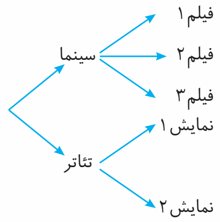
پاسخنامه
سؤالات تشریحی
بخش ۱

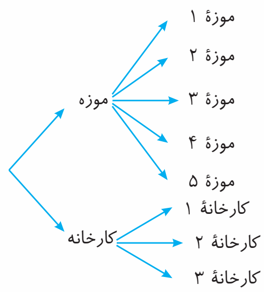
۱- آسان

طبق اصل جمع به پنج طریق ۵ = ۲ + ۳ عصر خود را سپری می‌کند.



۲- آسان

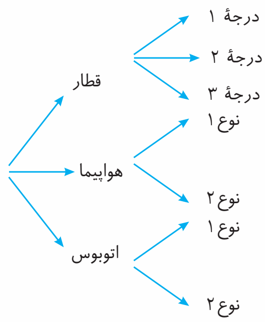
طبق اصل جمع به ۸ = ۳ + ۵ طریق این اردو می‌تواند برگزار شود.



۳- آسان

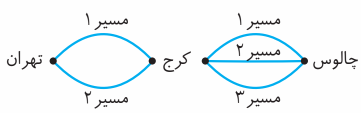
طبق اصل جمع به ۷ طریق این سفر انجام می‌شود.

۳ + ۲ + ۲ = ۷



۴- آسان

طبق اصل ضرب به ۶ طریق می‌تواند مسیر را طی کند. ۶ = ۳ × ۲



۵- آسان

به ازای ۱ نوع پیش غذا، ۵ انتخاب غذا و هر انتخاب غذا ۴ انتخاب دسر دارد و به همین ترتیب برای نوع دوم و سوم غذا هم همینطور. پس طبق اصل ضرب ۶۰ = ۴ × ۳ × ۵ مدل مختلف می‌تواند سفارش دهد.

۶- آسان

حروف کلمهٔ دانشجو، ۶ حرف می‌باشد پس در اولین انتخاب ۶ حالت داریم چون حروف بدون تکرار است در انتخاب دوم ۵ حالت و در انتخاب سوم ۴ حالت موجود است و به همین ترتیب تا انتخاب ششم داریم:

$\underline{۶} \times \underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۷۲۰$

۷- آسان

در انتخاب اول ۸ انتخاب داریم در بعدی ۷ حرف و در سومین مرحله ۶ حرف بنابراین:

$\underline{۶} \times \underline{۷} \times \underline{۸} = ۳۳۶$

۸- آسان

در اولین رقم ۵ انتخاب داریم و در هر مرحله به دلیل مجاز نبودن تکرار یک رقم کم می‌شود، یعنی داریم:

$\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۶۰$

۹- متوسط

حداقل = ۸۰۰۰ = ۲۰ × ۱۰ × ۸ × ۵

حداکثر ۱۸۰۰۰ = ۳۰ × ۱۲ × ۱۰ × ۵

۱۰- دشوار

آ) هر راس دو رنگ دارد پس تعداد حالات ۲ × ۲ × ۲ یعنی ۸ تاست.

ب) چون کلاً دو رنگ داریم امکان اینکه راس‌ها رنگ متفاوت داشته باشند وجود ندارد. بنابراین تعداد حالت‌ها صفر است.

پ) اگر تعداد رنگ‌ها ۳ باشد برای حالت اول ۳ × ۳ × ۳ یعنی ۲۷ طریق ممکن است. اما برای همرنگ بودن ۲ × ۲ × ۳ طریق یعنی ۱۲ طریق وجود دارد.

۱۱- متوسط

مجموعه A نه عضو، مجموعه B هم نه عضو و مجموعه C، ۱۳ عضو دارد.

تعداد حالات برابر است با:

۶۹۰۸۷۳۳ = ۹ × ۹ × ۹ × ۹ × ۱۳ × ۹ × ۹

۱۲- آسان

آ) ۳۰۰ = ۲ × ۳ × ۱۰ × ۵

ب) ۳۰ = ۲ × ۳ × ۱ × ۵

پ) ۱۵ = ۱ × ۳ × ۱ × ۵

۱۳- متوسط

آ) ۱۰×۴+۵×۲=۵۰

ب) ۱۰×۵+۵×۳=۶۵

۱۴- آسان

۲×۲+۲×۳×۱=۱۰

۱- گزینه «۳» آسان

برای آن که عدد مضرب ۵ باشد، رقم یکان الزاماً باید ۵ باشد، بنابراین تعداد حالات:

□ □ □ ۵

۶×۵×۴×۱=۱۲۰

۲- گزینه «۲» آسان

مسئله را در ۲ حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: رقم یکان ۰ باشد.

۴×۳×۲×۱=۲۴ (۰)

حالت دوم: رقم یکان ۲ یا ۴ باشد.

۳×۳×۲×۲=۳۶ (۲ یا ۴)

بنابراین طبق اصل جمع ۶۰=۳۶+۲۴ عدد ۴ رقمی زوج بدون تکرار می‌توان نوشت.

۳- گزینه «۲» متوسط

حروف بدون نقطه «م، ا، هـ، ر» می‌باشد، همچنین اگر حرف «ی» در آخر کلمه باشد، جزء حروف بدون نقطه است.

۳ × ۳ × ۴ = ۳۶

حرف سوم، حرف دوم، حرف اول

۴- گزینه «۳» آسان

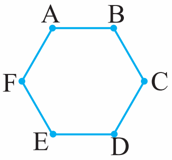
مسیر A → D : ۳

مسیر A → B → D : ۴×۲=۸

A → B → C → D : ۴×۱×۲=۸

۳+۸+۸=۱۹

۵- گزینه «۳» متوسط



از رأس A شروع می‌کنیم، رأس A می‌تواند هر یک از ۴ رنگ باشد، بنابراین برای رأس A، ۴ حالت وجود دارد.

رأس D مقابل رأس A است، بنابراین الزاماً باید هم رنگ رأس A باشد، بنابراین برای رأس D، ۱ حالت وجود دارد.

رأس B به رأس A وصل است، بنابراین نباید هم رنگ رأس A باشد، بنابراین برای رأس B، ۳ حلت وجود دارد.

رأس E مقابل رأس B است، بنابراین الزاماً باید هم رنگ رأس B باشد، بنابراین برای رأس E، ۱ حالت وجود دارد.

رأس C، به رأس‌های D,B وصل است، بنابراین نباید هم رنگ رئوس A و C باشد، بنابراین برای رأس C، ۲ حالت وجود دارد.

رأس F مقابل رأس C است، بنابراین الزاماً باید هم رنگ رأس C باشد، بنابراین برای رأس F، ۱ حالت وجود دارد. بنابراین طبق اصل ضرب:

A B C D E F

۴×۳×۲×۱×۱×۱=۲۴

۶- گزینه «۲» دشوار

عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد. با توجه به ارقام داده شده در مسئله این اعداد شامل ۵۲ و ۴۰ و ۳۲ و ۲۰ و ۱۲ و ۰۴ است. مسئله را در دو حالت در نظر می‌گیریم:

۴ ۰
۲ ۰
۰ ۴

۴×۳×۳=۳۶

حالت دوم: این اعداد شامل ۵۲ و ۳۲ و ۲۴ و ۱۲ می‌باشد.

۵ ۲
۱ ۲
۳ ۲

۴×۳×۳=۳۶

طبق اصل جمع:

۳۶+۳۶=۷۲

۷- گزینه «۳» متوسط

ارقام متمایز و فرد عبارتند از {۱,۳,۵,۷,۹}. با این ارقام می خواهیم اعداد چهار رقمی بزرگتر از ۳۰۰۰ بسازیم پس بدیهی است که رقم سمت چپ عدد ۱ نمی تواند باشد.

۴ × ۴ × ۳ × ۲ = ۹۶

۸- گزینه «۱» — متوسط

طرز قرار گرفتن کتاب‌ها نسبت به یکدیگر با توجه به شرایط سؤال یکی از دو حالت زیر است:

$\text{I)}\ RRARAR \Rightarrow ۴!\times ۲! = ۴۸$

$\text{II)}\ RARARR \Rightarrow ۴!\times ۲! = ۴۸$

کل حالات ۹۶ حالت است.

پاسخنامه سؤالات تشریحی — بخش ۲

۱- — آسان

آ) $\frac{۱۷!}{۱۶!} = \frac{۱۷\times ۱۶!}{۱۶!} = ۱۷$

ب) $\frac{۲۵!}{۲۴!} = \frac{۲۵\times ۲۴!}{۲۴!} = ۲۵$

پ) $\frac{۱۵!}{۱۷!} = \frac{۱۵!}{۱۷\times ۱۶\times ۱۵!} = \frac{۱}{۱۷\times ۱۶} = \frac{۱}{۲۷۲}$

۲- — متوسط

آ) $\frac{n!}{(n-۲)!} = \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!} = n(n-۱) = n^۲ - n$

ب) $\frac{k!(k+۲)!}{(k-۱)!(k+۱)!} = \frac{k(k-۱)!(k+۲)(k+۱)!}{(k-۱)!(k+۱)!} = k(k+۲) = k^۲ + ۲k$

۳- — آسان

$n(n-۱)(n-۲)(n-۳) = \frac{n!}{(n-۴)!}$

۴- — متوسط

آ) $۹\times ۸\times ۷\times ۶ = \frac{۹!}{۵!}$

ب) $۱۱\times ۱۰\times ۹ = \frac{۱۱!}{۸!}$

پ) $۸ = \frac{۸!}{۷!}$

ت) $n(n-۱) = \frac{n!}{(n-۲)!}$

پاسخنامه سؤالات تستی — بخش ۲

۱- گزینه «۳» — آسان

$\frac{۹!}{۷!}+\frac{۷!}{۵!}+\frac{۵!}{۳!}+\frac{۳!}{۱!} = \frac{۹\times ۸\times ۷!}{۷!}+\frac{۷\times ۶\times ۵!}{۵!}+\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۳!}+\frac{۳\times ۲\times ۱!}{۱!}$

$= (۹\times ۸)+(۷\times ۶)+(۵\times ۴)+(۳\times ۲) = ۱۴۰$

۲- گزینه «۱» — آسان

$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)(n)(n-۱)!}{(n-۱)!} = n(n+۱)$

۳- گزینه «۲» — متوسط

$\frac{n!+(n+۱)!}{(n+۱)!-n!} = \frac{n!+(n+۱)n!}{(n+۱)n!-n!} = \frac{n!(۱+n+۱)}{n!(n+۱-۱)} = \frac{n+۲}{n}$

۴- گزینه «۴» — متوسط

$(۷^۳-۷)\times(۵^۲-۵) = ۷(۷^۲-۱)\times ۵(۵^۲-۱)$

$= ۷(۷-۱)(۷+۱)\times ۵(۵-۱)(۵+۱)$

$= ۷\times ۶\times ۸\times ۵\times ۴\times ۶ = ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times ۶\times ۷\times ۸ = ۸!$

۵- گزینه «۲» — دشوار

$۱\times ۱!+۲\times ۲!+...+n(n!)$

$= (۲-۱)\times ۱!+(۳-۱)\times ۲+(۴-۱)\times ۳!+...(n+۱-۱)n!$

$= ۲\times ۱!-۱\times ۱!+۳\times ۲!-۱\times ۲!+۴\times ۳!-۱\times ۳!+...+(n+۱)n!-n!$

$۲!-۱!+۳!-۲!-۳!+...+(n+۱)n!-n! = (n+۱)n!-۱ = (n+۱)!-۱$

پاسخنامه سؤالات تشریحی — بخش ۳

۱- — آسان

$۵! = ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱ = ۱۲۰$

۲- — آسان

$۶! = ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱ = ۷۲۰$

۳- آسان

$(n-1)!=(6-1)!=5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

۴- متوسط

تعداد حالات برابر است با:

$5!\times2!=240$

۵- آسان

$4!=24$

۶- آسان

$3!\times1=6$

۷- متوسط

$\boxed{\text{هشت نفر}}\boxed{\text{دو فرد خاص}}$ $\qquad 9!\times2!$

۸- متوسط

$\boxed{\text{پیمان – پیام}}\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc\Rightarrow 5!=120$

۹- متوسط

آ)

$\boxed{2,4,6,8}\boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{7}\boxed{9}\quad 4!\times6!$

ب)

$\boxed{1,3,5,7,9}\ \boxed{2}\ \boxed{4}\ \boxed{6}\ \boxed{8}\quad 5!\times5!$

پ)

$\boxed{1,3,5,7,9}\boxed{2,4,6,8}\qquad 5!\times4!\times2!$

۱۰- دشوار

آ)

$5\times5\times5\times5\times5=5^5$

ب)

$\boxed{ab}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\ 4!\times2!$

پ)

$\boxed{123}\boxed{a}\boxed{b}\ 3!\times3!$

ت)

$\boxed{123}\boxed{ab}\qquad 2!\times3!\times2!=24$

ث)

$\underset{\text{حرف}}{2}\times\underset{\text{عدد}}{3}\times\underset{\text{عدد}}{2}\times\underset{\text{عدد}}{1}\times\underset{\text{حرف}}{1}=12$

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۳

۱- گزینه «۳» آسان

عبارت «com» را به‌صورت یک بسته در نظر می‌گیریم:

$\boxed{\text{com}}\,\text{pany}$

تعداد کل حالات: !۵

توجه کنید با توجه به آن که می‌خواهیم دقیقاً عبارت «com» وجود داشته باشد، بنابراین حروف «o»، «c» و «m» جایگشتی ندارند.

