پاسخنامه سؤالات تشریحی

بخش ۱

۱- آسان

هر سکه دو حالت دارد رو یا پشت، پس طبق اصل ضرب، پرتاب دو سکه دارای $۲\times۲=۴$ عضو می‌باشد، یعنی داریم:

$S=$ (رو، رو) , (پ، رو) , (رو، پ) , (پ ، پ)$\} \Rightarrow n(S)=۴$

پیشامدهایی حداقل یکبار رو بیاید: $A=\{$(رو، رو) , (پ، رو) , (رو، پ)$\}$

۲- متوسط

در پرتاب یک تاس $n(S)=۶$ می‌باشد و چون پیشامدها زیر مجموعه‌های S هستند، بنابراین $۲^۶$ یعنی ۶۴ پیشامد مختلف می‌تواند تعریف شود.

۳- متوسط

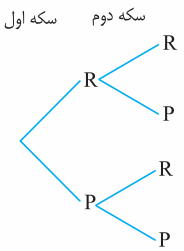
در پرتاب دو تاس فضای نمونه‌ای ۳۶ حالت دارد که در جدول زیر نمایش داده شده است.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	(۱,۱)	(۱,۲)	(۱,۳)	(۱,۴)	(۱,۵)	(۱,۶)
۲	(۲,۱)	(۲,۲)	(۲,۳)	(۲,۴)	(۲,۵)	(۲,۶)
۳	(۳,۱)	(۳,۲)	(۳,۳)	(۳,۴)	(۳,۵)	(۳,۶)
۴	(۴,۱)	(۴,۲)	(۴,۳)	(۴,۴)	(۴,۵)	(۴,۶)
۵	(۵,۱)	(۵,۲)	(۵,۳)	(۵,۴)	(۵,۵)	(۵,۶)
۶	(۶,۱)	(۶,۲)	(۶,۳)	(۶,۴)	(۶,۵)	(۶,۶)

مجموع دو عدد رو شده برابر ۶: $\{(۶,۲),(۵,۳),(۴,۴),(۳,۵),(۲,۶)\}$

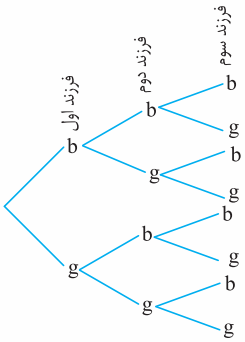
۴- آسان

آ)



$S=\{(R,P),(R,R),(P,R),(P,P)\}$

ب)



$S=\{(b,b,b),(b,b,g),(b,g,b),(b,g,g),(g,b,b),(g,b,g),(g,g,b),(g,g,g)\}$

۵- متوسط

آ) $A=\{(۱,۶),(۶,۱),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۲,۵)\}\Rightarrow n(A)=۶$

ب) $B=\{(۵,۵),(۵,۶),(۶,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow n(B)=۴$

پ) $C=\{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}\Rightarrow n(C)=۳$

۶- متوسط

هر فرزند دو حالت دارد یا دختر یا پسر بنابراین طبق اصل ضرب داریم:

$n(S)=۲\times۲\times۲\times۲=۲^۴=۱۶$

$A=$ (د ، پ ، د ، پ) , (پ ، د ، پ ، د)$\}$

$n(A)=۲$

۷- متوسط

طبق اصل ضرب داریم:

$n(S)=\underbrace{۲\times۲\times\ldots\times۲}_{\text{۲۰بار}}=۲^{۲۰}=۱۰۴۸۵۷۶$

حداقل ۱ بار پشت ظاهر شود، یعنی ۱ بار پشت، ۲ بار پشت، ۳ بار پشت و ... تا ۲۰ بار پشت را می‌پذیریم، تنها حالتی که قابل قبول نیست همگی رو می‌باشد. که اصلاً پشت ندارد بنابراین:

$n(A)=۲^{۲۰}-۱=۱۰۴۸۵۷۵$

۸- متوسط

تعداد عضوهای حداکثر ۹ پسر با حداقل ۱دختر یکسان است بنابراین:

$n(S)=\underbrace{۲\times۲\times\ldots\times۲}_{\text{۱۰بار}}=۲^{۱۰}=۱۰۲۴$ $\qquad n(A)=۲^{۱۰}-۱=۱۰۲۳$

۹- آسان

آ) $S=\{۲,۴,۶,۸,۱۰\}$

ب) $۲^۵=۳۲$

پ) $A=\{۴,۸\}$

۱۰- آسان

آ) $A=\{۲,۴,۶,۸\}$

ب) $B=\{۲,۳,۵,۷\}$

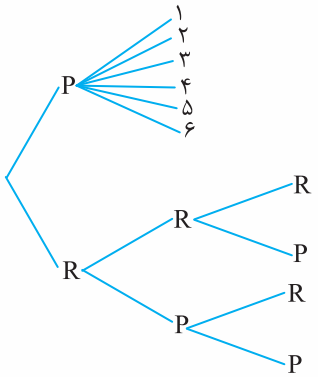
پ) $C=\{۳,۴,۵,۶,۷,۸\}$

۱۱- آسان

$S=\{bb,bg,gg,gb\}$

$A=\{bg,gg,gb\}$

۱۲- متوسط



آ) $S=\{P_۱,P_۲,P_۳,P_۴,P_۵,P_۶,RRR,RRP,RPR,RPP\}$

ب) $A=\{P_۲,P_۴,P_۶\}$

پ) $B=\{RRR,RRP,RPR\}$

۱- گزینه «۱» آسان

فضای نمونه‌ای در این پدیده تصادفی تعداد حالات ممکن انتخاب یک مهره از این ۶+۲ مهره می‌باشد.

$$n(S)=\binom{۸}{۱}=۸$$

۲- گزینه «۳» متوسط

چون یک فرد مورد نظر باید حتماً انتخاب شده باشد، آن فرد را کنار می‌گذاریم و دو فرد دیگر را از بین ۷ نفر باقی مانده انتخاب می‌کنیم، پس تعداد اعضای پیشامد A برابر تعداد ترکیب‌های ۲تایی از بین ۷ نفر است.

$$n(A)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

۳- گزینه «۲» متوسط

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای همان تعداد حالات ممکن در این پدیده تصادفی است که طبق اصل ضرب داریم:

$$n(S)=۴\times۴=۱۶$$

توجه: رقم صفر در دهگان نمی‌تواند قرار گیرد.

۴- گزینه «۳» متوسط

$$n(S)=\binom{۷}{۳}=\frac{۷!}{۳!۴!}=۳۵$$

۵- گزینه «۲» متوسط

$a_۱,a_۲$ انتخاب شده‌اند، بنابراین دو عضو دیگر از بین $a_۵,a_۶,a_۷,a_۸$ باید انتخاب شود.

$$n(A)=\binom{۴}{۲}=۶$$

۶- گزینه «۱» آسان

در هر پرتاب تاس، ۳ حالت عدد رو شده فرد است و در ۳ حالت عدد رو شده زوج است.

$$n(S)=(۳\times۳\times۳\times۳)+(۳\times۳\times۳\times۳)=۸۱+۸۱=۱۶۲$$

۷- گزینه «۲» آسان

$$A=\{(پ,د,پ,د),(د,پ,د,پ)\}\Rightarrow n(A)=۲$$

۸- گزینه «۳» متوسط

اگر فرزند اول و آخر هر دو پسر باشد، برای دو فرزند وسطی ۴ حالت ممکن است پیش بیاید. یا اگر فرزند اول و آخر هر دو دختر باشند، باز هم برای دو فرزند وسطی ۴ حالت ممکن است پیش بیاید پس در مجموع تعداد اعضای فضای نمونه‌ای ۸ حالت است.

۹- گزینه «۱» متوسط

$$n(A)=\binom{۵}{۲}\times\binom{۵}{۳}=۱۰\times۱۰=۱۰۰$$

۱۰- گزینه «۲» دشوار

$$n(B)=\binom{۴}{۳}\times۲^۲\times\binom{۴}{۲}=۴\times۴\times۶=۹۶$$

۱۱- گزینه «۴» دشوار

$$n(S)=۲\times۲^۲+۳\times۲^۲+۱=۳۳$$

تاس ۵ یا ۶ — ۲ سکه — سه سکه — تاس عدد۴ — تاس ۱ یا ۲ یا ۴

سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۲

۱- آسان

آ) $A=\{(۲,۳),(۳,۲),(۱,۴),(۴,۱)\}$

ب) $B=\{(۲,۲),(۱,۴),(۴,۱)\}$

پ) $A\cup B=\{(۲,۳),(۳,۲),(۱,۴),(۴,۱),(۲,۲)\}$

ت) $A\cap B=\{(۴,۱),(۱,۴)\}$

ث) $A-B=\{(۲,۳),(۳,۲)\}$

ج) $C=\{(۲,۶),(۶,۲),(۳,۵),(۵,۳),(۴,۴)\}$

چ) $D=\{(۲,۶),(۶,۲),(۴,۳),(۳,۴)\}$

۲- آسان

طبق اصل ضرب داریم $n(S)=۶\times۲=۱۲$ در حالتی که جملات با «و» مرتبط می‌شود اشتراک رخ می‌دهد و در حالتی که با «یا» به هم مربوط می‌شوند اجتماع اتفاق می‌افتد بنابراین داریم:

آ) $A=\{(۲,پ),(۴,پ),(۶,پ)\}$

ب) $B=\{(۱,پ),(۳,پ),(۵,پ),(۲,پ),(۲,رو),(۴,پ),(۴,رو),(۶,پ),(۶,رو)\}$

۳- آسان

آ) $A=\{۲۴۳,۴۲۳\}$

ب) $A'=\{۲۳۴,۴۳۲,۳۲۴,۳۴۲\}$

۴- آسان

$A=\{(۱,۱,۱),(۲,۲,۲),\dots,(۶,۶,۶)\}$

$B=\{(۱,۲,۳),(۲,۳,۱),(۴,۵,۶),(۶,۵,۴),\dots\}$

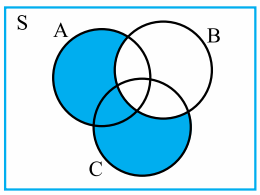
$A\cup B\neq S\ ,\ A\cap B=\varnothing\Rightarrow A\neq B'$

۵- آسان

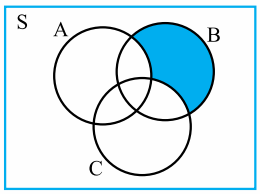
$\begin{cases}A=\{۱,۳,۵\}\\B=\{۴,۶\}\end{cases}\Rightarrow A\cap B=\varnothing\Rightarrow$ A و B ناسازگارند

۶- متوسط

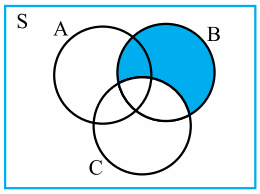
آ)



ب)



پ)



۷- متوسط

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}\quad,\quad A=\{۱,۲,۳\}\quad,\quad B=\{۲,۳,۵\}$

$A\cup B=\{۱,۲,۳,۵\}\quad,\quad A\cap B=\{۲,۳\}\quad,\quad A-B=\{۱\}$

۸- متوسط

اگر مجموع دو عدد رو شده زوج باشد بایستی هر دو عدد فرد یا هر دو عدد زوج باشد، اما برای آن‌که مجموع اعداد روشده فرد باشد بایستی یکی از اعداد فرد و دیگری زوج باشد پس دو پیشامد اشتراکی ندارند در نتیجه ناسازگارند.

۹- آسان

$A=\{۱,۲\}\ \ B=\{۵\}\Rightarrow A\cap B=\varnothing$

بله - چون $A\cap B=\varnothing$ است پس B,A ناسازگارند.

پاسخنامه

سؤالات تستی

بخش ۲

۱- گزینه «۳» دشوار

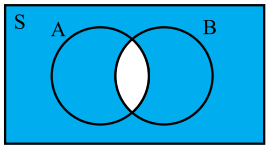
حداکثر یکی از دو پیشامد A یا B رخ دهد؛ یعنی:

۱) A رخ دهد، ولی B رخ ندهد $(A-B)$

۲) B رخ دهد و A رخ دهد $(B-A)$

۳) B, A هیچ کدام رخ ندهند $(S-(A\cup B))$

نمودار ون حالت‌های بالا به صورت زیر است:



بنابراین جواب سوال متمم $A\cap B$ است.

