پاسخنامه تشریحی

۱ **۴** ۳ ۲ ۱ ابتدا دامنهٔ تابع $y=f(x)$ را می‌یابیم:

$$-۱\leq x\leq ۳\rightarrow -۲\leq ۲x\leq ۶\rightarrow -۳\leq ۲x-۱\leq ۵$$

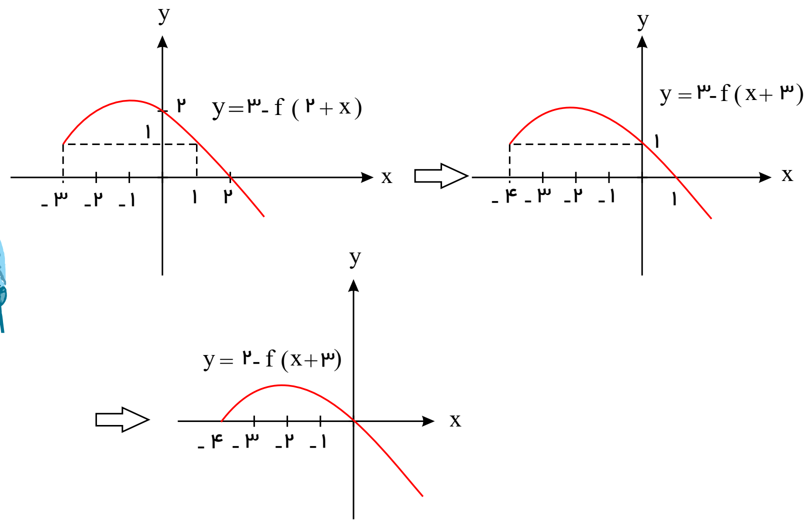
حال به کمک دامنهٔ تابع $y=f(x)$ به دامنهٔ $h(x)=f(۳x+۲)$ می‌رسیم.

$$-۳\leq ۳x+۲\leq ۵\rightarrow -۵\leq ۳x\leq ۳\rightarrow -\frac{۵}{۳}\leq x\leq ۱$$

۲ ۴ ۳ **۲** ۱

$$y=۳-f(۲-x)\xrightarrow[\text{قرینه نسبت به } y\text{ها}]{x\to -x} y=۳-f(۲+x)\xrightarrow[\text{۱ واحد انتقال به چپ}]{x\to x+۱} y=۳-f(۲+x+۱)$$

$$\Rightarrow y=۳-f(x+۳)\xrightarrow{\text{یک واحد انتقال به پایین}} y=۲-f(x+۳)$$



۳ **۴** ۳ ۲ ۱ با جمع کردن دو تابع $f+g$ و $f-g$ داریم:

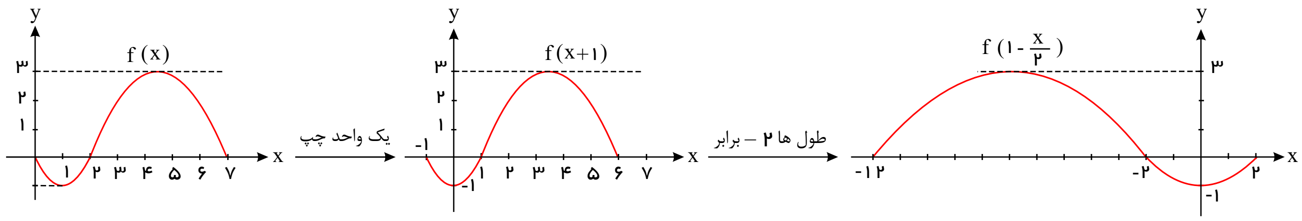
$$(f+g)+(f-g)=۲f=\{(۳,۸),(۴,۸),(۵,۰)\}$$

پس $f=\{(۳,۴),(۴,۴),(۵,۰)\}$ پس این طور به نظر می‌رسد که:

$$\frac{۱}{f}=\{(۳,\frac{۱}{۴}),(۴,\frac{۱}{۴})\}$$

یعنی دامنهٔ آن شامل دو عدد است ولی با دقت بیش‌تر می‌توان فهمید که چون دامنه‌های $f+g$ و $f-g$ اشتراک دامنه‌های f و g هستند، دامنهٔ f شامل اعداد دیگری هم می‌تواند باشد که با دامنهٔ g مشترک نباشند. پس $\frac{۱}{f}$ هم می‌تواند شامل زوج‌های بیش‌تری باشد. به‌طور کلی می‌توان گفت چون دامنهٔ f مشخص نیست، پس دامنهٔ $\frac{۱}{f}$ مشخص نیست.

۴ ۴ ۳ ۲ **۱** نمودار $f(x+۲)$ را دو واحد به راست منتقل می‌کنیم تا نمودار $f(x)$ حاصل شود.



