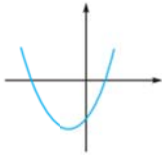


کله فصل اول - بخش ۲ تستی - سؤال ۱۰ -

اگر بازه  $(-2, 4)$  بزرگ‌ترین بازه‌ای باشد که سهمی  $y = ax^2 + bx + c$  در این بازه بالای محور  $x$ ‌هاست و دارای عرض از مبدأ یکسان با معادله سهمی  $y = x^2 - 2x + 5$  است، معادله خط مماس در رأس سهمی کدام است؟

کله فصل اول - بخش ۲ تستی - سؤال ۲۵ -

با توجه به نمودار تابع مربوط به  $y = bx^2 - ax + c + 2$  کدام گزینه درست است؟



(۱)  $ab < 0$

(۲)  $abc < 0$

(۳)  $b < 0$

(۴)  $ac < 0$

کله فصل اول - بخش ۳ تستی - سؤال ۱۴ - گزینه ۳ صحیح است.

پ) چون مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس:



$$\text{محیط} = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

### متوسط

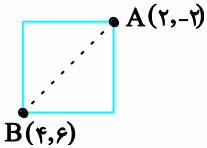
-۴

حواستون باشه! برای به دست آوردن فاصله دو نقطه  $A(x_1, y_1)$  و

$$B(x_2, y_2)$$
 از رابطه  $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$  استفاده می‌کنیم

پس:

۲ رأس مقابل در مربع به صورت شکل مقابل است:



فاصله  $AB$  قطر مربع را می‌دهد و می‌دانیم (طول ضلع)  $= \sqrt{2}$  قطر

$$\text{قطر } AB = \sqrt{(4-2)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

پس طول ضلع مربع  $\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$  خواهد بود در نتیجه مساحت مربع

$$S = \left(\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4 \times \frac{17}{2} = 34$$

### آسان

-۵

فاصله نقطه‌ای روی دایره تا مرکز دایره را شعاع دایره می‌نامند پس:

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

### دشواری

-۶

حواستون باشه! نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم از رابطه  $y = x$  پیروی

می‌کنند پس نقاط به صورت  $(\alpha, \alpha)$ .

فاصله  $(\alpha, \alpha)$  تا  $(0, 3)$  را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(\alpha-0)^2 + (\alpha-3)^2} = 4$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 16 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha - 7 = 0$$

مجموع طول‌های خواسته شده بنا به معادلات درجه ۲ از رابطه  $\frac{-b}{a}$  به دست

$$\text{می‌آید. پس } \frac{-(-6)}{2} = 3$$



سوالات تشریحی

## پاسخنامه

بخش ۱

### آسان

-۱

حواستون باشه!

(۱) فرمول معادله به صورت  $y = ax + b$  و یا  $y - y_0 = m(x - x_0)$  است.

(۲) محل تلاقی به معنای حل دستگاه و یا جایگذاری است.

(۳) شرط موازی بودن دو خط برابر بودن شیب‌ها و شرط عمود بودن دو خط

قرینه و معکوس بودن شیب‌هاست.

ابتدا محل تلاقی خط  $2y = x - 2$  و محور  $x$  را به دست می‌آوریم.

$$y = 0 \Rightarrow 2(0) = x - 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$  در معادله خط جدید صدق می‌کند و با خط  $3y = x + 2$

موازی است پس شیب‌های برابر دارند و شیب خط  $3y = x + 2$  برابر  $\frac{1}{3}$

است پس:

$$y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

### آسان

-۲

ابتدا فرمول معادله خط  $y - y_1 = m(x - x_1)$  را می‌نویسیم. شرط عمود

بودن قرینه و معکوس بودن شیب‌هاست پس:

$$\text{شیب} = \frac{-x}{y} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2}$$

نقطه مورد نظر با  $x = 2$  را در معادله خط  $y + 2x = 3$  جایگذاری می‌کنیم

تا  $y = -1$  به دست آید.

$$y - (-1) = \frac{3}{2}(x - 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{3}{2}x - 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x - 4$$

### دشواری

-۳

(آ) برای مشخص کردن نوع مثلث داریم: [طول اضلاع و شیب‌ها را بیابید]

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چون  $5\sqrt{2}$  از بقیه ضلع‌ها بزرگ‌تر است و رابطه فیثاغورس بین اضلاع برقرار

است پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

## متوسط

-۱۰

چون نقطه داده شده در خط صدق نمی‌کند پس روی ضلع قرار ندارد در نتیجه:

$$2x + y = 3$$



$A(2,1)$

فاصله نقطه  $A$  تا خط  $2x + y - 3 = 0$  طول ضلع مربع است پس:

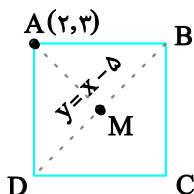
$$\text{طول ضلع} = \frac{|2(2) + 1 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

## دشوار

-۱۱

با توجه به اینکه نقطه در خط صدق نمی‌کند پس:



ابتدا معادله خط  $AM$  را به دست می‌آوریم چون شیب  $AM$  قرینه و معکوس

قطر است پس شیب  $AM$   $(-1)$  است.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -1(x - 2)$$

$$y - 3 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 5$$

محل برخورد  $AM$  و قطر  $BD$  جواب مسئله است.

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ y - x = -5 \end{cases}$$

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 5$$

$M(5,0)$

## متوسط

-۱۲

با استفاده از فاصله نقطه از خط داریم:

$$ax + 4y - 1 = 0 \text{ و } A(1, 2)$$

$$\frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow \frac{|a + 7|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |a + 7| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

$$a^2 + 14a + 49 = 4(a^2 + 16) \Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64$$

$$3a^2 - 14a + 15 = 0 \Rightarrow (3a - 5)(a - 3) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}, a = 3$$

## آسان

-۷

حواستون باشه! بنا به فرمول یافتن نقطه وسط پاره خط اگر

$$A(x_A, y_A) \quad (e, f) \quad M \quad B(x_B, y_B)$$

$$\text{تصویر } x_B = 2e - x_A$$

$$\text{تصویر } y_B = 2f - y_A$$

پس بنا به فرمول داریم:

$$\text{تصویر } x = 2(2) - 3 = 1$$

$$\text{تصویر } y = 2(1) - (-1) = 3$$

پس نقطه تصویر  $(1, 3)$  است.

## دشوار

-۸

اگر نقطه‌ای روی خط  $y = 2x$  باشد یعنی نقاطی به صورت  $(\alpha, 2\alpha)$  خواهد

بود. حالا فاصله این نقطه از مبدا مختصات و نقطه  $A(2, 4)$  می‌یابیم:

$$\sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} + \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 4)^2} = 5$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 16\alpha + 16} = 5$$

$$\sqrt{5\alpha^2} + \sqrt{5\alpha^2 - 20\alpha + 20} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}|\alpha| + \sqrt{5}|\alpha - 2| = 5$$

باتوجه به بسط قدر مطلقا داریم:

$$\alpha < 0: -\sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow -2\sqrt{5}\alpha = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2: \sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5} = 5$$

$$\alpha > 2: \sqrt{5}\alpha + \sqrt{5}\alpha - 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5}\alpha = 5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

## آسان

-۹

حواستون باشه! باتوجه به تمرین کتاب درسی اگر  $A, B, C, D$  چهار رأس

متوازی الاضلاع باشد داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

ابتدأ رأس پیدا می‌کنیم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 3 + 4 = 2 + x_D \Rightarrow 5 = x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + (-2) = 0 + y_D \Rightarrow y_D = -1$$

حالا فاصله نقطه  $B$  و  $D$  را پیدا می‌کنیم:

$$BD = \sqrt{(2-5)^2 + (0+1)^2} \Rightarrow BD = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

## متوسط

-۱۶

آ مثلث متساوی الساقین دو ضلع برابر دارد پس طول اضلاع را به دست می آوریم:

$$AB = \sqrt{(-6+1)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3+6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$$

پس چون  $BC = AB$ ، مثلث متساوی الساقین است.

ب) حواستون باشه! عمود منصف و ارتفاع به فاصله نقطه از خط شیب‌های

قرینه و معکوس مربوط است.