$(A\cap B)'=A'\cup B'$

۲- گزینه «۳» متوسط

$A=\{(ر,پ,ر),(پ,پ,ر),(ر,پ,پ),(پ,پ,پ)\}$

$B=\{(پ,پ,ر),(پ,ر,پ),(ر,پ,پ)\}$

$B-A'=B\cap(A')'=B\cap A=\{(پ,پ,ر),(ر,پ,پ)\}$
$\Rightarrow n(B-A')=n(B\cap A)=۲$

۳- گزینه «۴» متوسط

$A=\{(۱,۴),(۴,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۱,۳),(۳,۳),(۴,۳),(۵,۳),(۶,۳)\}$

لازم نیست مجموعه پیشامد B را بنویسیم بلکه کافی است از مجموعه A آن‌هایی که هر دو پرتاب عدد اول است را جدا کنیم، بنابراین:

$A\cap B=\{(۲,۳),(۳,۲),(۳,۳),(۵,۳)\}\Rightarrow n(A\cap B)=۴$

۴- گزینه «۳» متوسط

$A=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۴),(۴,۵),(۵,۶),(۲,۱),(۳,۲),(۴,۳),(۵,۴),(۶,۵)\}$

$B=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$
$\Rightarrow A\cap B=\{(۲,۳),(۳,۲)\}$

پیشامد C زمانی اتفاق می‌افتد که هر دو عدد ظاهر شده زوج و یا هر دو فرد باشد، در حالی که پیشامد A شامل یک عدد زوج و یک عدد فرد است بنابراین دو پیشامد C, A ناسازگار هستند.

۵- گزینه «۴» متوسط

$A=\{(۴,۱),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۱,۴),(۲,۴)$
$,(۳,۴),(۵,۴),(۶,۴)\}$

پیشامد $A-B$ شامل عضوهایی از A است که مجموع آن‌ها فرد نباشد؛ یعنی زوج مرتب‌هایی که مجموعشان فرد است را حذف می‌کنیم، بنابراین:

$A-B=\{(۴,۲),(۴,۴),(۴,۶),(۲,۴),(۶,۴)\}\Rightarrow n(A-B)=۵$

۶- گزینه «۱» متوسط

$A=\{(۲,۲),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۵),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۵)\}$

اگر B پیشامد مجموع دو عدد بیش از ۴ باشد، B' مجموع دو عدد ۴ یا کمتر از ۴ است.

$B'=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$

$A-B=A\cap B'=\{(۲,۲)\}\Rightarrow n(A-B)=n(A\cap B')=۱$

۷- گزینه «۲» متوسط

از روش متمم استفاده می‌کنیم، مجموعه S دارای $۲^۹=۵۱۲$ عضو است. مجموعه A پیشامد آن است که حداقل ۲ بار سکه «رو» بیاید، بنابراین مجموعه A' پیشامد آن است که یک بار «رو» بیاید و یا اصلاً «رو» نیاید. این که اصلاً «رو» نیاید؛ یعنی همگی «پشت» بیایند یک حالت دارد.

(پ,پ,پ,...,پ)

و این که یک‌بار «رو» بیاید با توجه به این که «رو» در کدام جایگاه قرار بگیرد ۹ حالت دارد (بار اول رو بیاید یا بار دوم رو بیاید یا ... یا بار نهم رو بیاید.)، بنابراین A' دارای ۱۰ عضو است.

$n(A)=n(S)-n(A')=۵۱۲-۱۰=۵۰۲$

۸- گزینه «۳» دشوار

$S=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۱,۲,۱),(۲,۱,۱),(۱,۲,۲),(۲,۱,۲),(۲,۲,۱),(۲,۲,۲)\}$

$A=\{(۱,۲,۱),(۱,۲,۲),(۲,۱,۲),(۲,۱,۱)\}$

$B=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲),(۲,۱,۱),(۲,۱,۲)\}$

$B\cap A'=B-A=\{(۱,۱,۱),(۱,۱,۲)\}$

۹- گزینه «۳» متوسط

$S=\{۳۰,۳۵,۳۹,۵۰,۵۳,۵۹,۹۰,۹۳,۹۵\}$

$A=\{۵۳,۵۹,۹۳,۹۰,۹۵\}$

$B=\{۳۵,۳۹,۹۳,۹۵\}$

$A\cap B'=A-B=\{۵۲,۹۰\}$

۱۰- گزینه «۱» دشوار

ناسازگار $A,B \Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow B\subseteq A'=S-A \Rightarrow B\subseteq\{۱,۵,۷,۸,۹,۱۰\}$

در واقع B یک زیرمجموعه از مجموعه ۶ عضوی است و می‌دانیم یک مجموعه شش عضوی $۲^۶=۶۴$ زیرمجموعه دارد، بنابراین ۶۴ پیشامد ناسازگار با A وجود دارد.

۱۱- گزینه «۳» دشوار

$S=\{۱,۲,۳,...,۹\}, A=\{۲,۴,۶,۸\}$

ناسازگار $A,B \Rightarrow A\cap B=\varnothing \Rightarrow B\subseteq A'=S-A=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$

مجموعه $\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ $۲^۵=۳۲$ زیرمجموعه دارد که زیرمجموعه‌های $\{\},\{۱\},\{۹\},\{۱,۹\}$ هیچ عدد اولی ندارد، بنابراین ۲۸ پیشامد ناسازگار با A وجو دارد به طوری که حداقل یک عدد اول را شامل می‌شود.

۱۲- گزینه «۳» دشوار

روش اول:

$S \Rightarrow n(S)=\binom{۹}{۲}=۳۶$: انتخاب ۲ خانه از ۹خانه

$A' \Rightarrow n(A')=\binom{۴}{۲}=۶$: شخص برنده باشد $\Rightarrow A$: شخص بازنده باشد.

$n(A)=n(S)-n(A')=۳۶-۶=۳۰$

روش دوم: شخص در صورتی بازنده است که حداقل یکی از دو خانه انتخابی او پوچ باشد:

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}}_{\text{یک خانه پوچ و دیگری جایزه‌دار}}+\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{هر دو خانه پوچ}}=۲۰+۱۰=۳۰$$

پاسخنامه

سؤالات تشریحی

بخش ۳

۱- آسان

$S=\{۲۳۴,۲۴۳,۳۲۴,۳۴۲,۴۲۳,۴۳۲\} \Rightarrow n(S)=۶$

$A=\{۲۳۴,۳۲۴,۴۳۲,۳۴۲\} \Rightarrow n(A)=۴$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۲- آسان

$n(S)=۶\times۶=۳۶$

آ) $A=\{(۱,۱),(۳,۳),(۵,۵)\} \Rightarrow n(A)=۳ \quad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

ب) $B=\{(۵,۵),(۴,۶),(۶,۴)\} \Rightarrow n(B)=۳ \quad P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

۳- آسان

$A=\{$(پ ، پ ، پ) و (پ ، پ ، د) و (پ ، د ، پ) و (د، پ ، پ)$\}$

$n(S)=۲\times۲\times۲=۸$

$n(A)=۴ \qquad P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$

۴- متوسط

آ) $n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!\,۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶\times۶!}=\frac{۹\times۸\times۷}{۶}=۸۴$

$n(A)=\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}=۱۰+۴=۱۴$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$

ب) $n(B)=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۳}=۱۰\times۴+۱۰=۵۰$

$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۵۰}{۸۴}=\frac{۲۵}{۴۲}$

۵- آسان

چون همواره $۰\le P(A)\le ۱$ می‌باشد داریم:

$$۰\le\frac{۲m-۱}{۵}\le ۱\xrightarrow{\times۵}۰\le ۲m-۱\le ۵$$

$$\xrightarrow{+۱}۱\le ۲m\le ۶\xrightarrow{\div۲}\frac{۱}{۲}\le m\le ۳$$

۶- آسان

$A=\{(۶,۶)\}\Rightarrow n(A)=۱$ ، $n(S)=۶\times۶=۳۶$ ، $P(A)=\frac{۱}{۳۶}$

۷- آسان

$n(S)=۶\times۶=۳۶$

، $A=S\Rightarrow n(A)=۳۶\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶}{۳۶}=۱$

۸- آسان

$S=\{bg,bb,gb,gg\}$

$A=\{bg,gb,gg\}$

۹- متوسط

$$A\subseteq B\Rightarrow n(A)\le n(B)\xrightarrow{\div n(S)}\frac{n(A)}{n(S)}\le\frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A)\le P(B)$$

۱۰- متوسط

$$\begin{cases}n(S)=۳!=۶\\ n(A)=\underset{۲\text{ یا }۱}{۲}\times۱\times\underset{۵}{۱}=۲\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

۱۱- آسان

آ) $n(S)=۶\times۶=۳۶$

$A=\{(۲,۲),(۴,۴),(۶,۶)\}\Rightarrow n(A)=۳$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$

ب) $B=\{(۱,۴),(۲,۲),(۲,۴),(۲,۶),(۳,۴),(۴,۱),(۴,۲)$

$,(۴,۳),(۴,۴),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۶,۲),(۶,۴),(۶,۶)\}$

$\Rightarrow P_{(B)}=\frac{n(B)}{n(A)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$

۱۲- آسان

$n(S)=۲^{۳}=۸$

$n(A)=۱$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۸}$

۱۳- متوسط

آ) $P(A)=\frac{\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۷\times۶\times۵}{۱۰\times۹\times۸}=\frac{۷}{۲۴}$

ب) $P(B)=\frac{\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۳}{۳}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۳\times۷+۱}{\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲\times۱}}=\frac{۲۲}{۱۲۰}=\frac{۱۱}{۶۰}$

۱۴- آسان

$n(S)=۶\times۶=۳۶$

$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱),(۲,۲)\}\Rightarrow n(A)=۴$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$

۱۵- متوسط

در پرتاب دو تاس جمع اعداد رو شده حداکثر ۱۲ است بنابراین:

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶}{۳۶}=۱$

۱۶- متوسط

$n(S)=۶\times۶$

$A=\{(۳,۶),(۴,۵),(۴,۶),(۵,۴),(۵,۵),(۶,۳),(۶,۴)\}$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷}{۳۶}$

۱۷- متوسط

$$P(A)=\frac{\binom{۵}{۴}}{\binom{۱۲}{۴}}=\frac{۵}{\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۴\times۳\times۲\times۱}}=\frac{۵}{۴۹۵}=\frac{۱}{۹۹}$$

۱۸- متوسط

اگر احتمال باریدن باران را $P(A)$ در نظر بگیریم، احتمال نباریدن آن $۱-P(A)$ است.

$$\frac{P(A)}{۱-P(A)}=\frac{۳}{۸}\Rightarrow ۸P(A)=۳-۳P(A)\Rightarrow P(A)=\frac{۳}{۱۱}$$

۱۹- متوسط

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴+۱۰}{\frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲\times۱}}=\frac{۱۴}{۳\times۴\times۷}=\frac{۱}{۶}$$

۲۰- متوسط

$P(A)=۱-\frac{۱}{۲^{۱۰}}=\frac{۱۰۲۳}{۱۰۲۴}$

۲۱- دشوار

معنی حداکثر یک پسر این است که یا یک پسر و یا هر ۶ تا دختر باشند.

$$P(A)=\frac{\binom{۶}{۱}+۱}{۲^{۶}}=\frac{۷}{۶۴}$$

۲۲- متوسط

از نقاطی که روی خط هستند مثلثی ساخته نمی‌شود.

$$P(A)=\frac{\binom{۹}{۳}-\binom{۴}{۳}}{\binom{۹}{۳}}=۱-\frac{۴}{\frac{۹\times۸\times۷}{۳\times۲\times۱}}=۱-\frac{۴}{۳\times۴\times۷}=۱-\frac{۱}{۲۱}=\frac{۲۰}{۲۱}$$

۲۳- دشوار

$$P(A)+P(A')=۱\Rightarrow\frac{۲m}{m+۵}+\frac{m+۱}{۲m+۳}=۱$$

$$\Rightarrow\frac{۴m^۲+۶m+m^۲+۶m+۵}{(m+۵)(۲m+۳)}=۱$$

$$\Rightarrow ۵m^۲+۱۲m+۵=۲m^۲+۳m+۱۰m+۱۵$$

$$\Rightarrow ۳m^۲-m-۱۰=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۲\\ m=-\frac{۵}{۳}\end{cases}$$

$m=۲$ قابل قبول است.

۲۴- دشوار

$$P(A)=\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۴}\binom{۹}{۶}+\binom{۲}{۱}\binom{۵}{۵}\binom{۹}{۵}}{\binom{۱۶}{۱۱}}=\frac{۲\times۵\times۸۴+۲\times۱\times۱۲۶}{۴۳۶۸}$$

$$=\frac{۱۰۹۲}{۴۳۶۸}=\frac{۱}{۴}$$

۲۵- متوسط

فقط یک مهره سفید و دو مهره دیگر از بقیه انتخاب می‌شود.

$$P(A)=\frac{\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}}{\binom{۹}{۳}}=\frac{۴\times۱۰}{۸۴}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

۲۶- دشوار

متمم آن هر ۲۰ بار «پشت» و هر ۲۰ بار «رو» است.

$$P(A)=۱-\frac{۱}{۲^{۲۰}}\times۲=۱-\frac{۱}{۲^{۱۹}}$$

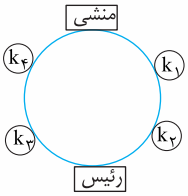
۲۷- متوسط

$$P(A)=\frac{\binom{۷}{۴}}{۲^۷}=\frac{۳۵}{۱۲۸}$$

۲۸- متوسط

$$P(A)=\frac{\binom{۸}{۵}}{۲^{۱۰}}=\frac{۵۶}{۲^{۱۰}}=\frac{۷}{۱۲۸}$$

۲۹- دشوار



منشی و رئیس را یک بسته فرض می‌کنیم.

