پاسخنامه تشریحی

۱ (۴) (۳) (۲) (۱) دو حالت وجود دارد.

الف) مخرج عبارتی درجه اول باشد یعنی $m=۱$ که داریم:

$$f(x)=\frac{۱-x}{۳x+۱}\Rightarrow ۳x+۱=۰\Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{۱}{۳}\right\}$$

ب) مخرج ریشه مضاعف داشته باشد یعنی:

$$(m-۱)x^۲+۳x+۱=۰\Rightarrow \Delta=۰\Rightarrow ۹-۴(m-۱)=۰\Rightarrow ۹-۴m+۴=۰\Rightarrow m=\frac{۱۳}{۴}$$

بنابراین برای m دو مقدار ۱ و $\frac{۱۳}{۴}$ وجود دارد.

۲ (۴) (۳) (۲) (۱) ابتدا عبارت زیر رادیکال را به فرم مربع کامل تبدیل می‌کنیم و سپس با مشخص کردن محدودهٔ عبارت زیر رادیکال، برد تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$x^۲-۲x+۵=\underbrace{x^۲-۲x+۱}_{(x-۱)^۲}+۴=(x-۱)^۲+۴$$

$$(x-۱)^۲\geq ۰\xrightarrow{+۴}(x-۱)^۲+۴\geq ۴\Rightarrow\sqrt{(x-۱)^۲+۴}\geq ۲$$

$$\xrightarrow{+۱}\sqrt{(x-۱)^۲+۴}+۱\geq ۳\Rightarrow f(x)\geq ۳\Rightarrow R_f=[۳,+\infty)$$

بنابراین برد تابع بازهٔ $[۳,+\infty)$ می‌باشد و اعداد طبیعی ۱ و ۲ را شامل نمی‌شود.

۳ (۴) (۳) (۲) (۱) باتوجه به وجود $\frac{۱}{x}$ در ضابطهٔ تابع f، پس $x=۰$ در دامنهٔ تابع f قرار ندارد یعنی یکی از دو مقدار a و b برابر صفر است. (مثلاً $a=۰$). حال چون فقط یک عدد دیگر (b) در دامنهٔ f وجود ندارد، دو حالت به‌وجود می‌آید.

حالت ۱- مخرج ریشهٔ مضاعف دارد و آن ریشهٔ مضاعف هم همان b است.

$$x^۲+۶x+k=۰\Rightarrow\Delta=۰\Rightarrow ۳۶-۴k=۰\Rightarrow k=۹\Rightarrow x^۲+۶x+۹=۰\Rightarrow(x+۳)^۲=۰$$

$$\Rightarrow x+۳=۰\Rightarrow x=-۳\Rightarrow b=-۳\Rightarrow |k+a+b|=|۹+۰-۳|=۶$$

حالت ۲- مخرج دو ریشه دارد که یکی از آن‌ها $x=۰$ است.

$$x^۲+۶x+k=۰\xrightarrow{x=۰}k=۰\Rightarrow x^۲+۶x=۰\Rightarrow x(x+۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۶\Rightarrow b=-۶\end{cases}$$

$$|k+a+b|=|۰+۰-۶|=۶$$

۴ (۴) (۳) (۲) (۱) ابتدا ضابطهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم، برای این کار معادلهٔ خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(۲,۰)$ و همچنین خط گذرنده از نقاط $(۰,۴)$ و $(-۴,۰)$ را به‌دست می‌آوریم.

$$(۰,۴),(۲,۰)\Rightarrow\frac{y-۴}{x}=\frac{۴}{-۲}=-۲\to y=-۲x+۴$$

$$(۰,۴),(-۴,۰)\Rightarrow\frac{y-۴}{x}=\frac{۴}{۴}=۱\to y=x+۴$$

$$f(x)=\begin{cases}x+۴ & x<۰\\-۲x+۴ & x\geq ۰\end{cases}\quad,\quad g(x)=\sqrt{۲-|f(x)|}\Rightarrow ۲-|f(x)|\geq ۰\Rightarrow|f(x)|\leq ۲$$

$$\Rightarrow -۲\leq f(x)\leq ۲$$

$$x<۰\Rightarrow -۲\leq x+۴\leq ۲\Rightarrow -۲-۴\leq x\leq ۲-۴\Rightarrow -۶\leq x\leq -۲\xrightarrow{x<۰}-۶\leq x\leq -۲\quad(۱)$$

$$x\geq ۰\Rightarrow -۲\leq -۲x+۴\leq ۲\Rightarrow -۶\leq -۲x\leq -۲\xrightarrow{\div(-۲)}۳\geq x\geq ۱\xrightarrow{x\geq ۰}۱\leq x\leq ۳\quad(۲)$$

جواب نهایی : $(۱)\cup(۲)\Rightarrow[-۶,-۲]\cup[۱,۳]$

۵ (۴) (۳) (۲) (۱)

ابتدا دامنهٔ تعریف تابع را به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{[x]}{\sqrt{x-x^۲}}\to x-x^۲>۰\to x^۲-x<۰\to x(x-۱)<۰\to ۰<x<۱$$

$$۰<x<۱\to[x]=۰\to f(x)=\frac{۰}{\sqrt{x-x^۲}}\to f(x)=۰$$

پس برد تابع $f(x)$ شامل یک عدد صحیح است.