عمود منصف  $BC$  شیبی قرینه معکوس  $BC$  خواهد داشت پس:

$$\text{شیب } BC = \frac{-2-3}{-6-3} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} \frac{-9}{5}$$

عمود منصف از وسط ضلع  $BC$  نیز می‌گذرد پس:

$$\text{BC وسط} = \left( \frac{-6+3}{2}, \frac{3+(-2)}{2} \right) = \left( \frac{-3}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

$$\text{BC معادله} = y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5} \left( x + \frac{3}{2} \right) \Rightarrow y = -\frac{9}{5}x - \frac{11}{5}$$

ت) فاصله نقطه  $A$  تا خط  $BC$  را به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|7 + \frac{9}{5}(-1) + \frac{11}{5}|}{\frac{\sqrt{81+25}}{5}} = \frac{\frac{37}{5}}{\frac{\sqrt{106}}{5}} = \frac{37}{\sqrt{106}}$$

## دشواری

-۱۷

ابتدا برای یافتن  $H$  معادله خط  $AH$  و معادله خط  $BC$  را به دست می‌آوریم

تا دستگاه حل کنیم:

معادله خط  $BC$ :

$$\text{شیب } BC = \frac{-2-(-1)}{8-1} = \frac{-1}{7}$$

$$y+1 = \frac{-1}{7}(x-1) \Rightarrow y+1 = \frac{-1}{7}x + \frac{1}{7} \Rightarrow y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7}$$

معادله خط  $AH$ :

$$\text{شیب } AH = 7$$

$$y-2 = 7(x-4) \Rightarrow y = 7x - 28 + 2 \Rightarrow y = 7x - 26$$

دستگاه حل می‌کنیم، تا محل برخورد  $BC$  و  $AH$  را بیابیم که همان نقطه  $H$  است.

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7} \\ -y = -7x + 26 \end{cases}$$

$$0 = -\frac{5}{7}x + \frac{176}{7} \Rightarrow 176 = 5x \Rightarrow x = \frac{176}{5} = \frac{88}{25}, y = \frac{34}{25}$$

$$H\left(\frac{88}{25}, \frac{34}{25}\right)$$

برای یافتن  $M$  نقطه وسط  $BC$  را می‌یابیم:  $M\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$MH = \sqrt{\left(\frac{88}{25} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{34}{25} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{49}{50}\right)^2 + \left(\frac{143}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{22850}{2500}} = \sqrt{9/14}$$

## آسان

-۱۳

چون نقطه  $A$  در ضلع داده شده صدق نمی‌کند سپس فاصله  $A$  تا خط

$3x - 4y = 9$  طول ضلع مربع را می‌دهد پس:

$$3x - 4y = 9$$



$A(2, 3)$

$$3x - 4y - 9 = 0$$

$$\text{طول ضلع} = \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|6 - 12 - 9|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S = 3^2 = 9 \text{ پس مساحت مربع} = 9$$

## متوسط

-۱۴

حواستون باشه! عمود منصف دارای ویژگی عمود بودن (شیب‌های قرینه و

معکوس) و میانه بودن پاره‌خط است.

$$\text{شیب } AB = \frac{-3-15}{0-6} = \frac{-18}{-6} = 3$$

پس شیب عمود منصف  $-\frac{1}{3}$  خواهد بود.

$$AB \text{ وسط پاره‌خط} = \left( \frac{0+6}{2}, \frac{-3+15}{2} \right) = (3, 6) = M$$

پس معادله عمود منصف:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{3}x + 1$$

از صدق دادن نقطه  $p$  در معادله متوجه می‌شویم

$$y = -\frac{1}{3}x + 7 \Rightarrow 11 = -\frac{1}{3}(-12) + 7 = 4 + 7 = 11$$

نقطه  $p$  روی خط قرار دارد.

## متوسط

-۱۵

حواستون باشه! وقتی حرف از میانه باشه به نقطه وسط پاره‌خط احتیاج داریم.

آ) چون طول میانه خواسته شده ابتدا نقطه  $M$  پیدا می‌کنیم سپس از فاصله دو

نقطه طول  $AM$  را پیدا می‌کنیم:

$$M \xrightarrow{\text{وسط } BC} \left( \frac{3+7}{2}, \frac{11+1}{2} \right) = (5, 6)$$

$$\text{فاصله در نقطه } AM = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

ب) معادله میانه به معنای نوشتن معادله خط است پس:

$$\text{شیب } AM = \frac{6-9}{5-1} = \frac{-3}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}(x - 5) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

## متوسط

-۲۱

با توجه به فرمول به دست آمده در سوال قبل:

$$\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$$

$$y - \sqrt{3}x + 1 = 0 \quad \times \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3}y - 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2}} = \frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

## آسان

-۲۲

نقطه روی خط  $y = x + 1$  به صورت  $(\alpha, \alpha + 1)$  است.

$$\frac{|2\alpha - \alpha - 1 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\alpha + 2| = 5$$

$$\alpha + 2 = 5 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\alpha + 2 = -5 \Rightarrow \alpha = -7$$

## متوسط

-۲۳

باتوجه به شیب‌های خط خطوط داریم:

$$\begin{array}{ccc} A & 2x + 3y + 5 = 0 & B \\ x - 2y - 1 = 0 & \square & x - 2y - 3 = 0 \\ D & 2x + 3y - 1 = 0 & C \end{array}$$

ابتدا فاصله دو ضلع موازی  $AB$  و  $DC$  را می‌یابیم:

$$BC = AD = \frac{|5 - (-1)|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

سپس فاصله دو ضلع موازی  $AD$  و  $BC$  را می‌یابیم:

$$AB = DC = \frac{|-1 - (-3)|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{محیط} = 2\left(\frac{6}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

## متوسط

-۲۴

فاصله مرکز دایره از خطوط مماس برابر شعاع دایره است پس در نتیجه این دو

فاصله با یکدیگر برابر است.

فاصله  $(-1, 4)$  تا خط  $3x + 4y + 2 = 0$ :

$$\frac{|3(-1) + 4(4) + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-3 + 16 + 2|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

فاصله  $(-1, 4)$  تا خط  $5x - 12y - k = 0$ :

$$\frac{|5(-1) - 12(4) - k|}{\sqrt{25+144}} = \frac{|-5 - 48 - k|}{\sqrt{169}} = \frac{|-53 - k|}{13}$$

$$\frac{|-53 - k|}{13} = 3 \Rightarrow |-53 - k| = 39 \Rightarrow -53 - k = 39$$

$$-53 - 39 = k \Rightarrow -92 = k$$

$$-53 - k = -39 \Rightarrow -53 + 39 = k \Rightarrow 14 = k$$

## متوسط

-۱۸

(۲)

$$r = OA = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\text{وسط } AB = O = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = (4, 1)$$

(ب) اگر اندازه  $OC$  به اندازه شعاع دایره باشد یعنی  $C$  روی محیط دایره قرار

دارد.

$$OC = \sqrt{(4-7)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} = r$$

پس  $C$  روی محیط دایره قرار دارد.

## متوسط

-۱۹

ابتدا با توجه به شیب دو ضلع متوجه می‌شویم چون قرینه و معکوس یکدیگر

هستند پس حتماً دو ضلع مجاور هم هستند سپس با حل کردن دستگاه

مختصات  $C$  را می‌یابیم.

$$\begin{array}{ccc} A(5, 2) & B & \\ x - 2y = 1 & \square & 3x + y = 3 \\ D & x - 2y = 1 & C \end{array}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y = 3 \\ -2x + 4y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = 5 \\ 10y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0, x = 1$$

 $C(1, 0)$ مختصات محل برخورد قطر‌ها، نقطه وسط قطر  $AC$  است پس:

$$M = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{2+0}{2}\right) \Rightarrow M = (3, 1)$$

## متوسط

-۲۰

حواستون باشه‌ها! این فرمول را حتما بخاطر بسپارید.

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اثبات: (۱) ابتدا نقطه‌ای از خط  $ax + by + c = 0$  در نظر می‌گیریم.

$$\left(\alpha, -\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}\right)$$

(۲) فاصله این نقطه را از خط  $ax + by + c' = 0$  به دست می‌آوریم:

$$\frac{|a\alpha + b\left(-\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}\right) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a\alpha - a\alpha - c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## آسان

-۲۸

فاصله  $pA$  و  $pB$  را حساب کرده فاصله کم‌تر جواب مسئله است.

$$pA = \sqrt{(50-10)^2 + (30+20)^2} = \sqrt{1600+2500} = \sqrt{4100}$$

$$pB = \sqrt{(50-80)^2 + (30-90)^2} = \sqrt{900+3600} = \sqrt{4500}$$

چون  $pA < pB$  است پس پایگاه  $A$  مناسب‌تر است.