بنابراین تعداد حالات مطلوب !۴ است.

$$P(A)=\frac{۴!}{۵!}=\frac{۱}{۵}$$

۱- گزینه «۲» متوسط

روش اول: تعداد اعضای فضای نمونه‌ای خانواده ۴ فرزندی برابر $n(S)=۲^۴=۱۶$ است. در پیشامد A تعداد فرزندان دختر از ۲ تا بیشتر است. پس ۳ یا ۴ فرزند باید دختر باشند، حال اعضای پیشامد A را نوشته و سپس احتمال آن را می‌یابیم.

$$A=\{(د,د,د,پ),(د,د,پ,د),(د,پ,د,د),(پ,د,د,د),(د,د,د,د)\}$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۶}$$

روش دوم: احتمال پیشامد A که در آن تعداد فرزندان دختر بیشتر از ۲ (یعنی ۳ یا ۴) باشد، برابر است با:

$$P(A)=P(\text{دختر}۳)+P(\text{دختر}۴)=\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}+\frac{\binom{۴}{۴}}{۲^۴}=\frac{۴}{۱۶}+\frac{۱}{۱۶}=\frac{۵}{۱۶}$$

۲- گزینه «۲» متوسط

اولاً چون به تصادف ۲ کارت از بین ۹ کارت انتخاب می‌کنیم و ترتیب در این انتخاب بی‌تاثیر است، داریم:

$$n(S)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times۸}{۲}=۳۶$$

ثانیاً در پیشامد A، مجموع اعداد دو کارت برابر ۱۱ است، پس:

$$A=\{(۲,۹),(۳,۸),(۴,۷),(۵,۶)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۳۶}=\frac{۱}{۹}$$

۳- گزینه «۱» متوسط

هنگامی که دو تاس پرتاب می‌کنیم، چون هر یک از تاس‌ها ۶ حالت دارند. طبق اصل ضرب ۶×۶؛ یعنی ۳۶ حالت مختلف ممکن است رخ دهد. فضای نمونه‌ای این پدیده عبارت است از:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۱,۶),(۲,۱),(۲,۲),...,(۲,۶),(۳,۱),$$
$$...,(۳,۶),(۴,۱),(۴,۲),...,(۴,۶)$$
$$,(۵,۱),(۵,۲),...,(۵,۶),(۶,۱),(۶,۲),...,(۶,۶)\}$$

پیشامد A را مضرب ۵ بودن حاصل ضرب اعداد رو شده در نظر می‌گیریم، داریم:

$$A=\{(۱,۵),(۲,۵),(۳,۵),(۴,۵),(۶,۵),(۵,۱),(۵,۲),(۵,۳),(۵,۴),(۵,۵),(۵,۶)\}$$

$$n(A)=۱۱\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۱}{۳۶}$$

۴- گزینه «۴» متوسط

چون می‌دانیم اعداد رو شده برابر هستند، پس فضای نمونه‌ای فقط شامل اعداد مساوی می‌باشد.

$$S=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۵,۵),(۶,۶)\}\Rightarrow n(S)=۶$$

حال پیشامد A شامل عضوهایی از S است که جمع آن‌ها کمتر از ۹ می‌باشد.

$$A=\{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}\Rightarrow n(A)=۴$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$$

۵- گزینه «۲» متوسط

اولاً ۳ موش از بین (۶+۵) موش سفید و سیاه انتخاب می‌شوند و در این انتخاب ترتیب اهمیت ندارد، پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$n(S)=\binom{۵+۶}{۳}=\binom{۱۱}{۸}=\frac{۱۱!}{۴!\times ۸!}=\frac{۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸!}{۱۲\times ۸!}=۱۵\times ۱۱$$

ثانیاً در پیشامد A هر سه موش از بین موش‌های سفید انتخاب می‌شوند، پس تعداد اعضای A، تعداد ترکیب‌های ۳تایی از بین ۶ موش سفید است.

$$n(A)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times ۳!}=\frac{۶\times ۵\times ۴\times ۳!}{۳!\times ۳!}=۲۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۱۵\times ۱۱}=\frac{۴}{۳۳}$$

۶- گزینه «۳» متوسط

اولاً از بین ۱۲ کتاب، ۵ کتاب را به طور تصادفی انتخاب می‌کنیم و در این انتخاب ترتیب اهمیتی ندارد، پس تعداد اعضای نمونه‌ای برابر است با تعداد ترکیب‌های ۵ تایی از بین ۱۲ کتاب:

$$n(S)=\binom{۱۲}{۵}=\frac{۱۲!}{۵!\times ۷!}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰\times ۹\times ۸\times ۷!}{۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱\times ۷!}=۱۲\times ۶۶=۷۹۲$$

ثانیاً در پیشامد A، ۳ کتاب از بین ۵ کتاب ادبیات و ۲ کتاب از بین ۷ کتاب تاریخ انتخاب می‌شوند، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$n(A)=\binom{۵}{۳}\times\binom{۷}{۲}=\frac{۵!}{۳!\times ۲!}\times\frac{۷\times ۶}{۲}=۲۱۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۱۰}{۷۹۲}=\frac{۳۵}{۱۳۲}$$

۷- گزینه «۳» دشوار

$$n(S)=\binom{۴+۵}{۳}=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!\times ۶!}=\frac{۹\times ۸\times ۷\times ۶!}{۳\times ۲\times ۱\times ۶!}=۸۴$$

در پیشامد A حداکثر یک نفر انتخاب شده، سال اول است؛ یعنی ۱ نفر سال اول و ۲ نفر سال سوم و یا هر ۳ نفر سال سوم هستند، پس طبق اصل ضرب و اصل جمع داریم:

$$n(S)=\underbrace{\binom{۵}{۲}}_{\text{۲ نفر سوم}}\times\underbrace{\binom{۴}{۱}}_{\text{۱ نفر اول}}+\binom{۵}{۳}=\frac{۵\times ۴}{۲}\times ۴+\frac{۵!}{۳!۲!}$$

$$=۴۰+\frac{۵\times ۴\times ۳!}{۳!\times ۲}=۵۰\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵۰}{۸۴}$$

از طرفی در پیشامد B هیچ کدام از سه نفر انتخاب شده، سال سومی نیستند؛ یعنی هر سه نفر اولی هستند، پس داریم:

$$n(B)=\binom{۴}{۳}=۴\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۴}{۸۴}\xrightarrow{P(A)=\frac{۵۰}{۸۴}}\frac{P(A)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{۵۰}{۸۴}}{\frac{۴}{۸۴}}=\frac{۵۰}{۴}=۱۲/۵\Rightarrow P(A)=۱۲/۵P(B)$$

۸- گزینه «۳» متوسط

روزهای هفته ۷ روز هستند، پس کلیه حالات برای تولد ۳ نفر عبارت است از:

$$n(S)=۷\times ۷\times ۷$$

$$n(A)=۷\times ۶\times ۵\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۷\times ۶\times ۵}{۷\times ۷\times ۷}=\frac{۳۰}{۴۹}$$

۹- گزینه «۳» متوسط

اولاً تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، تعداد حالت‌های کنار هم قرار گرفتن ۶ نفر است، پس $n(S)=۶!$، ثانیاً در پیشامد A دو برادر b,a باید در کنار هم قرار گیرند، پس آن‌ها را یک نفر در نظر می‌گیریم، که با ۴ نفر دیگر تشکیل ۵ نفر را می‌دهند که !۵ جایگشت دارند، اما دو برادر نیز به صورت ab و هم ba می‌توانند کنار هم جابه‌جا شوند و لذا !۲ جایگشت دارند، پس تعداد اعضای A عبارت است از:

$$n(A)=۵!\times ۲!\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵!\times ۲!}{۶!}=\frac{۵!\times ۲!}{۶\times ۵!}=\frac{۲}{۶}=\frac{۱}{۳}$$

۱۰- گزینه «۳» متوسط

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای در واقع تعداد حالت‌های قرار گرفتن این چهار عدد در کنار هم؛ یعنی تعداد جایگشت‌های آن‌ها است که برابر !۴ می‌باشد. اگر A پیشامد زوج بودن عدد ۴ رقمی مذکور باشد، باید یکان عدد ساخته شده عددی زوج باشد، بنابراین داریم:

$$n(A)=۳\times ۲\times ۱\times ۳=۱۸\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۲۴}=\frac{۳}{۴}$$

۱۱- گزینه «۱» آسان

می‌دانیم در پرتاب دو تاس فضای نمونه‌ای ۶×۶ یعنی ۳۶ عضو دارد. حال از بین این عضوها، اعضای پیشامد A، اعضایی هستند که در آن‌ها مجموع اعداد دو تاس برابر ۶ باشد.

$$A=\{(۱,۵),(۲,۴),(۳,۳),(۴,۲),(۵,۱)\}\Rightarrow n(A)=۵$$
$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۳۶}$$

۱۲- گزینه «۳» دشوار

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=۶\times ۶=۳۶$ است، از طرفی می‌دانیم مجموع اعداد رو شده یکی از اعداد طبیعی ۲ یا ۳ یا ... یا ۱۲ است. در بین آن‌ها مضارب ۴، اعداد ۴، ۸ و ۱۲ هستند، بنابراین با فرض آن‌که A پیشامدی باشد که در آن اعداد رو شده تاس مضرب ۴ است داریم:

$$A=\{\underbrace{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)}_{\text{مجموع ۴}},\underbrace{(۲,۶),(۳,۵),(۴,۴),(۵,۳),(۶,۲)}_{\text{مجموع ۸}},\underbrace{(۶,۶)}_{\text{مجموع ۱۲}}\}$$

$$n(A)=۹\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹}{۳۶}=\frac{۱}{۴}$$

۱۳- گزینه «۳» متوسط

روش اول:

اولاً: با توجه به نکته فوق تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای با ۴ فرزند برابر $n(S)=۲^۴=۱۶$ است.

ثانیاً: در پیشامد A دو فرزند پسر و دو فرزند دختر هستند، پس:

$$A=\{(د,د,پ,پ),(د,پ,د,پ),(پ,د,د,پ),(د,پ,پ,د),(پ,د,پ,د),(پ,پ,د,د)\}$$

$$n(A)=۶\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

روش دوم:

نکته: احتمال آن‌که خانواده‌ای با n فرزند، دقیقاً k فرزند پسر (دختر) داشته باشد، برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

نکته: اگر n سکه سالم را با هم به هوا پرتاب کنیم و یا یک سکه سالم را n بار پرتاب کنیم، احتمال آن که دقیقاً k بار رو (پشت) بیاید، مانند نکته قبل برابر است با:

$$P(A)=\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$$

در یک خانواده ۴ فرزندی، احتمال داشتن ۲ فرزند پسر و ۲ فرزند دختر همان احتمال داشتن ۲ فرزند پسر در آن خانواده است، زیرا وقتی ۲ فرزند از ۴ فرزند پسر باشند، قطعاً دو فرزند دیگر خانواده دختر بوده‌اند. حال با استفاده از نکته فوق، احتمال دقیقاً ۲ فرزند پسر در این خانواده ۴ فرزندی به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow[\text{تعداد کل فرزندان } n=۴]{\text{تعداد فرزندان پسر } k=۲} P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}=\frac{\frac{۴\times ۳}{۲}}{۱۶}=\frac{۳}{۸}$$

۱۴- گزینه «۲» متوسط

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای خانواده ۴ فرزندی برابر $n(S)=۲^۴=۱۶$ است.

