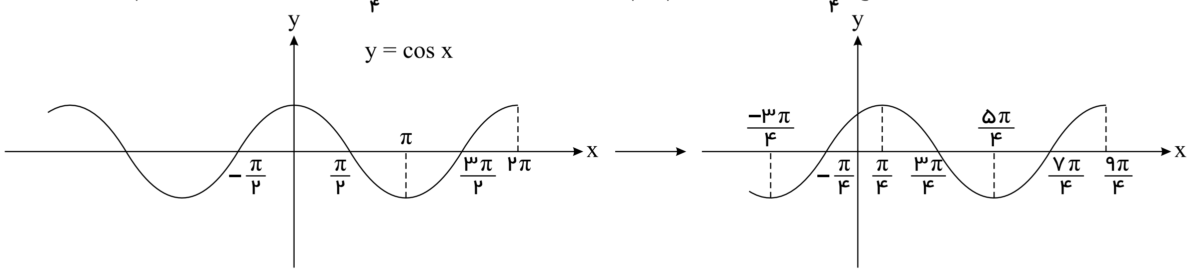
پاسخ‌نامه تشریحی

۱ ۱ ۲ **۳** ۴

$$y=\cos(\frac{۹\pi}{۴}-x)=\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۴}-x)=\cos(\frac{\pi}{۴}-x)$$

می‌دانیم $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$، بنابراین کافی است نمودار تابع $y=\cos(x-\frac{\pi}{۴})$ را رسم کنیم. برای این کار نمودار $y=\cos x$ را $\frac{\pi}{۴}$ واحد به‌سمت راست انتقال می‌دهیم:



با توجه به شکل، تابع در بازهٔ $\left[-\frac{۳\pi}{۴},\frac{\pi}{۶}\right]$ اکیداً صعودی است.

۲ ۱ ۲ **۳** ۴ ابتدا با توجه به ریشهٔ عبارت داخل قدرمطلق یعنی $x=\frac{۲}{۳}$ تابع f را بازه‌بندی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ax-۳x+۲\ ;\ x<\frac{۲}{۳} \\ ax+۳x-۲\ ;\ x\geq\frac{۲}{۳}\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} (a-۳)x+۲\ ;\ x<\frac{۲}{۳} \\ (a+۳)x-۲\ ;\ x\geq\frac{۲}{۳}\end{cases}$$

برای اینکه تابع f نزولی باشد ولی اکیداً نزولی نباشد، باید شیب یکی از ضابطه‌ها صفر و شیب ضابطهٔ دیگر منفی باشد، بنابراین:

حالت اول : $\begin{cases} a-۳=۰\Rightarrow a=۳ \\ a+۳<۰\Rightarrow a<-۳\end{cases}\Rightarrow$ غیرممکن است.

حالت دوم : $\begin{cases} a-۳<۰\Rightarrow a<۳ \\ a+۳=۰\Rightarrow a=-۳\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases} -۶x+۲\ ;\ x<\frac{۲}{۳} \\ -۲\qquad ;\ x\geq\frac{۲}{۳}\end{cases}$

بنابراین $a=-۳$ قابل‌قبول است و مقدار $a^۲-۵a+۱$ برابر ۲۵ است.

۳ ۱ **۲** ۳ ۴ ابتدا تابع $f(x)$ را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=(۶k+k^۲)x^۳+۲x^۳-۴x+۴x-۵\Rightarrow f(x)=(k^۲+۶k+۲)x^۳-۵$$

می‌دانیم در تابع $f(x)=ax^{۳}$ اگر $a>۰$ باشد، تابع اکیداً صعودی و اگر $a<۰$ باشد، تابع اکیداً نزولی است؛ بنابراین:

$$k^{۲}+۶k+۲<۰$$

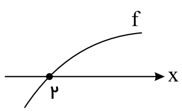
$$k^{۲}+۶k+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۲۸ \Rightarrow k=\frac{-۶\pm ۲\sqrt{۷}}{۲}=-۳\pm\sqrt{۷}$$

k		$-۳-\sqrt{۷}$		$-۳+\sqrt{۷}$	
$k^{۲}+۶k+۲$	+	○	−	○	+

$$\Rightarrow k\in(-۳-\sqrt{۷},-۳+\sqrt{۷}) \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k=-۵,-۴,-۳,-۲,-۱$$

بنابراین مجموع مقادیر صحیح k برابر -۱۵ می‌باشد.

