

گرما Q_1 باعث ذوب یخ و گرما Q_2 باعث افزایش دمای آن تا 20°C می‌شود. بنابراین:

$$\text{یخ } 0^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_1} \text{آب } 0^\circ\text{C} \xrightarrow{Q_2} 20^\circ\text{C}$$

$$Q_{\text{کل}} = Q_1 + Q_2 = mL_f + mc\Delta\theta = 336000m + 4200 \times 20 \times m = 420000m$$

$$\frac{Q_1}{Q_{\text{کل}}} = \frac{mL_f}{mL_f + mc\Delta\theta} = \frac{336000m}{420000m} = 0.8$$

$$\text{درصد گرمایی که صرف ذوب شدن یخ شده} = \frac{Q_1}{Q_{\text{کل}}} \times 100 = 80\%$$

راه حل دیگر:

برای محاسبه گرمای داده شده از یکای کالری استفاده می‌کنیم. برای سهولت در محاسبه فرض می‌کنیم جرم یخ ۱ g است:

$$c_{\text{آب}} = 1 \text{ cal/g}^\circ\text{C}, \quad L_F = 80 \text{ cal/g}$$

$$Q_1 = mL_F = 1 \times 80 = 80 \text{ cal}$$

$$Q_2 = mc\Delta\theta = 1 \times 1 \times 20 = 20 \text{ cal}$$

کل گرمایی که برای این کار لازم است را به دست می‌آوریم:

$$Q = Q_1 + Q_2 = 80 + 20 = 100 \text{ cal}$$

حال درصد گرمایی که صرف ذوب شدن یخ شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد گرما} = \frac{Q_1}{Q} \times 100 = \frac{80}{100} \times 100 = 80\%$$

با استفاده از رابطه مقیاس دمای سلسیوس و فارنهایت و فرض سوال می‌توان نوشت:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow 122 = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow 90 = \frac{9}{5}\theta \Rightarrow \theta = 50^\circ\text{C}$$

این دما بر حسب کلوین برابر است با:

$$T = \theta + 273 = 50 + 273 = 323 \text{ K}$$

مخلوط دو گاز هیدروژن و هلیوم در مخزن وجود دارد بنابراین:

$$n_{H_2} + n_{He} = n_{\text{کل}}$$

$$n_{H_2} + n_{He} = \frac{PV}{RT} = \frac{2 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-2}}{8 \times (273 + 27)}$$

$$\Rightarrow n_{H_2} + n_{He} = 2/5 \text{ mol} \Rightarrow \frac{m_{H_2}}{M_{H_2}} + \frac{m_{He}}{M_{He}} = 2/5$$

$$\Rightarrow \frac{m_{H_2}}{2} + \frac{m_{He}}{4} = 2/5 \Rightarrow 2m_{H_2} + m_{He} = 10 \text{ g}$$

$$\text{طبق صورت سؤال: } \left. \begin{array}{l} m_{H_2} + m_{He} = 8 \text{ g} \\ 2m_{H_2} + m_{He} = 10 \text{ g} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_{H_2} = 2 \text{ g} \\ m_{He} = 6 \text{ g} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{m_{H_2}}{m_{He}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

درصد تغییر حجم بر اثر انبساط گرمایی برابر $100 \times \beta \Delta\theta$ است بنابراین:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \beta \Delta\theta \times 100$$

$$\beta = 3\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3} \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

درصد تغییر سطح بر اثر انبساط گرمایی را می‌توان از رابطه $100 \times 2\alpha \Delta\theta$ بدست آورد. بنابراین:

$$\text{درصد تغییرات سطح} = 2\alpha \Delta\theta \times 100$$

$$= 2 \times \frac{1}{3} \times 10^{-5} \times 60 \times 100 = 4 \times 10^{-2} = 0.04$$

چون پیستون جابه‌جا نمی‌شود، حجم گاز ثابت است.