در پیشامد A، دو فرزند بزرگ‌تر هم‌جنس یعنی هر دو پسر یا هر دو دختر و دو فرزند کوچکتر غیرهم‌جنس یعنی یکی پسر و دیگری دختر است.

$$A=\{(د,پ,د,د),(پ,د,د,د),(د,پ,پ,پ),(پ,د,پ,پ)\}$$
$$\Rightarrow n(A)=۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱}{۴}$$

۱۵- گزینه «۱» متوسط

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای عبارت است از تعداد ترکیب‌های ۲ از ۶ گوی $n(S)=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$ حال، پیشامد A شامل ترکیب‌های ۲ تایی است که مجموع آن‌ها کمتر از ۶ است.

$$A=\{\{۱,۲\},\{۱,۳\},\{۱,۴\},\{۲,۳\}\}\Rightarrow n(A)=۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴}{۱۵}$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، تعداد ترکیب‌های ۲ تایی از بین ۶ کارت است.

$$n(S)=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times۵}{۲}=۱۵$$

پیشامد A که در آن جمع اعداد دو کارت زوج است، عبارت است از:

$$A=\{(۱,۳),(۱,۵),(۲,۴),(۲,۶),(۳,۵),(۴,۶)\}\Rightarrow n(A)=۶$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۱۵}=\frac{۲}{۵}$$

۱۷- گزینه «۱» متوسط

اولاً چون می‌دانیم هر دو تاس کوچک‌تر از ۵ یعنی اعداد $\{۱,۲,۳,۴\}$ ظاهر شده‌اند، پس فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$S=\{(۱,۱),(۱,۲),...,(۱,۴),(۲,۱),...,(۲,۴),(۳,۱),...,(۳,۴),(۴,۱),...,(۴,۴)\}$$

$$\Rightarrow n(S)=۴\times۴=۱۶$$

ثانیاً پیشامد A شامل عضوهایی از S است که مجموع دو تاس برابر ۴ باشد.

$$A=\{(۱,۳),(۲,۲),(۳,۱)\}\Rightarrow n(A)=۳\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳}{۱۶}$$

۱۸- گزینه «۱» آسان

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

$$A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۴),(۱,۶),(۲,۱),(۲,۳),(۲,۵),(۳,۲),(۳,۴)$$

$$,(۴,۱),(۴,۳),(۵,۲),(۵,۶),(۶,۱),(۶,۵)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۱۵\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۵}{۳۶}=\frac{۵}{۱۲}$$

۱۹- گزینه «۲» آسان

$$n(S)=۶\times۶=۳۶$$

$$A=\{(۱,۲),(۲,۱),(۲,۳),(۳,۲),(۳,۴),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۴),(۴,۶),(۶,۵)\}$$

$$\Rightarrow n(A)=۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۳۶}=\frac{۵}{۱۸}$$

۲۰- گزینه «۲» متوسط

اولاً ۳ موش از بین (۶+۴) موش سفید و سیاه انتخاب می‌شوند و در این انتخاب ترتیب اهمیت ندارد، پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$n(S)=\binom{۴+۶}{۳}=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲}=۱۲۰$$

ثانیاً در پیشامد A هر سه موش از بین موش‌های سفید انتخاب می‌شوند، پس تعداد اعضای A، تعداد ترکیب‌های ۳تایی از بین ۶ موش سفید است.

$$n(A)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶!}{۳!\times۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!\times۳!}=۲۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}$$

۲۱- گزینه «۱» متوسط

اولاً تعداد اعضای فضای نمونه‌ای تعداد ترکیب‌های ۳ تایی از بین ۹ مهره است.

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۶!\times۳!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۳\times۲\times۱}=۸۴$$

ثانیا! مهره خارج شده هم‌رنگ باشند؛ یعنی هر سه مهره انتخابی سفید یا هر سه مهره انتخابی سیاه باشند.

$$n(A)=\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{\text{۳مهره از ۴ مهره سفید}}+\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{۳مهره از ۵ مهره سیاه}}=۴+\frac{۵!}{۳!\times۲!}$$

$$=۴+\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!\times۲\times۱}=۱۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۸۴}=\frac{۱}{۶}$$

۲۲- گزینه «۳» متوسط

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای، تعداد ترکیب‌های ۲تایی از بین ۷+۵ یعنی ۱۲ مهره است.

$$n(S)=\binom{۵+۷}{۲}=\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲\times۱۱}{۲}=۶۶$$

دو مهره هم‌رنگ نباشند؛ یعنی یکی سیاه و دیگری سفید باشد، پس:

$$n(A)=\binom{۵}{۱}\times\binom{۷}{۱}=۵\times۷=۳۵\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۵}{۶۶}$$

۲۳- گزینه «۲» متوسط

اولاً ۴ نفر از بین ۳+۳+۲+۱ نفر انتخاب می‌شوند، پس تعداد اعضای فضای نمونه‌ای برابر تعداد ترکیب‌های ۴ تایی از بین ۹ نفر می‌باشد.

$$n(S)=\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۴!۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۴\times۳\times۲\times۵!}=۳\times۴۲=۱۲۶$$

ثانیاً در پیشامد A، از هر گروه یک نفر انتخاب می‌شود، پس طبق اصل ضرب داریم:

$$n(A)=\binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}\times\binom{۳}{۱}\times\binom{۳}{۱}=۱\times۲\times۳\times۳=۱۸$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۱۲۶}=\frac{۱}{۷}$$

۲۴- گزینه «۲» متوسط

اولا تعداد اعضای فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$n(S)=\binom{۵+۱۲}{۳}=\binom{۱۷}{۳}=\frac{۱۷!}{۳!\times۱۴!}=\frac{۱۷\times۱۶\times۱۵\times۱۴!}{۳\times۲\times۱۴!}$$

$$=۱۷\times۴۰=۶۸۰$$

ثانیاً در پیشامد A، تعداد سیب‌های سالم از تعداد سیب‌های خراب بیشتر است.

پس دو حالت زیر را داریم:

$$\text{تعداد حالات} \Rightarrow \text{۲ سیب سالم و ۱ سیب خراب}=\binom{۵}{۱}\times\binom{۱۲}{۲}$$

$$=۵\times\frac{۱۲\times۱۱}{۲}=۵\times۶۶=۳۳۰$$

$$\text{تعداد حالات} \Rightarrow \text{۳ سیب سالم}=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲!}{۳!\times۹!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹!}{۳\times۲\times۹!}=۲۲۰$$

$$\xrightarrow{\text{طبق اصل جمع}} n(A)=۲۲۰+۳۳۰=۵۵۰$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵۵۰}{۶۸۰}=\frac{۵۵}{۶۸}$$

۲۵- گزینه «۳» آسان

$$n(S)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲}=۲۰$$

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\times\binom{۲}{۱}=\frac{۴\times۳}{۲}=۱۲$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵}$$

۲۶- گزینه «۲» آسان

$$n(S)=\binom{۱۰}{۳}=\frac{۱۰\times۹\times۸}{۳\times۲}=۱۲۰$$

$$n(A)=\binom{۶}{۳}=\frac{۶\times۵\times۴}{۳\times۲}=۲۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۰}{۱۲۰}=\frac{۱}{۶}$$

۲۷- گزینه «۴» متوسط

$$n(S)=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰!}{۴!۶!}=\frac{۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶!}{۴\times۳\times۲\times۶!}=۲۱۰$$

$$n(A)=\binom{۶}{۲}\times\binom{۴}{۲}=(۱۵)\times(۶)=۹۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹۰}{۲۱۰}=\frac{۳}{۷}$$

۲۸- گزینه «۱» متوسط

$$n(S)=\binom{۹}{۶}=\frac{۹!}{۶!۳!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۶!\times۳\times۲}=۸۴$$

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۴}=۶\times۵=۳۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۸۴}=\frac{۵}{۱۴}$$

۲۹- گزینه «۲» متوسط

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=۲۲۰$$

$$n(A)=\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۱}=۶۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۲۲۰}=\frac{۳}{۱۱}$$

۳۰- گزینه «۳» متوسط

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹!}{۳!۶!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶!}{۳\times۲\times۶!}=۸۴$$

$$n(A)=\binom{۴}{۱}\binom{۵}{۲}=۴\times۱۰=۴۰\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۴۰}{۸۴}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

۳۱- گزینه «۲» متوسط

ابتدا تعداد کل اعداد ساخته شده؛ یعنی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را به‌دست می‌آوریم. توجه کنید که هر یک از دو گوی خارج شده می‌توانند هر یک از ارقام ۰ تا ۹ باشند و اگر گوی اول صفر باشد، عدد یک رقمی حاصل می‌شود.

$$n(S)=\boxed{۱۰}\times\boxed{۱۰}=۱۰۰$$

یعنی کل اعداد از صفر تا ۹۹، اعضای فضای نمونه‌ای هستند، اما پیشامد A، اعداد بزرگ‌تر از ۵۵ هستند؛ یعنی اعداد از ۵۶ تا ۹۹ که تعداد آن‌ها برابر است با:

$$n(A)=۹۹-۵۶+۱=۴۴\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴۴}{۱۰۰}=۰/۴۴$$

نکته: اگر a,b دو عدد طبیعی باشند و $b>a$، تعداد اعداد طبیعی از a تا b برابر است با:

$$n=b-a+۱$$

۳۲- گزینه «۳» دشوار

فضای نمونه‌ای متشکل از اعداد سه رقمی ساخته شده از جایگشت ارقام $\{۲,۴,۵,۶,۷\}$ می‌باشد، پس:

$$n(S)=\underbrace{\boxed{۵}}_{\text{صدگان}}\times\boxed{۴}\times\boxed{۳}=۶۰$$

روش اول: پیشامد A را فرد بودن دو رقم از این اعداد سه رقمی در نظر می‌گیریم. این دو رقم فرد ارقام ۵ و ۷ می‌باشند، بنابراین اعداد سه رقمی مذکور با استفاده از دسته اعداد $(۷,۵,۲)$ یا $(۷,۵,۶)$ یا $(۷,۵,۴)$ ساخته می‌شوند، از طرفی می‌دانیم با ۳ رقم متمایز غیرصفر می‌توان ۶ عدد سه رقمی ساخت، زیرا هر سه عدد متمایز $۳!=۶$ جایگشت دارند، پس با سه دسته ارقام فوق می‌توان $۳\times۳!=۱۸$ عدد سه رقمی ساخت که دو تا از ارقام تشکیل دهنده آن ۵ و ۷ باشند، بنابراین:

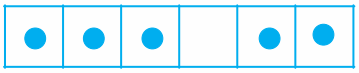
$$P(A)=\frac{۱۸}{۶۰}=۰/۳$$

روش دوم: برای ساختن عدد سه رقمی مذکور باید ۲ رقم فرد از میان اعداد فرد و یک رقم زوج از میان اعداد زوج انتخاب کرد که این کار به $\binom{۲}{۲}\times\binom{۳}{۱}$ طریق مختلف قابل انجام است. حال این ۳ عدد انتخاب شده، در کنار هم $۳!$ جایگشت دارند، بنابراین طبق اصل ضرب و یا توجه به روش اول داریم:

$$n(A)=\binom{۲}{۲}\times\binom{۳}{۱}\times۳!=۱\times۳\times۶=۱۸\Rightarrow P(A)=\frac{۱۸}{۶۰}=۰/۳$$

۳۳- گزینه «۴» دشوار

برای یافتن تعداد اعضای فضای نمونه‌ای باید ۵ خانه از ۶ خانه را انتخاب کرد و ۵ عدد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ را در آن‌ها قرار دهیم، پس:

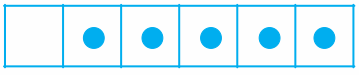


$$n(S)=\binom{۶}{۵}\times۵!=۶\times۵!=۶!$$

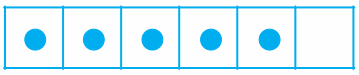
$\binom{۶}{۵}$ انتخاب ۵ خانه از ۶ خانه

$۵!$ جایگشت‌های ۵ عدد

در پیشامد A اولاً ارقام در خانه‌های متوالی قرار می‌گیرند؛ یعنی یکی از ۲ حالت زیر را داریم:



یا



ثانیا دو رقم زوج یعنی ۲ و ۴ باید کنار هم قرار گیرند، پس آن‌ها را یک بسته در نظر می‌گیریم که با سه عدد دیگر اما ۱، ۳، ۵ تشکیل ۴ شی می‌دهند که $۴!$ جایگشت دارند، از طرفی ۲ و ۴ درون بسته نیز به $۲!$ جایگشت دارند، پس:

$$\underbrace{۲,۴,۱,۳,۵}_{\text{۴ شیء}}\Rightarrow n(A)=\underbrace{۲}_{\text{دو حالت}}\times\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت ۲و۴}}\times\underbrace{۴!}_{\text{جایگشت‌های ۴شیء}}=۴\times۴!$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴\times۴!}{۶!}=\frac{۴\times۴!}{۶\times۵\times۴!}=\frac{۲}{۱۵}$$

۳۴- گزینه «۴» دشوار

نکته: فرض کنید بخواهید با استفاده از ارقام داده شده که عدد صفر در میان آن‌ها حضور دارد اعدادی زوج یا مضرب ۵ بدون تکرار ارقام بسازیم. برای محاسبه تعداد این ارقام باید مسأله را به دو حالت زیر تفکیک کرده و در انتها تعداد اعداد به دست آمده در هر دو حالت را با هم جمع کنیم:

۱) عدد صفر در جایگاه یکان بیاید.

