پاسخ‌نامه تشریحی

۱

$f(x)=\sqrt{x-۴} \rightarrow D_f : x-۴ \geq ۰ \rightarrow x \geq ۴$

$g(x)=\dfrac{۱}{x^۲-۱} \rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{\pm ۱\}$

$D_{gof}=\{x \in D_f \ , \ f(x) \in D_g\}=\{x \geq ۴ \ , \ \sqrt{x-۴} \neq \pm ۱\}=\{x \geq ۴ \ , \ x \neq ۵\}=[۴,۵) \cup (۵,+\infty)$

۲

الف)

$f(x)=\dfrac{x+۳}{۲x} \rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

$g(x)=۳x-۱ \rightarrow D_g=\mathbb{R}$

$D_{fog}=\{x \in D_g \, , g(x) \in D_f\}=\{x \in \mathbb{R} \, , ۳x-۱ \neq ۰\}=\{x \in \mathbb{R} \, , x \neq \frac{۱}{۳}\}=\mathbb{R}-\left\{\frac{۱}{۳}\right\}$

ب)

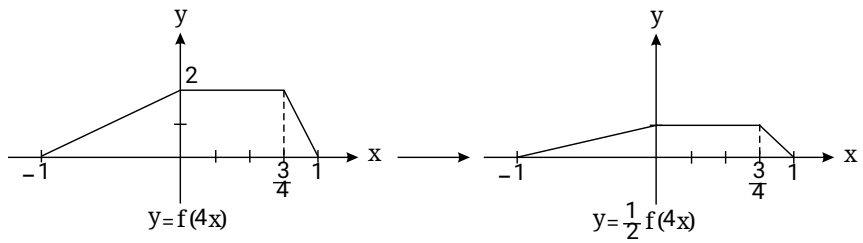
$g^{-۱}of^{-۱}(۵)=g^{-۱}\left(f^{-۱}(۵)\right)=g^{-۱}(۶۴)=۴$

علت:

$f^{-۱}(۵) \longrightarrow ۵=\frac{۱}{۸}x-۳ \longrightarrow \frac{۱}{۸}x=۸ \longrightarrow x=۶۴$

$g^{-۱}(۶۴) \longrightarrow ۶۴=x^۳ \longrightarrow x=۴$

۳ کافی است طول نقاط را $\frac{۱}{۴}$ برابر کرده و سپس عرض نقاط را نصف کنیم.



۴

الف

در تابع $y=a\cos bx+c$ دورهٔ تناوب $T=\dfrac{۲\pi}{|b|}$ و $Max=|a|+c$ و $Min=-|a|+c$ است.

$y=-۳\cos ۲\pi x+۱ \rightarrow \begin{cases} T=\dfrac{۲\pi}{|۲\pi|}=۱ \\ Max=|-۳|+۱=۳+۱=۴ \\ Min=-|-۳|+۱=-۳+۱=-۲ \end{cases}$

۵

دورهٔ تناوب : $T=\dfrac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow ۳=\dfrac{۲\pi}{|b|} \Rightarrow |\, b\, |=\dfrac{۲\pi}{۳}$

$|a\,|=۱ \ , \ c=۴ \Rightarrow y=\sin\dfrac{۲\pi}{۳}x+۴$ یا $y=-\sin\dfrac{۲\pi}{۳}x+۴$

۶

الف) $y=\sin \pi x \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\pi|}=۲ \rightarrow$ شکل شمارهٔ ۴

ب) $y=۲-\cos \frac{۱}{۲}x \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\frac{۱}{۲}|}=۴\pi \rightarrow$ شکل شمارهٔ ۲

پ) $y=\sin ۲x \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi \rightarrow$ شکل شمارهٔ ۳

ت) $y=۱-\cos ۲x \rightarrow T=\frac{۲\pi}{|۲|}=\pi \rightarrow$ شکل شمارهٔ ۱

۷ می‌دانیم $\cos ۲a=۲\cos^۲ a-۱$ است.

$$\cos ۲x-\cos x+۱=۰ \rightarrow ۲\cos^۲ x-۱-\cos x+۱=۰ \rightarrow ۲\cos^۲ x-\cos x=۰$$

$$\rightarrow \cos x(۲\cos x-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ \cos x=\frac{۱}{۲}=\cos \frac{\pi}{۳} \xrightarrow{\cos x=\cos \alpha \rightarrow x=۲k\pi \pm \alpha} x=۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۸

$$f(x)=x^۳+ax^۲+bx+۱$$

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow r=f(۲)=۰ \Rightarrow ۲^۳+a\times ۲^۲+b\times ۲+۱=۰$$

$$\Rightarrow ۸+۴a+۲b+۱=۰ \Rightarrow ۴a+۲b=-۹ \quad (۱)$$

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow r=f(-۱)=۰ \Rightarrow (-۱)^۳+a(-۱)^۲+b(-۱)+۱=۰$$

$$\Rightarrow -۱+a-b+۱=۰ \Rightarrow a-b=۰ \Rightarrow a=b$$

$$\xrightarrow{(۱)} ۴a+۲a=-۹ \Rightarrow a=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=b=-\frac{۳}{۲}$$

۹

الف

آ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-۲$

ب) $\lim\limits_{x\to-۱^+} f(x)=+\infty$

۱۰

الف) $f'(x)=\left(\frac{۹\sqrt{x}-\frac{۱}{۲\sqrt{x}}(۹x-۲)}{(\sqrt{x})^۲}\right)$

ب) $g'(x)=(۶x)(۲x-۵)^۳+(۳)(۲)(۲x-۵)^۲(۳x^۲-۴)$