## متوسط

-۲۹

(۱) ابتدا معادله خط  $AM$  را می‌یابیم:

چون  $x-y=2$  عمود بر  $AM$  است شیب آن قرینه و معکوس است:

$$A(2, 1) \xrightarrow{\text{معادله خط}} y-1 = -1(x-2) \Rightarrow y = -x+3$$

محل تلاقی  $x-y=2$ ,  $y = -x+3$  نقطه  $M$  خواهد بود.

$$\begin{cases} y = -x+3 \\ y = x-2 \end{cases}$$

$$2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}, x = \frac{5}{2}$$

$$M = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

حال قرینه  $A(2, 1)$  را نسبت به  $M\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$  پیدا می‌کنیم:

$$x = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = 3 \quad (3, 0)$$

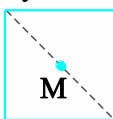
$$y = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

## آسان

-۳۰

فاصله نقطه  $M$  تا خط  $x+y=1$  نصف طول ضلع مربع است پس:

$$2y+x=1$$



$$\frac{|2(4)+0-1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

یعنی طول ضلع مربع  $\frac{14}{\sqrt{5}}$  است پس مساحت مربع

$$S = \left(\frac{14}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{196}{5}$$

## متوسط

-۲۵

(آ) محل برخورد سهمی با محور  $x$ ها یعنی  $y=0$

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+2) = 0$$

$$x = 10, x = -2$$

(ب) طول  $AB$  فاصله  $x$ های به دست آمده:

$$|x_B - x_A| = |10 - (-2)| = 12$$

(پ) بیش‌ترین ضخامت در  $y$  به دست می‌آید:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[-64 - 4(-20)]}{4} = \frac{-[-64 + 80]}{4} = \frac{-16}{4} = -4$$

پس بیش‌ترین ضخامت ۳۶ است.

## دشوار

-۲۶

در معادله خط  $ax + by + C = 0$ ، شیب برابر  $-\frac{a}{b}$  است چون  $AH$  عمود

بر این خط است پس شیب آن  $\frac{b}{a}$  خواهد بود در نتیجه معادله خط آن

به صورت  $y - y_0 = \frac{b}{a}(x - x_0)$  است در نتیجه از حل دستگاه بین این دو

معادله خط محل برخورد دو خط را خواهیم داشت پس:

$$x = at + x_0 \quad \text{و} \quad y = bt + y_0$$

در نتیجه:

$$PH = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2}$$

$$= |t| \times \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$pH = \frac{|ax_0 + by_0 + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

## دشوار

-۲۷

(آ)

$$r = OS = \sqrt{x^2 + 64} = 10$$

$$x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

(ب)

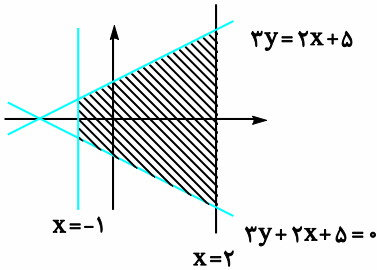
$$P(-10, 0) \Rightarrow \text{شیب } PS = \frac{8-0}{6-(-10)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$Q(10, 0) \Rightarrow \text{شیب } SQ = \frac{8-0}{6-10} = \frac{8}{-4} = -2$$

(پ) چون شیب‌های قرینه و معکوس یکدیگرند سپس در رأس  $S$  قائمه است.

۵- گزینه «۳» آسان

با کمی دقت در معادله‌های خطوط، می‌دانیم که دو خط  $x = -1$ ,  $x = 2$  موازی هم هستند اما دو خط دیگر با شیب‌های  $\frac{2}{3}$  و  $-\frac{2}{3}$  ارتباط خاصی باهم ندارند. چهار ضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد دوزنقه است.



۶- گزینه «۴» متوسط

دو خط  $y + x = 4$ ,  $y = 3x$  دو خط با شیب‌های ۳ و -۱ هستند محل تقاطع این دو خط، یک رأس مثلث را به ما می‌دهد.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3(1) = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$

از آنجایی که ضلع سوم محور  $x$  هاست پس فاصله  $A$  تا محور  $x$  ارتفاع مثلث را به ما می‌دهد که همان عرض  $A$  است پس  $AH = 3$ .

محل برخورد دو خط با محور  $x$  را هم به دست می‌آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow BC = 4 - 0 = 4 \Rightarrow S = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

۷- گزینه «۴» آسان

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$S = \text{طول} \times \text{عرض} \Rightarrow 15 = 5 \times x \Rightarrow x = 3$$

پس طول مستطیل ۵ و عرض آن ۳ هست.

۸- گزینه «۱» دشوار

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{3}y = x \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0)$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}y = x \\ y + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow y + \sqrt{3}(\sqrt{3}y) = 3\sqrt{3} \Rightarrow y + 3y = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 4y = 3\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{3} \left( \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{9}{4} \Rightarrow C \left( \frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4} \right)$$



سوالات تستی

پاسخنامه

بخش ۱

۱- گزینه «۳» آسان

$$x_A = 2n - 3, \quad y_A = \frac{1}{2} - 3n$$

$$x_A = 3y_A + 1 \Rightarrow 2n - 3 = 3\left(\frac{1}{2} - 3n\right) + 1$$

$$\Rightarrow 2n - 3 = \frac{3}{2} - 9n + 1 \Rightarrow 11n = \frac{11}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A(-2, -1) \Rightarrow \text{در ربع سوم قرار دارد.}$$

۲- گزینه «۳» آسان

$A$  در ربع دوم است بنابراین  $x$  منفی و  $y$  مثبت است.

$$-2m < 0 \Rightarrow m > 0, \quad 3m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

باتوجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد اما ادامه با حل آن داریم:

اگر بخواهد فاصله  $A$  تا محورها یکسان باشد یعنی باید قدرمطلق طول و عرض آن برابر باشند:

$$|x| = |y| \Rightarrow \begin{cases} 3m - 1 = -2m \Rightarrow 5m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{5} \text{ ق ق } \\ 3m - 1 = 2m \Rightarrow m = 1 \text{ ق ق } \end{cases}$$

۳- گزینه «۳» آسان

در ربع چهارم طول مثبت و عرض منفی است.

$$\begin{aligned} m + 2 > 0 &\Rightarrow m > -2 \\ 2m + 1 < 0 &\Rightarrow m < -\frac{1}{2} \end{aligned} \Rightarrow -2 < m < -\frac{1}{2}$$

۴- گزینه «۲» آسان

طول نقطه  $M$  متشکل از یک عبارت نامنفی و یک عدد مثبت است پس همواره مثبت است پس تا اینجا نواحی ۲ و ۳ حذف هستند.

اما در مورد علامت  $n^2 - 1$  نمی‌توان نظری داد یعنی ممکن است مثبت، منفی

یا صفر باشد طبق گفته سوال روی مرز است پس  $n^2 - 1 = 0$  و  $n = \pm 1$

است و نقطه روی مرز نواحی ۱ و ۴ قرار دارد.



شرط متساوی‌الاضلاع بودن یک مثلث این هست که هر سه ضلع مساوی باشند:

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{(2)} = 4 \quad (2)$$

(۲) را در (۱) جای گذاری می‌کنیم:

$$4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{(2)} 1 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow B(-1, \sqrt{3}) \text{ یا } B(-1, -\sqrt{3})$$

در گزینه‌ها نیست.  $B(-1, -\sqrt{3})$ .

### آسان

### ۱۲- گزینه «۱»

مختصات  $M$  به صورت  $(x, 4x+2)$  نوشته می‌شود.

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (4x+2-1)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (4x+\cancel{1}-\cancel{1})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} \cancel{x^2} + \cancel{16x^2} + 8x + 1 = \cancel{x^2} + \cancel{16x^2}$$

$$\Rightarrow 8x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$$

### آسان

### ۱۳- گزینه «۴»

میانۀ وارد بر ضلع  $BC$  همان میانه‌ای است که از رأس  $A$  به وسط  $BC$  وصل شده پس ابتدا  $M$  وسط  $BC$  رو پیدا می‌کنیم و بعد طول  $AM$  رو به دست میاریم.

$$M \left( \frac{x_B + x_C}{2}, \frac{y_B + y_C}{2} \right) \Rightarrow M \left( \frac{2+0}{2}, \frac{1+5}{2} \right) \Rightarrow M(1, 3)$$

$$AM = \sqrt{(1+1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

### متوسط

### ۱۴- گزینه «۴»

نقاط  $A$  و  $B$  نیز روی خط قرار دارند و  $C(x, x-2)$ . نقطه  $C$  از  $A$  و  $B$  به یک فاصله است بنابراین  $C$  وسط پاره‌خط  $AB$  است یعنی:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{y-1}{2} = 3 \Rightarrow C(3, 1)$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

عرض نقطه  $C$  برابر ۱ است.

$$AB = 3$$

$$AC = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{108}{16}} = \frac{\sqrt{108}}{4}$$

$$BC = \sqrt{\left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

طول ضلع  $AB$  از همه بیشتر است که برابر ۳ است.

### متوسط

### ۹- گزینه «۲»

چون نقطه  $C$  روی خط  $y = 2x + 1$  است پس مختصات آن  $C(x, 2x+1)$  است:

$$AC = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (2x+1)^2} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4x + 1 = 25 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} C_1(2, 5) \\ C_2(-2, -3) \end{cases}$$

$$OC_1 = \sqrt{4+25} = \sqrt{29}$$

$$OC_2 = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

پس  $\sqrt{29}$  بزرگ‌تر است.