۲) عدد صفر در جایگاه یکان نیاید

اولاً تعداد کل اعداد چهار رقمی ساخته شده با اعداد ۳ و ۲ و ۱ و ۰ است؛ یعنی تعداد اعضای فضای نمونه‌ای را می‌یابیم.

$$n(S)=\underbrace{۳}_{\text{رقم صفر نمی‌تواند قرار بگیرد}}\times\overbrace{۳}^{\text{یکی از ۴ رقم انتخاب شده}}\times۲\times۱=۱۸$$

ثانیاً تعداد اعضای پیشامد A، تعداد اعداد چهار رقمی ساخته شده با این ارقام است، به شرطی که عدد حاصل مضرب ۶ باشد، باید مضرب ۲ و ۳ باشد؛ یعنی زوج باشد و مجموع ارقام آن مضرب ۳ باشد، مجموع چهار رقم ۳و۲و۱و۰ برابر ۶ می‌باشد که مضرب ۳ است، پس تمام اعداد فضای نمونه‌ای مضرب ۳ هستند و اعضای پیشامد A فقط کافی است که زوج باشند؛ یعنی رقم یکان آن‌ها ۰ یا ۲ باشد یا توجه به نکته بیان شده دو حالت را در نظر می‌گیریم.

۱) تعداد حالات رقم یکان صفر $=\underbrace{۳}_{\text{رقم صفر ارقام ۱،۲ یا ۳}}\times۲\times۱\times۱=۶$

۲) تعداد حالات رقم یکان صفر $=\underbrace{۲}_{\text{رقم ۲}}\times\underbrace{۲}_{\text{رقم صفر قرار نمی‌گیرد}}\times۱\times۱=۴$

$$\Rightarrow n(A)=۶+۴=۱۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۰}{۱۸}=\frac{۵}{۹}$$

۳۵- گزینه «۳» **متوسط**

$S=\{۱,۲,۳,...,۹\}\Rightarrow n(S)=۹$

$A=\{۱,۲,۳,۴,۶,۹\}\Rightarrow n(A)=۶$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۹}=\frac{۲}{۳}$

۳۶- گزینه «۲» **دشوار**

در این سوال با توجه به این که ترتیب انتخاب‌ها مهم است، برای تعداد عضوهای فضای نمونه جایگشت‌های ۳ عدد از ۵ عدد را پیدا می‌کنیم:

$n(S)=P(۵,۳)=\frac{۵!}{۲!}=۶۰$

می‌دانیم عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد، در این مسئله این ارقام به صورت زیر است:

$\{۱,۲,۳\}\quad\{۱,۳,۵\}\quad\{۲,۳,۴\}\quad\{۳,۴,۵\}$

در هر یک حالت $۳!=۶$ عدد سه رقمی ساخته می‌شود به فرض (۱۲۳,۱۳۲,۲۳۱,...) بنابراین:

$n(A)=۴\times۳!=۲۴$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۶۰}=۰/۴$

۳۷- گزینه «۳» **متوسط**

$n(S)=۱۵\times۱۴=۲۱۰$

A: (مهره دوم سفید و مهره اول سیاه) یا (مهره دوم سفید و مهره اول سفید)

$n(A)=(۶\times۵)+(۹\times۶)=۸۴$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۸۴}{۲۱۰}=\frac{۲}{۵}$

۳۸- گزینه «۱» **متوسط**

۶ لامپ سالم

۲ لامپ معیوب

برای آن که در آزمایش سوم اولین لامپ معیوب بیرون بیاید، باید دو لامپ قبلی خارج شده سالم باشد.

$n(S)=۸\times۷\times۶$

$n(A)=۶\times۵\times۲$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶\times۵\times۲}{۸\times۷\times۶}=\frac{۵}{۲۸}$

۳۹- گزینه «۲» **متوسط**

طبق فرمول جایگشت با تکرار

$n(S)=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}=۱۲۰$

حرف A را داخل یک بسته قرار می‌دهیم:

$\boxed{AAA}T\times I\Rightarrow n(E)=۴!\Rightarrow P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{۴!}{۱۲۰}=\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$

۴۰- گزینه «۴» **دشوار**

$n(S)=۸\times۷\times۶=۳۳۶$

A: (موش سوم سیاه و موش دوم سیاه و موش اول سفید) + (موش سوم سیاه و موش دوم سفید و موش اول سفید)

$n(A)=۵\times۳\times۲+۵\times۴\times۳=۹۰$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۹۰}{۳۳۶}=\frac{۱۵}{۵۶}$

۴۱- گزینه «۳» **متوسط**

۳ کتاب زبان انگلیسی	۵ کتاب فارسی

$P(A)=\frac{۳!\times۵!\times۲!}{۸!}=\frac{۶\times۲}{۸\times۷\times۶}=\frac{۱}{۲۸}$

۴۲- گزینه «۳» **متوسط**

دو نفر را در کنار هم قرار می‌دهیم

دو نفر	هشت نفر

اول آن که دو نفر کنار هم باشند

$P(A)=\frac{۲!\times۹!}{۱۰!}=\frac{۱}{۵}$

احتمال آن که دو نفر کنار هم نباشند.

$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{۱}{۵}=\frac{۴}{۵}$

۴۳- گزینه «۲» **متوسط**

مهره اول در حل مسئله تأثیری ندارد.

$P=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}=\frac{\frac{۵\times۴}{۲}}{\frac{۱۱\times۱۰}{۲}}=\frac{۲}{۱۱}$

۴۴- گزینه «۳» **متوسط**

$$n(S)=\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۱}=۵\times۴=۲۰$$

پیشامد حاصل‌ضرب کوچکتر مساوی ۱۰ $=\{(۱,۲),(۱,۴),(۱,۶),(۱,۸),(۳,۲),(۵,۲)\}$

P (حاصل ضرب بزرگ‌تر از ۱۰) $=۱-P$ (حاصل‌ضرب کوچکتر یا مساوی ۱۰)

$$=۱-\frac{۶}{۲۰}=\frac{۱۴}{۲۰}=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷$$

۴۵- گزینه «۲» **آسان**

تعداد زوج‌هایی که با هم برابر یا متوالی‌اند را در جدول زیر مشخص می‌کنیم.

	۱	۲	۳	۴	۵	۶
۱	×	×				
۲	×	×	×			
۳		×	×	×		
۴			×	×	×	
۵				×	×	×
۶					×	×

بنابراین:

$$P(A)=۱-\frac{۱۶}{۳۶}=۱-\frac{۴}{۹}=\frac{۵}{۹}$$

۱- **آسان**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۵}+\frac{۲}{۳}=\frac{۳+۱۰}{۱۵}=\frac{۱۳}{۱۵}$$

۲- **آسان**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۱}{۳}+\frac{۲}{۷}-\frac{۱}{۲۱}=\frac{۷+۶-۱}{۲۱}=\frac{۱۲}{۲۱}=\frac{۴}{۷}$$

۳- **آسان**

$$P(A)=۱-P(A')\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}=\frac{۵+۴}{۲۰}=\frac{۹}{۲۰}$$

۴- **متوسط**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$=(۱-P(A'))+(۱-P(B'))-P(A\cap B)$$

$$=(۱-\frac{۱}{۴})+(۱-\frac{۱}{۵})-\frac{۱۳}{۲۰}=\frac{۳}{۴}+\frac{۴}{۵}-\frac{۱۳}{۲۰}=\frac{۱۵+۱۶-۱۳}{۲۰}=\frac{۱۸}{۲۰}=\frac{۹}{۱۰}$$

۵- **متوسط**

آ) $P(A)=\dfrac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\dfrac{۳}{۱۰}$

ب) $P(B)=\dfrac{\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}}{\binom{۵}{۲}}=\dfrac{۳+۱}{۱۰}=۰/۴$

پ) $P(C)=\dfrac{\binom{۳}{۱}\binom{۲}{۱}}{\binom{۵}{۲}}=۰/۶$

۶- **متوسط**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۳۴}{۱۰۰}+\frac{۶۲}{۱۰۰}-\frac{۱۵}{۱۰۰}=۰/۸۱$$

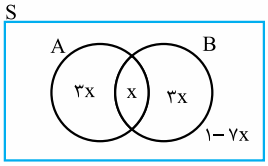
۷- **دشوار**

$P(A\cap B)$ را برابر x فرض می‌کنیم. در این صورت:

$$P(A)=P(B)=۴x\ ،\ P(A\cup B)'=۴x\Rightarrow ۱-۷x=۴x\Rightarrow x=\frac{۱}{۱۱}$$

$$P(A-B)=۳x=\frac{۳}{۱۱}$$

برای فهم بهتر نمودار زیر را در نظر بگیرید:



۸- **آسان**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۴}-\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۴}$$

۹- **متوسط**

B,A ناسازگارند بنابراین $P(A\cap B)=۰$ است.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۳}{۸}+(۱-\frac{۳}{۴})=\frac{۳}{۸}+\frac{۲}{۸}=\frac{۵}{۸}$$

۱۰- متوسط

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$

۱۱- دشوار

با فرض $P(A\cap B)=x$ داریم:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)\Rightarrow P(A)=x+\frac{۷}{۱۰}$

$P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow P(B)=x+\frac{۲}{۵}$

$P(A)+P(B)=۱/۳\Rightarrow x+\frac{۷}{۱۰}+x+\frac{۴}{۱۰}=\frac{۱۳}{۱۰}\Rightarrow$

$x=\frac{۱}{۱۰}\Rightarrow\begin{cases}P(A)=۰/۸\\P(B)=۰/۵\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}P(A')=۰/۲\\P(B')=۰/۵\end{cases}$

۱- گزینه «۲» متوسط

با توجه به فرض مسئله داریم:

$۳P(B)=\frac{۳}{۲}P(A)=۱\Rightarrow\begin{cases}P(B)=\frac{۱}{۳}\\P(A)=\frac{۲}{۳}\end{cases}\quad ,۶P(A\cup B)=۵P(s)$

$P(S)\xrightarrow[P(S)=۱]{\text{پیشامد حتمی } S}۶P(A\cup B)=۵\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{۵}{۶}$

حال با توجه به قانون جمع احتمالات $P(A\cap B)$ را می‌نویسیم:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\frac{۵}{۶}=\frac{۲}{۳}+\frac{۱}{۳}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}$

بنابراین با توجه به فرمول $P(A-B)$، داریم:

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{۲}{۳}-\frac{۱}{۶}=\frac{۴-۱}{۶}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$

۲- گزینه «۴» متوسط

می‌دانیم که A' متمم پیشامد A باشد $P(A')=۱-P(A)$ است، پس:

$P(A')+P(B')=۱/۴\Rightarrow(۱-P(A))+(۱-P(B))=۱/۴$

$۲-P(A)-P(B)=۱/۴\Rightarrow P(A)+P(B)=۱-۱/۴=۰/۶$

از طرفی پیشامد A و B ناسازگارند، پس:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=۰/۶$

۳- گزینه «۲» متوسط

طبق قانون جمع احتمالات داریم:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\xrightarrow{\text{طبق فرض}}۴P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow P(A)+P(B)=۵P(A\cap B)\ (*)$

$\frac{P(A)+P(B)}{P(A\cup B)-۳P(A\cap B)}\overset{(*)}{=}\frac{۵P(A\cap B)}{۴P(A\cap B)-۳P(A\cap B)}=۵$

۴- گزینه «۲» متوسط

$P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$\Rightarrow ۰/۲=۰/۶-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۴$

حال با توجه به $P(A'\cap B)$، داریم:

$P(A'\cap B)=P(B\cap A')=P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$

$=۰/۷-۰/۴=۰/۳$

۵- گزینه «۳» متوسط

تعداد کل مسافرین هتل، همان فضای نمونه‌ای است. حال پیشامدهای B,A را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$n(S)=۷۲$

A : تاجر بودن $\Rightarrow n(A)=۲۳\Rightarrow P(A)=\frac{۲۳}{۷۲}$

B : برای اولین بار سفر کردن $\Rightarrow n(B)=۱۲\Rightarrow P(B)=\frac{۱۲}{۷۲}$

$A\cap B$: تاجرهایی که برای اولین بار سفر کرده‌اند. $\Rightarrow n(A\cap B)=۸$

$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{۸}{۷۲}$

در این تست احتمال این که فرد نه تاجر باشد و نه برای اولین بار سفر کرده باشد، خواسته شده است. این پیشامد متمم این است که فرد یا تاجر باشد یا برای اولین بار سفر کرده باشد؛ یعنی متمم $A\cup B$، پس طبق قانون جمع احتمالات ابتدا $P(A\cup B)$ را می‌یابیم.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{۲۳}{۷۲}+\frac{۱۲}{۷۲}-\frac{۸}{۷۲}=\frac{۲۷}{۷۲}$

بنابراین احتمال خواسته شده عبارت است از:

$P((A\cup B)')=۱-P(A\cup B)=۱-\frac{۲۷}{۷۲}=\frac{۴۵}{۷۲}=\frac{۵}{۸}$

۶- گزینه «۴» متوسط

اولاً تعداد اعضای فضای نمونه‌ای عبارت است از:

$$n(S)=\binom{۵+۶}{۳}=\binom{۱۱}{۳}$$

ثانیاً اگر A پیشامد سفید بودن حداقل یک موش باشد، پیشامد A' (متمم A) سیاه بودن هر سه موش است، پس تعداد اعضای پیشامد A'، تعداد ترکیب‌های ۳ تایی از بین ۶ موش سیاه می‌باشد.

$$n(A')=\binom{۶}{۳}\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{\binom{۶}{۳}}{\binom{۱۱}{۳}}=\frac{\frac{۶!}{۳!۳!}}{\frac{۱۱!}{۳!۸!}}\Rightarrow P(A')=\frac{۴}{۳۳}$$

$$\Rightarrow P(A)=۱-P(A')\Rightarrow P(A)=\frac{۲۹}{۳۳}$$

۷- گزینه «۳» متوسط

$$n(S)=\binom{۱۰}{۲}=۴۵$$

A : دو مهره هم‌رنگ نباشند.