۶ (۴) (۳) (۲) (۱)

$$f(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}\Rightarrow ۱-x\geq ۰\Rightarrow x\leq ۱\Rightarrow D_f=(-\infty,۱]$$

گزینهٔ ۱) $g(x)=\sqrt{-(۱-x)^{۲}} \Rightarrow -(۱-x)^{۲} \ge ۰ \Rightarrow (۱-x)^{۲} \le ۰ \Rightarrow (۱-x)^{۲}=۰$

$\Rightarrow ۱-x=۰ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow D_g=\{۱\} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ f و g مساوی نیستند.

گزینهٔ ۲) $g(x)=\sqrt{(۱-x)^{۳}} \Rightarrow (۱-x)^{۳} \ge ۰ \Rightarrow ۱-x \ge ۰ \Rightarrow x \le ۱ \Rightarrow D_g=(-\infty,۱]=D_f$

$g(x)=\sqrt{(۱-x)^{۲}(۱-x)}=|۱-x|\sqrt{۱-x} \xrightarrow{x\le ۱} g(x)=(۱-x)\sqrt{۱-x} \neq f(x)$

$\Rightarrow$ f و g برابر نیستند.

گزینهٔ ۳) $g(x)=\sqrt{(x-۱)^{۳}} \Rightarrow (x-۱)^{۳} \ge ۰ \Rightarrow x-۱ \ge ۰ \Rightarrow x \ge ۱ \Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

$\Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ f و g برابر نیستند.

گزینهٔ ۴) $g(x)=-\sqrt{(۱-x)^{۳}} \Rightarrow D_g=D_f=(-\infty,۱]$

$g(x)=-\sqrt{(۱-x)^{۲}(۱-x)}=-|۱-x|\sqrt{۱-x} \xrightarrow{x\le ۱} g(x)=-(۱-x)\sqrt{۱-x}$

$\Rightarrow g(x)=(x-۱)\sqrt{۱-x}=f(x) \Rightarrow$ f و g برابرند.

۷) ۱ ۲ **۳** ۴

دو تابع در صورتی مساویند که اولاً دامنه‌هایشان برابر باشند و ثانیاً به ازای دامنه‌های برابر، ضابطه‌ها نیز مساوی شوند.

الف) $\begin{cases} D_f : x<-۱ \cup x \ge ۱ \\ D_g : \begin{cases} x-۱ \ge ۰ \\ x+۱>۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} x \ge ۱ \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g$

ب) $\begin{cases} D_f : ۱-x^{۲} \ge ۰ \quad \Rightarrow -۱ \le x \le ۱ \\ D_g : \begin{cases} ۱-x \ge ۰ \\ ۱+x \ge ۰ \end{cases} \xrightarrow{\cap} -۱ \le x \le ۱ \end{cases} \Rightarrow \quad D_f=D_g$

$f(x)=\sqrt{(۱+x)(۱-x)}=\sqrt{(۱+x)}\sqrt{(۱-x)}=g(x) \Rightarrow f(x)=g(x)$

ج) $\begin{cases} D_f : (۱-x)^{۳} \ge ۰ \Rightarrow x \le ۱ \\ D_g : ۱-x \ge ۰ \Rightarrow x \le ۱ \end{cases} \Rightarrow D_f=D_g$

$f(x)=-\sqrt{(۱-x)^{۲}(۱-x)}=-|۱-x|\sqrt{۱-x}$

$x \le ۱ \Rightarrow f(x)=-(۱-x)\sqrt{۱-x}=(x-۱)\sqrt{۱-x}=g(x) \Rightarrow f=g$

د) $\begin{cases} D_f : x \ge ۰ \\ D_g : x \ge ۰ \ , \ x \neq ۱ \end{cases} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow f \neq g$

۸) ۱ ۲ **۳** ۴ جلوی لگاریتم باید مثبت باشد پس داریم:

$??^{۲}?۳?? > ۰ \Rightarrow x(x-۳)>۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} ??<۰$ یا $x>۳ \ (I)$

عبارت زیر رادیکال باید بزرگ‌ترمساوی صفر باشد.