۲- گزینه «۱» متوسط

مطابق مسئله قبل عبارت «com» را یک بسته در نظر می‌گیریم:

$\boxed{\text{com}}\text{pany}$

در این سوال قرار است کلمه یـا عبـارت «com» شـروع شـود، بنـابراین ایـن عبارت جایگشتی ندارد و فقط جایگشت «n»، «a»، «p» و «y» را حساب مـی‌کنیم که تعداد کل حالات !۴ است.

۳- گزینه «۱» دشوار

در این سوال از روش متمم استفاده می‌کنیم. ابتدا کل کلمات ۷ حرفی که بـا c شروع می‌شوند و به y ختم می‌شوند را حساب می‌کنیم:

$\boxed{c}\text{ompan}\boxed{y}\Rightarrow n,a,p,m,o$ جایگشت‌های حروف $=5!$

اکنون کلمات ۷ حرفی که بـا c شـروع مـی‌شـوند و بـه y خـتم مـی‌شـوند و حرف p,n کنار هم قرار دارند پیدا می‌کنیم:

$\boxed{c}\boxed{pn}\,\text{oma}\boxed{y}\ 4!\times2!$

جایگشت های حروف — جایگشت n و p

بنابراین تعداد حالاتی که کلمه ۷ حرفی با c شروع شود و بـه y خـتم شـود و حروف p,n کنار هم قرار نباشند برابر است با:

$5!-4!\times2!=5\times4!-2\times4!=3\times4!$

۴- گزینه «۲» آسان

نامه اول را در ۵ پاکت مختلف، نامه دوم را در ۴ پاکت مختلف و .... بنـابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$

۵- گزینه «۲» متوسط

برای حل مسئله از روش متمم استفاده می‌کنیم:

تعداد کل حالاتی که می‌توان ۸ کتاب را داخل قفسه کنار هم قرار داد: $۸!$

تعداد حالاتی که دو کتاب مخصوص کنار هم باشند:

$$\boxed{ab}\,cdefgh = \underbrace{۲!}_{\text{جابه‌جایی } b,a} \times ۷!$$

تعداد حالاتی که دو کتاب مخصوص کنار هم نباشند:

$$۸! - ۲! \times ۷! = ۸ \times ۷! - ۲ \times ۷! = ۶ \times ۷!$$

۶- گزینه «۳» متوسط

$\boxed{م\ \square\ م}\ \square\ \square$

حرف بین دو (م) می‌تواند (ت)، (الف) یا (ز) باشد، بنابراین ۳ حالت وجود دارد. تعداد جایگشت‌های بین بسته و دو حرف باقی‌مانده $۳!$ است، بنابراین تعداد کل حالات $۳ \times ۳! = ۱۸$ می‌باشد.

۷- گزینه «۴» متوسط

کتاب‌های ریاضی را با R و کتاب‌های ادبی را با A نمایش می‌دهیم. با توجه به آن‌که می‌خواهیم کتاب‌های ریاضی در کنار هم باشند، آن‌ها را یک شیء در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{R_۱R_۲R_۳}\,A_۱A_۲A_۳A_۴$$

بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$۵! \times ۳! = ۱۲۰ \times ۶ = ۷۲۰$$

جایگشت ۴کتاب ادبی و کتاب‌های ریاضی کنار هم

جایگشت کتاب‌های ریاضی

۸- گزینه «۲» متوسط

حالت اول: رقم ۲ اول باشد:

$$۲\ ۵\ ۲\ ۷\ ۲\ ۶$$

$$۳!$$

تعداد حالات برابر جایگشت‌های ۵، ۶ و ۷ می‌باشد.

حالت دوم: رقم ۲ اول نباشد:

$$۵\ ۲\ ۷\ ۲\ ۶\ ۲$$

$$۳!$$

تعداد حالات برابر جایگشت‌های ۵، ۶ و ۷ می‌باشد.

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$۲ \times ۳! = ۱۲$$

۹- گزینه «۱» متوسط

M: مردها

W: زن‌ها

تعداد کل حالات که ۵ زن و ۲ مرد کنار هم قرار بگیرند برابر $۷!$ می‌باشد.

تعداد حالاتی که دو مرد کنار هم قرار بگیرند برابر $۲ \times ۶!$ می‌باشد.

$$\boxed{M_۱M_۲}\,W_۱W_۲W_۳W_۴W_۵$$

به روش متمم تعداد حالاتی که مردها کنار هم نباشند برابر است با:

$$۷! - (۲ \times ۶!) = (۷ \times ۶!) - (۲ \times ۶!) = ۵ \times ۶! = ۵ \times ۷۲۰ = ۳۶۰۰$$

۱۰- گزینه «۱» متوسط

S: سرباز

A: افسر

از آن‌جا که سربازها و افسرها باید یک در میان کنار هم بنشینند، لذا ۲ حالت زیر امکان‌پذیر است:

۱) سرباز نفر اول صف باشد که در این صورت $۴! \times ۴!$ حالت وجود دارد.

$$S_۱A_۱S_۲A_۲S_۳A_۳S_۴A_۴$$

۲) افسر نفر اول صف باشد که در این صورت $۴! \times ۴!$ حالت وجود دارد.

$$A_۱S_۱A_۲S_۲A_۳S_۳A_۴S_۴$$

بنابراین تعداد کل حالات $۲ \times ۴! \times ۴!$ می‌باشد.

۱۱- گزینه «۱» متوسط

فرض کنیم $A_۱, A_۲, A_۳$ سه کتاب خاص باشند، ۳کتاب خاص را داخل یک بسته قرار می‌دهیم:

$$\boxed{A_۱A_۲A_۳}\,A_۴A_۵$$

تعداد حالات $۳! \times ۳! = (۳!)^۲$

جابه‌جایی $\boxed{A_۱, A_۲, A_۳}\,A_۴, A_۵$

جابه‌جایی $A_۱, A_۲, A_۳$

۱۲- گزینه «۳» متوسط

A: افسر (افسرها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم.)

S: سرباز

$$\boxed{A_۱A_۲ \ldots A_۶}\,S_۱S_۲S_۳S_۴$$

$$۵! \times ۶!$$

جابه‌جایی افسرها داخل بسته

جابه‌جایی سربازها و بسته افسرها

۱۳- گزینه «۲» متوسط

سرباز: S

افسر: A

افسرها را داخل یک بسته قرار می‌دهیم و سربازها را در بسته‌ای دیگر قرار می‌دهیم.

$\boxed{A_1A_2...A_5}\ \boxed{S_1S_2S_3S_4}$

تعداد حالات: $5!\times 4!\times 2$

جابه‌جایی افسرها — جابه‌جایی سربازها — جابه‌جایی بسته‌ها

۱۴- گزینه «۳» متوسط

کتاب داستان: D

کتاب علمی: E

اگر اولین کتاب داستان و آخرین کتاب علمی باشد.

$D_1\ D_2\ D_3\ E_1\ E_2\ E_3\ E_4$

برای اولین کتاب ۳ حالت وجود دارد (باتوجه به ۳ کتاب داستان) و برای آخرین کتاب ۴ حالت وجود دارد. (با توجه به ۴ کتاب علمی)، بنابراین تعداد حالات:

$3\times \underbrace{5!}_{\text{جایگشت مابقی کتاب‌ها}}\times 4=12\times 5!$

در حالت دیگر، اولین کتاب، علمی و آخرین کتاب، داستان باشد که تعداد حالت‌های آن هم $12\times 5!$ می‌شود، بنابراین تعداد کل حالات:

$2\times 12\times 5!=24\times 5!$

۱۵- گزینه «۳» دشوار

از روش متمم استفاده می‌کنیم:

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\text{۲یا۴}}$

تعداد کل اعداد ۵رقمی زوج $4!\times 2=48$

جایگشت۴رقم به‌غیر از یکان — حالت‌های رقم یکان

تعداد حالاتی که ۲ و ۴ رقم یکان و دهگان باشند:

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\ }$

$3!\times 2=12$

جایگشت۳رقم به غیر از یکان و دهگان — ۲حالت ۲۴و۴۲

تعداد حالات اعداد ۵ رقمی زوج بدون آن که ارقام ۲ و ۴ کنار هم باشند:

$48-12=36$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

حروف (الف) را داخل یک بسته و حروف (ن) را داخل بسته دیگر قرار می‌دهیم:

د $\boxed{\text{ن ن}}$ $\boxed{\text{ا ا ا}}$ م

تعداد حالات $=3!$

جابه‌جایی ۳ بسته و حرف«د»

توجه شود با توجه به آن که شی‌های داخل بسته یکسان است، لزومی به پیدا کردن جایگشت‌های آن نیست.

۱۷- گزینه «۴» متوسط

c,a,b را داخل یک بسته قرار می‌دهیم، d,e,f را نیز داخل بسته دیگر قرار می‌دهیم:

$\boxed{abc}\boxed{def}gh$

تعداد کل حالات $4!\times(3!)^2=4!\times 3!\times 3!$

جابه‌جایی d,e,f — جابه‌جایی a,b,c — جابه‌جایی $\boxed{abc},\boxed{def}$

۱۸- گزینه «۴» متوسط

$\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{A\text{و}I}\ \boxed{}\ \boxed{}$

۲ حالت

$4!\times 2=48$

جایگشت مابقی حروف — حروف A یا I

۱۹- گزینه «۴» متوسط

مسئله را به روش متمم حل می‌کنیم:

تعداد کل حالاتی که ۶ دانش‌آموز به همراه معلم و مدیر مدرسه می‌توانند در یک صف کنار هم بایستند، $8!$ است، تعداد حالاتی که بین معلم و مدیر مدرسه هیچ دانش‌آموزی وجود ندارد، برابر $2\times 7!$ است، (۲ برای جابه‌جایی معلم و مدیر است.)

$\boxed{\text{مدیر معلم}}A_1A_2A_3A_4A_5A_6$

بنابراین تعداد حالاتی که بین معلم و مدیر مدرسه حداقل یک دانش‌آموز ایستاده باشند، برابر است با:

$8!-2\times 7!=8\times 7!-2\times 7!=6\times 7!$

۲۰- گزینه «۱» — متوسط

بین معلم و مدیر حداکثر یک دانش‌آموز وجود دارد، یعنی یا دانش‌آموز نیست یا فقط یک دانش‌آموز است. مسئله را در ۲ حالت حل می‌کنیم:

حالت اول: بین معلم و مدیر مدرسه هیچ دانش‌آموزی نیست، تعداد حالات برابر $۲\times ۷!$ است.

