۷ ۵ دوست که دو تای آنها خواهر هستند، می خواهند برای گرفتن عکس کنار هم بایستند. به چند طریق می توان این کار را انجام داد اگر:

الف) دو خواهر کنار هم بایستند.

ب) دو خواهر اول و آخر ردیف بایستند.

مثال ۲۸ حروف کلمه "PANAMA" را به چند طریق می توان کنار هم قرار داد به طوری که هر سه حرف A مجاور باشند؟ (گزینه دو-۹۳)

۱) !۳

۲) !۳ !۳

۳) !۴

۴) !۳ !۴

مثال ۲۹ با حروف کلمه "computer" چند کلمه ۸ حرفی با حروف متمایز می توان ساخت که با حرف m شروع شود و سه حرف r و e و t کنار هم قرار بگیرند؟ (گاج ۹۶)

۱) !۵

۲) !۶

۳) !۳!۶

۴) !۷

مثال ۳۰ تعداد کلمات ۵ حرفی با حروف کلمه "computer" را بیابید.

جایگشت های r تایی از n شیء: تعداد جایگشت های r تایی از n شیء متمایز که همان تعداد انتخاب های r شیء از بین n شیء متمایز است، که در آن ها ترتیب مهم باشد برابر است با:

$$p(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال ۳۱ الف) به چند طریق می توان با حروف کلمه "قاب عکس" یک کلمه سه حرفی ساخت؟

ب) به چند روش می توان ۵ کتاب را از بین ۷ کتاب انتخاب و آن ها را در کتابخانه کنار هم چید؟

مثال ۳۲ در یک همایش ۵ نفر جهت سخنرانی ثبت نام کرده اند. چند طریق برای ترتیب سخنرانی آنها وجود دارد به طوری که بین سخنرانی دو فرد مورد نظر a و b فقط یک نفر سخنرانی کند؟ (کنکور)

۱) ۲۰

۲) ۲۴

۳) ۳۶

۴) ۴۰

مثال ۳۳ با حروف کلمه "آهنگری" چند کلمه ۶ حرفی می توان نوشت که حروف کلمه "گنه" کنار هم باشند؟ (سراسری تجربی ۴۰۳)

۱) ۲۴ ۲) ۷۲

۳) ۱۴۴ ۴) ۲۱۶

نکته

$p(n,n-1)=n!$ $\qquad$ $p(n,n)=n!$

جایگشت با تکرار:

اگر n شیء داشته باشیم که k_1 تا از آنها از یک نوع، k_2 تا از آنها از یک نوع و ... k_t تا از آنها از یک نوع باشند، تعداد جایگشت های این n شیء برابر است با $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!}$.

مثال ۳۴ تعداد جایگشت های حروف کلمه "شهریور" را بیابید.

مثال ۳۵ چند عدد شش رقمی با ارقام ۲ و ۲ و ۳ و ۳ و ۲ و ۱ می توان نوشت؟

مثال ۳۶ گردشگر به چند روش می توانند در سه چادر ۲ و ۳ و ۴ نفره استراحت کنند؟

مثال ۳۷ ۱۲ دانش آموز شرکت کننده در یک اردو را به چند طریق می توان در اتاق های ۵ و ۳ و ۴ نفره یک هتل جای داد؟

درس سوم: ترکیب

ترکیب (combination): در انتخاب r شیء از بین n شیء متمایز وقتی ترتیب قرار گرفتن اشیاء کنار هم اهمیتی نداشته باشد:

$$c(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad 0\le r\le n$$

مثال ۳۸ به چند طریق می توان از بین ۷ شاخه گل مختلف، ۳ شاخه گل انتخاب کرد؟

مثال ۳۹ به چند طریق می توان از بین ۱۲ نفر حاضر در یک کلاس، ۵ نفر را برای بردن به اردو انتخاب کرد؟

مثال ۴۰ به چند طریق می توان از بین ۶ کتاب مختلف، ۴ کتاب انتخاب کرد به طوری که:

الف) بخواهیم در یک قفسه کنار هم بچینیم.

ب) برای هدیه دادن به یک نفر انتخاب کنیم.

