کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۲/۰۵/۱۲

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۲۰ دقیقه

نام آزمون: ریاضی رازی ۱۲ مرداد

دبیرستان دخترانه علوی واحد شرق

۱) به‌ازای کدام مقادیر m، معادلهٔ درجهٔ دوم $(m-۶)x^۲ - ۲mx - ۳ = ۰$، دارای دو ریشه‌ی حقیقی منفی است؟

۱) $m < -۶$ ۲) $m > ۳$ ۳) $۰ < m < ۳$ ۴) $۳ < m < ۶$

۲) اگر بیشترین مقدار تابع $f(x) = (k+۳)x^۲ - ۴x + k$ برابر صفر باشد، مقدار k کدام است؟

۱) -۴ ۲) -۱ ۳) ۱ ۴) ۴

۳) مجموع جواب‌های معادلهٔ $۳ = |x+۲| + |۲x-۱|$، کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۴) مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $۱ < \left|\frac{۲-x}{۲x-۳}\right|$ ، به صورت کدام بازه است؟ (با تغییر)

۱) $(۱, \frac{۳}{۲})$ ۲) $(۱, \frac{۳}{۲}) \cup (\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳})$ ۳) $(۱, \frac{۵}{۳})$ ۴) $(\frac{۵}{۳}, ۲)$

۵) مجموعه جواب نامعادلهٔ $x^۲ - ۲x < |x-۲|$، به‌صورت کدام بازه است؟

۱) $(-۱, ۱)$ ۲) $(-۱, ۲)$ ۳) $(۰, ۲)$ ۴) $(۱, ۲)$

۶) اگر نقطهٔ $(-۱, ۴)$ رأس سهمی به معادله $y = -۲x^۲ + ax - b$ باشد، مقدار ab کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۰

۷) به ازای کدام مجموعهٔ مقادیر m، منحنی به معادله‌ی $y = (m+۲)x^۲ + ۳x + ۱ - m$، محور xها را در هر دو طرف مبدأ مختصات، قطع می‌کند؟

۱) $m > ۱$ یا $m < -۲$ ۲) $-۲ < m < ۱$ ۳) فقط $m < -۲$ ۴) فقط $m > ۱$

۸) مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $۳ \leq \left|\frac{۲x-۱}{۳} - ۲\right|$ بازهٔ $[a, b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۹) بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم با ضابطه‌ی $f(x) = ax^۲ + ۴x + ۵$ برابر ۹ است. معادله‌ی محور تقارن این تابع کدام است؟

۱) $x = -۱$ ۲) $x = ۲$ ۳) $x = ۳$ ۴) $x = ۴$

۱۰) به ازای کدام مجموعه مقادیر m، منحنی به معادلهٔ $y = (m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۲$، محور xها را در دو نقطه به طول‌های منفی، قطع می‌کند؟

۱) $m > ۲$ ۲) $-۱ < m < ۲$ ۳) هر مقدار m ۴) هیچ مقدار m

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۴ — شرط آنکه یک معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ حقیقی منفی متمایز باشد آن است که $\Delta > ۰$، $S < ۰$ و $P > ۰$ باشد.

$$\Delta > ۰ \xrightarrow{b^۲ - ۴ac > ۰} ۴m^۲ - ۴(m-۶)(-۳) > ۰ \Rightarrow m^۲ + ۳m - ۱۸ > ۰ \Rightarrow (m+۶)(m-۳) > ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} m < -۶ \quad \text{یا} \quad m > ۳ \quad (I)$$

$$S < ۰ \Rightarrow \frac{-b}{a} < ۰ \Rightarrow \frac{۲m}{m-۶} < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۰ < m < ۶ \qquad (II)$$

$$P > ۰ \Rightarrow \frac{c}{a} > ۰ \Rightarrow \frac{-۳}{m-۶} > ۰ \Rightarrow m - ۶ < ۰ \Rightarrow m < ۶ \qquad (III)$$

از اشتراک جواب‌های I و II و III به جواب $۳ < m < ۶$ می‌رسیم.