$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ $\boxed{\text{مدیر معلم}}$

حالت دوم: بین معلم و مدیر مدرسه یک دانش‌آموز ایستاده است.

$A_2A_3A_4A_5A_6$ $\boxed{\text{مدیر } A_1 \text{ معلم}}$

این امکان وجود دارد که هر یک از دانش‌آموزان بین معلم و مدیر باشند، بنابراین ۶ حالت برای آن که کدام دانش‌آموز بین معلم و مدیر است وجود دارد، بنابراین تعداد حالات برابر:

$۶\times ۲!\times ۶!$

دانش‌آموز — جابه‌جایی داخل بسته — جابه‌جایی کل

بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$۲\times ۷!+۶\times ۲!\times ۶!=۲\times ۷\times ۶!+۶\times ۲\times ۶!=۱۴\times ۶!+۱۲\times ۶!$$
$$=(۱۴+۱۲)\times ۶!=۲۶\times ۶!$$

۲۱- گزینه «۲» — متوسط

نفر اول می‌تواند در هر یک از ۷ طبقه پیاده شود، بنابراین برای نفر اول ۷ انتخاب وجود دارد، نفر دوم نمی‌تواند در طبقه‌ای که نفر اول پیاده شده است پیاده شود، بنابراین برای او ۶ انتخاب وجود دارد، نفر سوم نمی‌تواند در طبقاتی که نفر اول و دوم پیاده شده‌اند، پیاده شود، بنابراین برای او ۵ انتخاب وجود دارد، بنابراین تعداد کل حالات برابر است با:

$$۷\times ۶\times ۵=۲۱۰$$

۲۲- گزینه «۳» — دشوار

نفر c را بین b,a قرار می‌دهیم و آن را یک بسته در نظر می‌گیریم، حال c می‌تواند یکی از ۳ نفر دیگر باشد و b,a به !۲ حالت جابه‌جا می‌شوند

c یا d یا e

$\boxed{a\ \boxed{c}\ b}\ d\ e \Rightarrow ۳\times ۲\times ۳!=۳۶$

جابه‌جایی a و b — $\boxed{acb}$ d e

۲۳- گزینه «۱» — دشوار

تمام حالات برای جایگشت ۵ نفر در یک صف برابر !۵ می‌باشد. تعداد حالاتی که افراد سمت چپ و راست علی با هم برابر باشند، !۴ است. از آن‌جا که در نصف حالات باقی‌مانده، افراد سمت راست علی از افراد سمت چپ بیشترند و در نصف دیگر حالات، افراد سمت چپ از افراد سمت راست بیشترند، خواهیم داشت:

$$\text{تعداد حالات مطلوب}=\frac{۵!-۴!}{۲}=\frac{۱۲۰-۲۴}{۲}=۴۸$$

۲۴- گزینه «۳» — دشوار

حرف «ل» را کنار می‌گذاریم، در این صورت برای رسیدن به خواسته مسئله خواهیم داشت:

$\boxed{\text{ف}}$ الف $\boxed{\text{ت}}$ $\boxed{\text{و}}$ $\boxed{\text{ب}}$ $\quad ۳!\times ۲!=۱۲$

جابه‌جایی ف، ت، ب — جابه‌جایی (الف) و (و)

حرف «ل» هم می‌تواند در ابتدا یا انتهای کلمه قرار بگیرد که برای آن هم ۲ حالت وجود دارد، بنابراین تعداد کل حالات $۲۴=۲\times ۱۲$ است.

۲۵-گزینه «۳» — دشوار

حروف «گ،ن،هـ» را یک دسته در نظر می‌گیریم.

$\boxed{\text{گ ن هـ}}$ آ ی ر

پس تعداد کلمات !۴×!۳ یعنی ۱۴۴ تاست.

۱- — آسان

این کلمه ۵ حرفی است که در آن «د» و «ا» هر کدام دو بار تکرار شده است، بنابراین:

$$\frac{۵!}{۲!۲!}=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲!}{۲\times ۱\times ۲\times ۱}=۳۰$$

۲- — آسان

دو بار حرف «د»، دو بار حرف «ا» و سه بار حرف «ن» تکرار شده است.

بنابراین تعداد حالات برابر است با:

$$\frac{۹!}{۲!۲!۳!}=۱۵۱۲۰$$

۳- — آسان

$$\frac{۵!}{۲!۳!}=\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۲\times ۳!}=۱۰$$

۴- — آسان

$$\frac{۱۰!}{۲!۲!}=۹۰۷۲۰۰$$

پاسخنامه سؤالات تستی
بخش ۴

۱- گزینه «۲» آسان

عدد ۲، دو بار و عدد ۵، سه بار تکرار شده است.

$$\frac{۷!}{۳!\times ۲!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳!\times ۲\times ۱}=۴۲۰$$

۲- گزینه «۲» متوسط

$$\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۳!۵!}=۵۶$$

۳- گزینه «۴» آسان

$$\left.\begin{array}{l}\underset{۱\ ۳\ ۱\ ۲\ ۱\ ۱}{\underline{S}\ \underline{\ }\ \underline{S}\ \underline{\ }\ \underline{S}\ \underline{\ }}\Rightarrow ۶\\ \underset{۳\ ۱\ ۲\ ۱\ ۱\ ۱}{\underline{\ }\ \underline{S}\ \underline{\ }\ \underline{S}\ \underline{\ }\ \underline{S}}\Rightarrow ۶\end{array}\right.\Rightarrow ۶+۶=۱۲$$

۴- گزینه «۳» آسان

در خانه سمت راست فقط عدد ۵ قرار می‌گیرد و یک انتخاب داریم:

$$۴\times ۳\times ۲\times ۱\times \boxed{۱}=۲۴$$

۵- گزینه «۲» آسان

چون چهار تا ۱ و دو تا ۲ داریم: پس تعداد اعداد ۶ رقمی ساخته شده برابر است با:

$$\frac{۶!}{۴!۲!}=\frac{۵\times ۶}{۲!}=۵\times ۳=۱۵$$

۶- گزینه «۲» متوسط

می‌خواهیم جایگشت این ۶ نفر را در اتاق‌ها پیدا کنیم:

$$\frac{۶!}{۳!۲!۱!}=\frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳!۲!}=۶۰$$

۷- گزینه «۴» متوسط

$$\frac{۹!}{۴!۳!۲!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۴!۳!۲!}=۱۲۶۰$$

۸- گزینه «۲» متوسط

مفهوم این سوال این است که عدد ۴ یکی در میان باشد.

$$\left.\begin{array}{l}۴-۴-۴-\Rightarrow ۳!=۶\\ -۴-۴-۴\Rightarrow ۳!=۶\end{array}\right\}\Rightarrow ۶+۶=۱۲$$

اما قرار است عدد زوج باشد پس رقم سمت راست نمی‌تواند ۷ باشد.

$$\frac{۱}{۴}\times\frac{۲}{-}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{-}\times\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۷}=۲$$

بنابراین کل حالات ۱۰ = ۲ − ۱۲ حالت است.

پاسخنامه سؤالات تشریحی
بخش ۵

۱- آسان

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۵\times ۴\times ۳\times ۲!}{۲!}=۶۰$$

۲- آسان

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳!}=۱۲۰$$

۳- متوسط

$$P(۷,۳)=\frac{۷!}{(۷-۳)!}=\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times ۶\times ۵\times ۴!}{۴!}=۲۱۰$$

اعداد زوج محدودیت دارند و باید یکان آن‌ها زوج باشد بنابراین:

$$\underset{\text{صدگان}}{\frac{۶}{}}\times\underset{\text{دهگان}}{\frac{۵}{}}\times\underset{\text{یکان}}{\frac{۴}{}}=۱۲۰$$

۴- آسان

آ) $P(n+۱,n)=\frac{(n+۱)!}{(n+۱-n)!}=\frac{(n+۱)!}{۱!}=(n+۱)!$

ب) $P(n,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=n(n-۱)=n^۲-n$

۵- آسان

$$P(۹,۴)=\frac{۹!}{(۹-۴)!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶\times ۵!}{۵!}=۹\times ۸\times ۷\times ۶$$

۶- آسان

$$P(n,۳)=\frac{n!}{(n-۳)!}=n(n-۱)(n-۲)$$

۷- آسان

حرف «ی» انتخاب شده است پس از ۷ حرف باقی‌مانده ۴ حرف دیگر انتخاب می‌کنیم.

$$P(۷,۴)=\frac{۷!}{۳!}=۷\times ۶\times ۵\times ۴$$

۸- آسان

$$P(۴,۳)=\frac{۴!}{۱!}=۴!=۲۴$$

۹- متوسط

$$\frac{P(3k,2k)k!}{P(3k,3k-2)}=\frac{\frac{(3k)!}{k!}\times k!}{\frac{(3k)!}{2!}}=2$$

۱۰- متوسط

$$2\times P(20,3)=2\times\frac{20!}{17!}=2\times20\times19\times18=13680$$

در واقع حداکثر ۱۳۶۸۰ ثانیه معادل با ۳/۸ ساعت طول می‌کشد.

۱۱- متوسط

حروف کلمه «گل پیرا» تکرار ندارد.

آ)تعداد کلمات ۶ حرفی برابر است با $6!=720$ از ۶ حرف دو حرف آن «گل» انتخاب شده است و برای چهار حرف دیگر !۴ یعنی ۲۴ طریق وجود دارد.

ب) جایگشت ۴ حرفی از ۶ حرف است.

$$P(6,4)=\frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$$

پ)

$\boxed{پ\ ر}$ گ ل ی ا $\Rightarrow 5!\times2!=240$

ت) مفهوم این قسمت این است که حروف «پ» و «ر» انتخاب شده است و دو حرف دیگر از چهار حرف باقی‌مانده انتخاب می‌شود.

$\boxed{پ\ ر}\boxed{گ\ ل\ ی\ ا}$

$$P(4,2)\times2!\times3!=\frac{4!}{2!}\times2!\times3!=24\times6=144$$

ث) کلمه «پیرا» چهار حرف دارد پس فقط یک حرف دیگر از دو حرف باقیمانده انتخاب می‌کنیم.

$$4!\times P(2,1)\times2!=24\times2\times2=96$$

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۵

۱- گزینه «۱» آسان

در نوشتن کلمه، ترتیب مهم است، بنابراین از جایگشت استفاده می‌کنیم. تعداد جایگشت ۲ تایی از ۵ شیء متمایز جواب مسئله است.

$$P(5,2)=\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=\frac{120}{6}=20$$

۲- گزینه «۱» متوسط

شروع کلمه ۳ حرفی با حرف «S» است و باید ۲ انتخاب از میان ۴ حرف باقی مانده داشت. با توجه به این که در کلمات ترتیب مهم است خواهیم داشت:

$$P(4,2)=\frac{4!}{(4-2)!}=\frac{4!}{2!}=\frac{4\times3!}{2!}=12$$

۳- گزینه «۳» آسان

باید از بین ۱۶ تیم، ۳ تیم انتخاب کنیم که ترتیب انتخاب‌ها نیز اهمیت دارد، بنابراین از جایگشت استفاده می‌کنیم:

$$P(16,3)=\frac{16!}{(16-3)!}=\frac{16!}{13!}$$

۴- گزینه «۳» آسان

با توجه به این که در انتخاب‌ها، ترتیب مهم است؛ بنابراین تعداد حالات برابر:

$$P(7,3)=\frac{7!}{(7-3)!}=\frac{7!}{4!}=\frac{7\times6\times5\times4!}{4!}=210$$

۵- گزینه «۳» آسان

با حذف حرف «ت» پنج حرف باقی می‌ماند و خواهیم داشت:

$$P(5,3)=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}=60$$

۶- گزینه «۳» آسان

با توجه به اینکه ترتیب مهم است، خواهیم داشت:

$$P(10,3)=\frac{10!}{(10-3)!}=\frac{10!}{7!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!}=720$$