خواست باشد فاصله نقطه  $A(x_A, y_A)$  از مبدأ  $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$  است.

### متوسط

### ۱۰- گزینه «۳»

$$AB = \sqrt{(2+\sqrt{2}-2)^2 + (4-5)^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{(3-2)^2 + (5+\sqrt{2}-5)^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{(3-2-\sqrt{2})^2 + (5+\sqrt{2}-4)^2} = \sqrt{(1-\sqrt{2})^2 + (1+\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{1+2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

از برابری  $AB = AC$  نتیجه می‌گیریم مثلث متساوی‌الساقین است. اما از

اونجایی که در گزینه‌ها قائم‌الزاویه اومده پس بررسی می‌کنیم رابطه فیثاغورس برقرار هست یا نه.

$BC$  بزرگ‌ترین ضلع هست پس ممکنه وتر باشه:

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 6 = 3 + 3$$

متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

### آسان

### ۱۱- گزینه «۳»

$$A(-2, 0), B(x, y), O(0, 0)$$

$$AB = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$AO = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BO = \sqrt{x^2 + y^2}$$





اگر خط  $d$  عمود منصف پاره خط  $AB$  باشد، آن گاه هم بر آن عمود است یعنی

شیب آن عکس و قرینه شیب  $AB$  است هم از وسط آن یعنی  $M$  می‌گذرد:

$$M\left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+0}{2}\right) = (1, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m_d = -1$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m_d(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 + 2$$

$$\Rightarrow y = -x + 3 \text{ یا } x + y = 3$$

### آسان

### ۱۹- گزینه «۲»

$$AB: \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(2, -1)$$

$$AC: \begin{cases} 2x - y = 1 \end{cases}$$

برای محاسبه طول ارتفاع  $AH$  کافی فاصله  $A$  رو از  $BC$  به دست بیاریم

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(2) + 1(-1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

### دشوار

### ۲۰- گزینه «۱»

قاعده را  $AC$  و ارتفاع  $BH$  در نظر می‌گیریم:

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

فاصله نقطه  $B$  از قاعده

بنابراین اول معادله خط  $AC$  رو می‌نویسیم:

$$m_{AC} = \frac{2-1}{-2-1} = \frac{-1}{3}$$

حالا با نقطه  $A$ ،  $m_{AC}$  معادله می‌نویسیم:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y = -x + 4$$

$$\Rightarrow x + 3y - 4 = 0 \Rightarrow BH = \frac{|4 + 3 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

جاگذاری  $B$  در معادله

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}AC \times BH = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{2} = 1,5$$

توجه: راه حل تستی دیگری در تست شماره ۳۱ آورده شده که با داشتن

مختصات سه رأس یک مثلث بتونیم مساحت رو پیدا کنیم. حتماً بهش سر بزن

که خیلی جذابه!

### دشوار

### ۲۱- گزینه «۱»

### دشوار

### ۱۵- گزینه «۴»

دو خط عمود بر هم  $a \times a' = -1 \Rightarrow a' = -\frac{1}{a} \Rightarrow -\frac{1}{a} = 1 - a \Rightarrow -1 = a - a^2$

فرض مساله  $a + a' = 1 \Rightarrow a' = 1 - a$

$$\Rightarrow a^2 - a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad a' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x + b$$

$$y = a'x + b' \Rightarrow y = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)x + b'$$

با شیب منفی کار داریم پس نقطه  $A$  را در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$A(2, 1) \Rightarrow 1 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)(2) + b' \Rightarrow b' = \sqrt{5}$$

### دشوار

### ۱۶- گزینه «۲»

شیب خط برابر  $-\frac{3}{4}$  هستش پس شیب  $MH$  برابر  $\frac{4}{3}$  هست که همیشه:

$$H(x, y) \Rightarrow \frac{y-2}{x-1} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow 3y - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0$$

از طرفی  $H$  نقطه‌ای روی خط هست پس در معادله صدق می‌کنه:

$$4 \times \begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 3x + 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y = -8 \\ 9x + 12y = 108 \end{cases}$$

$$25x = 100 \Rightarrow x = 4$$

$$\xrightarrow{\text{معادله اول}} 16 - 3y = -2 \Rightarrow 16 + 2 = 3y \Rightarrow 3y = 18$$

$$\Rightarrow y = 6 \Rightarrow H(4, 6)$$

البته خواسته سوال فقط  $x = 4$  است.

### متوسط

### ۱۷- گزینه «۲»

$$x = 2y - 1 \xrightarrow{y=2} x = 3 \Rightarrow A(3, 2)$$

شیب خط  $x = 2y - 1$  برابر  $\frac{1}{2}$  است پس شیب  $AB$  برابر  $2$  است اگر

فرض کنیم  $B(x, y)$  باشد:

$$m_{AB} = \frac{y-2}{x-3}$$

$$\frac{y-2}{x-3} = 2 \Rightarrow y-2 = 2x-6 \Rightarrow 2x+y=8$$

از طرفی  $B$  روی خط  $y = 2x$  قرار دارد پس:

$$2x + y = 8 \xrightarrow{y=2x} 2x + 2x = 8 \Rightarrow 4x = 8$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 4)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

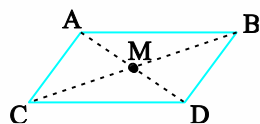
### آسان

### ۱۸- گزینه «۳»



تو این مدل سوالها اول چک می کنیم A در دو خط داده شده صدق می کنه یا نقطه ای خارج از این دو ضلع است؟

A(۷, ۶) در هیچ کدوم از خطوط صدق نمی کنه پس A خارج از دو خط هست. پس معادله خطوط داده شده مربوط به BC و DC هست.



$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 4$$

بنابراین:

$$A \begin{vmatrix} 7 \\ 6 \end{vmatrix}, D \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow AD \text{ وسط } M \begin{vmatrix} \frac{7-1}{2} \\ \frac{6+4}{2} \end{vmatrix} \Rightarrow M(3, 5)$$

**آسان**

**۲۵- گزینه ۳»**

مختصات نقطه A رو با برخورد دادن AC, AB پیدا می کنیم و بعد به کمک شیب BC, شیب خط AH به دست می آوریم و معادله می نویسیم:

$$\begin{cases} AB: 2y - x = 3 \\ AC: y - 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 3 \\ -2y + 4x = 6 \end{cases}$$

$$2x = 9 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow y = 3$$

$$\Rightarrow A \begin{vmatrix} 3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

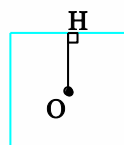
$$m_{BC} = \frac{-3}{2} \Rightarrow M_{AH} = \frac{2}{3}$$

$$AH: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 3) \xrightarrow{\times 3} 3y - 9 = 2x - 6 \Rightarrow 3y - 2x = 3$$

**متوسط**

**۲۶- گزینه ۴»**

معادله رو به فرم استاندارد بنویسیم:



$$x - 2y + 5 = 0$$

$$OH = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1+4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{طول ضلع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

**دشواری**

**۲۷- گزینه ۱»**

$$\begin{cases} d_1: x + y = 1 \\ d_2: x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2, -1)$$

$$\begin{cases} d_1: x + y = 1 \\ d_3: 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-2, 2)$$

$$\begin{cases} d_2: x - y = 3 \\ d_3: 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$AC = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 2\right)^2 + \left(-\frac{2}{3} + 1\right)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{17}{9}} = \frac{\sqrt{17}}{3}$$

$$m_{AC} = \frac{-\frac{2}{3} - (-1)}{\frac{2}{3} - 2} = \frac{-\frac{2}{3} + 1}{-\frac{4}{3}} = 1 \Rightarrow y + 1 = x - 2 : AC \text{ معادله}$$

$$BH \text{ ارتفاع} = \frac{|-2 - 3 - 3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{17}}{3} \times \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}$$

**دشواری**

**۲۲- گزینه ۱»**

$$x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$$

پس فرض می کنیم مختصات نقطه به صورت  $(x, -\frac{x}{2})$  باشد:

خط  $y = x$  را به فرم استاندارد فاصله نقطه از خط می نویسیم:

$$x - y = 0 \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|x - (-\frac{x}{2})|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3x}{2}\right| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 3x = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow A\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \\ \frac{3x}{2} = -2\sqrt{2} \Rightarrow x = -\frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow B\left(-\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{3} \times \sqrt{10} = \frac{20}{3}$$

$$CH = \frac{|1(0) + 2(2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{20}{3} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}$$

**متوسط**

**۲۳- گزینه ۲»**

نقطه بر خط  $y = x - 1$  را به صورت  $A(x, x-1)$  در نظر می گیریم:

$$AH = \frac{|2x - 3(x-1) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|2x - 3x + 3 - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{|-x - 2|}{\sqrt{13}}$$

فاصله برابر  $\sqrt{13}$  شده پس داریم:

$$\frac{|x + 2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

$$\Rightarrow |x + 2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 13 \Rightarrow x = 11 \\ x + 2 = -13 \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