مثال ۴۱ در یک دوره مسابقات کشتی از بین ۴ داور ایرانی، ۳ داور ژاپنی و ۲ داور روسی قرار است کمیته ای از داوران تشکیل شود. به چند روش می توان این کار را انجام داد اگر:

الف) کمیته ۴ نفره باشد؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر یک از سه کشور یک نفر در کمیته باشد؟

پ) کمیته ۵ نفره باشد و دقیقا ۲ داور ایرانی داشته باشد؟

ت) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل ۳ داور ایرانی داشته باشد؟

ث) کمیته ۷ نفره باشد و شامل ۳ داور ایرانی، ۲ داور ژاپنی و ۲ داور روسی باشد؟

ج) کمیته ۵ نفره باشد و حداقل یک داور ایرانی داشته باشد؟

مثال ۴۲ از میان ۸ ریاضی دان و ۶ فیزیک دان و ۵ شیمی دان قرار است کمیته ای علمی انتخاب شود. به چند طریق این کمیته می تواند انتخاب شود هرگاه:

الف) کمیته ۶ نفره باشد و از هر رشته ۲ نفر در آن عضو باشند؟

ب) کمیته ۳ نفره باشد و از هر رشته حداقل یک نفر در آن عضو باشند.

پ) کمیته ۲ نفره باشد و حداقل یک ریاضی دان در آن باشد؟

مثال ۴۳ روی محیط یک دایره هفت نقطه وجود دارد.

الف) چند وتر روی دایره می توان با این نقاط رسم کرد؟

ب) چند مثلث می توان با این نقاط رسم کرد؟

مثال ۴۴ تعداد زیرمجموعه های ۳ عضوی از یک مجموعه ۵ عضوی را بیابید.

مثال ۴۵ در کیسه ای ۵ مهره سفید، ۴ مهره سیاه و ۳ مهره قرمز داریم. ۳ مهره به تصادف انتخاب می کنیم. مطلوب است تعداد حالت هایی که:

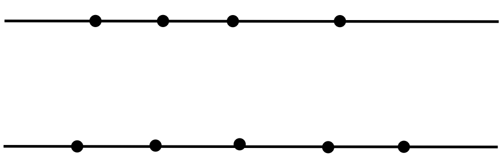
الف) هر سه مهره سفید باشند.

ب) هر سه مهره همرنگ باشند.

پ) مهره ها از سه رنگ متفاوت باشند.

ت) فقط یکی از مهره ها سفید باشد.

مثال ۴۶ از بین نقاط زیر به چند طریق می توان ۳ نقطه انتخاب کرد و مثلث تشکیل داد:



چند ویژگی مهم ترکیب

۱) $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

۲) $\binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

۳) $\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$

۴) $\binom{n}{r}+\binom{n}{r+1}=\binom{n+1}{r+1}$ قانون پاسکال

۵) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\dots+\binom{n}{n}=2^n$

تعداد زیرمجموعه های یک مجموعه n عضوی

مثال ۴۷ به کمک ویژگی های بالا محاسبه کنید.

$\binom{7}{1}=$ $\binom{7}{6}=$ $\binom{7}{0}=$

$\binom{5}{3}=$ $\binom{5}{2}=$ $\binom{5}{5}=$

$\binom{6}{2}+\binom{6}{3}+\binom{7}{4}=$ $\binom{5}{2}+\binom{5}{3}=$

$\binom{10}{0}+\binom{10}{1}+\dots+\binom{10}{10}=$

$\binom{6}{1}+\binom{6}{2}+\dots+\binom{6}{5}=$

مثال ۴۸ الف) اگر $p(n,۲) = ۲۰$ باشد، حاصل $(n-۳)!$ را بیابید.

ب) اگر $p(n,k) = ۶c(۹,k)$ باشد، مقدار k را بیابید.

مثال ۴۹ در هر یک از معادلات زیر مقدار n را بیابید.