برای تعیین دامنهٔ $\sqrt{xf(۱-\frac{x}{۲})}$ باید نامعادلهٔ زیر را حل کنیم.

$$xf(۱-\frac{x}{۲})\geq ۰$$

x	$-\infty$		-۱۲		-۲		$\circ$		۲		$+\infty$
x				$-$		$-$	$\circ$	$+$			
$f(۱-\frac{x}{۲})$			$\circ$	$+$	$\circ$	$-$		$-$	$\circ$		
$xf(۱-\frac{x}{۲})$			$\circ$	$-$	$\circ$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$		

$$\Longrightarrow D_f=[-۲,\circ]\cup\{-۱۲,۲\}$$

۵ ۴ ۳ **۲** ۱

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x+۱]{\text{۱ واحد انتقال به چپ}} f(x+۱)\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور } y \text{ ها}} f(-x+۱)$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x \text{ ها}} -f(-x+۱)\xrightarrow{\text{انقباض عمودی با ضریب } \frac{۱}{۴}} y=-\frac{۱}{۴}f(-x+۱)$$

۶ ۴ **۳** ۲ ۱ برای محاسبهٔ پارامتر a و b ابتدا باید مراحل تعیین دامنهٔ تابع f را طی نماییم:

$\text{زیر رادیکال} > \circ \to ۲x^۲-۶x+a>\circ$

عبارت درجه دو باید دو ریشه داشته باشد که یکی از آن‌ها $x=۱$ خواهد بود. زیرا بر اساس دامنهٔ مطرح شده در متن سوال جدول تعیین علامت به صورت زیر می‌باشد:

x		۱		b	
$۲x^۲-۶x+a$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$

$$۲x^۲-۶x+a\overset{x=۱}{=\!=\!=}\circ\to ۲-۶+a=\circ\to a=۴$$

$$۲x^۲-۶x+۴=\circ\to ۲(x^۲-۳x+۲)=\circ\to ۲(x-۱)(x-۲)=\circ\begin{cases}x=۱\\x=۲\end{cases}$$

پس ریشهٔ دوم این عبارت درجه دو $x=۲$ می‌باشد که همان پارامتر b است.

$$\begin{cases}a=۴\\b=۲\end{cases}\Rightarrow a\times b=۴\times ۲=۸$$

۷ ۴ ۳ ۲ **۱**

با توجه به نمودار f و g داریم: $D_f=(-۳,۳)\ ,\ D_g=[-۱,۱]$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=\circ\}\ ,\ D_f\cap D_g=[-۱,۱]$$

$$g(x)=\circ\Rightarrow -۱\le x\le ۱\ ,\ x\ne\circ\Rightarrow D_{\frac{f}{g}}=[-۱,۱]-([-۱,۱]-\{\circ\})=\{\circ\}$$

دامنهٔ تابع $\frac{f}{g}$ فقط شامل عدد صحیح $x=\circ$ است.

۸ ۴ **۳** ۲ ۱ ضابطهٔ تابع همانی $y=x$ است، در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\frac{۳x^۲+x}{(a-۱)x^۲+bx+c}=x\Rightarrow ۳x^۲+x=(a-۱)x^۳+bx^۲+cx$$

اگر دو چندجمله‌ای بخواهند با یکدیگر برابر باشند، باید تک تک ضرایب متغیرهای هم‌توان با هم برابر باشند. یعنی:

$$\left.\begin{matrix}(a-۱)=\circ\Rightarrow a=۱\\ b=۳\ ,c=۱\end{matrix}\right\}\Rightarrow a+b+c=۵$$

۹ **۴** ۳ ۲ ۱ تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ نشان می‌دهند.

$$f(۳)=f(-۳)+۴\to ۳a+b=-۳a+b+۴\to ۶a=۴\to a=\frac{۲}{۳}$$

$$f(۲)=۱\to ۲a+b=۱\xrightarrow{a=\frac{۲}{۳}}\frac{۴}{۳}+b=۱\to b=\frac{-۱}{۳}$$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳}$ است که اگر در ضابطه به جای x عدد صفر قرار دهیم مقدار $y=\frac{-۱}{۳}$ حاصل شود.