اگر حجم مقدار معینی از گاز کامل ثابت باشد، فشار آن با دما رابطه مستقیم دارد.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_0 + \frac{m_1 g}{A}}{T_1} = \frac{P_0 + \frac{(m_1 + m_2) g}{A}}{T_2}$$

$$\Rightarrow \frac{14 \times 10^3 + \frac{36}{10^{-3}}}{273 + 7} = \frac{14 \times 10^3 + \frac{60}{10^{-3}}}{T_2} \Rightarrow \frac{120 \times 10^3}{280} = \frac{144 \times 10^3}{T_2} \Rightarrow T_2 = 336 \text{ K}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 336 - 280 = 56 \text{ K}$$

با اضافه کردن جیوه در شاخه A، سطح جیوه در شاخه چپ ثابت می‌ماند. بنابراین حجم گاز ثابت است.

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} \Rightarrow \frac{75}{273 + 27} = \frac{P_2}{273 + 27 + 30} \Rightarrow P_2 = 1/1 \times 75$$

چون سطح جیوه در شاخه سمت چپ ثابت باقی مانده است بنابراین افزایش فشار گاز همان ارتفاع اضافه شده به شاخه سمت راست است.

$$\Delta h = P_2 - P_1 = 1/1 \times 75 - 75 = 0/1 \times 75 = 7/5 \text{ cmHg}$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1/8 \times 10^5 \times 1/4}{273 + 7} = \frac{10^5 \times V_2}{273 + 27}$$

$$\Rightarrow V_2 = 2/7 \text{ cm}^3 \Rightarrow \Delta V = 2/7 - 1/4 = 1/3 \text{ cm}^3$$

گام اول: ابتدا حجم ثانویه گاز را در تغییر اول به دست می‌آوریم.

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{2}{273 + 47} = \frac{V_2}{273 + 47 + 40} \Rightarrow V_2 = 2/25 \text{ L}$$

گام دوم: برای تغییر دوم نیز رابطه بالا را می‌نویسیم اما این بار دما ثابت است:

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \Rightarrow 2 \times 10^5 \times \cancel{V_2} = P_3 \times 0/8 \cancel{V_2} \Rightarrow P_3 = 2/5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

توجه کنید: می‌توانستیم بدون محاسبه V_2 نیز بین حالت دوم و سوم رابطه را بنویسیم:

$$\frac{P_2 V_2}{T_2} = \frac{P_3 V_3}{T_3} \xrightarrow[T_2=T_3, P_2=P_1]{V_3=0/8 V_2} 2 \times 10^5 V_2 = P_3 \times 0/8 V_2$$

$$\Rightarrow P_3 = 2/5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

اگر فشار گاز ثابت باشد بنا به قانون گازهای کامل ($P V = nRT$) می‌توان نوشت:

$$P \Delta V = nR \Delta T$$

$$1/5 \times 10^5 \times 4 \times 10^{-3} = 3 \times 8 \times \Delta T \Rightarrow \Delta T = 25 \text{ K} \Rightarrow \Delta \theta = 25^\circ \text{C}$$

ابتدا تغییرات دمای آب را برحسب درجه سلسیوس حساب می‌کنیم (تغییرات دما برحسب سلسیوس و کلونین برابرند):

$$\Delta F = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow 9 = \frac{9}{5} \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = 5^\circ \text{C}$$

$$Q = mc\Delta\theta = 1 \times 4/2 \text{ (kJ/kg.K)} \times 5^\circ \text{C} = 21 \text{ kJ}$$

چون گرما فقط بین آلومینیوم و آب مبادله می‌شود بنابراین گرمای داده‌شده توسط آلومینیوم با گرمای گرفته شده توسط آب از نظر مقدار برابر است. در این صورت داریم:

$$(mc\Delta\theta)_{\text{آب}} = (mc|\Delta\theta|)_{\text{آلومینیوم}} \Rightarrow 4/5 \times 4200 \times 2 = m \times 900 \times 42$$

$$\Rightarrow m = 1 \text{ kg}$$

گرمای فقط بین فلز و آب مبادله می‌شود بنابراین از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$\theta_e = \frac{mc\theta + m'c'\theta'}{mc + m'c'}$$

$$\theta_e = \frac{420 \times 400 \times 14 - 0}{420 \times 400 + 800 \times 4200} = 4^\circ \text{C}$$

