آزمون جامع: شماره یک

درس: ریاضیات

ویژه : کنکور ۱۴۰۳

بنام آفریدگار زیبایی ها:

پدرام کرد

۱ اگر معادله‌ی درجه دوم $(m+۲)x^۲+۴x+(m-۱)=۰$ دارای دو جواب حقیقی متمایز باشد، مقادیر m کدام است؟

۱) $-۲\le m\le ۱$ ۲) $۱<m<۲$ ۳) $m\in(-۲,۰)\cup(۰,۲)$ ۴) $m\in(-۳,-۲)\cup(-۲,۲)$

۲ به ازای چند مقدار m نامساوی $\frac{x^۲+mx+۲}{x^۲-x+۱}>۱$ به ازای جمیع مقادیر x برقرار است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۳ مجموعه جواب نامعادله $\frac{x^۲+۲x-۳}{x^۲+x-۲}>\frac{x^۲-۷x+۱۲}{x^۲-۲x-۸}$ کدام است؟

۱) $(-۲,+\infty)$ ۲) $(-۲,+\infty)-\{۱,۴\}$ ۳) $[-۲,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-۲)\cup(-۲,+\infty)$

۴ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{(x^۲-۴x+۴)(x^۲-۴x+۳)}{x^۳-x}<۰$ به‌صورت $(-\infty,a)\cup(b,c)$ است. مقدار $a+b+c$ کدام است؟ $(x\neq ۱)$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵ مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $\frac{x^۲-x-۶}{x^۲-۳x-۱۰}\ge ۲$ بازهٔ $(a,b]$ است. مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

۶ اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ۶x + ۴ = ۰$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۷ اگر مجموع مجذورات سه ریشه‌ی حقیقی معادله‌ی $(x-۲)(x^۲ + mx + m + ۳) = ۰$ برابر ۱۳ باشد، مجموعه‌ی مقادیر m چند عضو دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۸ به ازای چه مقدار m، دو ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۲ + ۱۱x - ۲m = ۷$ عکس و قرینه‌اند؟

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) -۵ ۴) ۵

۹ اگر $\frac{۱}{\alpha + ۱}$ و $\frac{۱}{\beta + ۱}$ ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ + ۲x - ۵ = ۰$ باشند، در این صورت α و β ریشه‌های کدام معادله می‌باشند؟

۱) $۵x^۲ - ۸x - ۷ = ۰$ ۲) $۵x^۲ + ۹x + ۷ = ۰$ ۳) $۵x^۲ + ۸x + ۲ = ۰$ ۴) $۵x^۲ + ۸x + ۷ = ۰$

۱۰ معادله درجه دومی که ریشه هایش ۹ برابر ریشه های معادله‌ی $x^۲ + x - ۳ = ۰$ باشد. کدام است؟

۱) $x^۲ + ۹x - ۲۴۳ = ۰$ ۲) $x^۲ + ۹x - ۲۷ = ۰$ ۳) $x^۲ + ۱۸x - ۲۴۳ = ۰$ ۴) $x^۲ + ۱۸x - ۲۷ = ۰$

۱۱ اگر عبارت $y = ax(x+۱) + ۱$ همواره مثبت باشد، به جای a چند عدد صحیح می‌توان قرار داد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) صفر

۱۲) تمام محدودهٔ a کدام باشد تا سهمی به معادلهٔ $y=(a+۶)x^۲+(a-۲)x+۱$ از ناحیهٔ چهارم محورهای مختصات عبور نکند؟

۱) $-۶<a<-۲$ ۲) $a\le -۲$ ۳) $a\ge -۲$ ۴) $a>۵$

۱۳) می‌دانیم خط $y=-۳$، محور تقارن مشترک دو سهمی $f(x)=ax^۲+bx+c$ و $g(x)=-x^۲+۴x-۷$ را روی خود سهمی‌ها قطع می‌کند. اگر سهمی $f(x)$ روی محور طول‌ها، پاره‌خطی به طول ۵ جدا کرده باشد، مقدار a کدام است؟ $(a>۰)$

۱) $\frac{۱۲}{۲۵}$ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱۲}{۲۵}$ ۴) $-\frac{۴۸}{۲۵}$