۱۰ ۴ **۳** ۲ ۱

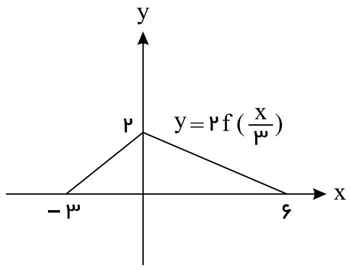
$$y=\sqrt{۱-۲x}\xrightarrow{\text{یک واحد به چپ}}y_۱=\sqrt{۱-۲(x+۱)}\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}}y_۲=\sqrt{-۲x-۱}+۱$$

$$\begin{cases}y_۲=\sqrt{-۲x-۱}+۱\\y=x+۹\end{cases}\xrightarrow{\text{تلاقی}}\sqrt{-۲x-۱}+۱=x+۹\longrightarrow\sqrt{-۲x-۱}=x+۸$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}-۲x-۱=x^۲+۶۴+۱۶x\longrightarrow x^۲+۱۸x+۶۵=\circ\longrightarrow(x+۵)(x+۱۳)=\circ$$

$$\begin{cases} x=-۱۳ \ (\text{در معادله صدق نمی‌کند.}) \ \text{غ‌ق} \\ x=-۵ \xrightarrow{y=x+۹} y=۴ \to A\left| \begin{matrix} -۵:\alpha \\ ۴\ :\beta \end{matrix} \right. \to \alpha+\beta=-۱ \end{cases}$$

۱۱ ۱ ۲ ۳ **۴** برای رسم نمودار تابع $y=۲f(\frac{x}{۳})$، مقادیر تابع $f(x)$ را در راستای محور y ها ۲ برابر و در راستای محور x ها ۳ برابر می‌کنیم، بنابراین:



$$\to S=\frac{۲\times ۹}{۲}=۹$$

۱۲ ۱ **۲** ۳ ۴ در چنین مواردی ابتدا دامنهٔ تابع مورد نظر را می‌یابیم.

تابع $g(x)=\sqrt{۱+f(x)}$ وقتی معین می‌شود که:

$$۱+f(x)\geq ۰ \to f(x)\geq -۱ \xrightarrow[\text{که نمودار زیر } y=-۱ \text{ نباشد}]{\text{در نمودار } f \text{ دنبال فاصله‌ای می‌گردیم}} ۰\leq x\leq ۵$$

$$\to D_g=[۰,۵]$$

حالا باید ببینیم در این فاصله، حدود $f(x)$ و در نتیجه حدود $۱+f(x)$ چگونه است. در نهایت با جذر گرفتن از محدودهٔ به دست آمده برد g به دست می‌آید:

$$۰\leq x\leq ۵ \quad : -۱\leq f(x)\leq ۶ \xrightarrow{+۱} ۰\leq ۱+f(x)\leq ۷ \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} ۰\leq \sqrt{۱+f(x)}\leq \sqrt{۷} \Rightarrow R_g=\left[۰,\sqrt{۷}\right]$$

۱۳ ۱ ۲ ۳ ۴ با توجه به اتحاد $(x+\frac{۱}{x})^۳=x^۳+\frac{۱}{x^۳}+۳(x+\frac{۱}{x})$، حاصل $x^۳+\frac{۱}{x^۳}$ برابر $(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})$ بوده و داریم:

$$f(x+\frac{۱}{x})=x^۳+\frac{۱}{x^۳}-۲=(x+\frac{۱}{x})^۳-۳(x+\frac{۱}{x})-۲$$

$$\xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t} f(t)=t^۳-۳t-۲ \xrightarrow{t=-۲} f(-۲)=-۸+۶-۲=-۴$$

۱۴ ۱ ۲ ۳ **۴** ابتدا باید شرط تابع بودن f را بررسی کنیم. برای این منظور مقدار تابع را به‌ازای دامنهٔ مشترک (که در این‌جا $x=-۱$ است) در دو ضابطه برابر قرار می‌دهیم:

$$(-۱)^۲+۲b(-۱)=b^۲+۲(-۱)\to ۱-۲b=b^۲-۲\to b^۲+۲b-۳=۰\to b=۱, b=-۳$$

می‌بینیم که با توجه به دو مقدار مختلف برای b، دو ضابطه هم به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲x & ;x\geq -۱ \\ ۱+۲x & ;x\leq -۱ \end{cases}$ برای $b=۱$ یا $f(x)=\begin{cases} x^۲-۶x & ;x\geq -۱ \\ ۹+۲x & ;x\leq -۱ \end{cases}$ برای $b=-۳$ موجود بوده و لذا برای $f(-۲)$ نیز دو مقدار متفاوت خواهیم داشت:

$$f(-۲)=۱+۲(-۲)=-۳ \quad \text{یا} \quad f(-۲)=۹+۲(-۲)=۵$$

۱۵ **۱** ۲ ۳ ۴ می‌بینیم که در ضابطهٔ تابع، $f(-۱)$ به عنوان یک مجهول ظاهر شده و برای معلوم شدن آن کافی است ابتدا یک بار در ضابطهٔ تابع $x=-۱$ را قرار دهیم:

$$f(-۱)=۳f(-۱)+۲(-۱)^۳\to f(-۱)=۳f(-۱)-۲\to ۲f(-۱)=۲\to f(-۱)=۱$$

در نتیجه ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=۳+۲x^۳$ است.

پس: $f(-۲)=۳+۲(-۲)^۳=۳+۲(-۸)=۳-۱۶=-۱۳$