۹۰ درصد گرمایی که آب می‌دهد (یعنی $|Q|$ $\frac{90}{100}$) توسط یخ جذب می‌شود (Q') و آن را ذوب می‌کند:

$$\frac{90}{100} |Q| = Q' \Rightarrow \frac{90}{100} |(mc\Delta\theta)| = m' L_F \Rightarrow \frac{9}{10} |(0/8 \times 4/2 \times 50)| = m' \times 336$$

$$\Rightarrow m' = \frac{4 \times 4/2 \times 9}{336} = 0/45 \text{ kg} = 450 \text{ g}$$

دقت: برای ساده شدن محاسبات

$$c = 4200 \text{ J/kg.K} = 4/2 \text{ kJ/kg.K}$$

$$L_F = 336000 \text{ J/kg} = 336 \text{ kJ/kg}$$

مدت زمانی که لازم است تا یخ 10°C به یخ 0°C تبدیل شود را t_1 می‌نامیم و گرمای لازم برای اینکار برابر است با:

یخ صفر \rightarrow یخ 10°C -

$$Q = mc\Delta\theta = 0/2 \times 2100 \times 10 = 4200 \text{ J}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ s} \quad 210 \text{ J} \\ t_1 \quad 4200 \text{ J} \end{array} \Rightarrow t_1 = \frac{4200}{210} = 20 \text{ s} \Rightarrow 2 \text{ و } 1 \text{ گزینه‌های } 1 \text{ و } 2$$

مدت زمانی که لازم است تا یخ 0°C به آب 0°C تبدیل شود را t_2 می‌نامیم و اندازه آن را به این ترتیب بدست می‌آوریم:

آب صفر \rightarrow یخ صفر

$$Q = mL_F = 0/2 \times 336000 = 67200 \text{ J}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ s} \quad 210 \text{ J} \\ t_2 \quad 67200 \text{ J} \end{array} \Rightarrow t_2 = \frac{67200}{210} = 320 \text{ s}$$

$$\Rightarrow t = t_1 + t_2 = 20 + 320 = 340 \text{ s} \Rightarrow 3 \text{ گزینه } 3$$

بنابراین گزینه ۴ درست است. اما بیا باید قسمت سوم نمودار را هم بررسی کنیم.

مدت زمانی که لازم است تا آب 0°C به آب 10°C تبدیل شود را t_3 می‌نامیم و اندازه آن را به این ترتیب بدست می‌آوریم:

آب 10°C \rightarrow آب 0°C

$$Q = mc\Delta\theta = 0/2 \times 4200 \times 10 = 8400 \text{ J}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ s} \quad 210 \text{ J} \\ t_3 \quad 8400 \text{ J} \end{array} \Rightarrow t_3 = \frac{8400}{210} = 40 \text{ s}$$

از بین گزینه‌ها تنها گزینه ۴ این ویژگی را دارد و سه گزینه دیگر این زمان را به اشتباه ۲۰ ثانیه نشان می‌دهند.

دمای نهایی آب برحسب سلسیوس برابر است با:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow 50 = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow \theta = 10^{\circ}\text{C}$$

گرمای موردنظر، ابتدا یخ را کاملاً ذوب کرده و سپس دمای آب حاصل را از صفر به 10° می‌رساند.

$$Q = mL_f + mc\Delta\theta = 20 \times \overset{\text{J/g}}{\underset{\text{g}}{336}} + 20 \times 4/2 \times 10 = 7560 \text{ J}$$

رابطه تقریبی چگالی با دما بصورت $\rho_2 = \rho_1(1 - \beta\Delta T)$ است بنابراین:

$$\Delta T = \Delta\theta \Rightarrow \Delta T = 100 \text{ K}$$

$$\rho_2 = \rho_1(1 - \beta\Delta T) \Rightarrow \rho_2 - \rho_1 = -\rho_1\beta\Delta T$$

$$\Rightarrow \Delta\rho = -\frac{m}{V}\beta\Delta T = -\frac{44 \times 10^{-3}}{\frac{4}{3} \times 3 \times (10^{-2})^3} \times 3 \times 3 \times 10^{-5} \times 100$$

$$\Delta\rho = -99 \text{ kg/m}^3$$

بنابراین چگالی به ۹۹ کیلوگرم بر مترمکعب کاهش می‌یابد.