۴ ۱ **۲** ۳ ۴ می‌دانیم توابعِ اکیداً یکنوا، حداکثر یک بار محور xها را قطع می‌کنند. بنابراین می‌توان فرض کرد نمودار $f(x)$ مطابق شکل زیر است:



برای پیدا کردن دامنهٔ تابع $g(x)$ باید نامعادلهٔ $\frac{f(x)}{-x^{۲}+۸x-۷}\geq ۰$ را حل کنیم:

(با توجه به شکل f)

$$f(x)=۰\Rightarrow x=۲$$

$$-x^{۲}+۸x-۷=۰\Rightarrow x=۱, x=۷$$

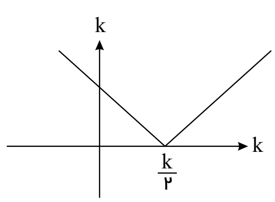
x	−∞	۱		۲		۷	+∞
f (x)	−		−	○	+		+
$-x^{۲}+۸x-۷$	−	○	+		+	○	−
حاصل	+	ت ن	−	○	+	ت ن	−

$$\Rightarrow D_g=(-\infty,۱)\cup[۲,۷)$$

بنابراین دامنهٔ تابع $g(x)$ شامل ۶ عدد صحیح نامنفی $\{۰,۲,۳,۴,۵,۶\}$ می‌باشد.

۵ ۱ ۲ **۳** ۴

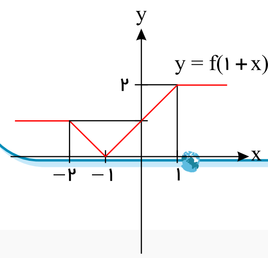
نمودار تابع $y=|۲x+k|$ به صورت مقابل می‌باشد. برای اینکه روی بازهٔ $(۳k-۹,۲k+۳)$ غیریکنوا باشد باید این بازه شامل $-\frac{k}{۲}$ باشد.

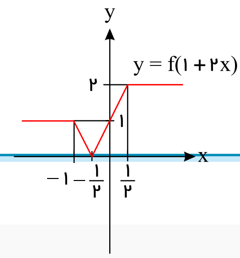


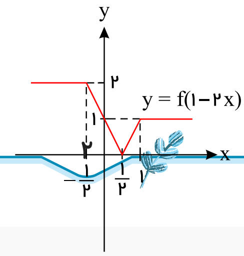
$$۳k-۹<-\frac{k}{۲}<۲k+۳\Rightarrow -\frac{۶}{۵}<k<\frac{۱۸}{۷}$$

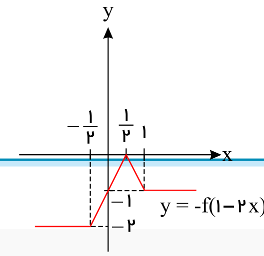
پس مقادیر صحیح k، $-۲,۰,۱,۲$ هستند.

۶ **۱** ۲ ۳ ۴









پس روی بازهٔ $[\frac{۱}{۲}, ۱]$ و هر زیرمجموعه از آن، اکیداً نزولی است، پس بیشترین مقدار $b - a$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

۷ ۱ ۲ **۳** ۴

$$\begin{cases}(1,-1)\\(1,2a)\end{cases}\to(1,2a-1)$$
$$\begin{cases}(2,3a)\\(2,-3)\end{cases}\to(2,3a-3)\Rightarrow f+g=\{(1,2a-1),(2,3a-3),(4,5-a)\}$$
$$\begin{cases}(4,5)\\(4,-a)\end{cases}\to(4,5-a)$$

برای آن‌که $f+g$ نزولی باشد، لازم است که $2a-1\geq 3a-3\geq 5-a$ باشد.

رابطه بالا فقط به ازای $a=2$ برقرار است.