۷- گزینه «۴» **آسان**

با توجه به این که در این انتخاب ترتیب مهم است، بنابراین تعداد حالات انتخاب برابر است با:

$$P(۱۵,۲)=\frac{۱۵!}{(۱۵-۲)!}=\frac{۱۵!}{۱۳!}=\frac{۱۵\times۱۴\times۱۳!}{۱۳!}=۲۱۰$$

۸- گزینه «۴» **متوسط**

$$\boxed{پ}\ \underbrace{\boxed{}\ \boxed{}}_{P(۵,۲)}\ \boxed{ن}=۲\times P(۵,۲)=۲\times\frac{۵!}{۳!}=۴۰$$

جابه‌جایی «پ» و «ن»

انتخاب دو حرف دیگر از ۵ حرف باقی‌مانده

۹- گزینه «۲» **متوسط**

با توجه به این که در این انتخاب، ترتیب اهمیت دارد، از بین ۶ معلم باقی‌مانده (۱ معلم بخصوص انتخاب نمی‌شود) ۲ نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$P(۶,۲)=\frac{۶!}{(۶-۲)!}=\frac{۶!}{۴!}=۳۰$$

۱- **آسان**

$$\text{آ) } C(۸,۶)=\frac{۸!}{۶!(۸-۶)!}=\frac{۸!}{۶!۲!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۶!۲!}=۲۸$$

$$\text{ب) } \binom{۷}{۴}=\frac{۷!}{۴!(۷-۴)!}=\frac{۷!}{۴!۳!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!۳!}=۳۵$$

۲- **متوسط**

می‌دانیم اگر دو نقطه روی محیط دایره را با خط مستقیم به هم وصل کنیم وتر تشکیل می‌شود بنابراین باید دو نقطه از ۸ نقطه انتخاب کنیم.

$$C(۸,۲)=\binom{۸}{۲}=\frac{۸!}{۲!(۸-۲)!}=\frac{۸!}{۲!۶!}=\frac{۸\times۷\times۶!}{۲!۶!}=۲۸$$

۳- **آسان**

کافی است انتخاب ۲ مرد از ۵ مرد و ۱ زن از ۳ زن را محاسبه کنیم و طبق اصل ضرب داریم:

$$\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}=\frac{۵!}{۲!۳!}\times\frac{۳!}{۱!۲!}=۱۰\times۳=۳۰$$

۴- **آسان**

یعنی انتخاب ۴ عضو از ۶ عضو،که ترتیب مهم نیست، پس داریم:

$$\binom{۶}{۴}=\frac{۶!}{۴!۲!}=\frac{۶\times۵\times۴!}{۴!\times۲}=۱۵$$

۵- **متوسط**

$$\text{آ) } C(۵,۳)=\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲}=۱۰$$

$$\text{ب) } C(۵,۳)+C(۴,۳)+C(۳,۳)=۱۰+۴+۱=۱۵$$

$$\text{پ) } C(۵,۱)C(۴,۱)C(۳,۱)=۵\times۴\times۳=۶۰$$

۶- **متوسط**

$$C(۱۰,۷)+C(۱۰,۸)+C(۱۰,۹)+C(۱۰,۱۰)$$

$$=\frac{۱۰!}{۷!۳!}+\frac{۱۰!}{۸!۲!}+۱۰+۱=۱۲۰+۴۵+۱۰+۱=۱۷۶$$

۷- **متوسط**

$$\text{آ) } C(۹,۴)=\frac{۹!}{۴!۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۴\times۳\times۲\times۵!}=۱۲۶$$

$$\text{ب) } C(۵,۳)C(۹,۱)+C(۵,۴)=۱۰\times۹+۵=۹۵$$

$$\text{پ) } C(۹,۲)C(۵,۲)+C(۹,۱)C(۵,۳)+C(۵,۴)$$

$$=۳۶\times۱۰+۹\times۱۰+۵=۴۵۵$$

۸- **آسان**

$$\text{آ) } ۲^{۱۰}=۱۰۲۴$$

$$\text{ب) } ۲^۶-\binom{۶}{۰}-\binom{۶}{۶}=۲^۶-۱-۱=۶۴-۲=۶۲$$

۹- **متوسط**

$$a=\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times۴\times۳}{۳\times۲}=۱۰$$

$$b=P(۵\,,\,۳)=\frac{۵!}{(۵-۳)!}=\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰\Rightarrow a+b=۷۰$$

۱۰- **آسان**

$$\text{آ) } P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}$$

$$\text{ب) } \binom{۶}{۴}=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

۱۱- **متوسط**

$$\text{آ) } \binom{۵}{۲}\times\binom{۳}{۱}$$

$$\text{ب) } \binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۳}$$

۱۲- آسان

$\binom{۳}{۲}=۳$ $\qquad x(x^۲-۴)=۰\Rightarrow x=۰,۲,-۲$

۱۳- آسان

$$\begin{cases}x=x+۱\Rightarrow x\in\varnothing\\ x+x+۱=۵\Rightarrow x=۲\end{cases}$$

۱۴- متوسط

یک عضو مشخص است بنابراین سه عضو دیگر از ۹ عضو باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲}=۸۴$$

۱۵- متوسط

دو عضو از ۱۰ عضو مشخص است برای سایر اعضا دو عضو از ۸ عضو باقی مانده انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷}{۲}=۲۸$$

۱۶- متوسط

$$a=\binom{۲n+۱}{۲n-۱}=\frac{(۲n+۱)!}{(۲n-۱)!\times۲!}=\frac{(۲n+۱)(۲n)}{۲}=n(۲n+۱)$$

$$b=\binom{۳n}{۳n-۱}=\frac{(۳n)!}{(۳n-۱)!\times۱!}=\frac{۳n}{۱}=۳n$$

$$a+b=۲n^۲+n+۳n=۲n^۲+۴n=۲n(n+۲)$$

۱۷- دشوار

$$\binom{n}{r}+\binom{n}{r-۱}=\frac{n!}{r!(n-r)!}+\frac{n!}{(n-r+۱)!(r-۱)!}$$

$$=\frac{n!}{r(r-۱)!(n-r)!}+\frac{n!}{(n-r+۱)(n-r)!(r-۱)!}$$

$$=\frac{n!(n-r+۱)+n!(r)}{(r-۱)!(n-r)!\times r(n-r+۱)}=\frac{n!(n+۱)}{r!(n-r+۱)!}$$

$$=\frac{(n+۱)!}{r!(n-r+۱)!}=\binom{n+۱}{r}$$

۱۸- متوسط

آ) $\binom{۵}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۵}{۳}=۱۰\times۷+۱۰=۸۰$

ب) $\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}=۵\times۴\times۳=۶۰$

پ) $\binom{۴}{۰}\binom{۸}{۳}+\binom{۴}{۱}\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷\times۶}{۳\times۲\times۱}+۴\times\frac{۸\times۷}{۲}=۵۶+۲\times۵۶=۱۶۸$

۱۹- آسان

$$\binom{۹}{۱}+\binom{۹}{۲}+\dots+\binom{۹}{۸}=۲^۹-\binom{۹}{۰}-\binom{۹}{۹}=۵۱۲-۱-۱=۵۱۰$$

۲۰- آسان

$$\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۳}\binom{۵}{۰}=۱۰\times۵+۱۰\times۱=۶۰$$

۲۱- متوسط

دو حالت دارد یا سه قرمز یک آبی و یا چهار قرمز هیچ آبی:

$$\binom{۵}{۳}\binom{۷}{۱}+\binom{۵}{۴}=۱۰\times۷+۵=۷۵$$

۲۲- متوسط

چون بردار جهت دارد بنابراین تعداد آن‌ها دو برابر تعداد وترهای انتخابی است.

$$۲\times\binom{۸}{۲}=۸\times۷=۵۶$$

۲۳- متوسط

برای ساخت مثلث یا دو نقطه از خط بالا و یک نقطه از خط پایین انتخاب می‌کنیم و یا برعکس:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}=۶\times۵+۱۰\times۴=۷۰$$

۲۴- آسان

$$\binom{۵}{۳}=۱۰$$

۲۵- آسان

از هر سه نقطه غیرواقع بر یک خط راست مثلثی عبور می‌کند.

$$\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}=۱۲۰$$

۲۶- آسان

این فرد باید از ۷ نوع آجیل ۵ نوع آن را انتخاب کند.

$$\binom{۷}{۵}=\frac{۷!}{۵!۲!}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

۲۷- دشوار

آ) رئیس که حضور دارد و از ۳ کارشناس یک کارشناس انتخاب می‌شود و ۳ نفر باقی‌مانده از سایرین انتخاب می‌شوند.

$$\binom{۱}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۱۴}{۳}=۳\times\frac{۱۴\times۱۳\times۱۲}{۳\times۲\times۱}=۱۰۹۲$$

ب) رئیس و یکی از معاونین و همچنین یک کارشناس انتخاب می‌شوند. دو نفر باقی‌مانده از سایرین انتخاب می‌شوند.

$$\binom{۱}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۱۱}{۲}=۳\times۳\times\frac{۱۱\times۱۰}{۲}=۴۹۵$$

پ) چهار نفر که مشخص است. یک نفر باقی‌مانده را از سایرین انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۱}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}\binom{۹}{۱}=۳\times۲\times۳\times۹=۱۶۲$$

۲۸- متوسط

تعداد داوطلبان را n فرض می‌کنیم.

$$\binom{n}{۲}=۲۸\Rightarrow\frac{n(n-۱)}{۲}=۲۸\Rightarrow n(n-۱)=۵۶\Rightarrow n=۸$$

۲۹- متوسط

$$\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۴}+\binom{۱۰}{۵}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}+\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷}{۴\times۳\times۲\times۱}+\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶}{۵\times۴\times۳\times۲\times۱}$$

$$=۱۲۰+۲۱۰+۲۵۲=۵۸۲$$

۳۰- متوسط

آ) از بین ۵ معلم فیزیک و ۶ معلم ریاضی به چند طریق می‌توان ۵ نفر را انتخاب کرد که ۳تای آن‌ها معلم فیزیک و دو تای آنها معلم ریاضی باشد.

ب) از میان ۵ دانش‌آموز کلاس دهم ریاضی و ۶ دانش‌آموز دهم تجربی به چند طریق می‌توان ۳ دانش‌آموز دهم ریاضی یا دو دانش‌آموز دهم تجربی انتخاب کرد.

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۶

۱- گزینه «۳» آسان

$$C(۲۰,۱۸)=\frac{۲۰!}{۱۸!\times۲!}=\frac{۲۰\times۱۹\times۱۸!}{۱۸!\times۲}=۱۹۰$$

۲- گزینه «۲» آسان

$$C(۱۰,۲)=\frac{۱۰!}{۲!\times۸!}=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲\times۸!}=\frac{۹۰}{۲}=۴۵$$

۳- گزینه «۲» آسان

جمعاً ۵+۴+۳، یعنی ۱۲ مهره درون کیسه وجود دارد و می‌خواهیم از بین ۱۲ مهره، ۳ مهره انتخاب کنیم. واضح است که در این انتخاب، ترتیب اهمیت ندارد، پس تعداد حالات این انتخاب برابر است با تعداد ترکیب‌های ۳ تایی از ۱۲ مهره.

$$\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۳!۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۳!\times۹!}=۲۲۰$$

۴- گزینه «۳» آسان

برای ساخت مثلث به ۳ نقطه از بین ۶ نقطه احتیاج داریم:

$$C(۶,۳)=\frac{۶!}{۳!۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۶}=۲۰$$

۵- گزینه «۲» متوسط

$$C(۶,۴)\times C(۵,۲)=\frac{۶!}{۴!\times۲!}\times\frac{۵!}{۲!\times۳!}=\frac{۶\times۵\times۴!}{۴!\times۲!}\times\frac{۵\times۴\times۳!}{۲!\times۳!}$$

$$=۱۵\times۱۰=۱۵۰$$

۶- گزینه «۲» آسان

چون ترتیب جواب دادن به سوالات مهم نیست و فقط باید به ۷ سوال پاسخ دهیم، از ترکیب استفاده می‌کنیم:

$$C(۱۰,۷)=\binom{۱۰}{۷}=\frac{۱۰!}{۷!۳!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷!}{۳\times۲\times۷!}$$

$$=۱۰\times۳\times۴=۵\times۴\times۳\times۲=۵!$$

۷- گزینه «۳» آسان

با هر سه نقطه روی دایره می‌توانیم یک مثلث درست کنیم، پس:

$$\binom{۸}{۳}=\frac{۸!}{۳!۵!}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۳!۵!}=۵۶$$

۸- گزینه «۴» آسان

کافی است از بین ۵ دانش آموز، ۲ نفر و از بین ۴ دانشجو، ۳ نفر انتخاب کرد.