الف) $\dfrac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۵۶$

ب) $\dbinom{n+۱}{n-۱} = ۲۱$

مثال ۵۰ گل فروشی از ۸ نوع گل مختلف به چند طریق می تواند دسته گل های متمایز درست کند به طوری که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف موجود باشد؟ (سراسری تجربی ۹۸)

۱) ۱۲۶

۲) ۱۴۰

۳) ۱۵۴

۴) ۱۶۸

مثال ۵۱ از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می توان از بین آنها ۳ نفر انتخاب کرد به طوری که هیچ دو نفر انتخاب شده، از یک مدرسه نباشند؟ (تجربی خارج ۹۸)

۱) ۱۳۵

۲) ۲۷۰

۳) ۳۲۰

۴) ۶۴۰

مثال ۵۲ به چند طریق می توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب دریافت کنند؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) ۱۰۵

۲) ۱۲۵

۳) ۱۳۵

۴) ۱۵۰

مثال ۵۳ به چند طریق می توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به طوری که ۲ نفر آنها نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) ۸۴

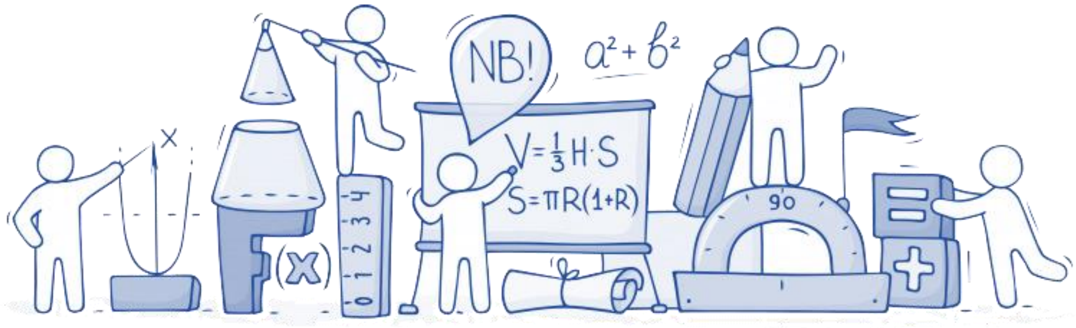
۲) ۸۷

۳) ۹۱

۴) ۹۵

فصل هفتم

آمار و احتمال



درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس

پدیده تصادفی: پدیده ای که نتیجه آن را می توان با قطع و یقین پیش بینی کرد.

فضای نمونه (S): مجموعه همه حالت هایی که در یک پدیده تصادفی رخ می دهد. تعداد اعضای فضای نمونه را با n(S) نشان می دهیم.

مثال ۱ فضای نمونه مربوط به پرتاب یک سکه، یک تاس، دو سکه، دو تاس، سه فرزند، و یک تاس و یک سکه با هم را بنویسید.

پیشامد: هر زیرمجموعه ای از فضای نمونه ای را یک پیشامد تصادفی می نامیم.

مثال ۲ در پرتاب دو تاس با هم پیشامدهای خواسته شده زیر را بنویسید.

الف) مجموع تعداد رو شده در دو تاس ۶ باشد.

ب) اعداد رو شده یکسان باشند.

پ) اعداد رو شده زوج باشند.

ت) اعداد رو شده اول باشند.

ث) مجموع اعداد رو شده کمتر از ۱۱ باشد.

مثال ۳ در پرتاب دو تاس پیشامد آنکه حداقل یک بار "رو" بیاید را بنویسید.

مثال ۴ خانواده ای دارای ۴ فرزند است. تعداد عضوهای فضای نمونه را مشخص کنید و پیشامد آن که فرزندان یک در میان دختر . پسر باشند را بنویسید.

مثال ۵ در کیسه ای ۳ مهره زرد و ۲ مهره بنفش وجود دارد. ۳ مهره از داخل آن بیرون می آوریم. فضای نمونه چند عضو دارد؟

پیشامد آنکه مهره ها همرنگ باشند چند عضو دارد؟

مثال ۶ در پرتاب یک تاس و یک سکه با هم پیشامدهای زیر را بنویسید.

الف) تاس عدد زوج و سکه پشت بیاید.

ب) تاس عدد زوج یا سکه پشت بیاید.