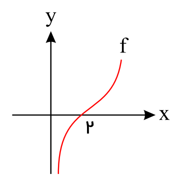
۸ ۱ **۲** ۳ ۴

برای اینکه سهمی روی بازه $[2,+\infty)$ اکیداً صعودی باشد، لازم است که طول رأس سهمی در بازهٔ $(2,+\infty)$ قرار نگیرد:

$$x_S=-\frac{a}{2}\leq 2\Rightarrow a\geq -4$$

۹ ۱ **۲** ۳ ۴

به طور فرض نمودار f را به صورت شکل زیر در نظر می‌گیریم:



$$f(1-x)=0\Rightarrow 1-x=2\Rightarrow x=-1$$

x		−۲		−۱	
x+۲	−	•	+		+
f(۱−x)	+		+	•	−
P	−		+		−

$$\Rightarrow Dg=[-2,-1]$$

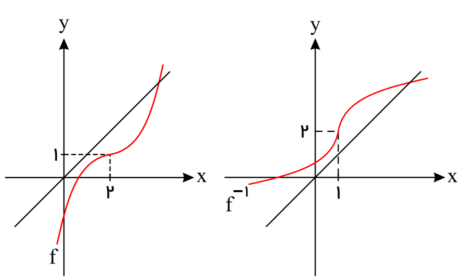
۱۰ ۱ ۲ **۳** ۴ f اکیداً صعودی است.

$$f(f(x))\geq f(x^3-6)\Rightarrow f(x)\geq x^3-6\Rightarrow x^3+3x\geq x^3-6\Rightarrow 3x\geq -6\Rightarrow x\geq -2$$

۱۱ ۱ **۲** ۳ ۴

$$f(2a+1)<f(4-a)\Rightarrow 2a+1>4-a\Rightarrow a>1$$

۱۲ ۱ ۲ ۳ **۴** روش اول:



روش دوم:

ناحیه‌ای که f می‌گذرد	اول	سوم	چهارم
ناحیه‌ای که f^{-1} می‌گذرد	اول	سوم	دوم

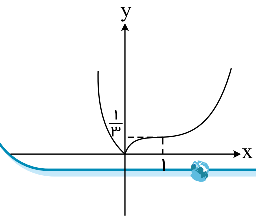
بنابراین f^{-1} از ربع چهارم نمی‌گذرد.

۱۳ ۱ ۲ **۳** ۴ ضابطه را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}|x^3-3x^2+3x|=\frac{1}{3}|(x-1)^3+1|$$

آزمون

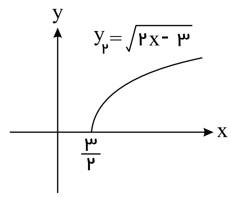
نمودار $y = x^3$ را یک واحد به راست و یک واحد به بالا می‌بریم، عرض‌ها را بر ۳ تقسیم می‌کنیم و در نهایت قسمت منفی را نسبت به محور x قرینه می‌کنیم:

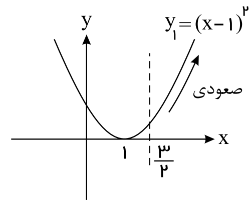


با توجه به شکل تابع روی $(-\infty, 0)$ و هر زیرمجموعه از آن اکیداً نزولی است.

۱۴ ۱ ۲ ۳ ۴

دامنهٔ تابع بازهٔ $[\frac{۳}{۲}, +\infty)$ است و نمودارهای دو تابع $y_۱ = (x-۱)^۲$ و $y_۲ = \sqrt{۲x-۳}$ در شکل‌های زیر رسم شده‌اند:





هر دو تابع روی دامنه $[\frac{۳}{۲}, +\infty)$ اکیداً صعودی هستند، پس مجموع آن‌ها یعنی تابع f نیز اکیداً صعودی است.

۱۵ ۱ ۲ ۳ ۴ یعنی مقادیر $f(x)$ منفی هستند، حال داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x_۱ < x_۲ \xrightarrow{f\ \text{نزولی}} f(x_۱) \geq f(x_۲) \xrightarrow{\times(-۱)} -f(x_۱) \leq -f(x_۲) \\ x_۱ < x_۲ \xrightarrow{\times ۳} ۳x_۱ < ۳x_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow ۳x_۱ - f(x_۱) < ۳x_۲ - f(x_۲) \Rightarrow g(x_۱) < g(x_۲)$$

پس تابع g صعودی است.

$$x_۱ < x_۲ \Rightarrow -x_۱ > -x_۲ \xrightarrow{f\ \text{نزولی}} f(-x_۱) \leq f(-x_۲) \xrightarrow{f\ \text{منفی است}} \frac{۱}{f(-x_۱)} \geq \frac{۱}{f(-x_۲)} \xrightarrow{\times(-۱)} \frac{-۱}{f(-x_۱)} \leq \frac{-۱}{f(-x_۲)} \Rightarrow h(x_۱) \leq h(x_۲)$$

تابع h نیز صعودی است.