چون این عمل با هم صورت می‌پذیرد، طبق اصل ضرب، تعداد حالات آن‌ها باید در هم ضرب شوند.

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۳}=۱۰\times۴=۴۰$$

۹- گزینه «۴» آسان

$$C(۹,۴)=\frac{۹!}{۴!\times۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۴\times۳\times۲\times۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۴\times۳\times۲}=۱۲۶$$

۱۰- گزینه «۴» آسان

۳ زن از میان ۵ زن و ۲ مرد از میان ۶ مرد، انتخاب می‌شوند و ترتیب انتخاب اهمیت ندارد، بنابراین تعداد حالات عبارت است از:

$$\text{تعداد حالات}:\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۲}=\frac{۵!}{۳!۲!}\times\frac{۶!}{۲!۴!}=۱۵۰$$

۱۱- گزینه «۳» آسان

باید ۴ نقطه از ۸ نقطه را انتخاب کنیم، داریم:

$$\text{تعداد چهارضلعی محدب}=\binom{۸}{۴}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times۴!}{۴\times۳\times۲\times۱\times۴!}=۷۰$$

۱۲- گزینه «۴» آسان

$$C(۹,۳)=\frac{۹!}{۳!۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳\times۲\times۱\times۶!}=۸۴$$

۱۳- گزینه «۳» متوسط

تعداد جایگشت‌های ۸ شی متفاوت برابر !۸ است، همچنین ترکیب ۳ شی از ۸ شی به‌صورت $\binom{۸}{۳}=C(۸,۳)$ می‌باشد. داریم:

$$\frac{۸!}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۸!}{\frac{۸!}{۳!۵!}}=\frac{۸!\times۳!\times۵!}{۸!}=۳!۵!=۶\times۵!=۶!$$

۱۴- گزینه «۴» متوسط

چون دانش‌آموزان دو به دو غیر هم مدرسه‌ای هستند، پس ابتدا ۳ مدرسه از ۵ مدرسه موجود انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۵}{۳}=\frac{۵!}{۳!۲!}=۱۰$$

حال از مدارس، باید ۱ نفر انتخاب شود، بنابراین:

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۴\times۴\times۴=۶۴$$

طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با:

$$۶۴\times۱۰=۶۴۰$$

۱۵- گزینه «۱» متوسط

چون دانش‌آموزان دو به دو غیر هم منطقه‌ای هستند، پس ابتدا ۳ منطقه را از ۶ منطقه دعوت شده انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}=۲۰$$

حال از هر کدام از مناطق، باید ۱ دانش‌آموز انتخاب شود، بنابراین:

$$\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱}\times\binom{۱۵}{۱}=۱۵\times۱۵\times۱۵=۳۳۷۵$$

حال طبق اصل ضرب، تعداد کل حالات برابر است با:

$$۳۳۷۵\times۲۰=۶۷۵۰۰$$

۱۶- گزینه «۳» متوسط

$$C(۱۰,۲)\times C(۸,۳)=\frac{۱۰!}{۲!\times۸!}\times\frac{۸!}{۳!\times۵!}$$
$$=\frac{۱۰\times۹\times۸!}{۲\times۸!}\times\frac{۸\times۷\times۶\times۵!}{۶\times۵!}=۴۵\times۵۶=۲۵۲۰$$

۱۷- گزینه «۲» متوسط

چون یک فرد خاص حتماً جزو انتخاب شده‌ها می‌باشد، پس باید از بین ۱۱ نفر باقی‌مانده، ۲ نفر دیگر انتخاب کرد.

$$C(۱۱,۲)=\frac{۱۱!}{۲!\times۹!}=\frac{۱۱\times۱۰\times۹!}{۲\times۹!}=\frac{۱۱۰}{۲}=۵۵$$

۱۸- گزینه «۴» متوسط

دو حالت مطلوب امکان‌پذیر است:

۱) دو دانش‌آموز تجربی و یک دانش‌آموز ریاضی انتخاب شود.

$$N_۱=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}$$

۲) سه دانش‌آموز تجربی انتخاب شوند و هیچ دانش‌آموزی از گروه ریاضی انتخاب نشود.

$$N_۲=\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰}$$

دو حالت بالا اشتراک ندارند، پس تعداد حالت‌های موردنظر برابر است با:

$$N_۱+N_۲=\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۳}\binom{۳}{۰}=۱۰\times۳+۱۰\times۱=۴۰$$

۱۹- گزینه «۳» — **متوسط**

ابتدا ۳ کتاب از میان ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از بین ۶ کتاب سال دوم انتخاب می‌کنیم و سپس با شروع از کتاب سال دوم، یک در میان آن‌ها را کنار هم می‌چینیم. دقت کنید که اگر با کتاب سال اول شروع می‌کردیم، کتاب‌ها یک در میان نمی‌شدند.

$$\frac{۴}{\text{دوم}}\times\frac{۳}{\text{اول}}\times\frac{۳}{\text{دوم}}\times\frac{۲}{\text{اول}}\times\frac{۲}{\text{دوم}}\times\frac{۱}{\text{اول}}\times\frac{۱}{\text{دوم}}=۴!\times۳!$$

ابتدا کتاب‌های سال دوم و بعد کتاب‌های سال اول را در جایگاه‌های خود قرار می‌دهیم، بنابراین تعداد کل حالات انتخاب این کتاب‌ها و سپس یک در میان چیدن آن‌ها، برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۴}\times۴!\times۳!$$

۲۰- گزینه «۴» — **متوسط**

باید هر ۴ نفر مرد باشند یا ۳ نفر مرد و ۱ نفر از بین زنان انتخاب شود.

$$\binom{۴}{۴}+\binom{۴}{۳}\binom{۵}{۱}=۱+(۴)(۵)=۲۱$$

۲۱- گزینه «۳» — **متوسط**

با توجه به آن که ۳ رأس یک مثلث نمی‌توانند روی یک خط راست باشند، بنابراین دو نقطه از خط بالا و یک نقطه از خط پایین، یا یک نقطه از خط بالا و دو نقطه از خط پایین انتخاب کنیم.

$$\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲ نقطه از خط بالا}}\underbrace{\binom{۳}{۱}}_{\text{۱ نقطه از خط پایین}}+\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{۱ نقطه از خط بالا}}\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{۲ نقطه از خط پایین}}=(۱۰)(۳)+(۵)(۳)=۳۰+۱۵=۴۵$$

۲۲- گزینه «۴» — **متوسط**

ابتدا از هر یک از زوج‌ها یک نفر را انتخاب می‌کنیم و ۳ نفر باقی‌مانده را از باقی افراد انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۲}{۱}\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۳}=۲\times۲\times۱۰=۴۰$$

۲۳- گزینه «۲» — **متوسط**

هر ۳ نقطه‌ای را که انتخاب کنیم، می‌توان با آن مثلث ساخت، مگر آن که آن ۳ نقطه روی یک خط باشند، بنابراین به روش متمم ابتدا کل حالات را پیدا کرده و از حالت‌هایی که ۳ نقطه روی ۱ خط هستند کم می‌کنیم.

$$\binom{۱۲}{۳}-\binom{۳}{۳}-\binom{۴}{۳}-\binom{۵}{۳}=۲۲۰-۱-۴-۱۰=۲۰۵$$

۲۴- گزینه «۴» — **متوسط**

برای آن که از هر سمت حداقل یک نفر انتخاب شود، از یک سمت باید ۲ نفر انتخاب شود.

$$\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}$$

$$=(۱۰\times۴\times۳)+(۵\times۶\times۳)+(۵\times۴\times۳)$$

$$=۱۲۰+۹۰+۶۰=۲۷۰$$

۲۵- گزینه «۱» — **دشوار**

مهمانی یا باید بدون هر دو نفر باشد؛ یعنی ۶ نفر را از ۱۱ نفر باقی مانده انتخاب کنیم $\binom{۱۱}{۶}$ یا یکی از آن دو باشد و دیگری نباشد، اگر یکی را انتخاب کنیم، بنابراین ۵ انتخاب دیگر از ۱۱ نفر باقی‌مانده انجام می‌شود. (زیرا قرار است شخصی که با او قهر است در مهمانی نباشد) برای این مورد هم ۲ حالت وجود دارد، بنابراین تعداد حالات آن $۲\times\binom{۱۱}{۵}$ است، بنابراین تعداد کل حالات $\binom{۱۱}{۶}+۲\times\binom{۱۱}{۵}$ است.

۲۶- گزینه «۴» — **دشوار**

در این سوال، ۳ دانش‌آموز کلاس دوم و ۱ دانش آموز کلاس اول انتخاب می‌شود یا ۴ دانش‌آموز کلاس دوم انتخاب می‌گردند و همچنین ۴! جایگشت جایزه‌ها می‌باشد.

$$[\binom{۴}{۳}\times\binom{۵}{۱}+\binom{۴}{۴}]\times۴!=(۲۰+۱)\times۲۴=۵۰۴$$

۲۷- گزینه «۱» — **آسان**

$$\binom{n}{۲}=۶\Rightarrow\frac{n!}{۲!(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{۲(n-۲)!}=۶$$

$$n(n-۱)=۱۲=۴\times۳\Rightarrow n=۴$$

۲۸- گزینه «۲» — **متوسط**

$$\binom{n}{۲}=\binom{n}{۴}\Rightarrow n=۲+۴=۶\Rightarrow\binom{n}{۳}=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!۳!}$$

$$=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳\times۲\times۳!}=۲۰$$

۲۹- گزینه «۲» — متوسط

تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی مجموعه A: $\binom{n-1}{3}=20$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{3!(n-1-3)!}=20$$

$$\Rightarrow \frac{(n-1)!}{3!(n-4)!}=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{3!(n-4)!}=20\Rightarrow (n-1)(n-2)(n-3)=3!\times 20=120$$

$$\Rightarrow (n-1)(n-2)(n-3)=6\times 5\times 4\Rightarrow n-1=6$$

مجموعه A، ۶ عضو دارد، پس:

تعداد زیرمجموعه‌های ۱ عضوی مجموعه A: $\binom{6}{1}=6$

۳۰- گزینه «۲» — متوسط

عضو a انتخاب شده است، بنابراین دو عضو دیگر را از بین $\{b,c,d,e,f\}$ انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!3!}=10$$

۳۱- گزینه «۳» — متوسط

روش اول: باید تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی، ۴ عضوی، ۵ عضوی و ۶ عضوی را پیدا کنیم:

$$\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}=20+15+6+1=42$$

روش دوم: کل زیرمجموعه‌های مجموعه ۶ عضوی را حساب می‌کنیم. زیرمجموعه‌های دو عضوی، تک عضوی و تهی آن را حساب می‌کنیم.

$$\binom{6}{2}+\binom{6}{1}+\binom{6}{0}=15+6+1=22$$

بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های با حداقل ۳ عضو برابر $64-22=42$ می‌باشد.