A' : دو مهره هم‌رنگ باشند.

$$n(A')=\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}+\binom{۵}{۲}=۳+۱+۱۰=۱۴$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۴}{۴۵}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱۴}{۴۵}=\frac{۳۱}{۴۵}$$

۸- گزینه «۳» متوسط

$$n(S)=\binom{۷}{۲}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

A : حداقل بر روی یکی از دو موش آزمون انجام شده است.

A' : بر روی هیچ کدام از دو موش آزمون انجام نشده است.

$$n(A')=\binom{۴}{۲}=\frac{۴\times۳}{۲}=۶$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۶}{۲۱}=\frac{۲}{۷}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۲}{۷}=\frac{۵}{۷}$$

۹- گزینه «۲» متوسط

$$n(S)=\binom{۹}{۳}=\frac{۹\times۸\times۷}{۶}=۸۴$$

A : حداقل یک مهره آبی خارج شود.

A' : مهره آبی خارج نشود.

$$n(A')=\binom{۵}{۳}=۱۰$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۰}{۸۴}=\frac{۵}{۴۲}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۵}{۴۲}=\frac{۳۷}{۴۲}$$

۱۰- گزینه «۴» متوسط

$$n(S)=\binom{۱۲}{۳}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰}{۶}=۲۲۰$$

A : حداکثر ۲ مهره از مهره‌های خارج شده هم‌رنگ باشند.

A' : هر سه مهره هم‌رنگ باشند.

$$n(A')=\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}+\binom{۳}{۳}=۱۰+۴+۱=۱۵$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۱۵}{۲۲۰}=\frac{۳}{۴۴}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳}{۴۴}=\frac{۴۱}{۴۴}$$

۱۱- گزینه «۴» دشوار

$$n(S)=\underset{\text{صفر نمی‌تواند باشد}}{۹}\times۱۰\times۱۰=۹۰۰$$

A : لااقل یک‌بار رقم ۲ ظاهر شود.

A' : رقم ۲ در این عدد نباشد.

$$n(A')=\overset{\text{۰ و ۲ نمی‌تواند باشد.}}{۸}\times\underbrace{۹\times۹}_{\text{۲ نباشد.}}=۸\times۹\times۹$$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۸\times۹\times۹}{۹۰۰}=۰/۷۲$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-۰/۷۲=۰/۲۸$$

۱۲- گزینه «۱» دشوار

اولاً فضای نمونه‌ای متشکل از تمام اعداد سه رقمی ساخته شده با ارقام ۹,۸,۷,۶,۵,۴,۳,۲,۱ است.

$n(S)=۹\times۹\times۹$

توجه کنید که در این تست، تکرار ارقام جایز است. ثانیاً اگر پیشامد A یکسان بودن لااقل دو رقم این اعداد باشد پیشامد A'؛ یعنی متمم آن، متمایز بودن سه رقم است که یافتن تعداد اعضای آن راحت‌تر است.

$$n(A')=۹\times۸\times۷\Rightarrow P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۹\times۸\times۷}{۹\times۹\times۹}=\frac{۵۶}{۸۱}$$

$$P(A)=۱-P(A')\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۵۶}{۸۱}=\frac{۲۵}{۸۱}$$

۱۳- گزینه «۴» دشوار

$$n(S)=\binom{۱۰}{۱}\binom{۸}{۱}=۱۰\times۸=۸۰$$

A: رنگ دو مهره متفاوت باشد.

A': رنگ این دو مهره یکسان باشد.

$$n(A')=\underbrace{\binom{۴}{۱}\times\binom{۶}{۱}}_{\text{ازهرظرف یک مهره سفید برداریم}}+\underbrace{\binom{۱}{۱}\times\binom{۲}{۱}}_{\text{ازهرظرف یک مهره سبز برداریم}}=(۴\times۶)+(۱\times۲)=\frac{۲۶}{۸۰}=\frac{۱۳}{۴۰}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱۳}{۴۰}=\frac{۲۷}{۴۰}$$

۱۴- گزینه «۲» دشوار

$$P(A'\cup B')=P(A')+P(B')-P(A'\cap B')\Rightarrow P(A'\cup B')$$

$$=۰/۳+۰/۶-P(A'\cap B')\Rightarrow P(A'\cup B')=۰/۹-P(A'\cap B')$$

حداقل مقدار $P(A'\cup B')$ زمانی است که $P(A'\cap B')$ بیشترین مقدار را داشته باشد، با توجه به آن که $P(A')=۰/۳$ ، $P(B')=۰/۶$، بنابراین حداکثر مقدار $P(A')=P(A'\cap B')=۰/۳$ است.

$$Max(P(A'\cup B'))=۰/۳+۰/۶-۰/۳=۰/۶$$

۱۵- گزینه «۳» دشوار

پیشامد A را ۲ فرزند پسر و پیشامد B را سه فرزند دختر در نظر می‌گیریم. در این صورت مطلوب تست $P(A\cup B)$ است. از طرف دیگر پیشامدهای B,A ناسازگار هستند؛ یعنی نمی‌توانند با هم اتفاق بیفتند، پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\ (*)$$

همچنین می‌دانیم احتمال آن که یک خانواده n فرزندی، دقیقاً k پسر (دختر) داشته باشد از فرمول $\frac{\binom{n}{k}}{۲^n}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\left.\begin{array}{l}P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}}{۲^۴}=\frac{\frac{۴\times۳}{۲}}{۱۶}=\frac{۶}{۱۶}\\ P(B)=\frac{\binom{۴}{۳}}{۲^۴}=\frac{۴}{۱۶}\end{array}\right\}\xrightarrow{(*)}P(A\cup B)=\frac{۶}{۱۶}+\frac{۴}{۱۶}=\frac{۱۰}{۱۶}=\frac{۵}{۸}$$

پاسخنامه

سؤالات تشریحی

بخش ۵

۱- آسان

آ) هر روز تعداد شیشه‌های شکسته رو به کاهش است.

ب) داده‌ها تعداد شیشه‌های شکسته است.

پ) ادامهٔ خط تولید

۲- آسان

آ) داده‌هاست

ب) علم آمار

پ) اندازه جامعه یا حجم جامعه

۳- آسان

خیر. نمونه باید زیرمجموعه جامعه باشد و کارمندان بخش دیالیز زیرمجموعهٔ بیماران دیابتی نیستند.

۴- متوسط

انتخاب تصادفی از بین دانش‌آموزان که اولویت‌بندی نداشته باشد و شامل حال همه نوع دانش‌آموز می‌باشد.

۵- آسان

آ) متغیر

ب) مقدار متغیر

پ) متغیر

۶- متوسط

آ) کیفی اسمی

ب) کیفی ترتیبی

پ) کیفی اسمی

ت) کمی پیوسته

۷- متوسط

شاخص تودهٔ بدنی ـ مقدار بارش باران در ماه برحسب لیتر

۸- متوسط

تعداد پرستاران یک بیمارستان کمی گسسته، و وزن وسایل داخل کیف کمی پیوسته می‌باشد.

۹- آسان

آ) کمی گسسته

ب) کمی پیوسته

پ) کیفی اسمی

پاسخنامه سؤالات تستی
بخش ۵

۱- گزینه «۲» متوسط

میزان آلودگی هوا را اندازه گیری کرده و بررسی می‌کنیم، پس یک متغیر کمی پیوسته است.

۲- گزینه «۴» متوسط

۳- گزینه «۱» متوسط

۴- گزینه «۲» متوسط

نکته: به هر یک از افراد یا اشیاء انتخاب شده در نمونه، عضو نمونه می‌گویند.

۵- گزینه «۳» متوسط

اندازه نمونه : n

اندازه جامعه : N

$$\left.\begin{array}{l} n=\frac{۲}{۹}N \\ N-n=۸۴ \end{array}\right\} \Rightarrow N-\frac{۲}{۹}N=۸۴ \Rightarrow \frac{۷}{۹}N=۸۴$$

$$\Rightarrow N=\frac{۸۴\times ۹}{۷} \Rightarrow N=۱۰۸$$

۶- گزینه «۲» متوسط

اندازه جامعه را N و اندازه نمونه را n در نظر می‌گیریم:

$$N=۷n$$

$$N+n=۲۸۰ \Rightarrow ۷n+n=۲۸۰ \Rightarrow ۸n=۲۸۰ \Rightarrow n=۳۵$$

$$N=۷n \xrightarrow{n=۳۵} N=۷(۳۵)=۲۴۵$$

عضوهایی از جامعه مورد بررسی قرار نگرفته است برابر $N-n$ است.

$$N-n=۲۴۵-۳۵=۲۱۰$$

۷- گزینه «۲» متوسط

۸- گزینه «۴» متوسط

۹- گزینه «۱» متوسط

۱۰- گزینه «۴» متوسط

شماره‌ها اعداد طبیعی متوالی هستند، بنابراین این متغیر کمی گسسته است.

۱۱- گزینه «۳» متوسط

۱۲- گزینه «۳» متوسط

برای توصیف نوع آلودگی هوا از عباراتی مانند کم، زیاد، خطرناک و ... استفاده می‌کنیم، پس یک متغیر کیفی اسمی است.

۱۳- گزینه «۱» متوسط

پاسخنامه سؤالات تشریحی
آزمون تشریحی ۱

۱- آسان

آ) $A=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۱),(۲,۲),(۳,۱)\}$

ب) $B=\{(۱,۶),(۲,۳),(۳,۲),(۶,۱)\}$

پ) $C=\{(۴,۴),(۴,۶),(۶,۴),(۶,۶)\}$

۲- آسان

$$A\cap B=\varnothing \Rightarrow P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{۱}{۴}+\frac{۲}{۵}=\frac{۱۳}{۲۰}$$

۳- آسان

بله، زیرا:

$$(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$$

۴- متوسط

$$P(A)=\frac{\binom{۳۰}{۷}+\binom{۳۰}{۲۰}}{۲^{۳۰}}$$

۵- متوسط

$$P(A')=۱-P(A)=۱-\frac{\binom{۳}{۳}+\binom{۴}{۳}+\binom{۵}{۳}}{\binom{۱۲}{۳}}=\frac{۱+۴+۱۰}{۲۲۰}=\frac{۱۵}{۲۲۰}=\frac{۳}{۴۴}$$

۶- متوسط

آ) نتیجه‌گیری، قضاوت و پیش‌بینی

ب) اعداد، ارقام و اطلاعات

۷- آسان

آ) متغیر

ب) مقدار متغیر

پ) مقدار متغیر

۸- آسان

جنسیت افراد: کیفی اسمی

وزن افراد: کمی پیوسته

۹- متوسط

آ) $P(A)=\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{\frac{۴\times۳}{۲}}{\frac{۹\times۸}{۲}}=\frac{۱}{۶}$

ب) $P(B)=\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۳}{۱}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{۲\times۳}{\frac{۹\times۸}{۲}}=\frac{۱}{۶}$

پ) $P(C)=\frac{\binom{۴}{۲}+\binom{۳}{۲}+\binom{۲}{۲}}{\binom{۹}{۲}}=\frac{\frac{۴\times۳}{۲}+\frac{۳\times۲}{۲}+\frac{۲}{۲}}{\frac{۹\times۸}{۲}}=\frac{۱۲+۶+۲}{۹\times۸}=\frac{۵}{۱۸}$

۱۰- دشوار

تعداد سه تایی هایی که می‌توان ساخت $\binom{۴}{۳}=۴$ تا هست.

$\{۴,۵,۶\},\{۴,۵,۷\},\{۵,۶,۷\},\{۴,۶,۷\}$

$n(S)=P(۴,۳)=\frac{۴!}{۱۱}=۲۴\Rightarrow P(A)=\frac{۲\times۳!}{۲۴}=\frac{۱}{۲}$

۱- متوسط

$S=\{RP,RR,PP,PR\}$

$A=\{RR,PP\}$

۲- متوسط

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=(۱-\frac{۱}{۳})+(۱-\frac{۲}{۵})-\frac{۷}{۱۰}$

$=\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۵}-\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۰+۱۸-۲۱}{۳۰}=\frac{۱۷}{۳۰}$

۳- آسان

خیر - زیرا دو مجموعه B,A اشتراک دارند یعنی $A\cap B\neq\varnothing$

۴- دشوار

تعداد زیرمجموعه‌ها $۲^۵$ است.

$n(S)=۲^۵=۳۲$

تعداد سه عضوی‌ها $\binom{۵}{۳}$ یعنی ۱۰ است.