۱۴) استخری توسط دو شیر A و B پر می‌شود. دو شیر A و B باهم استخر را در ۱۵ ساعت پر می‌کنند. بعد از ۶ ساعت بازبودن هر دو شیر A و B، شیر A را می‌بندیم؛ شیر B به تنهایی ۱۵ ساعت بعد استخر را پر می‌کند. چند ساعت طول می‌کشد که شیر A به تنهایی استخر را پر کند؟

۱) ۳۲ ۲) ۳۲٫۵ ۳) ۳۷٫۵ ۴) ۳۸

۱۵) به‌ازای چند مقدار a، $x=-۱$ جواب معادلهٔ $\sqrt{x^۲+ax+۱۷}=ax-۲$ است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ ۳ **۴**

معادله دارای ۲ ریشه متمایز : $\Delta > 0$

$$(m+2)x^2+4x+(m-1)=0 \Rightarrow \Delta = 4^2-4(m+2)(m-1)$$
$$=16-4m^2-4m+8=-4m^2-4m+24$$

$$\Delta>0 \Rightarrow -4m^2-4m+24>0 \xrightarrow{\div(-4)} m^2+m-6<0 \rightarrow (m-2)(m+3)<0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} m+3=0 \Rightarrow m=-3 \\ m-2=0 \Rightarrow m=2 \end{cases}$$

m		−3		2	
(m−2)(m+3)	+	0	−	0	+

$-3<m<2$

اما به ازای $m=-2$ معادله دیگر درجه دو نخواهد بود، پس مجموعه mها عبارت است از: $(-3,-2)\cup(-2,2)$

۲ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\underbrace{\frac{x^2+mx+2}{x^2-x+1}}_{\Delta<0,a>0} > 1 \xrightarrow[\text{طرفین وسطین می‌کنیم.}]{\text{مخرج همواره ثابت است}} x^2+mx+2>x^2-x+1 \rightarrow mx+x+1>0 \rightarrow (m+1)x+1>0 \rightarrow m=-1$$

یک تابع خطی نمی‌تواند همواره مثبت یا همواره منفی باشد مگر آنکه تابع ثابت باشد ($y=k$) بنابراین ضریب x باید صفر باشد.

۳ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)} > \frac{(x-4)(x-3)}{(x-4)(x+2)} \rightarrow \frac{x+3}{x+2} > \frac{x-3}{x+2} \rightarrow \frac{x+3}{x+2} - \frac{x-3}{x+2} > 0$$

$$\rightarrow \frac{x+3-x+3}{x+2}>0 \rightarrow \frac{6}{x+2}>0 \rightarrow x>-2$$

از این جواب باید اعداد ۱ و ۴ را که مخرج را صفر می‌کنند کم کنیم.

۴ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا نامعادله را به‌صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x^2-4x+4)(x^2-4x+3)}{x^3-x}<0 \Rightarrow \frac{(x-2)^2(x-1)(x-3)}{x(x-1)(x+1)}<0$$

چون $(x-2)^2$ همواره نامنفی است، پس نامعادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{x-3}{x(x+1)}<0$$

با توجه به جدول تعیین علامت مقابل مجموعهٔ جواب‌های نامعادله به‌صورت $(-\infty,-1)\cup(0,3)$ است. پس $a=-1$، $b=0$، $c=3$ و درنتیجه $a+b+c=2$.

x	−∞		−1		0		3		+∞
x−3	−		−		−	○	+		
x(x+1)	+	○	−	○	+		+		
$\frac{x-3}{x(x+1)}$	−		+		−	○	+		

۵ ۱ **۲** ۳ ۴

$$\frac{x^2-x-6}{x^2-3x-10}-2\geq 0 \rightarrow \frac{x^2-x-6-2x^2+6x+20}{x^2-3x-10}\geq 0 \rightarrow \frac{-x^2+5x+14}{x^2-3x-10}\geq 0 \rightarrow \frac{-(x-7)(x+2)}{(x+2)(x-5)}\geq 0$$
$$\frac{x-7}{x-5}\leq 0, \quad x\neq -2$$

x		-۲		۵		۷	
$\frac{x-۷}{x-۵}$	$+$		$+$		$-$	۰	$+$

$a+b=۱۲$ با توجه به جدول تعیین علامت مقابل مجموعه جواب‌های نامعادله به صورت $[۵,۷)$ است. پس $a=۵$ و $b=۷$ و در نتیجه