**متوسط**

**۲۴- گزینه ۳»**



برای محاسبه مختصات محل تلاقی میانه‌های یک مثلث کافیست بین  $x$ ها و  $y$ های سه رأس میانگین بگیری:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = (2, 0)$$

$$\Rightarrow G_M = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

**۳۱- گزینه «۲» دشوار**

برای محاسبه مساحت یک مثلث با داشتن مختصات سه رأس  $C, B, A$  از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(1+2+3) - (4+5+6)|$$

در این سوال داریم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-2-12+0) - (0+0-6)| = \frac{1}{2} |-8| = \frac{8}{2} = 4$$

**۳۲- گزینه «۳» دشوار**

طبق فرمولی که توی تست ۳۱ داشتیم، مساحت مثلث  $MNP$  را به دست می‌آوریم:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(8-6+3) - (9+4-4)| = \frac{1}{2} (4) = 2$$

از طرفی مثلثی که رئوسش نقاط میانی یک مثلث دیگر باشند، مساحتش  $\frac{1}{4}$  مساحت مثلث اصلی است پس:

$$S_{ABC} = 4S_{MNP} = 4(2) = 8$$

**۳۳- گزینه «۱» دشوار**

ابتدا برای یافتن رأس  $B$  دستگاه بین خطوط  $AB$  و  $BC$  می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} -2y - 4x = -14 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases}$$

$$-11x = -33 \Rightarrow x = 3, y = 1 \quad B(3, 1)$$

حال فاصله رأس  $B$  از خط  $AC$  طول ارتفاع  $BH$  را به ما می‌دهد:

$$BH = \frac{|4-9-17|}{\sqrt{16+9}} = \frac{22}{5} = 4.4$$

**۳۴- گزینه «۳» دشوار**

معادله خط به فرم استاندارد به صورت  $mx - 2y + b = 0$  هست و از طرفی نقطه‌ای از خط است پس در معادله صدق می‌دهیم:

$$m(1) - 2(2) + b = 0 \Rightarrow m + b = 4 \quad (1)$$

فاصله  $O(0, 0)$  تا خط رو به دست بیاریم:

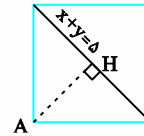
$$OH = 1 \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{m^2 + 4}} = 1 \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4} = |b| \xrightarrow{\text{توان } 2} m^2 + 4 = b^2$$

$$b^2 - m^2 = 4 \Rightarrow (b-m)(b+m) = 4 \xrightarrow{(1)} b - m = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + m = 4 \\ b - m = 1 \end{cases}$$

$$2b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{اولی}} \frac{5}{2} + m = 4 \Rightarrow m = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

**۳۵- گزینه «۴» متوسط**

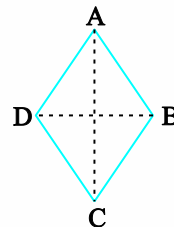


می‌دانیم که در مربع قطرهای هم برهم‌دیگر عمودند و هم یکدیگر را نصف می‌کنند. پس فاصله رأس  $A$  تا قطر رو به دست می‌آریم:

$$AH = \frac{|-2+1-5|}{\sqrt{1+1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

$AH$  نصف یک قطر است پس طول قطر دو برابر  $AH$  است یعنی  $6\sqrt{2}$

**۳۶- گزینه «۱» متوسط**



حواست باشه اگه خود سوال ترتیب اسم گذاری رأس‌های یک چندضلعی رو بهت نداد، خودت به ترتیب به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد اسم گذاری کنی پس  $ABCD$  اسم لوزی ما هست.

لوزی یک نوع متوازی‌الاضلاع هست پس ویژگی رئوس متوازی‌الاضلاع رو داره:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 6 + 6 = 5 + x_D \Rightarrow x_D = 7$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 8 = 5 + y_D \Rightarrow y_D = 5$$

$$\Rightarrow D(7, 5) \quad \begin{matrix} \text{هم طول} \\ \text{هم عرض} \end{matrix} \quad AC \quad |8-2|=6 = BD \quad |7-5|=2$$

$$\Rightarrow S_{\text{لوزی}} = \frac{1}{2} (\text{حاصل ضرب قطرها}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

**۳۷- گزینه «۳» دشوار**



از طرفی با حل دستگاه معادلات خط  $BC$  و  $AB$  می‌توان مختصات  $B$  را به دست آورد پس

$$3x - 2 = -\frac{1}{3}x - 2$$

$$x = 0, y = -2 \quad B(0, -2) \Rightarrow AB = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

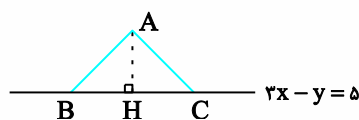
پس محیط مستطیل (عرض + طول)  $\times 2$

$$2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 2(3\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

### دشوار

### ۳۷- گزینه «ب»

محیط مثلث مورد سوال  $\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$  است پس طول هر ضلع آن  $\sqrt{30}$  خواهد بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  ضلع است یعنی:



$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{30} = \frac{\sqrt{90}}{2}$$

فاصله نقطه  $A$  تا خط  $3x - y = 5$  برابر  $\frac{\sqrt{90}}{2}$  است. پس با نوشتن معادله خط  $AH$  نقطه  $A$  را به صورت پارامتری نوشته و فاصله آن را از خط

$$3x - y = 5 \quad \text{برابر} \quad \frac{\sqrt{90}}{2} \quad \text{قرار می‌دهیم:}$$

$$\text{شیب: معادله خط } AH = -\frac{1}{3}$$

$$H = (2, 1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\text{نقطه } A \rightarrow (\alpha, \frac{5 - \alpha}{3})$$

$$\text{فاصله } AH: \frac{|3\alpha - \frac{5 - \alpha}{3} - 5|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{\sqrt{90}}{2} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{13}{2}$$

### متوسط

### ۳۸- گزینه «ا»

نقطه  $A$  به صورت  $(x, -x + a)$  است فاصله  $AB$  و  $AC$  را می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (-x+a-2)^2} = \sqrt{29} \Rightarrow 2x^2 + (10-2a)x + (a-2)^2 = 20$$

$$\sqrt{(x+1)^2 + (-x+a-4)^2} = 5 \Rightarrow 2x^2 + (10-2a)x + (a-4)^2 = 24$$

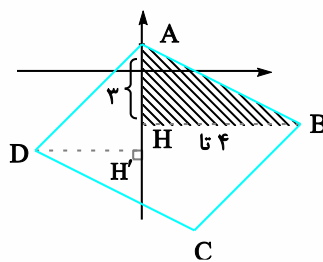
با برابر قرار دادن دو معادله ی فوق خواهیم داشت:

$$20 - (a-2)^2 = 24 - (a-4)^2$$

$$20 - (a^2 - 4a + 4) = 24 - (a^2 - 8a + 16)$$

$$20 - a^2 + 4a - 4 = 24 - a^2 + 8a - 16 \Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow a = 2$$

با استفاده از موقعیت نقاط روی دستگاه مختصات:



چون دو مثلث  $ABH$  و  $ADH'$  هم‌نهشت هستند پس

$$DH' = AH = 3 \Rightarrow x_D = -3$$

### متوسط

### ۳۵- گزینه «ا»

با توجه به فرمول فاصله نقطه از خط در مثلث  $ABC$  باید فاصله نقطه  $A$  تا

خط  $BC$  را به دست آوریم پس ابتدا معادله خط  $BC$  را می‌نویسیم:

$$\text{شیب } BC = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 3}{2 - 7} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$BC \text{ معادله خط } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 7)$$

$$\Rightarrow y - x + 4 = 0$$

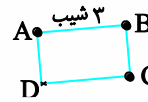
$$BC \text{ از } A \text{ فاصله } d = AH = \frac{|ae + bf + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ پس } \Rightarrow \frac{|5 - 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

با گویا کردن جواب نهایی

$$\frac{8}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$$

### دشوار

### ۳۶- گزینه «ب»



با توجه به شکل ابتدا معادله خط  $AB$  را می‌نویسیم:

$$A(2, 4) \quad \text{شیب} = 3$$

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 2$$

چون ضلع  $BC$  بر ضلع  $AB$  عمود است پس شیب‌های آن قرینه و معکوس

$$BC = -\frac{1}{3} \text{ شیب}$$

$$C(-3, -1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - 2$$

حال اگر، فاصله نقطه  $C$  از ضلع  $AB$  را به دست آوریم طول ضلع  $BC$  حساب

می‌شود پس

$$y - 3x + 2 = 0, C(-3, -1) \Rightarrow BC = \frac{|-1 + 9 + 2|}{\sqrt{1 + 9}}$$

$$= \frac{10}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

## ۳۹- گزینه «۲»

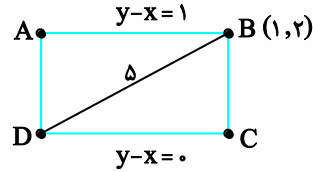
## دشوار

چون در خط موازی هستند داریم:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

اگر  $a = 1$  باشد نقطه  $(1, 2)$  در هیچ کدام از خطوط صدق نمی‌کند پس  $a = 1$  فقط می‌تواند باشد.