$۱-\log(x^{۲}-۳x) \ge ۰ \rightarrow \log(x^{۲}-۳x) \le ۱ \rightarrow \log(x^{۲}-۳x) \le \log ۱۰$

$\rightarrow x^{۲}-۳x \le ۱۰ \rightarrow x^{۲}-۳x-۱۰ \le ۰ \rightarrow (x-۵)(x+۲) \le ۰ \xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۲ \le x \le ۵ \quad (II)$

از اشتراک I , II به نتیجه‌ی $-۲ \le x < ۰$ یا $۳ < x \le ۵$ می‌رسیم. یعنی: $x \in [-۲,۰) \cup (۳,۵]$

۹) ۱ ۲ **۳** ۴

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-۲)(x-۳)}{x-۲}=x-۳ & , \quad x \neq ۲ \\ b-۳ & \quad\ \ x=۲ \end{cases}$

$x \neq ۲ : f(x)=g(x) \Rightarrow x-۳=x+a \Rightarrow a=-۳$

$x = ۲ : f(۲) = g(۲) \Rightarrow b - ۳ = ۲ - ۳ \Rightarrow b = ۲$

$\Rightarrow a \cdot b = ۲ \times (-۳) = -۶$

۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴

$(b, a+۲), (b, a^۲) \in f \Rightarrow a^۲ = a + ۲ \Rightarrow a^۲ - a - ۲ = ۰$

$\Rightarrow (a-۲)(a+۱) = ۰ \Rightarrow a = ۲ \,,\, a = -۱$

$(۱, a), (۱, b^۲ - ۲) \in f \Rightarrow b^۲ - ۲ = a$

$a = ۲ : b^۲ - ۲ = ۲ \Rightarrow b^۲ = ۴ \Rightarrow b = \pm ۲ \ \Rightarrow ab = ۲(\pm ۲) = ۴$

$a = -۱ : b^۲ - ۲ = -۱ \Rightarrow b^۲ = ۱ \Rightarrow b = ۱ \Rightarrow ab = (-۱)(۱) = -۱$

۱۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$\sqrt{x} \Rightarrow x \geq ۰ (۱)$

$۴ + ۳x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ \leq ۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۱) \leq ۰ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۴ \quad (۲)$

$(۱) \cap (۲) \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۴ \Rightarrow D_f = [۰, ۴] \quad (۱)$

بازهٔ $[a, b]$ هر بازه‌ای زیرمجموعهٔ دامنه می‌تواند باشد، ولی $b - a$ زمانی بیشترین مقدار است که این بازه همان دامنهٔ تابع باشد. پس:

$a = ۰ \,,\ b = ۴ \Rightarrow b - a = ۴$

۱۲ ۱ ۲ **۳** ۴

زیر رادیکال با فرجه زوج باید بزرگ‌تر مساوی صفر باشد. $\Rightarrow ۱۶ - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow x^۲ \leq ۱۶ \Rightarrow -۴ \leq x \leqslant ۴$

در ضمن مخرج نیز نباید صفر شود. $\Rightarrow [x] - ۴ = ۰ \Rightarrow [x] = ۴ \Rightarrow ۴ \leq x < ۵$ باید از دامنه حذف شوند.

$D_f = -۴ \leq x < ۴$ یا $x \in [-۴, ۴)$

۱۳ **۱** ۲ ۳ ۴ برای این‌که $g(x)$ یک تابع باشد باید خروجی هر دو ضابطه به ازای $x = ۱$ و $x = -۱$ یکسان شود.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-۱}{x^۲+۳} & x \geq ۱ \text{ یا } x \leq -۱ \\ \dfrac{x^۲ - ۲ax + b}{x - ۳} & -۱ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = ۱ \Rightarrow \dfrac{۱-۱}{۴} = \dfrac{۱ - ۲a + b}{-۲} \Rightarrow ۱ - ۲a + b = ۰ \Rightarrow ۲a - b = ۱ \\ x = -۱ \Rightarrow \dfrac{-۲}{۴} = \dfrac{۱ + ۲a + b}{-۴} \Rightarrow ۲a + b + ۱ = ۲ \Rightarrow ۲a + b = ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow a = \dfrac{۱}{۲} \Rightarrow, b = ۰$$

پس $۲a + b = ۱$ است.

۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴**

در توابع چند ضابطه‌ای برای تابع بودن نباید دامنه‌ی مشترکی بین ضابطه‌ها وجود داشته باشد در صورت وجود، باید به ازای دامنه‌های مشترک ضابطه‌ها نیز با هم برابر باشند.

$$\begin{array}{l} f(۱) = ۱ + m \\ f(۱) = ۲m + ۲ \end{array} \Rightarrow \text{شرط تابع بودن } ۱ + m = ۲m + ۲ \Rightarrow m = -۱$$

$\Rightarrow f(-۱) = (-۱)^۲ + (-۱)(-۱) = ۱ + ۱ = ۲$

۱۵ ۱ **۲** ۳ ۴

شرط تابع بودن در زوج مرتب این است که مولفه‌ی اول یکسان نداشته باشد و در صورت یکسان بودن مولفه‌ی اول، باید مولفه‌ی دوم هم برابر باشد.

$(۲, ۱)(۲, m^۲) \quad m^۲ = ۱ \rightarrow m = \pm ۱$

$m = ۱ \rightarrow \{(۲, ۱), (۵, ۳), (۲, ۱), (۱, ۴), (۱, ۳)\}$ تابع نیست

$m = -۱ \rightarrow \{(۲, ۱), (۵, ۳), (۲, ۱), (۱, ۴), (-۱, ۳)\}$ تابع است