۶ ۱ ۲ ۳ **۴**

$$x^۲-۶x+۴=۰\rightarrow\begin{cases}\text{جمع ریشه‌ها: } \alpha+\beta=-\frac{b}{a}=۶\\ \text{ضرب ریشه‌ها: } \alpha\beta=\frac{c}{a}=۴\end{cases}$$

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}=A\rightarrow A^۲=\frac{\alpha}{\beta^۲}+\frac{\beta}{\alpha^۲}+\frac{۲\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha\beta}\rightarrow A^۲=\frac{\alpha^۳+\beta^۳}{(\alpha\beta)^۲}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}=\frac{(\alpha+\beta)^۳-۳\alpha\beta(\alpha+\beta)}{(\alpha\beta)^۲}+\frac{۲}{\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$\rightarrow A^۲=\frac{۶^۳-۳(۴)(۶)}{۱۶}+\frac{۲}{۲}=\frac{۱۴۴}{۱۶}+۱=۹+۱\rightarrow A^۲=۱۰\xrightarrow{A>۰}A=\sqrt{۱۰}$$

۷ ۱ **۲** ۳ ۴

$$(x-۲)(x^۲+mx+m+۳)=۰\rightarrow\begin{cases}x=۲\\ x^۲+mx+m+۳=۰\end{cases}$$

یک ریشه‌ی معادله $x=۲$ است و اگر ریشه‌های معادله‌ی درجه‌ی دوم $x^۲+mx+m+۳=۰$ را α و β در نظر بگیریم طبق صورت مسأله $\underbrace{\alpha^۲+\beta^۲+۲^۲}_{\text{مجموع مجذورات ریشه‌ها}}=۱۳$ است.

$$\alpha^۲+\beta^۲+۴=۱۳\rightarrow\alpha^۲+\beta^۲=۹\rightarrow(\alpha+\beta)^۲-۲\alpha\beta=۹\xrightarrow[\alpha\beta=\frac{c}{a}=m+۳]{\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-m}$$

$$m^۲-۲(m+۳)=۹\rightarrow m^۲-۲m-۱۵=۰\rightarrow(m-۵)(m+۳)=۰$$

$$\rightarrow\begin{cases}m=۵\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^۲+۵x+۸=۰\rightarrow\Delta=b^۲-۴ac=۲۵-۳۲<۰\rightarrow & \text{ریشه‌ی حقیقی ندارد}\\ m=-۳\xrightarrow{\text{معادله‌ی درجه‌ی دوم}}x^۲-۳x=۰\rightarrow x(x-۳)=۰\rightarrow x=۰,x=۳\end{cases}$$

بنابراین فقط $m=-۳$ قابل قبول است.

۸ ۱ **۲** ۳ ۴

معادله را به‌صورت $۳x^۲+۱۱x-۲m-۷=۰$ مرتب می‌کنیم.

$$x_۱=\frac{-۱}{x_۲}\Rightarrow x_۱\cdot x_۲=-۱\Rightarrow\frac{c}{a}=-۱\Rightarrow\frac{-۲m-۷}{۳}=-۱\Rightarrow-۲m-۷=-۳\Rightarrow m=-۲$$

۹ ۱ ۲ **۳** ۴

$$P=\frac{۱}{\alpha+۱}\times\frac{۱}{\beta+۱}=\frac{c}{a}\rightarrow\frac{۱}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=-۵\rightarrow(\alpha+۱)(\beta+۱)=-\frac{۱}{۵}\rightarrow\alpha\beta+\alpha+\beta+۱=-\frac{۱}{۵}$$

$$\rightarrow\alpha\beta+\alpha+\beta=-\frac{۶}{۵}$$

$$S=\frac{۱}{\alpha+۱}+\frac{۱}{\beta+۱}=-\frac{b}{a}\rightarrow\frac{\beta+۱+\alpha+۱}{(\alpha+۱)(\beta+۱)}=-۲\rightarrow\frac{\alpha+\beta+۲}{-\frac{۱}{۵}}=-۲\rightarrow\alpha+\beta+۲=\frac{۲}{۵}\rightarrow\alpha+\beta=-\frac{۸}{۵}$$

$$\xrightarrow{\alpha\beta+\alpha+\beta=-\frac{۶}{۵}}\alpha\beta-\frac{۸}{۵}=-\frac{۶}{۵}\rightarrow\alpha\beta=\frac{۲}{۵}$$