۳۲- گزینه «۳» — متوسط

عضو a_2 انتخاب شده است، بنابراین کافی است ۳ عضو دیگر از بین a_4,a_5,a_6,a_7,a_8 انتخاب شود.

$$\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!2!}=10$$

۳۳- گزینه «۱» — متوسط

$$P(2n,n)=\frac{(2n)!}{(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{n!}$$

$$C(2n,n)=\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

$$\frac{P(2n,n)}{C(2n,n)}=\frac{\frac{(2n)!}{n!}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}=n!$$

۳۴- گزینه «۲» — دشوار

رابطه پاسکال:

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}$$

طبق رابطه پاسکال: $\binom{9}{3}+\binom{9}{4}=\binom{10}{4}$

$$\xrightarrow{\text{پاسکال}}\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{10}{5}=\binom{10}{4}+\binom{10}{5}=\binom{11}{5}$$

$$\xrightarrow{\text{پاسکال}}\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{10}{5}+\binom{11}{6}=\binom{11}{5}+\binom{11}{6}=\binom{12}{6}$$

$$\xrightarrow{\text{پاسکال}}\binom{9}{3}+\binom{9}{4}+\binom{10}{5}+\binom{11}{6}+\binom{12}{7}=\binom{12}{6}+\binom{12}{7}=\binom{13}{7}$$

۳۵- گزینه «۳» — متوسط

تعداد انتخاب‌ها به‌صورت زیر است:

$$\binom{8}{4}+\binom{8}{5}+\binom{8}{6}=\frac{8!}{4!4!}+\frac{8!}{5!3!}+\frac{8!}{6!2!}$$

$$=\frac{8\times 7\times 6\times 5}{4\times 3\times 2\times 1}+\frac{8\times 7\times \cancel{6}}{\cancel{6}}+\frac{8\times 7}{2}=70+56+28=154$$

۳۶- گزینه «۴» — متوسط

ابتدا سه مدرسه از پنج مدرسه را انتخاب می‌کنیم، سپس از هر مدرسه یک نفر را انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{4}{1}=10\times 4\times 4\times 4=640$$

۳۷- گزینه «۴» — متوسط

$$\binom{3}{1}\binom{5}{3}\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{3}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}=60+90=150$$

۳۸- گزینه «۳» — متوسط

دو نفر را جدا می‌کنیم:

۷ نفر ۲ نفر

برای انتخاب ۵ نفر به دو صورت می‌توان عمل کرد که دو نفر خاص با هم انتخاب نشوند:

حالت اول) هیچ‌کدام از آن‌ها انتخاب نشود.

$$\binom{7}{5}=\frac{7!}{2!5!}=\frac{7\times 6}{2}=21$$

حالت دوم) یکی از آن دو نفر و بقیه از ۷ نفر انتخاب شوند:

$$\binom{2}{1}\binom{7}{4}=2\times\frac{7!}{4!3!}=\frac{2\times 7\times 6\times 5}{3!}=70$$

کل حالت‌ها:

$$21+70=91$$

پاسخنامه

سؤالات تشریحی

بخش ۷

۱- آسان

$$\frac{n(n-۱)!}{(n+۱)n(n-۱)!}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow\frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۷}\Rightarrow n+۱=۷\Rightarrow n=۶$$

۲- آسان

اعداد ۱۸ و ۲۸۰ را تجزیه می‌کنیم تا بتوانیم ضرب آن‌ها را به‌صورت اعداد متوالی بنویسیم:

$$n!=۲\times۹\times۵\times۲\times۴\times۷=۲\times۳\times۳\times۵\times۲\times۴\times۷$$
$$=۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶\times۷=۷!\Rightarrow n=۷$$

۳- متوسط

$$C(k-۱,k-۳)=\frac{(k-۱)!}{(k-۳)!(k-۱-k+۳)!}=\frac{(k-۱)(k-۲)(k-۳)!}{(k-۳)!۲!}$$

$$=\frac{k^۲-۳k+۲}{۲}=۳\Rightarrow k^۲-۳k+۲=۶$$

$$\Rightarrow k^۲-۳k-۴=۰\Rightarrow(k-۴)(k+۱)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k=-۱\notin\mathbb{N} & \text{غیرقابل قبول}\\ k=۴\end{cases}$$

۴- آسان

$$P(n,۲)=\frac{n!}{(n-۲)!}=\frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=n(n-۱)=۲۰$$

$$\Rightarrow n^۲-n-۲۰=۰\Rightarrow(n-۵)(n+۴)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n=۵\\ n=-۴\notin\mathbb{N} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

$$(n-۳)!=(۵-۳)!=۲!=۲$$

۵- دشوار

$$C(k,۲)+C(k,۳)=C(k,k-۲)+۱۰$$

$$\frac{k!}{۲!(k-۲)!}+\frac{k!}{۳!(k-۳)!}=\frac{k!}{(k-۲)!۲!}+۱۰$$

$$\frac{k(k-۱)}{۲}+\frac{k(k-۱)(k-۲)}{۶}=\frac{k(k-۱)}{۲}+۱۰$$

$$\Rightarrow K(K-۱)(K-۲)=۶۰=۳\times۴\times۵\Rightarrow k=۵$$

۶- دشوار

$$\frac{۱}{\frac{۶!}{n!(۶-n)!}}-\frac{۱}{\frac{۷!}{n!(۷-n)!}}=\frac{۸}{۳\times\frac{۸!}{n!(۸-n)!}}$$

$$\Rightarrow\frac{n!(۶-n)!}{۶!}-\frac{n!(۷-n)!}{۷!}=\frac{۸\times n!(۸-n)!}{۳\times۸!}$$

$$\xrightarrow{\div n!(۶-n)!}\frac{۱}{۶!}-\frac{۷-n}{۷!}=\frac{(۸-n)(۷-n)}{۳\times۷!}$$

$$\xrightarrow{\times(۳\times۷!)}۳\times۷-۳(۷-n)=(۸-n)(۷-n)$$

$$۲۱-۲۱+۳n=۵۶-۱۵n+n^۲\Rightarrow n^۲-۱۸n+۵۶=۰$$

$$\Rightarrow(n-۴)(n-۱۴)=۰\xrightarrow{n\le۶}n=۴$$

۷- دشوار

$$P(n,r)=C(n,r)\times r!\Rightarrow۱۲۰=۲۰\times r!\Rightarrow r!=۶\Rightarrow r=۳$$

$$P(n,r)=۱۲۰\Rightarrow P(n,۳)=۱۲۰\Rightarrow\frac{n!}{(n-۳)!}=۱۲۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۱۲۰\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۶\times۵\times۴$$

$$\Rightarrow n=۶$$

۸- متوسط

$$۲^{n+۴}-۲^n=۱۲۰\Rightarrow۲^n\times۲^۴-۲^n=۱۲۰\Rightarrow۲^n(۲^۴-۱)=۱۲۰$$

$$\Rightarrow۲^n=۸\Rightarrow n=۳$$

مجموعه ۳ عضوی است. خواسته مسئله زیر مجموعه‌های یک عضوی و ۳ عضوی است.

$$\binom{۳}{۱}+\binom{۳}{۳}=۴$$

۹- آسان

$$\binom{n}{۲}=\binom{n}{۴}\Rightarrow n=۲+۴=۶$$

۱۰- متوسط

$$\binom{n}{۴}=۵\Rightarrow\frac{n!}{۴!(n-۴)!}=۵\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)(n-۳)=۵!\Rightarrow n=۵$$

۱۱- آسان

$$\binom{n+۱}{n-۱}=۲۱\Rightarrow\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!۲!}=۲۱\Rightarrow(n+۱)n=۴۲$$

$$\Rightarrow(n+۱)(n)=۷\times۶\Rightarrow n=۶$$

۱۲- آسان

تعداد کتاب‌ها را n فرض می‌کنیم.

$$\binom{n}{۳}=۲۲۰\Rightarrow\frac{n!}{۳!(n-۳)!}=۲۲۰\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۲۲۰\times۶=۱۳۲۰$$

$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۱۲\times۱۱\times۱۰\Rightarrow n=۱۲$$

پاسخنامه سؤالات تستی
بخش ۷

۱- گزینه «۲» آسان

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}=۵۶\Rightarrow \frac{(n+۱)(n)(n-۱)!}{(n-۱)!}=۵۶$$
$$\Rightarrow (n+۱)\times n=۸\times ۷\Rightarrow n=۷$$

۲- گزینه «۳» آسان

$$\frac{(n-۱)!}{(n+۱)!}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow \frac{(n-۱)!}{(n+۱)(n)(n-۱)!}=\frac{۱}{۶}$$
$$\Rightarrow \frac{۱}{n(n+۱)}=\frac{۱}{۲\times ۳}\Rightarrow n=۲$$

۳- گزینه «۲» متوسط

$$n!=۱۲۰\times ۴۲=۱\times ۲\times ۳\times ۴\times ۵\times (۶\times ۷)=۷!\Rightarrow n=۷$$

۴- گزینه «۱» متوسط

$$x!=۵۶\times ۱۸\times ۵=x!=\underbrace{۲\times ۴\times ۷}_{۵۶}\times \underbrace{۳\times ۶}_{۱۸}\times ۵=۷!\Rightarrow x=۷$$

۵- گزینه «۴» متوسط

$$(۳n+۱)!-۶۰۰(۳n-۱)!=۰$$
$$\Rightarrow (۳n+۱)!=۶۰۰(۳n-۱)!\Rightarrow \frac{(۳n+۱)!}{(۳n-۱)!}=۶۰۰$$
$$\Rightarrow \frac{(۳n+۱)(۳n)(۳n-۱)!}{(۳n-۱)!}=۶۰۰$$
$$\Rightarrow ۳n(۳n+۱)=۶۰۰\Rightarrow ۳n(۳n+۱)=۲۴\times ۲۵\Rightarrow ۳n=۲۴\Rightarrow n=۸$$

۶- گزینه «۴» آسان

$$P(۹,k)=۶C(۹,k)\Rightarrow \frac{۹!}{(۹-k)!}=۶\times \frac{۹!}{(۹-k)!\times k!}$$
$$\Rightarrow ۱=\frac{۶}{k!}\Rightarrow k!=۶\Rightarrow k=۳$$

۷- گزینه «۳» متوسط

$$C(n,n-۳)=۳۵\Rightarrow \frac{n!}{(n-۳)!(n-(n-۳))!}=۳۵$$
$$\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)!}{(n-۳)!۳!}=۳۵\Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}=۷\times ۵$$
$$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۷\times ۶\times ۵\Rightarrow n=۷$$

۸- گزینه «۳» متوسط

$$C(n,r)=\frac{n(n-۱)}{۲}\Rightarrow \frac{n(n-۱)}{۲}+۷n=۱۱۵$$
$$\xrightarrow{\times ۲} n(n-۱)+۱۴n=۲۳۰\Rightarrow n^۲+۱۳n=۲۳۰$$
$$\Rightarrow n(n+۱۳)=۱۰\times ۲۳\Rightarrow n=۱۰$$

۹- گزینه «۲» متوسط

$$P(n,۲)-C(n,۲)=۳۶\Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!}-\frac{n!}{۲!(n-۲)!}=۳۶$$
$$\Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!}(۱-\frac{۱}{۲})=۳۶\Rightarrow \frac{n!}{(n-۲)!}(\frac{۱}{۲})=۳۶$$
$$\xrightarrow{\times ۲} \frac{n!}{(n-۲)!}=۷۲\Rightarrow \frac{n(n-۱)(n-۲)!}{(n-۲)!}=۷۲$$
$$\Rightarrow n(n-۱)=۷۲\Rightarrow n(n-۱)=۹\times ۸\Rightarrow n=۹$$

۱۰- گزینه «۲» متوسط

$$P(n,x)=۷۲۰C(n,x)\Rightarrow \frac{n!}{(n-x)!}=۷۲۰\times \frac{n!}{x!(n-x)!}$$
$$\Rightarrow ۱=\frac{۷۲۰}{x!}\Rightarrow x!=۷۲۰\Rightarrow x=۶$$

پاسخنامه سؤالات تشریحی
آزمون تشریحی ۱

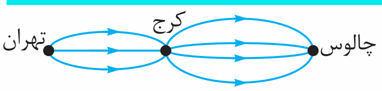
۱- آسان

طبق اصل جمع به ۳+۴ طریق یعنی ۷ طریق می‌تواند یک هدیه بخرد.