احتمال رخ دادن یک پیشامد: اگر S فضای نمونه و A پیشامدی از آن باشد، احتمال وقوع پیشامد A از رابطه زیر به دست می آید:

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

توجه: از آن جایی که $A\subseteq S$ است، پس $0\le n(A)\le n(S)$ و در نتیجه: $0\le p(A)\le 1$.

مثال ۷ خانواده ای دارای ۳ فرزند است. فضای نمونه آن را بنویسید و سپس احتمالات زیر را به دست آورید.

الف) فرزند اول دختر باشد.

ب) فرزندان یک در میان دختر و پسر باشند.

پ) دقیقا دو فرزند پسر باشند.

ت) حداقل دو فرزند پسر باشند.

ث) حداکثر یک فرزند دختر باشد.

مثال ۸ در پرتاب دو تاس با هم احتمال اینکه

الف) مجموع اعداد رو شده ۱۲ باشد را به دست آورید.

ب) حاصل ضرب اعداد رو شده حداکثر ۳۶ باشد را بیابید.

مثال ۹ با ارقام ۲ و ۳ و ۵ اعداد سه رقمی متمایز نوشته ایم و یکی را به تصادف انتخاب کرده ایم. احتمال اینکه عدد انتخابی مضرب ۵ باشد چقدر است؟

مثال ۱۰ اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه S باشند و $A \subseteq B$، ثابت کنید $p(A) \leq p(B)$.

مثال ۱۱ در آزمایشگاهی ۳ موش سفید و ۵ موش سیاه نگهداری می شوند. اگر به طور تصادفی ۴ موش از بین آنها جهت آزمایش انتخاب شود، با کدام احتمال فقط یکی از موش های مورد آزمایش سفید است؟

مثال ۱۲ در ظرفی ۴ مهره سفید و ۵ مهره سیاه موجود است. به تصادف ۳ مهره از ظرف خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره های خارج شده همرنگ هستند؟ (سراسری تجربی ۹۲)

۱) $\frac{1}{6}$ ۲) $\frac{3}{14}$

۳) $\frac{2}{9}$ ۴) $\frac{5}{14}$

عملیات روی پیشامدها و احتمالات آنها

۱) اجتماع دو پیشامد A و B: حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهند:

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-P(A\cap B)$$

۲) اشتراک دو پیشامد A و B: هر دو پیشامد A و B با هم رخ دهند.

پیشامدهای ناسازگار: پیشامدهای A و B را ناسازگار گوییم اگر هیچ اشتراکی با هم نداشته باشند:

$$A\cap B=\phi$$

$$\Rightarrow p(A\cap B)=\circ \Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)$$

برای مثال، در پرتاب یک تاس، دو پیشامد "زوج بودن عدد رو شده" و "فرد بودن عدد رو شده" ناسازگارند.

پیشامدهای مستقل: دو پیشامد A و B را مستقل گوییم اگر رخ دادن یکی در رخ دادن دیگری تاثیری نداشته باشد، در این صورت داریم:

$$p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$$

برای مثال، پیشامدهای "قبولی رها در امتحان ریاضی ۱" و " قبولی یاسمن در امتحان ریاضی ۱" دو پیشامد مستقل هستند.

۳) متمم یک پیشامد: پیشامد A رخ ندهد: $p(A')=1-p(A)$

مثال ۱۳ نشان دهید اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، آن گاه A و B و A' و B' دو به دو نسبت به هم مستقل هستند.

۴) تفاضل دو مجموعه: پیشامد $A-B$ یعنی A رخ دهد و B رخ ندهد:

$$p(A-B)=p(A)-p(A\cap B)$$

مثال ۱۴ در گروه زنان ساکن در روستا، ۶۰ درصد آنان تحصیلات ابتدایی و ۲۵ درصد آنها مهارت قالی بافی دارند. اگر یک فرد از این گروه انتخاب شود، با کدام احتمال این فرد تحصیلات ابتدایی یا مهارت قالی بافی دارد؟ (سراسری تجربی ۹۰)

۱) ۰/۷

۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۸

۴) ۰/۸۵

مثال ۱۵ ۳۰ درصد افراد جامعه ای گروه خونی A و ۲۰ درصدشان گروه خونی B دارند. اگر فردی به نصادف از این جامعه انتخاب شود، با چه احتمالی گروه خونی A یا B دارد؟

مثال ۱۶ اگر $p(A)=\frac{۱}{۴}$ ، $p(B)=\frac{۲}{۳}$ و $p(A\cap B)=\frac{۱}{۱۲}$ باشد، حاصل $p(A\cup B)$ را بیابید.