در جایگذاری نقطه  $(1, 2)$  روی رأس صدق نمی‌کند پس معادلات ضلع به صورت مقابل خواهد بود.



با استفاده از فاصله نقطه از خط طول ضلع BC را به دست می‌آوریم پس

$$BC = \frac{|2-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حال با استفاده از فیثاغورس در مثلث BCD داریم:

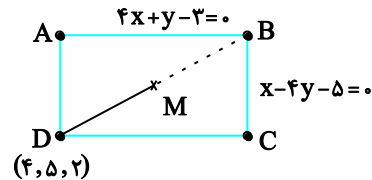
$$BD^2 = BC^2 + DC^2$$

$$5^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + DC^2 \Rightarrow 25 = \frac{1}{2} + DC^2 \Rightarrow 25 - \frac{1}{2} = DC^2 \Rightarrow DC^2 = \frac{49}{2}$$

$$DC = \frac{7}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{در نتیجه مساحت مستطیل}} S = BC \times DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = 3.5$$

## ۴۰- گزینه «۱»

## دشوار



بیشترین فاصله M از اضلاع، فاصله نقطه M تا ضلع BC خواهد بود پس می‌توان با محاسبه طول‌های مستطیل و نصف کردن آن‌ها به بیشترین فاصله M از اضلاع رسید پس ابتدا فاصله D تا خط BC را محاسبه می‌کنیم تا طول ضلع DC حساب شود.

$$DC = \frac{|4/5 - 8 - 5|}{\sqrt{16+1}} = \frac{8/5}{\sqrt{17}} = \frac{8}{5\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{85}$$

با گویا کردن جواب و نصف کردن آن به جواب مسئله می‌رسیم:

$$\frac{8\sqrt{17}}{85} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{8 \times \sqrt{17}}{85 \times \sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{85} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{4\sqrt{17}}{85}$$

$$AD = \frac{|4(4/5) + 2 - 3|}{\sqrt{16+1}} = \frac{17}{5\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{17\sqrt{17}}{85} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{17\sqrt{17}}{170}$$

## سوالات تشریحی

## پاسخنامه

## بخش ۲

## آسان

-۱

آ) چون ضریب صفر است پس  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{2}{3}$   
 $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$

ب) فاکتورگیری  $x(2x^2 + x + 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$2x^2 + x + 3 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$  ریشه ندارد

ب)  $x^2 = t$   
 $x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$   
 هرگاه عبارتی تکراری در معادلات یافتید آن را t بگیرد

ریشه ندارد  $x^2 = -1$   
 $a+c=b$  چون  
 پس  $x_1 = -1, x_2 = \frac{-c}{a}$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

ت)  $4 - x^2 = t$   
 $(4 - x^2)^2 - (4 - x^2) - 12 = 0 \rightarrow t^2 - t - 12 = 0$

جمله مشترک  $(t-4)(t+3) = 0 \Rightarrow t_1 = 4, t_2 = -3$

$4 - x^2 = t$   
 $4 - x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$   
 $4 - x^2 = -3 \Rightarrow 7 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$

ث)  $\frac{x^2}{3} - 2 = t$   
 $\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0 \rightarrow t^2 - 7t + 6 = 0$

چون جمع ضرایب صفر است ریشه‌ها یکی و دیگری  $\frac{c}{a}$  است  
 $t_1 = 1, t_2 = 6 \rightarrow \frac{x^2}{3} - 2 = t$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{3} - 2 = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 3 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ \frac{x^2}{3} - 2 = 6 \Rightarrow \frac{x^2}{3} = 8 \Rightarrow x^2 = 24 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{6} \end{cases}$$

## آسان

-۲

حواستون باشه! روش دیگری که برای یافتن صفرهای تابع یا ریشه‌های آن استفاده می‌کنند زمانی که ۱ ریشه عبارت را داشته باشند تقسیم چکشی است. یعنی  $f(x)$  بر  $x-a$  بخش‌پذیر است اگر  $a$  یک ریشه  $f(x)$  باشد. چون یکی از ریشه‌های این تابع  $(-2)$  است پس عبارت بر  $x+2$  بخش‌پذیر است. یعنی

$f(-2) = 0$



$$T) (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta \Rightarrow s^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2p$$

$$\Rightarrow s^2 - 2p = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (r)^2 - 2\left(\frac{r}{p}\right) = 9 - 3 = 6$$

$$B) (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \Rightarrow s^3 = \alpha^3 + \beta^3 + 3sp$$

$$\Rightarrow s^3 - 3sp = \alpha^3 + \beta^3$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (r)^3 - 3\left(\frac{r}{p} \times r\right) = 27 - \frac{27}{2} = \frac{27}{2}$$

$$P) (\alpha^2 + \beta^2)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 2(\alpha\beta)^2 \Rightarrow (s^2 - 2p)^2 = \alpha^4 + \beta^4 + 4p^2$$

$$\Rightarrow (s^2 - 2p)^2 - 4p^2 = \alpha^4 + \beta^4$$

$$(6)^2 - 2\left(\frac{r}{p}\right)^2 = 36 - 2\left(\frac{9}{2}\right) = 36 - \frac{9}{2} = \frac{63}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 &= s^2 - 2ps = \frac{27}{2} \\ \alpha^2 + \beta^2 &= s^2 - 2p = 6 \end{aligned} \right\} \text{ت)}$$

$$\xrightarrow{\text{درهم ضرب شوند}} (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^2 + \beta^2) = \frac{27}{2} \times 6$$

$$\alpha^4 + \alpha^2\beta^2 + \alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \lambda_1 \Rightarrow \alpha^4 + \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) + \beta^4 = \lambda_1$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = \lambda_1 - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$$

$$\alpha^4 + \beta^4 = \lambda_1 - p^2(s) = \lambda_1 - \left[\frac{9}{2} \times 3\right] = \frac{297}{2}$$

$$T) (\alpha^3 + \beta^3)^2 = \alpha^6 + \beta^6 + 2(\alpha\beta)^3$$

$$(s^3 - 3ps)^2 - 4p^3 = \alpha^6 + \beta^6$$

$$\Rightarrow \left(\frac{27}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{p}\right)^3 = \alpha^6 + \beta^6 = \frac{729}{4} - \frac{54}{8} = \alpha^6 + \beta^6$$

$$\Rightarrow 175/8 = \alpha^6 + \beta^6$$

$$J) \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2 \Rightarrow s + 2\sqrt{p} = A^2$$

$$\sqrt{s + 2\sqrt{p}} = A \Rightarrow \sqrt{6 + 2\sqrt{\frac{27}{2}}} = A = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$$

$$J) \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{s}{p} = \frac{1}{\frac{r}{p}} = 2$$

$$H) \beta\sqrt{\beta} + \alpha\sqrt{\alpha} = A \xrightarrow{\text{توان ۲}} (\beta\sqrt{\beta} + \alpha\sqrt{\alpha})^2 = A^2$$

$$\Rightarrow \beta^3 + \alpha^3 + 2\alpha\beta\sqrt{\alpha\beta} = A^2$$

$$s^3 - 3sp + 2p\sqrt{p} = A^2$$

$$\sqrt{3^3 - 2\left(\frac{9}{2}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right)\sqrt{\frac{27}{2}}} = \sqrt{\frac{27}{2} + 3\sqrt{\frac{27}{2}}}$$

$$X) \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta} + \frac{\sqrt{\beta}}{\alpha} = \frac{\alpha\sqrt{\alpha} + \beta\sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \xrightarrow{\text{قسمت (ج)}} \frac{\sqrt{\frac{27}{2}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 2 \frac{\sqrt{\frac{27}{2}} + 3\sqrt{\frac{3}{2}}}{3}$$

$$(-2)^3 + k(-2)^2 - (-2) - 2 = 0$$

$$-8 + 4k + 2 - 2 = 0 \Rightarrow 4k = 8 \Rightarrow k = 2$$

پس  $f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$  است حال با تقسیم چکشی عبارت بر  $x + 2$  تجزیه آن را داریم:

$$\begin{array}{r} x^3 + 2x^2 - x - 2 \quad | \quad x + 2 \\ \underline{-(x^3 + 2x^2)} \phantom{-x - 2} \\ -x - 2 \\ \underline{-(x + 2)} \\ 0 \end{array}$$

با تجزیه عبارت  $(x^2 - 1)(x + 2)(x - 1) : (x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0$  و ریشه‌ها  $x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = -1$

### آسان

حواستون باشه! برای نوشتن معادله درجه دو زمانی که ریشه‌های آن را دارید از رابطه  $x^2 - Sx + P = 0$  استفاده می‌کنید.