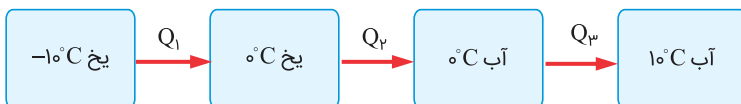
طول اولیه میله‌ها یکسان است بنابراین برای اینکه اختلاف طول میله‌ها به $0/3$ میلی‌متر برسد باید اختلاف تغییر طول آن‌ها برابر $0/3 \text{ mm}$ شود:

$$\Delta L_{Cu} - \Delta L_{Fe} = 0/3 \Rightarrow \alpha_1 L_1 \Delta\theta - \alpha_2 L_2 \Delta\theta = 0/3$$

$$\Rightarrow L_1 \Delta\theta (\alpha_1 - \alpha_2) = 0/3 \Rightarrow 500 \Delta\theta (1/8 \times 10^{-5} - 1/2 \times 10^{-5}) = 0/3$$

$$\Rightarrow 500 \Delta\theta \times 0/6 \times 10^{-5} = 0/3 \Rightarrow 3 \times 10^{-3} \Delta\theta = 0/3 \Rightarrow \Delta\theta = 100 \text{ }^\circ\text{C}$$

باتوجه به تبدیل حالت و تغییر دمای ایجاد شده می‌توان نوشت:



$$Q_t = Q_1 + Q_2 + Q_3 = (mc\Delta\theta)_{\text{یخ}} + mL_f + (mc\Delta\theta)_{\text{آب}}$$

$$\Rightarrow Q_t = 0/5 \times 2100 \times 10 + 0/5 \times 336000 + 0/5 \times 4200 \times 10$$

$$\Rightarrow Q_t = 199500 \text{ J} = 199/5 \text{ kJ}$$

ابتدا تغییرات دما برحسب درجه سلسیوس را حساب می‌کنیم:

$$\Delta F = 122 - (-58) = 180^\circ \text{F}$$

$$\Delta \theta = \Delta T = \frac{5}{9} \Delta F = \frac{5}{9} \times 180 = 100^\circ \text{C}$$

اکنون با استفاده از رابطه محاسبه تغییرات طول داریم:

$$\Delta l = l_1 \alpha \Delta T = 1158 \times 1/3 \times 10^{-5} \times 100 = 1/5 \text{ m}$$

از رابطه $P V = nRT$ به صورت نسبی استفاده می‌کنیم:
دما ثابت است *

$$\frac{P_1 V_1}{P_2 V_2} = \frac{nRT_1}{nRT_2} \Rightarrow \frac{10^5 \times (34 \times A)}{P_2 \times (40 \times A)} = 1 \Rightarrow P_2 = 8/5 \times 10^5 \text{ Pa}$$

$$P_2 = \rho g h_{\text{جیوه}} \Rightarrow 8/5 \times 10^5 = 13600 \times 10 \times h_{\text{جیوه}}$$

$$\Rightarrow h_{\text{جیوه}} = 0.625 \text{ m} = 62/5 \text{ cm}$$

با استفاده از رابطه محاسبه تغییر حجم ایجاد شده می‌توان نوشت:

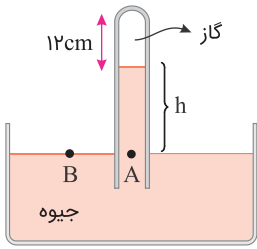
$$\Delta V = V_1 (3\alpha) \Delta T \Rightarrow \alpha = \frac{\Delta V}{3V_1 \Delta T} = \frac{8/1}{3 \times 120 \times 10^3} = \frac{27}{12} \times 10^{-5}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2/25 \times 10^{-5} \text{ 1/K}$$