مثال ۱۷ اگر $p(A')=\frac{۳}{۵}$ و $p(B)=\frac{۱}{۵}$ و A و B ناسازگار باشند، $p(A\cup B)$ را بیابید.

مثال ۱۸ اگر $p(A\cup B)=\frac{۵}{۱۲}$ ، $p(A')=\frac{۲}{۳}$ و $p(B)=\frac{۱}{۴}$ باشد، $p(A\cap B)$ را بدست آورید.

مثال ۱۹ اگر $p(A)=۰/۶$ ، $p(B)=۰/۷$ و $p(A\cap B')=۰/۲$ باشند، آنگاه $p(A'\cap B)$ را بیابید.

مثال ۲۰ از جعبه ای حاوی ۴ مهره سفید و ۳ مهره سیاه متوالی و بدون جایگذاری، ۳ مهره خارج می کنیم. با کدام احتمال مهره های اول و سوم همرنگ هستند؟ (گزینه دو ۹۱)

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۴}{۷}$

۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱۲}{۲۹}$

مثال ۲۱ در ظرفی ۴ مهره آبی، ۳ مهره قرمز و ۲ مهره سفید موجود است. به تصادف ۳ مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال حداقل یک مهره آبی خارج می شود؟ (سراسری)

مثال ۲۲ ۵ کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده اند. با کدام احتمال کتاب های هم زبان، کنار هم قرار می گیرند؟ (سراسری تجربی ۹۹)

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$

۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

مثال ۲۳ ۱۰ نفر در یک صف ایستاده اند. با کدام احتمال دو فرد مورد نظر از آن ها در کنار هم <u>نیستند</u>؟ (تجربی خارج ۹۹)

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

مثال ۲۴ در جعبه ای ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون دیدن خارج می کنیم. سپس از بین بقیه مهره ها ۲ مهره بیرون می کشیم. با کدام احتمال هر دو مهره اخیر، سفید هستند؟ (سراسری تجربی ۹۸)

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$

۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲۲}$

مثال ۲۵ ظرف A شامل ۵ مهره با شماره های یک رقمی فرد و ظرف B دارای ۴ مهره با شماره های یک رقمی زوج غیر صفر است. از هر ظرف یک مهره بیرون می آوریم. با کدام احتمال حاصل ضرب آن ها از ۱۰ بیشتر است؟ (سراسری ریاضی)

۱) ۰/۶ ۲) ۰/۷

۳) ۰/۶۵ ۴) ۰/۷۵

مثال ۲۶ دو تاس را پرتاب می کنیم. با کدام احتمال اعداد ظاهر شده متوالی و برابر <u>نیستند</u>؟ (سراسری تجربی ۰۳)

۱) $\frac{۵}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۹}$

۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۱}{۶}$

درس دوم: مقدمه ای بر علم آمار، جامعه و نمونه

آمار: مجموعه ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

علم آمار: مجموعه روش هایی است که شامل **جمع آوری اعداد و ارقام**، **سازماندهی و نمایش و تحلیل و تفسیر داده ها** و در نهایت **نتیجه گیری، قضاوت و پیش بینی** مناسب در مورد پدیده ها و آزمایش های تصادفی است.

جامعه یا جمعیت: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که درباره یک یا چند ویژگی آن ها تحقیق صورت می گیرد. به هر یک از افراد یا اشیاء عضو جامعه می گویند.

اندازه یا حجم جامعه: تعداد اعضای جامعه را اندازه جامعه یا حجم جامعه گویند.

نمونه: بخشی از یک جامعه که برای مطالعه انتخاب می شود را نمونه گوییم. هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده را عضو نمونه گوییم.

اندازه یا حجم نمونه: تعداد اعضای نمونه را اندازه نمونه یا حجم نمونه گویند.