۲- آسان

$$P(۶,۴)=\frac{۶!}{۲!}=\frac{۷۲۰}{۲}=۳۶۰$$

۳- آسان



طبق اصل ضرب داریم:

تعداد مسیرها $=۳\times ۴=۱۲$

۴- آسان

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$$

۵- آسان

آ) $\frac{۳۰!}{۲۹!}=\frac{۳۰\times ۲۹!}{۲۹!}=۳۰$

ب) $\frac{۴۵!}{۴۶!}=\frac{۴۵!}{۴۶\times ۴۵!}=\frac{۱}{۴۶}$

۶- آسان

$$\frac{(k-۱)!(k+۳)!}{k!(k+۲)!}=\frac{(k-۱)!(k+۳)(k+۲)!}{k(k-۱)!(k+۲)!}=\frac{k+۳}{k}$$

۷- متوسط

آ) از ۶ حرف کلمه دانشجو حرف «ش» حذف می‌شود.

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{۲!}=\frac{۱۲۰}{۲}=۶۰$$

ب) حرف «د» یکی از حروف خواهد بود و از ۵ حرف باقی‌مانده دو تا انتخاب می‌شود.

$$۳\times P(۵,۲)=۳\times\frac{۵!}{۳!}=۳\times ۲۰=۶۰$$

پ) حرف اول «ج» خواهد بود پس:

$$P(۵,۲)=\frac{۵!}{۳!}=۲۰$$

۸- متوسط

$$\frac{C(n,n-۳)}{C(۴n,۴n-۱)}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{\frac{n!}{(n-۳)!۳!}}{\frac{(۴n)!}{(۴n-۱)!\times ۱!}}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۶}}{۴n}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow(n-۱)(n-۲)=۶\Rightarrow n=۴$$

۹- آسان

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۱}=\frac{۴!}{۲!۲!}\times ۵=۳۰$$

۱۰- متوسط

$$C(۹,۵)+P(۴,۱)=\frac{۹!}{۵!۴!}+\frac{۴!}{۳!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶}{۴\times ۳\times ۲\times ۱}+۴=۱۳۰$$

$$\binom{۱۰}{۶}-P(۲,۲)=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷}{۴\times ۳\times ۲\times ۱}-\frac{۲!}{۰!}=۲۱۰-۲=۲۰۸$$

سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

۱- آسان

تعداد انتخاب $۶=۲+۴$ است.

۲- آسان

$$P(۸,۷)=\frac{۸!}{۱!}=۸!=۴۰۳۲۰$$

۳- آسان

$$\binom{۵}{۱}\binom{۷}{۱}\binom{۳}{۱}=۵\times ۷\times ۳=۱۰۵$$

۴- متوسط

حرف «ش» که انتخاب شده است. از ۵ حرف باقیمانده ۳ حرف انتخاب می‌کنیم.

$$P(۵,۳)=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$$

۵- متوسط

$$n!=۶۰\times ۸۴\Rightarrow n!=۱۲\times ۵\times ۷\times ۴\times ۳=۷!\Rightarrow n=۷$$

۶- آسان

$$\frac{(n+۲)!}{(n+۱)!}=\frac{(n+۲)(n+۱)!}{(n+۱)!}=n+۲$$

۷- متوسط

آ) رقم سمت راست ۲ یا ۶:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۲}=۱۲۰$$

ب) رقم سمت راست ۵:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}\times\underline{۱}=۶۰$$

پ) رقم سمت چپ باید ۶ یا ۷:

$$\underline{۲}\times\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۱۲۰$$

۸- متوسط

$$\binom{۶}{۴}\times\binom{۷}{۳}\times ۴!\times ۳!=\frac{۶!}{۲!}\times\frac{۷!}{۴!}=۷۵۶۰۰$$

۹- متوسط

$$\binom{8}{2}\binom{6}{3}\binom{3}{3}=28\times 20=560$$

۱۰- متوسط

$$P(n-1,k)+k\,P(n-1,k-1)=\frac{(n-1)!}{(n-1-k)!}+k\times\frac{(n-1)!}{(n-k)!}$$

$$=\frac{(n-1)!\times(n-1-k)+k(n-1)!}{(n-k)!}=\frac{(n-1)!(n-1-k+k)}{(n-k)!}$$

$$\frac{(n-1)(n-1)!}{(n-k)!}\neq P(n,k)$$

بنابراین رابطه نادرست است.

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون تستی پایانی

۱- گزینه «۲» آسان

برای این که عددمان بزرگ‌تر از ۳۰۰ باشد، در خانه صدگان می‌توانیم از سه رقم ۳، ۴ یا ۵ استفاده کنیم.

$$\underset{\text{صدگان}}{\underline{3}}\times\underset{\text{دهگان}}{\underline{5}}\times\underset{\text{یکان}}{\underline{4}}=60$$

۲- گزینه «۱» متوسط

مسئله را در ۲ حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: رقم یکان ۰ باشد:

$$\bar{6}\times\bar{5}\times\bar{4}\times\overset{0}{\bar{1}}=120$$

حالت دوم: رقم یکان، ۲، ۴ یا ۶ باشد:

$$\bar{5}\times\bar{5}\times\bar{4}\times\overset{\text{۲یا۴یا۶}}{\bar{3}}=300$$

بنابراین طبق اصل جمع $120+300=420$ عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت.

۳- گزینه «۴» آسان

اولاً ارقام باید فرد باشند؛ یعنی از ۵ رقم $\{1,3,5,7,9\}$ می‌توانیم استفاده کنیم.

ثانیاً عدد باید بر ۵ بخش‌پذیر باشد، پس از بین این ارقام فقط عدد ۵ در یکان قرار گیرد و چون تکرار ارقام مجاز است، پس در جایگاه دهگان صدگان هر یک از ۵ رقم فرد می‌توانید قرار بگیرند، بنابراین:

صدگان دهگان یکان

$\boxed{5}\ \boxed{5}\ \boxed{1}$ تعداد اعداد $=5\times5\times1=25$

فقط ۵

۴- گزینه «۴» آسان

او برای کفش خود ۹ انتخاب دارد زیرا قطعاً یک کفش را استفاده نمی‌کند. او برای لباس انتخابی ندارد، زیرا لباس خود را انتخاب کرده است. او برای کلاه خود هم ۲ انتخاب دارد.

$$\underset{\text{کفش}}{\underline{9}}\times\underset{\text{لباس}}{\underline{1}}\times\underset{\text{کلاه}}{\underline{2}}=18$$

۵- گزینه «۲» متوسط

حرف اول باید از حروف «ک»، «ا»، «و»، «ر» انتخاب می‌شود، حرف آخر باید یکی از ۳ حرف بدون نقطه باقی‌مانده باشد، برای حروف دوم و سوم محدودیتی به غیر از این که تکرار حروف مجاز نیست وجود ندارد.

$$\bar{3}\times\bar{3}\times\bar{4}\times\bar{4}=144$$

۶- گزینه «۱» متوسط

$$(n^2-4n)!=120\Rightarrow(n^2-4n)!=5!\Rightarrow n^2-4n=5\Rightarrow n^2-4n-5=0$$

$$\Rightarrow(n+1)(n-5)=0\Rightarrow\begin{cases}n=-1\\ n=5\end{cases}$$

$n=-1\Rightarrow(n-2)!=(-3)!$ تعریف نشده

$$n=5\Rightarrow(n-2)!=3!=6$$

۷- گزینه «۴» آسان

حروف «ج ه ا ن» را داخل یک بسته قرار می‌دهیم.

$\boxed{\text{ج ه ا ن}}$ گ ی ر $=4!\times4!=(4!)^2$

جابه‌جایی بسته و حروف (گ)، (ی)، (ر)

جابه‌جایی حروف (ج)، (ه)، (ا)، (ن)

۸- گزینه «۲» متوسط

کتاب‌های ریاضی R_1,R_2,R_3,R_4

کتاب‌های فیزیک f_1,f_2,f_3

کتاب‌های شیمی S_1,S_2

$\boxed{R_1,R_2,R_3,R_4}\ \boxed{f_1,f_2,f_3}\ \boxed{S_1,S_2}$

توجه شود با توجه به آن که اولین کتاب باید ریاضی باشد تنها جابه‌جایی بسته فیزیک و شیمی را حساب می‌کنیم.

$4!\times3!\times2!\times2! \longrightarrow$ جابه‌جایی بسته فیزیک و شیمی $=(2!)^2\times3!\times4!$

جابه‌جایی کتاب‌های ریاضی

جابه‌جایی کتاب‌های شیمی

جابه‌جایی کتاب‌های فیزیک

۹- گزینه «۲» آسان

$$3\times5!\times3=4\times120\times3=1440$$

۴ حالت برای قرار گرفتن هر یک از دانش‌آموزان پایه اول وجود دارد.

۳ حالت برای قرار گرفتن هر یک از دانش‌آموزان پایه دوم وجود دارد.

۱۰- گزینه «۳» — متوسط

از روش متمم استفاده می‌کنیم.

ابتدا تعداد کل جایگشت را پیدا می‌کنیم. $\frac{6!}{2!}=360$

تعداد حالت‌هایی که حروف S کنار هم هستند پیدا می‌کنیم: $5!=120$

$\boxed{SS}YTEM$

تعداد حالت‌هایی که حروف S کنار هم نباشند، پیدا می‌کنیم: $360-120=240$

۱۱- گزینه «۲» — دشوار

می‌دانیم هنگام استفاده از فرمول جایگشت با تکرار اگر k رقم ۰ وجود داشته باشد، فرمول به‌صورت $\frac{(n-k)\times(n-1)!}{n_1!n_2!\times\dots}$ درمی‌آید.

$$\begin{cases} n=5 \Rightarrow \text{تعدادارقام} \\ k=2 \Rightarrow \text{تعدادارقام ۰} \end{cases} \Rightarrow \text{جایگشت}=\frac{3\times 4!}{2!2!}=18$$

۱۲- گزینه «۴» — متوسط

باید از بین ۱۰ دانش‌آموز، ۴ دانش‌آموز انتخاب کنیم و ترتیب اول تا چهارم آن‌ها نیز اهمیت دارد.

$$P(10,4)=\frac{10!}{(10-4)!}=\frac{10!}{6!}=5040$$

۱۳- گزینه «۲» — دشوار

در مسائل جایگشت k شی از n شی اگر عضو تکراری داشتیم مسئله را به روش دسته بندی حل می‌کنیم:

حالت اول: $1,1,1,2 \Rightarrow$ تعداد حالت $=\frac{4!}{3!}=4$

حالت دوم: $2,2,2,1 \Rightarrow$ تعداد حالت $=\frac{4!}{3!}=4$

حالت سوم: $1,1,2,2 \Rightarrow$ تعداد حالت $=\frac{4!}{2!2!}=6$

طبق اصل جمع $4+4+6=14$ حالت وجود دارد.

۱۴- گزینه «۱» — دشوار

کافی است یک نقطه از ۴ نقطه سمت چپ خط AB و یک نقطه از ۴ نقطه سمت راست خط AB را انتخاب کنیم.

$$\binom{4}{1}\binom{5}{1}=4\times 5=20$$

۱۵- گزینه «۱» — آسان

سه حالت وجود دارد:

حالت اول) هر ۵ دانش آموز رشته تجربی باشند.

حالت دوم) ۴ دانش‌آموز رشته تجربی و ۱ دانش‌آموز رشته ریاضی باشد.

حالت سوم) ۳ دانش‌آموز رشته تجربی و ۲ دانش‌آموز رشته ریاضی باشد.