۲ گزینه ۱ — بیشترین مقدار تابع درجهٔ دوم همان عرض رأس سهمی است.

$$y_S = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۰ \Rightarrow ۴ac - b^۲ = ۰ \Rightarrow ۴(k+۳)(k) - ۱۶ = ۰ \Rightarrow k^۲ + ۳k - ۴ = ۰$$

$$\xrightarrow{a+b+c=۰} \begin{cases} k = ۱ \\ k = \frac{c}{a} = -۴ \end{cases}$$

تابع درجهٔ دوم وقتی دارای Max است که ضریب $x^۲$ منفی باشد، پس فقط $k = -۴$ قابل قبول است.

۳ گزینه ۲

ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها $x = -۲$ و $x = \frac{۱}{۲}$ هستند.

x	$-\infty$		-۲		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
$۲x-۱$		$-$		$-$	۰	$+$	
$x+۲$		$-$	۰	$+$		$+$	

$$x < -۲ \Rightarrow -۲x + ۱ - x - ۲ = ۳ \Rightarrow -۳x = ۴ \Rightarrow x = -\frac{۴}{۳} \ \text{غ ق ق}$$

$$-۲ \le x \le \frac{۱}{۲} \Rightarrow -۲x + ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow -x = ۰ \Rightarrow x = ۰ \ \text{ق ق}$$

$$x > \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x - ۱ + x + ۲ = ۳ \Rightarrow ۳x = ۲ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} \ \text{ق ق}$$

$$\text{مجموع جواب‌ها} = ۰ + \frac{۲}{۳} = \frac{۲}{۳}$$

۴ گزینه ۲ — می‌دانیم که $\left|\frac{f}{g}\right| = \frac{|f|}{|g|}$ است.

$$\frac{|۲-x|}{|۲x-۳|} > ۱ \rightarrow |۲-x| > |۲x-۳| \xrightarrow{\text{توان}۲} ۴ + x^۲ - ۴x > ۴x^۲ + ۹ - ۱۲x$$

$$\rightarrow ۳x^۲ - ۸x + ۵ < ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱ < x < \frac{۵}{۳}$$

ولی دقت کنید که $x = \frac{۳}{۲}$ مخرج کسر را صفر می‌کند و از مجموعه‌ی جواب باید حذف شود و جواب به صورت $(۱, \frac{۳}{۲}) \cup (\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۳})$ در می‌آید.

۵ گزینه ۲ — روش اول :

قدر مطلق را تعیین علامت می‌کنیم:

$$x \ge ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x < x - ۲ \Rightarrow x^۲ - ۳x + ۲ < ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲) < ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$

$$x < ۲ \Rightarrow x^۲ - ۲x < -x + ۲ \Rightarrow x^۲ - x - ۲ < ۰ \Rightarrow (x-۲)(x+۱) < ۰$$

$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۱ < x < ۲ \quad (II)$$

$$(I) \cup (II) : -۱ < x < ۲$$

روش دوم:

نامعادله را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

درست است گزینه‌های (۳ و ۴ حذف می‌شوند) $x = \circ \xrightarrow{\text{نامعادله}} \circ < ۲$

درست است (گزینهٔ ۱ حذف می‌شود) $x = ۱ \xrightarrow{\text{نامعادله}} -۱ < ۱$

۶ ۱ ۲ ۳ ۴ طول رأس سهمی برابر $x = -\dfrac{a}{۲(-۲)}$ است. پس:

$$\frac{a}{۴} = -۱ \Rightarrow a = -۴ \qquad \Rightarrow y = -۲x^۲ - ۴x - b$$

عرض رأس سهمی به ازای $x = -۱$ به‌دست می‌آید. پس:

$$y = -۲(-۱)^۲ + a(-۱) - b = -۲ + ۴ - b = ۴ \Rightarrow b = -۲$$

در نتیجه: $ab = ۸$

۷ ۱ ۲ ۳ ۴

.یعنی این معادلهٔ درجه دوم باید دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت داشته باشد

$$x_۱ x_۲ = \frac{c}{a} < \circ \Rightarrow \frac{۱-m}{m+۲} < \circ \Rightarrow m < -۲ \text{ یا } m > ۱$$