برای محاسبه درصد تغییرات حجم می‌توان نوشت:

$$\frac{\Delta V}{V_1} \times 100 = \frac{V_1 (3\alpha) \Delta T}{V_1} \times 100 = 3 \times 3 \times 10^{-5} \times 200 = \%1/8$$

ابتدا ارتفاع جیوه درون لوله قبل از تغییر آن را به دست می‌آوریم:

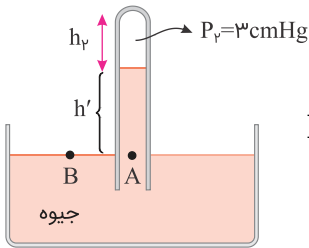


$$P_A = P_B \Rightarrow h + P_{\text{گاز}} = P_0 \Rightarrow h + 2 = 76 \Rightarrow h = 74 \text{ cmHg}$$

مشخصات گاز قبل از فروبردن لوله در جیوه برابر است با:

$$P_1 = 2 \text{ cmHg} , V_1 = 12A , T_1$$

با فروبردن لوله در ظرف، فشار گاز درون لوله به 3 cmHg رسیده است. در این حالت ارتفاع جیوه درون لوله برابر است با:



$$P_A = P_B \Rightarrow h' + 3 = P_0 \Rightarrow h' + 3 = 76 \Rightarrow h' = 73 \text{ cmHg}$$

مشخصات گاز در این حالت را می‌نویسیم:

$$P_2 = 3 \text{ cmHg} , V_2 = h_2 \times A , T_2 = T_1$$

حالا از تساوی $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ استفاده می‌کنیم:

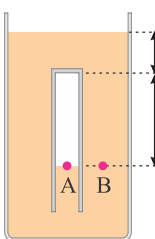
$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{2 \times 12A}{T_1} = \frac{3 \times h_2 A}{T_2} \Rightarrow h_2 = 8 \text{ cm}$$

در حالت اول طول لوله بیرون از جیوه برابر $L_1 = 12 + 74 = 86 \text{ cm}$ و در حالت دوم برابر $L_2 = 8 + 73 = 81 \text{ cm}$ است. پس لوله 5 cm درون جیوه فرو برده شده است.

چون α آلومینیم بیشتر از α فولاد است و طول اولیه آنها یکسان است با افزایش دمای یکسان دو میله، طول میله آلومینیمی بیشتر از میله فولادی افزایش می‌یابد. اختلاف تغییر طول دو میله را برابر $2/3 \text{ mm}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{aligned} \Delta L_{Al} - \Delta L_{Fe} &= L_{Al} \alpha_{Al} \Delta \theta_{Al} - L_{Fe} \alpha_{Fe} \Delta \theta_{Fe} \\ &= L_1 (\alpha_{Al} - \alpha_{Fe}) \Delta \theta = 4 \times 10^3 (\text{mm}) (11/5 \times 10^{-6}) \times \Delta \theta \\ &\Rightarrow 2/3 = 4 \times 10^3 (11/5 \times 10^{-6}) \times \Delta \theta \Rightarrow \Delta \theta = 50^\circ \text{C} \end{aligned}$$

گام اول: فشار دو نقطه هم‌تراز A و B یکسان است. پس می‌توانیم با نوشتن معادله فشار این دو نقطه، فشار گاز را در حالت اول محاسبه کنیم:



$$P_A = P_B \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_{\text{جیوه}} + P_{\text{هوا}}$$

$$\Rightarrow P_{\text{گاز}} = 17/5 + 75 = 92/5 \text{ cmHg}$$

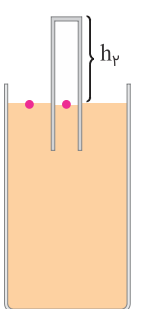
در این حالت حجم گاز $V_1 = A \times 12$ است.