بنابراین خواهیم داشت:

$$\binom{5}{5}+\binom{5}{4}\binom{4}{1}+\binom{5}{3}\binom{4}{2}=1+(5)(4)+(10)(6)=81$$

۱۶- گزینه «۲» — دشوار

ابتدا عضوها را به شکل زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3),(e_1,e_2,e_3)$

اکنون از بین این ۵ دسته، ۳ دسته را انتخاب می‌کنیم و از هر دسته ۱ عضو برمی‌داریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\binom{5}{3}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}\times\binom{3}{1}=10\times3\times3\times3=270$$

۱۷- گزینه «۴» — متوسط

برای آن که ضرب ۲ عدد زوج باشد، باید هر دو عدد زوج یا یکی از اعداد زوج و یکی فرد باشد.

$$\binom{4}{2}+\binom{4}{1}\binom{5}{1}=6+(4)(5)=26$$

۱۸- گزینه «۳» — متوسط

یک عضو آن باید از بین اعداد ۲، ۳، ۵ و ۷ باشد، بنابراین ۴ حالت برای آن وجود دارد. دو عضو باقی مانده باید از بین اعداد ۱، ۴، ۶، ۸ و ۹ باشد، بنابراین خواهیم داشت:

$$\underbrace{4}_{\text{یک عدد اول باشد}}\times\underbrace{\binom{5}{2}}_{\text{انتخاب ۲ عدد مرکب}}=4\times10=40$$

۱۹- گزینه «۳» — متوسط

روش اول:

$$\underbrace{\binom{7}{1}}_{\text{زیرمجموعه‌های ۱عضوی}}+\underbrace{\binom{7}{3}}_{\text{زیرمجموعه‌های ۳عضوی}}+\underbrace{\binom{7}{5}}_{\text{زیرمجموعه‌های ۵عضوی}}+\underbrace{\binom{7}{7}}_{\text{زیرمجموعه‌های ۷عضوی}}=7+35+21+1=64$$

روش دوم: تعداد زیرمجموعه‌ها با تعداد فرد در یک مجموعه n عضوی 2^{n-1} می‌باشد. این مجموعه ۷ عضو دارد، بنابراین تعداد زیرمجموعه‌های با تعداد فرد $2^{7-1}=2^6=64$ می‌باشد.

۲۰- گزینه «۱» آسان

دو عضو c,a انتخاب شده است، بنابراین ۳ عضو دیگر را از بین $\{b,f,g,h\}$ انتخاب می‌کنیم.

$$\binom{۴}{۳}=۴$$

پاسخنامه
سؤالات تستی
آزمون پلاس

۱- گزینه «۴»

می‌دانیم $۱=۰!=۱!$ پس:

$$\begin{cases} x^۲-۲x=۰\Rightarrow x(x-۲)=۰\Rightarrow x=۰,x=۲ \\ x^۲-۲x=۱\Rightarrow x^۲-۲x-۱=۰\Rightarrow \Delta=b^۲-۴ac=۸>۰\to \text{۲ ریشه} \end{cases}$$

پس چهار ریشه دارد.

۲- گزینه «۲»

چون هر شخص حداکثر می‌تواند به یک نفر رأی بدهد پس می‌توان نتیجه گرفت هر شخص ۸ انتخاب دارد (یا به یکی از ۷ نامزد رأی می‌دهد یا به هیچ کدام رأی نمی‌دهد) پس:

$$\underset{\text{شخص}}{۸}\times\underset{\text{شخص}}{۸}\times\;....\;\times\underset{\text{شخص}}{۸}=۸^{۲۲}$$

۳- گزینه «۲»

واضح است که رقم اول نمی‌تواند صفر باشد. پس:

$$\underset{\text{همه اعداد به جز صفر}}{۹}\;۱۰\;\underset{\text{همان اعداد انتخابی در رقم هزارگان}}{۱}\;۱=۹۰$$

۴- گزینه «۴»

جابه‌جایی ۳ نفر در اتاق سه تخته و جابه‌جایی ۲ نفر در اتاق دو تخته اهمیتی ندارد بنابراین:

$$\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۳}=\frac{۷\times۶}{۲}\times\frac{۵\times۴}{۲}\times۱=۷\times۶\times۵=۲۱۰$$

۵- گزینه «۳»

تعداد حالات $\frac{۵!}{۳!}$ یعنی ۲۰ حالت خواهد بود.

۶- گزینه «۳»

ابتدا تعداد کل جایگشت‌های متمایز (با توجه به محدودیت وجود صفر) را نوشته سپس بر تعداد جایگشت‌های تکراری تقسیم می‌کنیم.

(رقم یکان باید فرد باشد و رقم یکان هزار غیر صفر) پس:

$$\frac{۴\times۴!\times۳}{۳!\times۲!}=۲۴$$

۷- گزینه «۴»

حالت اول: سمت چپ عدد ۵ باشد:

$$۱\times\frac{۴!}{۲!۲!}=۶$$

حالت دوم: سمت چپ عدد ۲ باشد:

$$۱\times\frac{۴!}{۲!}=۱۲$$

جمعاً ۱۸ حالت

۸- گزینه «۱»

برای حل این تست از قاعده متمم استفاده می‌کنیم.

تعداد کل حالاتی که ۶ نفر دور یک میز بنشینند: $۵!$

تعداد حالاتی که پدر و مادر و بچه‌ها دور میز بنشینند به طوری‌که پدر و مادر در کنار هم باشند: $۴!\times۲!$

در نتیجه:

$$۵!-۴!\times۲!=۵\times۴!-۴!\times۲!=۴!(۵-۲)=۳\times۴!$$

۹- گزینه «۱»

ابتدا باید ۶ صندلی از ۱۰ صندلی را انتخاب کنیم و البته توجه کنید که این افراد خودشان به $۶!$ بر روی صندلی‌ها جابه‌جا می‌شوند پس:

$$\binom{۱۰}{۶}\times۶!=\frac{۱۰!}{۶!\times۴!}\times۶!=\frac{۱۰!}{۴!}$$

۱۰- گزینه «۲»

می‌دانیم رقم اول نمی‌تواند صفر باشد پس باید ابتدا $\binom{۶}{۲}$ جایگاه را برای صفر انتخاب کنیم. برای جایگاه اول ۲ حالت (۲ یا ۳) و برای ۴ جایگاه دیگر هم ۲ حالت (۲ یا ۳) رخ می‌دهد پس:

$$\binom{۶}{۲}\times۲\times۲^۴=\binom{۶}{۲}\times۲^۵$$

۱۱- گزینه «۳»

ابتدا سه رقم از بین ارقام داده شده انتخاب می‌کنیم $\binom{۵}{۳}$. اما هر سه عدد که انتخاب شود تنها یک حالت رخ می‌دهد که (صدگان > دهگان > یکان) باشد. مثلاً با انتخاب ۷ و ۵ و ۳ تنها یک حالت ۷۵۳ وجود دارد. بنابراین تعداد کل اعداد با این شرط برابر است با:

$$\binom{۵}{۳}\times ۱=۱۰$$

۱۲- گزینه «۱»

می‌دانیم تعداد زیرمجموعه‌های K عضوی یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$.

حال برای آنکه حاصل‌ضرب اعضای ۳ عضو از این مجموعه‌ی ۷ عضوی عددی زوج باشد پس:

$$\underset{\text{هر ۳ زوج}}{\binom{۴}{۳}}+\underset{\text{۲زوج}}{\binom{۴}{۲}}\times\underset{\text{یک فرد}}{\binom{۳}{۱}}+\underset{\text{یک زوج}}{\binom{۴}{۱}}\times\underset{\text{۲ فرد}}{\binom{۳}{۲}}=۴+۱۸+۱۲=۳۴$$

۱۳- گزینه «۴»

ابتدا از بین ۶ گروه فوتبال ۵ گروه را انتخاب می‌کنیم سپس از هر کدام یک نفر را انتخاب می‌کنیم.

$$P=\binom{۶}{۵}\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۱}\binom{۶}{۱}=۶^۶$$

۱۴- گزینه «۱»

از شش موقعیت دو تا انتخاب می‌کنیم و ارقام زوج را در آن‌ها قرار می‌دهیم.

$$\underbrace{\binom{۶}{۲}}_{\text{انتخاب دوجایگاه برای زوج‌ها}}\times\underbrace{۲\times ۲}_{\text{اعداد زوج}}\underbrace{\times ۵\times ۵\times ۵\times ۵\times ۵}_{\text{همه اعداد}}=۲^۲\times ۳\times ۵^۵$$

۱۵- گزینه «۳»

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=۲\Rightarrow c-b=۲a$$

چون a یک رقم طبیعی است پس ۲a زوج و مثبت است. حالت‌های زیر رخ می‌دهد.

۱) اگر $c-b=۲$ باشدآن‌گاه برای c مقادیر $\{۳,۴,۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد.

۲) اگر $c-b=۴$ باشد آن‌گاه برای c مقادیر $\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ وجود دارد.

۳) اگر $c-b=۴$ باشد آن‌گاه برای c مقادیر $\{۷,۸,۹\}$ وجود دارد.

۴) اگر $c-b=۸$ باشد آن‌گاه برای c مقادیر $\{۹\}$ وجود دارد.

کل حالت‌ها برابر است با:

$$۲(۱+۳+۵+۷)=۲\times ۱۶=۳۲$$

۱۶- گزینه «۳»

رقم یکان باید عدد ۲ باشد و ده رقم دیگر را به این صورت در نظر می‌گیریم که n تا عدد ۲ و $۱۰-n$ تا عدد ۱ داشته باشد. مجموع ارقام در این صورت برابر $n+۱۲$ خواهد شد. برای آن‌که $n+۱۲$ مضرب ۳ باشد

$$n=۹\,,\,n=۶\,,\,n=۳\,,\,n=۰$$

اکنون برای هر n تعداد حالات را در نظر می‌گیریم:

$$\binom{۱۰}{۰}+\binom{۱۰}{۳}+\binom{۱۰}{۶}+\binom{۱۰}{۱}=۱+۱۲۰+۲۱۰+۱۰=۳۴۱$$

۱۷- گزینه «۳»

قرار است از بین سه درس ریاضی، فیزیک، زیست و چهار درس دیگر چهار درس انتخاب شود. شرایط مسئله را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم.

۱) اگر فقط فیزیک انتخاب شود تعداد حالات $\binom{۴}{۳}$ است.

۲) اگر زیست بدون ریاضی انتخاب شود تعداد حالات $\binom{۴}{۳}$ است.

۳) در صورتی‌که زیست و ریاضی با هم انتخاب شوند تعداد حالات $\binom{۴}{۲}$ است.

۴) اگر هیچ‌کدام از سه درس انتخاب نشود تعداد حالات $\binom{۴}{۴}$ است.

بنابراین کل حالات برابر است با:

$$\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۳}+\binom{۴}{۲}+\binom{۴}{۴}=۴+۴+۶+۱=۱۵$$

۱۸- گزینه «۳»

$$-\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲\Rightarrow b=c-۲a\Rightarrow ۲a=c-b$$

$$۲\le ۲a\le ۱۸\Rightarrow ۲\le c-b\le ۱۸$$

اگر $c-b=۲$ باشد ۷ حالت وجود دارد

اگر $c-b=۴$ باشد ۵ حالت وجود دارد.

اگر $c-b=۶$ باشد ۳ حالت وجود دارد.

اگر $c-b=۸$ باشد ۱ حالت وجود دارد.

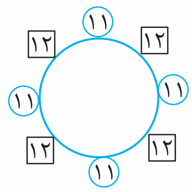
پس در کل ۱۶ حالت داریم.

۱۹-گزینه «۱»

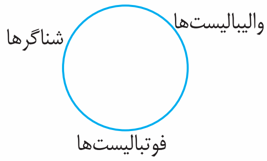
یازدهم‌ها دور میز می‌نشینند.

پس دوازدهمی‌ها یکی در میان بین یازدهمی‌های می‌نشینند.

$۳!\times۴!=۱۴۴$



۲۰- گزینه «۲»



تعداد حالت‌های قرار گرفتن برابر است با:

$(۲!)(۳!)(۲!)(۳!)=۱۴۴$