$P(A)=\frac{\binom{۱۰}{۲}}{\binom{۳۲}{۲}}=\frac{۱۰\times۹}{۳۲\times۳۱}=\frac{۴۵}{۴۹۶}$

تعداد ۴ عضوی‌ها $\binom{۵}{۴}$ یعنی ۵ است و تعداد دو عضوی‌ها $\binom{۵}{۲}$ یعنی ۱۰ است.

$P(B)=\frac{\binom{۵}{۱}+\binom{۱۰}{۱}}{\binom{۳۲}{۲}}=\frac{۱۵}{۱۶\times۳۱}=\frac{۱۵}{۴۹۶}$

۵- متوسط

$\frac{\binom{x}{۲}+\binom{x-۳}{۲}}{\binom{۲x-۳}{۲}}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{x(x-۱)+(x-۳)(x-۴)}{(۲x-۳)(۲x-۴)}=\frac{۱}{۲}$

$۲(x^۲-x+x^۲-۷x+۱۲)=۴x^۲-۱۴x+۱۲$

$\Rightarrow-۱۶x+۲۴=۱۲-۱۴x\Rightarrow۲x=۱۲\Rightarrow x=۶$

پس تعداد مهره‌های این کیسه $۲x-۳$ یعنی ۹ عدد بوده است.

۶- آسان

اندازه نمونه یا حجم نمونه

۷- متوسط

آ) علم تعداد البسه مشکل دار بیشتر می‌شود.

ب) تعداد البسه مشکل دار

پ) ۱

۸- آسان

آ) کیفی اسمی ب) کمی پیوسته

۹- آسان

مجموع دو عدد	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۵	۴	۳	۲	۱

$$P(A)=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

۱۰- متوسط

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲\times۱\times۱}{۳!}=\frac{۱}{۳}$$

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون تستی پایانی

۱- گزینه «۴» آسان

برای آن که مجموع دو عدد زوج شود، هر دو عدد باید زوج باشند یا هر دو عدد فرد باشند.

$$n(S)=\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب از اعداد زوج}}+\binom{۵}{۲}=۶+۱۰=۱۶$$

۲- گزینه «۲» متوسط

$A=\{(ر,ر),(ر,پ,ر),(پ,ر,ر),(پ,پ,ر),(ر,ر,پ),(ر,پ,پ)\}$

$\Rightarrow n(S)=۶$

۳- گزینه «۱» متوسط

$S=\{۲,۳,۵,۷,۱۱,۱۳,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹\}$

$A=\{۲,۷,۱۱,۱۳\}$

بنابراین هر سه عضوی که از مجموعه $\{۳,۵,۱۷,۱۹,۲۳,۲۹\}$ انتخاب کنیم با مجموعه A ناسازگار است. عضو ۱۷ انتخاب شده است، بنابراین کافی است دو عضو از بین $\{۳,۵,۱۹,۲۳,۲۹\}$ انتخاب کنیم.

$$\binom{۵}{۲}=\frac{۵\times۴}{۲}=۱۰$$

۴- گزینه «۲» دشوار

$A=\{(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶),(ر,۵)\}$

$B=\{(ر,۵)\}$

$(A\cap B')'=(A-B)'=S-(A-B)$

$A-B=\{(پ,۱),(پ,۲),(پ,۳),(پ,۴),(پ,۵),(پ,۶)\}$

مجموعه S دارای $۲\times۶=۱۲$ عضو است و $A-B$ دارای ۶ عضو است، بنابراین مجموعه $S-(A-B)$ نیز دارای ۶ عضو می‌باشد.

$n(A\cap B')'=n(A-B)'=n(S)-n(A-B)=۱۲-۶=۶$

۵- گزینه «۴» متوسط

$n(S)=۶\times۶=۳۶$

$A=\{(۱,۲),(۱,۳),(۱,۵),(۲,۱),(۲,۴),(۲,۶),(۳,۱),(۳,۴)$
$,(۳,۶),(۴,۲),(۴,۳),(۴,۵),(۵,۱),(۵,۴)$

$,(۵,۶),(۶,۲),(۶,۳),(۶,۵)\}\Rightarrow n(A)=۱۸$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}$$

۶- گزینه «۱» متوسط

$S=\{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴,۲۱,۲۲,۲۳,۲۴,۳۱,۳۲,۳۳,۳۴,۴۱,۴۲,۴۳,۴۴\}$
$\Rightarrow n(S)=۱۶$

$A=\{۱۲,۲۱,۲۴,۳۳,۴۲\}\Rightarrow n(A)=۵$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵}{۱۶}$$

۷- گزینه «۳» متوسط

$$n(S)=\binom{۱۳}{۳}=\frac{۱۳\times۱۲\times۱۱}{۶}=۲۸۶$$

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\binom{۹}{۱}+\binom{۴}{۳}=(۶)(۹)+(۴)=۵۸$$

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۵۸}{۲۸۶}=\frac{۲۹}{۱۴۳}$$

۸- گزینه «۲» متوسط

$$\begin{cases} n(S)=\binom{۹}{۴}=\frac{۹!}{۴!۵!}=۱۲۶ \\ n(A)=\binom{۵}{۲}\binom{۴}{۲}=۱۰\times۶=۶۰ \end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۱۲۶}=\frac{۱۰}{۲۱}$$

۹- گزینه «۱» متوسط

$$\begin{cases} n(S)=\binom{۹}{۲}=\frac{۹\times۸}{۲}=۳۶ \\ n(A)=\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۲}=۱۰+۶=۱۶ \end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۶}{۳۶}=\frac{۴}{۹}$$

۱۰- گزینه «۴» دشوار

از فرمول جایگشت با تکرار استفاده می‌کنیم:

$$n(S)=\frac{۸!}{۳!۳!}=۳۳۶۰$$

$\boxed{AAA}\boxed{RR}KFM\Rightarrow n(A)=۵!=۱۲۰$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲۰}{۳۳۶۰}=\frac{۱}{۲۸}$$

۱۱- گزینه «۲» متوسط

$n(S)=۹!$

کتاب رمان : R ، کتاب شعر : P ، کتاب تاریخ : T

$\boxed{R_۱R_۲R_۳R_۴}\boxed{P_۱P_۲P_۳}\boxed{T_۱T_۲}$

$n(A)=۴!\times ۳!\times ۲!\times ۲!$

جایگشت داخل بسته رمان — جایگشت داخل بسته شعر — جایگشت داخل بسته تاریخ — جایگشت بسته شعر و تاریخ

توجه کنید با توجه به این که اولین کتاب رمان است، جایگشت بسته رمان را حساب نمی‌کنیم.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!\times ۳!\times ۲\times ۲}{۹!}=\frac{۱}{۶۳۰}$$

۱۲- گزینه «۱» متوسط

$n(S)=۷!$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ افسر از ۳ افسر}}\times\underbrace{۲}_{\text{جابه‌جایی اول و آخر}}\times ۵!=۶\times ۵!$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶\times ۵!}{۷\times ۶\times ۵!}=\frac{۱}{۷}$$

۱۳- گزینه «۳» دشوار

A دو مهره هم رنگ متوالیاً بیرون نیاید، یعنی آن که رنگ مهره‌ها یک در میان تغییر کند.

$n(S)=۷\times ۶\times ۵=۲۱۰$

$n(A)=۳\times ۳\times ۳+۳\times ۴\times ۲=۳۶+۲۴=۶۰$

اولی سفید — دومی آبی — سومی سفید — سومی آبی — دومی سفید — اولی آبی

$$p(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶۰}{۲۱۰}=\frac{۲}{۷}$$

۱۴- گزینه «۲» متوسط

$n(S)=۱۲\times ۱۲\times ۱۲=(۱۲)^۳$

$n(A)=۱۲\times ۱۱\times ۱۰$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲\times ۱۱\times ۱۰}{(۱۲)^۳}=\frac{۵۵}{۷۲}$$

۱۵- گزینه «۴» آسان

$n(S)=۱۲+۲۳+۱۷+۲۸+۱۱+۹=۱۰۰$

A : دختر B : صنایع

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲+۱۷+۱۱}{۱۰۰}=\frac{۴۰}{۱۰۰}$$

$$P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۱۲+۲۳}{۱۰۰}=\frac{۳۵}{۱۰۰}$$

$$P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱۲}{۱۰۰}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{۴۰}{۱۰۰}+\frac{۳۵}{۱۰۰}-\frac{۱۲}{۱۰۰}=\frac{۶۳}{۱۰۰}=۰/۶۳$$

۱۶- گزینه «۲» متوسط

$n(S)=۶\times ۶=۳۶$

A : مجموع دو عدد ظاهر شده بزرگ‌تر از ۳

A' : مجموع دو عدد کمتر از ۳ یا مساوی ۳

$A'=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۱)\}\Rightarrow n(A')=۳$

$$P(A')=\frac{n(A')}{n(S)}=\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}$$

۱۷- گزینه «۴» دشوار

I) $P(A'\cup B')=۰/۹\Rightarrow P(A\cap B)'=۰/۹$
$\Rightarrow ۱-P(A\cap B)=۰/۹\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۱$

II) $P(A'\cup B)=۰/۵\Rightarrow P(A\cap B')'=۰/۵$
$\Rightarrow ۱-P(A\cap B')=۰/۵\Rightarrow P(A\cap B')=۰/۵$

$\Rightarrow P(A-B)=۰/۵\Rightarrow P(A)-P(A\cap B)=۰/۵$
$\Rightarrow P(A)-۰/۱=۰/۵\Rightarrow P(A)=۰/۶$

III) $P(A\cup B')=۰/۶\Rightarrow P(A'\cap B')=۰/۶$
$\Rightarrow ۱-P(A'\cap B)=۰/۶\Rightarrow P(A'\cap B)=۰/۴$

$\Rightarrow P(B-A)=۰/۴\Rightarrow P(B)-P(A\cap B)=۰/۴$
$\Rightarrow P(B)-۰/۱=۰/۴\Rightarrow P(B)=۰/۵$

$\xrightarrow{I,II,III}P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$=۰/۶+۰/۵-۰/۱=۱$

۱۸- گزینه «۳» متوسط

$$P(A')=\frac{۵}{۷}\Rightarrow ۱-P(A)=\frac{۵}{۷}\Rightarrow P(A)=۱-\frac{۵}{۷}\Rightarrow P(A)=\frac{۲}{۷}$$

A, B : ناسازگار

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\Rightarrow\frac{۳}{۴}=\frac{۲}{۷}+P(B)$$

$$\Rightarrow P(B)=\frac{۳}{۴}-\frac{۲}{۷}\Rightarrow P(B)=\frac{۱۳}{۲۸}$$

۱۹- گزینه «۲» متوسط

تعریف جامعه: مجموعه تمام افراد یا اشیایی که در مورد یک یا چند ویژگی آن تحقیق صورت می‌گیرد جامعه است، بنابراین طبق تعریف جامعه آماری در گزینهٔ «۲» است.

۲۰- گزینه «۲» آسان

گروه خونی: کیفی اسمی

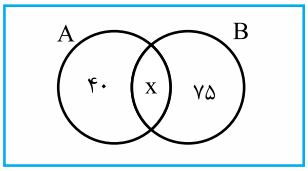
قد دانش آموزان: کمی پیوسته

پاسخنامه

سؤالات تستی

آزمون پلاس

۱- گزینه «۴»



$$\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{n(A)}{n(S)}}{\frac{n(B)}{n(S)}}=\frac{n(A)}{n(B)}=\frac{۴۰+x}{۷۵+x}$$

هنگامی کسر $\frac{۴۰+x}{۷۵+x}$ بیش‌ترین مقدار می‌شود که x بیش‌ترین شود. پس در واقع باید قسمت اشتراک که برابر با x است، بیش‌ترین مقدار باشد. بنابراین:

$$\max(x)=۱۵۰-(۴۰+۷۵)=۳۵\Rightarrow\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{۴۰+x}{۷۵+x}$$

$$=\frac{۴۰+۳۵}{۷۵+۳۵}=\frac{۷۵}{۱۱۰}=\frac{۱۵}{۲۲}$$

۲- گزینه «۱»

راه‌حل اول:

$$n(S)=\binom{۶}{۳}\times ۳!\times\binom{۳}{۳}\times ۳!=۲۰\times۶\times۱\times۶=۷۲۰$$

$$n(A)=(\binom{۴}{۱}\times\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت ۲ کتاب}}\times\underbrace{۲!}_{\text{جایگشت بسته‌ها}}\times\binom{۳}{۳}\times ۳!)\times\underbrace{۲}_{\text{جابه‌جایی ردیف}}=۱۹۲$$

یکی از ۴ کتاب دیگر را با دو کتاب مورد نظر در یک ردیف قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow P(A)=\frac{۱۹۲}{۷۲۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

راه‌حل دوم:

$$\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲!\times۴\times۴!}{۶!}=\frac{۱۹۲}{۷۲۰}=\frac{۴}{۱۵}$$

۳- گزینه «۳»

$$\Delta=(-m)^۲-۴(۱)(n)=m^۲-۴n>۰\Rightarrow m^۲>۴n$$

حال سراغ حالت بندی بروید. (دقت شود $n(S)=۳۶$ است.)