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}, \quad S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$S = 2 + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 4$$

$$P = (2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

پس معادله درجه ۲،  $x^2 - 4x + 1 = 0$  است.

### آسان

مستطیل روبه رو را در نظر بگیرید با توجه به اطلاعات مستطیل اگر  $\alpha, \beta$  را ریشه‌های معادله درجه ۲ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$\alpha \quad \beta \quad \text{محیط: } 2(\alpha + \beta) = 11 \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{11}{2} = S$$

$$\text{مساحت: } \alpha\beta = 6 = P$$

$$x^2 - \frac{11}{2}x + 6 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 11x + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac = (-11)^2 - 4(12) = 121 - 48 = 73$$

چون دلتا مثبت است پس این معادله ۲ ریشه دارد.

$$\text{ریشه‌ها} = \frac{11 \pm \sqrt{73}}{2(2)}$$

$$\alpha = \frac{11 + \sqrt{73}}{4}, \quad \beta = \frac{11 - \sqrt{73}}{4}$$

### متوسط

حواستون باشه! در کتاب درسی روابطی که برای  $S$  و  $P$  بیان شده تنها

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$P = \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

$$|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

روابط به دست آمده در قسمت آ، ب، ج و د را به خاطر بسپارید.

در معادله داده شده  $2x^2 - 6x + 3 = 0$ ،  $S = 3$  و  $P = \frac{3}{2}$  است پس:



$$y = -(x-2)^2 + 1$$

**آسان -۸**

حواستون باشه‌ها!

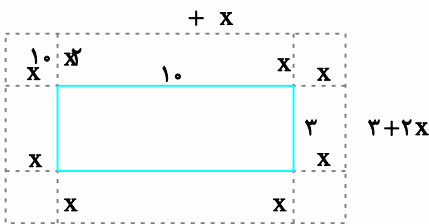
- (۱) علامت **a**: دهنه سهمی (بالا **a** مثبت، پایین **a** منفی) در معادله درجه ۲.
- (۲) علامت **b**: روش کتاب (از روی  $x_S$  تعیین می‌شود)  $ax^2 + bx + c = 0$  روش دیگر (شیب محل برخورد با محور **y**‌ها)
- (۳) علامت **c**: محل برخورد با محور **y**‌ها
- (۴) علامت  $\Delta$ : تعداد محل برخورد با محور **x**‌ها

در این سهمی چون دهنه سهمی به سمت بالاست پس  $c > 0$  است. چون  $x_S$  در قسمت منفی‌هاست پس

$$b < 0 \Leftrightarrow (-) = \frac{+(b)}{2(+)} \Leftrightarrow x_S = \frac{-b}{2a}$$

چون محل برخورد با محور **y**‌ها مثبت است پس  $a > 0$  و در آخر چون ۲ ریشه دارد  $\Delta > 0$

**متوسط -۹**



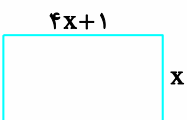
مساحت آبراه از تفاضل مساحت‌های دو مستطیل در شکل مقابل به دست می‌آید.

$$(10 + 2x)(3 + 2x) - 10 \times 3 = 14$$

$$4x^2 + 26x + 30 - 30 = 14 \Rightarrow 4x^2 + 26x - 14 = 0$$

$$(4x - 2)(x + 7) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -7$$

**آسان -۱۰**



S دیوار = (s یک کاشی) × (تعداد کاشی)

$$2000 \times S = 6000 \text{ cm}$$

$$S = (4x + 1)(x)$$

$$S = 3 \text{ cm}$$

$$3 = 4x^2 + x \Rightarrow 0 = 4x^2 + x - 3$$

$$\begin{aligned} \text{د) } \alpha\beta^4 + \beta\alpha^4 &= \alpha\beta(\alpha^3 + \beta^3) = p(s^3 - 3ps) = \frac{3}{2}(27 - 3(\frac{9}{2})) \\ &= \frac{3}{2}(27 - \frac{27}{2}) \Rightarrow \frac{3}{2}(\frac{27}{2}) = \frac{81}{4} \end{aligned}$$

**آسان -۶**

حواستون باشه‌ها! رأس سهمی زمانی که دهنه سهمی به سمت بالا است

( $a > 0$ ) مینیمم سهمی محسوب می‌شود (**min**) و رأس سهمی زمانی که

دهنه سهمی به سمت پایین است ( $a < 0$ ) ماکزیمم سهمی است (**max**)

$$\text{آ) } f(x) = -2x^2 + 8x - 5 \Rightarrow \begin{cases} x_S = -\frac{b}{2a} = \frac{-8}{2(-2)} = \frac{-8}{-4} = 2 \\ y_S = \frac{-\Delta}{4a} \text{ یا } x_S \text{ جایگذاری} \end{cases}$$

$$y_S = -2(2)^2 + 8(2) - 5 = -8 + 16 - 5 = 3$$

چون دهنه سهمی به سمت پایین است ماکزیمم است.

ب)  $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_S = \frac{-6}{6} = -1 \\ y_S = 3(-1)^2 + 6(-1) + 5 = 3 - 6 + 5 = 2 \end{cases}$$

چون دهنه سهمی به سمت بالا است مینیمم است.

**آسان -۷**

حواستون باشه‌ها! برای نوشتن معادله سهمی زمانی که دو ریشه داده شده باشد

از رابطه  $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$  و زمانی که رأس سهمی داده شده باشد از

رابطه  $y = a(x - x_S)^2 + y_S$  استفاده می‌کنیم.

آ) در این سهمی محور تقارن داده شده است و از سال دهم می‌دانیم که

فاصله ریشه‌ها تا محور تقارن سهمی یکسان است پس ریشه دیگر این سهمی  $x = 4$  است.

$$y = a(x - 2)(x - 4) \xrightarrow[\text{برای پیدا کردن } a]{\begin{matrix} 0 \\ 4 \end{matrix} \text{ جایگذاری نقطه}} 4 = a(0 - 2)(0 - 4)$$

$$4 = 8a \Rightarrow \frac{1}{2} = a$$

$$y = \frac{1}{2}(x^2 - 6x + 8) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$$

ب) در این شکل رأس سهمی داده شده است پس:

$$y = a(x - 2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a(1 - 2)^2 + 1 \Rightarrow 0 = a + 1 \Rightarrow a = -1$$



$$\Rightarrow m^2 + 4m + 4 - 4m - 20 > 0 \Rightarrow m^2 - 16 > 0 \Rightarrow m > 4 \text{ یا } m < -4$$

از اشتراک این سه شرط خواهیم داشت  $m > 4$

**متوسط**

**-۱۴**

حواستون باشه! در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  مجموع مربعات ریشه‌ها

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p$$

و در آخر همیشه چک شود که  $\Delta > 0$

$$2x^2 + (m-1)x - 1 = 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = \left(\frac{-(m-1)}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{13}{4}$$

$$\frac{m^2 - 2m + 1}{4} + 1 = \frac{13}{4} \Rightarrow \frac{m^2 - 2m + 1}{4} = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 9 \Rightarrow m^2 - 2m - 8 = 0 \Rightarrow (m-4)(m+2) = 0$$

$$\Rightarrow m = 4, m = -2$$

اگر  $m = 4 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-2) = 9 + 8 = 17 > 0$

اگر  $m = -2 \Rightarrow 2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(-2) = 9 + 8 = 17 > 0$

هر دو قابل قبول هستند چون  $\Delta > 0$  را حفظ کرده‌اند.

**دشواری**

**-۱۵**

حواستون باشه! اگر از فرمول‌های مربوط به  $\alpha, \beta$  نتوانستیم استفاده کنیم از تعریف ریشه استفاده می‌کنیم.

$$x^2 - 2x - 4 = 0 \quad s = 2, p = -4$$

چون  $\alpha$  ریشه معادله است پس در آن صدق می‌کند در نتیجه

$$\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 4 = 2\alpha$$

در نتیجه در عبارت  $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$  می‌توان  $2\alpha$  را جایگذاری کرد پس:

$$(2\alpha)^2 + 4\beta^2 = 4\alpha^2 + 4\beta^2 = 4(\alpha^2 + \beta^2) = 4(s^2 - 2p)$$

$$= 4(4 - 2(-4)) = 4(4 + 8) = 4(12) = 48$$

**متوسط**

**-۱۶**

حواستون باشه! شرط آن که معادله درجه دو، ۲ ریشه حقیقی مثبت داشته باشد.

$$\Delta > 0, s > 0, p > 0$$

$$1) s > 0 \Rightarrow \frac{2m+2}{1} > 0 \Rightarrow 2m > -2 \Rightarrow m > -1$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{m^2-4}{1} > 0 \Rightarrow m^2 > 4 \Rightarrow m > 2 \text{ یا } m < -2$$

ق ق  $x_1 = -1, x_2 = \frac{3}{4}$  غ ق

**آسان**

**-۱۱**

(۱) ریشه مضاعف یعنی  $\Delta = 0$

(۲) ریشه مثبت مضاعف  $-\frac{b}{2a} > 0$

حواستون باشه!

$$\Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16 - 4(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow 16 - 4m^2 + 12m = 0$$

$$4m^2 - 12m - 16 = 0 \Rightarrow 4(m^2 - 3m - 4) = 0 \Rightarrow m = -1, m = 4$$

ریشه مثبت  $m = -1 \Rightarrow -x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2(-1)} = 2$

ریشه منفی  $m = 4 \Rightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{4(4)} = -\frac{1}{4}$

پس  $m = -1$  قابل قبول است چون ریشه مثبت تولید کرده است.