$$x^۲-Sx+P=۰\rightarrow x^۲+\frac{۸}{۵}x+\frac{۲}{۵}=۰\rightarrow۵x^۲+۸x+۲=۰$$

۱۰ **۱** ۲ ۳ ۴ روش اول: اگر y ریشه ی معادله ی جدید و x ریشه های معادله ی قدیم باشد. آنگاه $y=۹x$ پس: $x=\frac{y}{۹}$ لذا:

$$x^۲+x-۳=۰\Rightarrow(\frac{y}{۹})^۲+\frac{y}{۹}-۳=۰\Rightarrow y^۲+۹y-۲۴۳=۰$$

روش دوم: کافی است b را در ۹ و c را در $۹^۲$ ضرب کنید.

$$x^۲+x-۳=۰\Rightarrow x^۲+۹x-۲۴۳=۰$$

(ریشه‌های معادله‌ی $ax^۲+bkx+ck^۲=۰$، k برابر ریشه‌های معادله $ax^۲+bx+c=۰$ می‌باشند.)

۱۱ ۱ ۲ ۳ ۴ برای آن که عبارت درجهٔ دوم $y=ax^۲+bx+c$ همواره مثبت یا بالای محور xها باشد، باید دو شرط زیر همواره برقرار باشد:

۱) $\Delta<۰$ ۲) $a>۰$

ابتدا عبارت داده‌شده را کمی ساده می‌کنیم:

$$y=ax(x+۱)+۱ \Rightarrow y=ax^۲+ax+۱$$

حال برای آن که عبارت درجهٔ دوم همواره مثبت باشد، باید دو شرط زیر برقرار باشد:

$$\begin{cases}\Delta<۰ \Rightarrow a^۲-۴a<۰ \Rightarrow a(a-۴)<۰ \Rightarrow ۰<a<۴\\ a>۰ \Rightarrow a>۰\end{cases}$$

اشتراک دو شرط فوق برابر $۰<a<۴$ می‌شود. اما صبر کنید در صورت سؤال نگفته عبارت حتماً باید درجهٔ دوم باشد. به عبارت دیگر اگر $a=۰$ باشد نیز عبارت $y=ax^۲+ax+۱$ برابر عدد مثبت یک خواهد شد. پس $a=۰$ نیز درست است:

$$y=ax^۲+ax+۱ \xrightarrow{a=۰} y=۰+۰+۱=۱$$

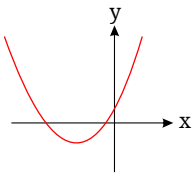
$$(۰<a<۴)\cup\{۰\}=۰\le a<۴$$

بنابراین مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:

که در بازهٔ فوق چهار عدد صحیح ۰، ۱، ۲، ۳ موجود است.

۱۲ ۱ ۲ ۳ ۴

سهمی می‌تواند از نواحی اول و دوم و سوم عبور کند.



$$\Delta>۰ \to b^۲-۴ac>۰ \to (a-۲)^۲-۴(a+۶)>۰ \to a^۲+۴-۴a-۴a-۲۴>۰$$

$$\to a^۲-۸a-۲۰>۰ \to (a-۱۰)(a+۲)>۰ \to a<-۲ \text{ یا } a>۱۰$$

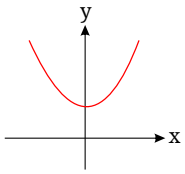
$$x^۲ \text{ ضریب } >۰ \to a+۶>۰ \to a>-۶$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها } <۰ \to -\underbrace{\frac{b}{a}}_{+}<۰ \to -b<۰ \to b>۰ \to a-۲>۰ \to a>۲$$

$$\text{ضرب ریشه‌ها } \ge ۰ \to \frac{c}{a}\ge ۰ \to \frac{۱}{a+۶}\ge ۰ \to a+۶>۰ \to a>-۶$$

از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به $a>۱۰$ می‌رسیم.