تعداد حالات	n	m
۰	–	۱
۰	–	۲
۲	۱ یا ۲	۳
۳	۱ یا ۲ یا ۳	۴
۶	۱ یا ۲ یا ... یا ۶	۵
۶	۱ یا ۲ یا ... یا ۶	۶
۱۷	مجموع	

$$P(A)=\frac{۱۷}{۳۶}$$

۴- گزینه «۱»

فضای نمونه برابر است با:

$$n(S)=\binom{۷}{۵}=\frac{۷\times۶}{۲}=۲۱$$

فضای پیشامد برابر است با:

$$\begin{cases}=\text{حالت اول}\\ =\text{هر دو والدین باشند}=\binom{۲}{۲}\times(\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{\text{انتخاب ۳ فرزند}}-\underbrace{\binom{۲}{۲}}_{\text{پسرها با هم}}\binom{۳}{۱})=۱(۱۰-۳)=۷\\ \Rightarrow n(A)=۱۱\\ =\text{حالت دوم}\\ =\text{یکی از والدین باشد}=\binom{۲}{۱}(\binom{۵}{۴}-\binom{۲}{۲}\binom{۳}{۲})=۲(۵-۳)=۴\end{cases}$$

بنابراین:

$$P(A)=\frac{۱۱}{۲۱}$$

۵- گزینه «۲»

$$\underbrace{\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۴}{۲}}{\binom{۶}{۲}}}_{\text{هردوسفید}}+\underbrace{\frac{\binom{۳}{۲}}{\binom{۸}{۲}}\times\frac{\binom{۲}{۲}}{\binom{۶}{۲}}}_{\text{هردوسیاه}}=\frac{۶۰+۳}{۲۸\times۱۵}=\frac{۳}{۲۰}=\frac{۱۵}{۱۰۰}=۰/۱۵$$

۶- گزینه «۳»

$$P_{\text{کل}}=P(\text{۱مهره قرمز،۳مهره سفید})+P(\text{۱مهره قرمز،۲مهره سفید،۱مهره سیاه})$$

$$=\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۲}\binom{۵}{۱}}{\binom{۱۴}{۴}}+\frac{\binom{۲}{۱}\binom{۷}{۳}}{\binom{۱۴}{۴}}=\frac{۲\times\frac{۷\times۶}{۲}\times۵+۲\times\frac{۷!}{۳!\times۴!}}{\frac{۱۴!}{۴!\times۱۰!}}$$

$$=\frac{۷\times۶\times۵+۲\times\frac{۷\times۶\times۵}{۳\times۲}}{\frac{۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱}{۴\times۳\times۲}}\qquad P_{\text{کل}}=\frac{۲۱۰+۷۰}{۷\times۱۳\times۱۱}=\frac{۴۰}{۱۳\times۱۱}=\frac{۴۰}{۱۴۳}$$

۷- گزینه «۱»

ابتدا شکلی برای مسئله رسم می‌کنیم.

د ◯◯ ک ◯

$$n(A)=\underbrace{۲!}_{\substack{\text{جابه‌جایی کاپیتان}\\\text{ودروازه‌بان}}}\times\underbrace{۲!}_{\substack{\text{جابه‌جایی بسته‌و}\\\text{شخص بیرون بسته}}}\times\underbrace{۲!}_{\substack{\text{جابه‌جایی دونفربین}\\\text{کاپیتان‌ودروازه‌بان}}}\times\underbrace{\binom{۳}{۲}}_{\substack{\text{انتخاب دونفربین}\\\text{کاپیتان‌ودروازه‌بان}}}$$

$$=۲\times۲\times۲\times۳=۲۴$$

همچنین می‌دانیم $n(S)=۵!=۱۲۰$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۴}{۱۲۰}=\frac{۱}{۵}$$

۸- گزینه «۱»

$$n(S)=\underbrace{۵}_{\text{یک رقمی}}+\underbrace{۴\times۵}_{\text{دو رقمی}}+\underbrace{۳\times۴\times۵}_{\text{سه رقمی}}+\underbrace{۲\times۳\times۴\times۵}_{\text{چهار رقمی}}+\underbrace{۵!}_{\text{پنج رقمی}}$$

$$n(A)=\underset{\substack{\downarrow\\۴}}{۱}+\underbrace{۴}_{(۱۲,۲۴,۳۲,۵۲)}+۳\times۴+۲\times۳\times۴+۱\times۲\times۳\times۴\Rightarrow\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱}{۵}$$

۹- گزینه «۳»

تعداد اعضای فضای نمونه‌ای پرتاب ۳ تاس برابر $۶^۳$ است.

هر سه عدد از مجموعه $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است را دسته‌بندی و جایگشت آن‌ها را حساب می‌کنیم.

جایگشت‌های سه عدد متفاوت ۶ و ۳ و ۱ به صورت زیر است:

$$۶,۳,۱:\{(۶,۳,۱),(۶,۱,۳),(۱,۳,۶),(۱,۶,۳),(۳,۱,۶),(۳,۶,۱)\}$$

به طور مشابه برای هر سه عدد ۵ و ۳ و ۲ هم ۶ حالت و همچنین برای اعداد ۵ و ۴ و ۱ هم ۶ حالت وجود دارد.

جایگشت‌های سه عدد ۶ و ۲ و ۲ به صورت زیر است:

$$۶,۲,۲:\{(۶,۲,۲),(۲,۶,۲),(۲,۲,۶)\}$$

برای اعداد ۴ و ۴ و ۲ همچنین اعداد ۴ و ۳ و ۳ نیز به طور مشابه ۳ حالت وجود دارد.

بنابراین در مجموع حالت‌های زیر را داریم و احتمال مورد نظر به صورت زیر به دست می‌آید:

$$n(A)=۳\times۶+۳\times۳=۲۷$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۲۷}{۶^۳}=\frac{۳^۳}{۶^۳}=\frac{۱}{۸}$$

۱۰- گزینه «۴»

حالت مختلف فضای نمونه‌ای را می‌نویسیم:

۱) یک رقمی‌ها: ۵ تا

۲) دو رقمی‌ها: $P(۵,۲)=۲۰$

۳) سه رقمی‌ها: $P(۵,۳)=۶۰$

۴) چهاررقمی‌ها: $P(۵,۴)=۱۲۰$

۵) پنج رقمی‌ها: $۵!=۱۲۰$

کل حالت‌ها برابر ۳۲۵ حالت است.

حال اعداد بخش‌پذیر بر ۳ را می‌نویسیم:

۱) در یک رقمی‌ها فقط عدد ۳ است.

۲) در دو رقمی‌ها ۸ تای آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیرند.

۱۲,۲۱,۱۵,۵۱,۲۴,۴۲,۴۵,۵۴

۳) در سه رقمی‌ها دسته‌بندی می‌کنیم:

<u>۱۲۳</u>,۱۲۴,۱۲۵,۱۳۴,<u>۱۳۵</u>,۱۴۵,<u>۲۳۴</u>,۲۳۵,۲۴۵,<u>۳۴۵</u>

تعداد سه رقمی‌ها $۴\times۳!$ یعنی ۲۴ تاست.

۴) چهار رقمی‌های بخش‌پذیر بر ۳:

۱۲۳۴,۱۲۳۵,۲۳۴۵,<u>۱۲۴۵</u>,۱۳۴۵

تعداد چهار رقمی‌های بخش‌پذیر بر ۳ برابر $۴!$ یعنی ۲۴ است.

۵) همه پنج رقمی‌های ساخته شده بر ۳ بخش‌پذیرند که تعداد آن‌ها $(۵!=۱۲۰)$ است.

$$P=\frac{۱+۸+۲۴+۲۴+۱۲۰}{۳۲۵}=\frac{۱۷۷}{۳۲۵}$$

۱۱- گزینه «۴»

فضای نمونه عبارت است از:

$$n(S)=\binom{۵}{۳}=۱۰$$

مسئله را از روش متمم حل می‌کنیم یعنی:

$$n(A')=\text{۲قلوها باشند}=\binom{۲}{۲}\cdot\binom{۳}{۱}=۳$$

پس:

$$P(A)=۱-P(A')=۱-\frac{۳}{۱۰}=۰/۷$$

۱۲- گزینه «۲»

<u>A</u> _ _ _ _ _ <u>A</u>

$$n(S)=۷!$$

$$n(A)=\binom{۳}{۲}\times۲!\times۵!\Rightarrow P(A)=\frac{۳\times۲\times۵!}{۷\times۶\times۵!}=\frac{۱}{۷}$$

۱۳- گزینه «۳»

$P(\text{دو مهرهٔ قرمز و یک مهرهٔ غیر از قرمز})+P(\text{دو مهرهٔ سیاه و یک مهرهٔ غیر از سیاه})$

$P(\text{دو مهرهٔ سفید و یک مهرهٔ غیر سفید})=P(\text{دو مهرهٔ همرنگ})$

$$=\frac{\binom{۵}{۲}\binom{۵}{۱}+\binom{۳}{۲}\binom{۷}{۱}+\binom{۲}{۲}\binom{۸}{۱}}{\binom{۱۰}{۳}}=\frac{۵۰+۲۱+۸}{۱۲۰}=\frac{۷۹}{۱۲۰}$$

۱۴- گزینه «۱»

تعداد حالت‌های فضای نمونه‌ای برابر $n(S)=۶!$ است. برای اینکه شماره‌های زوج و فرد، یک در میان قرار گیرند، داریم:

زوج فرد زوج فرد زوج فرد

۳×۳×۲×۲×۱×۱

ولی چون می‌توان با عدد فرد شروع کرد، پس تعداد اعضای پیشامد مورد نظر برابر است با:

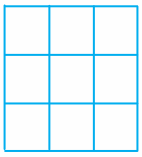
$$n(A)=۲\times ۳!\times ۳!$$

$$P(A)=\frac{۲\times ۳!\times ۳!}{۶!}=\frac{۱}{۱۰}=۰/۱$$

۱۵- گزینه «۳»

با رنگ کردن خانه‌های شکل زیر، می‌دانیم یک مربع یا مستطیل بسازیم. تعداد کل مربع‌ها برابر است با:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲=۱۴$$



تعداد کل چهار ضلعی‌ها (مستطیل‌ها) برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}\binom{۴}{۲}=۶\times ۶=۳۶$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۴}{۳۶}=\frac{۷}{۱۸}$$

۱۶- گزینه «۴»

$$n(S)=\binom{۱۰}{۴}=\frac{۱۰\times ۹\times ۸\times ۷}{۴\times ۳\times ۲}=۲۱۰$$

$$n(A)=\underbrace{\binom{۵}{۱}}_{\text{انتخاب یک زوج از ۵زوج}}\times\underbrace{\binom{۴}{۲}}_{\text{انتخاب ۲ زوج از ۴زوج}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب ۱نفر از زوج منتخب اول}}\times\underbrace{\binom{۲}{۱}}_{\text{انتخاب ۱ نفر از زوج منتخب دوم}}$$

$$=۵\times ۶\times ۲\times ۲=۱۲۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۱۲۰}{۲۱۰}=\frac{۴}{۷}$$

۱۷- گزینه «۲»

برای آنکه تشکیل مثلث دهد حتماً باید یک نقطه از خط دیگری انتخاب شود، بنابراین داریم:

$$n(S)=\binom{۷}{۳}=۳۵$$

$$n(A)=\binom{۴}{۲}\binom{۳}{۱}+\binom{۴}{۱}\binom{۳}{۲}=۶\times ۳+۴\times ۳=۱۸+۱۲=۳۰$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۳۵}=\frac{۶}{۷}$$

۱۸- گزینه «۱»

$$n(S)=۷!$$

$$n(A)=۴!\times ۳!$$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۴!\times ۳!}{۷!}=\frac{۴!\times ۶}{۷\times ۵\times ۶\times ۴!}=\frac{۱}{۳۵}$$

۱۹- گزینه «۲»

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\xrightarrow{P(A\cup B)=۳P(A\cap B)}۳P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B)=۴P(A\cap B)(*)$$

$$\frac{P(A\cup B)-P(A\cap B)}{P(A)+P(B)}\xrightarrow{(*)}\frac{۳P(A\cap B)-P(A\cap B)}{۴P(A\cap B)}$$

$$=\frac{۲P(A\cap B)}{۴P(A\cap B)}=\frac{۲}{۴}=۰/۵$$

۲۰- گزینه «۱»

پرتاب ۵ بار سکه، حالات مساوی ندارد؛ یعنی یا «پشت» بیشتر می‌آید و یا «رو». با توجه به تقارن بین «رو» و «پشت» احتمال رخداد هر یک برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس گزینهٔ «۱» درست است.