سرشماری: اگر همه افراد یک جامعه را مورد بررسی و تحقیق قرار دهیم، سرشماری کرده ایم.

مثال ۲۷ می خواهیم در مورد کیفیت محصولات تولیدی یک کارخانه تحقیقی انجام دهیم. برای این منظور از تعداد کل قطعات تولید شده در کارخانه که برابر با ۱۰۰۰۰ قطعه است، ۱۰۰ قطعه انتخاب می شود. با توجه به اطلاعات موجود، جدول زیر را کامل کنید.

ویژگی مورد بررسی	اندازه نمونه	اندازه جامعه	جامعه

مثال ۲۸ کدام جمله درست و کدام نادرست است؟

الف) اندازه جامعه کمتر از اندازه نمونه است.

ب) اعضای نمونه همان اعضای جامعه اند.

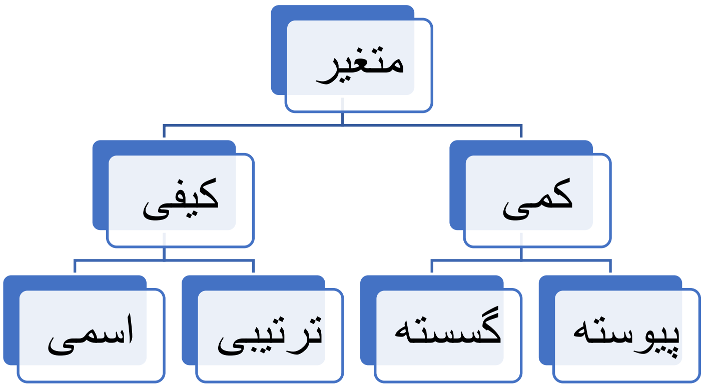
پ) نمونه، زیر مجموعه ای از جامعه است.

درس سوم: متغیر و انواع آن

متغیر: یک ویژگی از اعضای یک جامعه است که بررسی و مطالعه می شود و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می کند.

مقداری که یک متغیر به خود اختصاص می دهد، مقدار متغیر است.

انواع متغیر:



متغیر کمی: متغیری که قابل اندازه گیری است.

- **کمی پیوسته:** بین هر دو مقدار می تواند مقدار دیگری نیز بگیرد.
- **گسسته:** بین هر دو مقدار نمی تواند مقدار دیگری بگیرد.

متغیر کیفی: متغیری که قابل اندازه گیری نیست.

- **ترتیبی:** نوعی ترتیب طبیعی در آن وجود دارد.
- **اسمی:** هیچ ترتیب ذاتی در آن وجود ندارد.

مثال ۲۹ نوع متغیرهای زیر را مشخص کنید. (کمی (گسسته - پیوسته)، کیفی (ترتیبی – اسمی))

الف) سن کارمندان یک بخش شرکت

ب) مراحل رشد یک انسان (کودک- نونهال- نوجوان- جوان- میانسال- کهن سال)

پ) رنگ پوست افراد (سفید- زرد- سیاه)

ت) رنگ موی افراد (مشکی- قهوه ای- بلوند)

ث) کیفیت هلوی یک باغ (درجه ۱- درجه ۲- درجه ۳)

ج) میزان بارندگی در یک شهر بر حسب سانتی متر

چ) انواع بارندگی (برف- باران)

ح) تعداد شهرهایی که در یک روز هوای آفتابی دارند

خ) گروه خونی افراد یک خانواده

د) انواع وضعیت هوا (آفتابی- ابری- بارانی- برفی)

ذ) شدت بارندگی (کم- متوسط- زیاد)

ر) سن دانش آموزان یک کلاس

ز) نمره ریاضی پایه دهم در یک مدرسه

س) قد و وزن دانشجویان یک دانشکده

ش) رنگ ماشین های یک نمایشگاه اتومبیل

ص) جنسیت کارمندان یک اداره

ض) مدرک تحصیلی یک فرد در طول زندگی (دیپلم- لیسانس- فوق لیسانس- دکترا)

ط) فشار هوا در قله کوه

ظ) مدت مکالمه تلفنی در یک روز در یک مرکز مشاوره