.توجه کنید که چون $\frac{c}{a} < \circ$ است، معادله قطعاً دو ریشهٔ حقیقی دارد. پس $\Delta > \circ$ بررسی نمی‌گردد

۸ ۱ ۲ ۳ ۴ اگر $|x| \le k$ و $k \ge \circ$ آن‌گاه $-k \le x \le k$. بنابراین:

$$\left|\frac{۲x-۱}{۳} - ۲\right| \le ۳ \Rightarrow -۳ \le \frac{۲x-۱}{۳} - ۲ \le ۳$$

$$-۱ \le \frac{۲x-۱}{۳} \le ۵ \Rightarrow -۳ \le ۲x - ۱ \le ۱۵$$

$$-۲ \le ۲x \le ۱۶ \Rightarrow -۱ \le x \le ۸$$

بنابراین مجموعهٔ جواب‌های نامعادله بازهٔ $[-۱, ۸]$ است و درنتیجه:

$$a = -۱ \;,\; b = ۸ \Rightarrow a + b = ۷$$

۹ ۱ ۲ ۳ ۴ می‌دانیم که بیشترین مقدار تابع درجه‌ی دوم ($a < \circ$) برابر عرض رأس آن است. پس اگر رأس منحنی تابع f را S بنامیم، داریم:

$$y_s = \frac{۴ac - b^۲}{۴a} = ۹ \to \frac{۲\circ a - ۱۶}{۴a} = ۹ \to ۳۶a = ۲\circ a - ۱۶ \to ۱۶a = -۱۶ \to a = -۱$$

پس خط به معادله‌ی $۲ = \dfrac{-(۴)}{۲(-۱)} = \dfrac{-b}{۲a} = x$ محور تقارن این تابع درجه‌ی دوم است.

۱۰ ۱ ۲ ۳ ۴

سهمی موردنظر محور xها را در دو نقطه به طول منفی قطع می‌کند، یعنی معادلهٔ زیر دو ریشهٔ منفی دارد. پس باید سه شرط $\Delta > \circ$ (زیرا دو ریشه دارد) و $\frac{c}{a} > \circ$ (ضرب دو عدد منفی، مثبت است) و $-\frac{b}{a} < \circ$ (جمع دو عدد منفی، منفی است) را لحاظ کنیم.

$$(m-۲)x^۲ - ۲(m+۱)x + ۱۲ = \circ$$
$$\Delta = b^۲ - ۴ac > \circ \Rightarrow (-۲(m+۱))^۲ - ۴(m-۲)(۱۲) > \circ$$
$$\Rightarrow ۴(m^۲ + ۲m + ۱ - ۱۲m + ۲۴) > \circ \xrightarrow{\text{طرفین تقسیم بر ۴}} (m^۲ - ۱\circ m + ۲۵) > \circ \Rightarrow (m-۵)^۲ > \circ$$
$$\Rightarrow m \in R - \{۵\}$$
$$\frac{c}{a} > \circ \Rightarrow \frac{۱۲}{m-۲} > \circ \Rightarrow m - ۲ > \circ \Rightarrow m > ۲ \qquad (۱)$$
$$-\frac{b}{a} < \circ \Rightarrow \frac{۲(m+۱)}{m-۲} < \circ \xrightarrow{m-۲>\circ} m + ۱ < \circ \Rightarrow m < -۱ \qquad (۲)$$

مجموعه‌های (۱) و (۲) هیچ اشتراکی ندارد.

ریاضی رازی ۱۲ مرداد

پاسخ‌نامه‌کلیدی

سؤال	گزینه صحیح
۱	۴
۲	۱
۳	۲
۴	۲
۵	۲
۶	۳
۷	۱
۸	۲
۹	۲
۱۰	۴