گام دوم: در حالتی که سطح جیوه داخل لوله و ظرف هم‌تراز است فشار گاز درون لوله برابر فشار هوا است:

$$P_2 = 75 \text{ cmHg}$$

و در این حالت حجم گاز $V_2 = Ah_2$ است.

گام سوم: با توجه به ثابت بودن دما از رابطه $P_1 V_1 = P_2 V_2$ ارتفاعی از لوله که از جیوه بیرون آمده را به دست می‌آوریم:



$$P_1 V_1 = P_2 V_2 \Rightarrow 92/5 \times A \times 12 = 75 \times A \times h_2 \Rightarrow h_2 = 14/8 \text{ cm}$$

درصد تغییر حجم بر اثر انبساط را می‌توانیم از رابطه $\Delta V/V = \alpha \Delta \theta \times 100$ درصد تغییرات حجم به دست آوریم:

$$\text{درصد تغییرات حجم} = \alpha \Delta \theta \times 100 = 3 \times 2 \times 10^{-5} \times 250 \times 100 = 1/5 \%$$

جرم آب را m در نظر می‌گیریم. چون در نهایت 520 گرم آب 0°C داریم، جرم یخ ذوب‌شده $m - 520$ خواهد بود. گرمایی که آب از دست می‌دهد، توسط $(520 - m)$ گرم یخ جذب‌شده است تا آن را ذوب کند؛ بنابراین:

$$Q_{\text{آب}} + Q_{\text{یخ ذوب‌شده}} = 0$$

$$\Rightarrow mc_{\text{آب}}(\theta_e - \theta_1) + (520 - m)L_F = 0$$

$$\Rightarrow m \times \frac{1}{4200} \times (0 - 50) + (520 - m) \times \frac{80}{1000} = 0$$

$$-50m + 80(520 - m) = 0 \Rightarrow -5m + 4160 - 8m = 0$$

$$\Rightarrow 13m = 4160 \Rightarrow m = 320 \text{ g}$$

$$A_2 = A_1(1 + 2\alpha\Delta\theta)$$

$$A_2 = 50(1 + 2 \times 2/3 \times 10^{-5} \times 80) = 50 + 0/184 = 50/184 \text{ cm}^2$$

فشار اولیه P_1 هوای محبوس در لوله برابر است با:

$$P_0 = P_{\text{گاز}} + P_{\text{ستون جیوه}} \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 - P_{\text{ستون جیوه}} = 75 - 72 = 3 \text{ cmHg}$$

از آنجا که ارتفاع لوله و ارتفاع ستون جیوه ثابت باقی می‌ماند. بنابراین حجم گاز ثابت است. پس داریم:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{P_2}{3} = \frac{273 + 47}{273 + 27} = \frac{16}{15} \Rightarrow P_2 = 3/2 \text{ cmHg}$$

$$\Delta P = 3/2 - 3 = 0/2 \text{ cmHg} = 2 \text{ mmHg}$$

فشار هوا ۲ میلی‌متر جیوه افزایش یافته است.

در این‌گونه سؤالات باید مشخص کنیم برای یخ چه اتفاقی می‌افتد. برای این منظور ابتدا گرمای داده شده به یخ را حساب می‌کنیم (Q) سپس گرمای لازم برای افزایش دمای یخ به 0°C (Q_1) و گرمای لازم برای ذوب یخ (Q_2) را حساب می‌کنیم:

$$\text{گرمای داده شده به یخ} : Q = P \times \Delta t = 1/05 \times 12 = 12/6 \text{ kJ}$$

$$\text{گرمای لازم برای رسیدن یخ به صفر درجه} : Q_1 = mc\Delta T = 0/2 \times 2/1 \times 10 = 4/2 \text{ kJ}$$

$$\text{گرمای لازم برای ذوب یخ} : Q_2 = mL_F = 0/2 \times 336 = 67/2 \text{ kJ}$$

$$\Rightarrow Q_1 < Q < Q_1 + Q_2$$

بنابراین یخ به صفر درجه می‌رسد ولی تمام یخ ذوب نمی‌شود. حالت نهایی آب و یخ صفر درجه است.