سهمی می‌تواند از نواحی اول و دوم عبور کند.



$$x^۲ \text{ ضریب } >۰ \to a+۶>۰ \to a>-۶$$

$$\Delta\le ۰ \xrightarrow[\text{ممکن است بر محور طول مماس باشد.}]{\text{مساوی به خاطر آن است که سهمی}} b^۲-۴ac\le ۰ \to a^۲-۸a-۲۰\le ۰ \to (a-۱۰)(a+۲)\le ۰ \to -۲\le a\le ۱۰$$

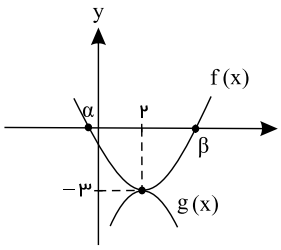
از اشتراک جواب‌های به‌دست آمده به $-۲\le a\le ۱۰$ می‌رسیم.

$$\begin{cases}a>۱۰\\ -۲\le a\le ۱۰\end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} a\ge -۲$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ خط $y=-۳$ محور تقارن مشترک هر دو سهمی را روی آنها قطع می‌کند پس $y=-۳$ از رأس هر دو سهمی گذشته و با توجه به اینکه محور تقارن سهمی‌ها مشترک است، پس رأس‌های هر دو سهمی بر هم منطبق بوده یعنی هر دو سهمی در رأس‌هایشان بر هم مماس هستند. با توجه به ضابطهٔ سهمی $g(x)=-x^۲+۴x-۷$ مختصات رأس آن برابر است با:

$$S_{g(x)} = S_{f(x)} \Rightarrow S_{g(x)} \left| \begin{matrix} -\frac{b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2 \\ -3 \end{matrix} \right. \Rightarrow S_{f(x)} = \left| \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \right.$$

با توجه به مسئله، شکل زیر را رسم می‌کنیم و طول پاره‌خطی که سهمی $f(x)$ روی محور طول‌ها جدا می‌کند، برابر تفاضل ریشه‌های سهمی است. از طرفی طول رأس سهمی برابر میانگین ریشه‌های سهمی است. داریم:



$$\begin{cases} \beta - \alpha = 5 \\ \frac{\alpha + \beta}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta - \alpha = 5 \\ \beta + \alpha = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = \frac{9}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

با در نظرگرفتن ضابطهٔ سهمی به‌صورت $f(x) = a(x + \frac{1}{2})(x - \frac{9}{2})$ و جایگذاری رأس سهمی در آن داریم:

$$-3 = a(2 + \frac{1}{2})(2 - \frac{9}{2}) \Rightarrow -3 = a \times \frac{5}{2} \times (-\frac{5}{2}) \Rightarrow a = \frac{12}{25}$$

۱۴ ۱ ۲ **۳** ۴ شیر A و B باهم استخری را در ۱۵ ساعت پر می‌کنند. یعنی در هر ساعت $\frac{1}{15}$ استخر را پر می‌کنند. پس بعد از ۶ ساعت که هردو شیر باز بوده‌اند $\frac{6}{15}$ استخر پر می‌شود و حجم آن باقی می‌ماند. شیر B در هر ساعت $\frac{1}{25} = \frac{9}{225} = \frac{\frac{9}{15}}{15}$ استخر را پر می‌کند. بنابراین داریم:

$$\frac{1}{25} + \frac{1}{x} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{15} - \frac{1}{25} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{5-3}{75} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{2}{75} \Rightarrow x = \frac{75}{2} \Rightarrow x = 37{,}5 \text{ ساعت}$$

۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

از آن‌جایی که $x = -1$ جواب معادله است در معادله صدق می‌کند؛ داریم:

$$\sqrt{x^2 + ax + 17} = ax - 2 \xrightarrow{x=-1} \sqrt{(-1)^2 + a(-1) + 17} = a(-1) - 2$$

$$\rightarrow \sqrt{18 - a} = -a - 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} 18 - a = a^2 + 4a + 4$$

$$\rightarrow a^2 + 5a - 14 = 0 \rightarrow (a+7)(a-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 7 = 0 \rightarrow a = -7 \rightarrow \sqrt{18 - (-7)} = -(-7) - 2 \checkmark \\ a - 2 = 0 \rightarrow a = 2 \rightarrow \sqrt{18 - 2} = -2 - 2 \times \end{cases}$$

$\rightarrow$ جواب معادله $a = -7$ است.

پاسخ‌نامه کلیدی

۱	۴	۵	۲	۹	۳	۱۳	۱
۲	۲	۶	۴	۱۰	۱	۱۴	۳
۳	۲	۷	۲	۱۱	۲	۱۵	۲
۴	۲	۸	۲	۱۲	۳		