**آسان**

**-۱۲**

(۱) معادله درجه دوم زمانی دو ریشه حقیقی متمایز دارد که

$$\Delta > 0$$

حواستون باشه!

(۲) در معادله درجه دوم ضریب  $x^2$  نباید صفر باشد.

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow 36 - 4(2m^2 - 5m + 2) > 0$$

$$9 - 2m^2 + 5m - 2 > 0 \Rightarrow 0 > -2m^2 + 5m + 7$$

$$m = -1, m = \frac{7}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
		$-$	$+$	$-$
		$\frac{7}{2}$		$-\infty$

$$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

$$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$$

$$a \neq 0 \Rightarrow 2m - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \frac{1}{2}$$

با اشتراک دو شرط خواهیم داشت  $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$

**دشواری**

**-۱۳**

حواستون باشه! معادله درجه ۴ زمانی ۴ ریشه حقیقی متمایز دارد که  $\Delta > 0, s > 0, p > 0$  باشد.

$$1) s > 0 \Rightarrow \frac{m+2}{1} > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{m+5}{1} > 0 \Rightarrow m > -5$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (m+2)^2 - 4(m+5) > 0$$





$$= \frac{1}{2} - 3 + 1 = -\frac{3}{2}$$

پس  $x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$  و یا در صورت ساده کردن  $2x^2 - 2x - 3 = 0$

**دشوار**

-۲۰

اگر ریشه‌های معادله  $3x^2 - 4x + 1 = 0$  را  $\alpha, \beta$  در نظر بگیریم

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{1}{3}$$

پس ریشه‌های معادله  $3x^2 - 7mx + 2 = 0$ ،  $\alpha^3$  و  $\beta^3$  خواهد بود پس

$$s = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\frac{\alpha + \beta = \frac{4}{3}}{\alpha\beta = \frac{1}{3}} \rightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{3} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{64}{27} - \frac{4}{3} = \frac{28}{27}$$

از طرفی از روی معادله  $s = -\frac{b}{a}$  داریم  $s = \frac{7m}{3}$  جدید

از تساوی این دو مقدار خواهیم داشت

$$\frac{28}{27} = \frac{7m}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{9}$$

**آسان**

-۲۱

حواستون باشهها! (۱) پائین‌ترین نقطه سهمی، رأس سهمی است  $x_s = -\frac{b}{2a}$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a}$$

(۲) در ناحیه دوم  $x < 0$  و  $y > 0$  است.

x	$-\infty$	۰	۱	$+\infty$
	+	-	+	

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{+2m}{2(m-1)} < 0 \Rightarrow 0 < m < 1 \quad (1)$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-[4m^2 - 4(m^2 - 4m + 3)]}{4(m-1)} > 0$$

$$\frac{-4m^2 + 4m^2 - 16m + 12}{4(m-1)} > 0 \Rightarrow \frac{-16m + 12}{4(m-1)} > 0$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	۱	$+\infty$
	-	+	-	

$$m = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}, m = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} < m < 1 \quad (2)$$

جواب نهایی اشتراک (۱) و (۲) است

$$\frac{3}{4} < m < 1$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow (2m+2)^2 - 4(m^2-4) > 0$$

$$\Rightarrow 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 16 > 0 \Rightarrow 8m + 20 > 0 \Rightarrow m > -\frac{5}{2}$$

با اشتراک سه شرط خواهیم داشت:  $m > 2$

**متوسط**

-۱۷

حواستون باشهها! معادله درجه دو زمانی دو ریشه حقیقی منفی دارد که

$$\Delta > 0, s < 0, p > 0$$

x	۰	۵
	+	-
		ع
		+

$$1) s > 0 \Rightarrow \frac{ra}{a-5} < 0 \Rightarrow 0 < a < 5$$

$$2) p > 0 \Rightarrow \frac{-4}{a-5} > 0 \Rightarrow a-5 < 0 \Rightarrow a < 5$$

$$3) \Delta > 0 \Rightarrow 4a^2 - 4(-4a+20) > 0 \Rightarrow 4a^2 + 16a - 80 > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} a^2 + 4a - 20 > 0$$

$$\Delta = +16 - 4(-20) = 16 + 80 = 96$$

$$a = \frac{-4 \pm 4\sqrt{6}}{2}$$

$$a < -2 - 2\sqrt{6} \cup a > -2 + 2\sqrt{6}$$

اشتراک این سه جواب جواب نهایی سوال است.  $-2 + 2\sqrt{6} < a < 5$

**دشوار**

-۱۸

حواستون باشهها! به معادلاتی به فرم  $ax + b\sqrt{x} + c = 0$ ، معادلات نیم

مجذوری گفته می‌شود و زمانی این معادلات ۱ ریشه حقیقی دارند که  $p < 0$  و

$$\Delta = 0 \text{ یا}$$

x	۱	۲
	-	+
		-

$$p < 0 \Rightarrow \frac{-m+2}{m-1} < 0$$

$$m: (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

**متوسط**

-۱۹

حواستون باشهها! از رابطه  $x^2 - sx + p = 0$  برای نوشتن معادله استفاده

می‌کنیم:

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \Rightarrow s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} = 6, p = \alpha\beta = \frac{c}{a} = 1$$

ما به دنبال معادله‌ای هستیم که جواب‌های آن  $\frac{\alpha}{2} - 1, \frac{\beta}{2} - 1$  باشد پس

$$\text{جدید } s = \frac{\alpha}{2} - 1 + \frac{\beta}{2} - 1 = \frac{\alpha + \beta}{2} - 2 \xrightarrow{\alpha + \beta = 6} \frac{6}{2} - 2 = 1$$

$$\text{جدید } p = \left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\frac{\beta}{2} - 1\right) = \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + 1 = \frac{\alpha\beta}{4} - \frac{\alpha + \beta}{2} + 1$$

پس  $m = 0$  قابل قبول است

اگر  $m = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 4(-12) = 48 > 0$

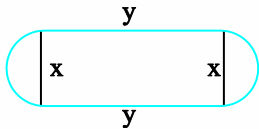
پس  $m = \frac{3}{2}$  قابل قبول است

اگر  $m = \frac{3}{2} \Rightarrow 3x^2 - \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 - 4(-\frac{15}{2}) = 30 > 0$

**دشوار**

-۲۷

محیط استادیوم تشکیل شده است از  $2y$  و یک دایره کامل پس



محیط =  $2\pi r + 2y$

$1500 = 2\pi(\frac{x}{2}) + 2y \Rightarrow 1500 = \pi x + 2y$

$y = \frac{1500 - \pi x}{2} = 750 - \frac{\pi}{2}x$

آ)  $S = xy \Rightarrow S = x(\frac{1500 - \pi x}{2}) \Rightarrow S = 750x - \frac{\pi}{2}x^2$

ابعاد مستطیل  $y_s = 750 - \frac{\pi}{2}(\frac{750}{\pi})^2 = 375$ ,  $x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-750}{2(-\frac{\pi}{2})} = \frac{750}{\pi}$

ب)  $S = xy + \pi r^2 \Rightarrow S = xy + \pi(\frac{x}{2})^2 = xy + \pi(\frac{x^2}{4})$

$S = x(750 - \frac{\pi}{2}x) + \pi(\frac{x^2}{4}) = 750x - \frac{\pi}{2}x^2 + \frac{\pi}{4}x^2 = 750x - \frac{\pi}{4}x^2$

ابعاد مستطیل  $x_s = \frac{-750}{2(-\frac{\pi}{4})} = \frac{-750}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{1500}{\pi}$

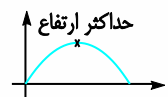
$y_s = 750 - \frac{\pi}{2}(\frac{1500}{\pi}) = 750 - 750 = 0$

**متوسط**

-۲۸

آ) حداکثر ارتفاع توپ زمانی اتفاق می‌افتد که در رأس سهمی قرار داشته باشد

پس:



$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1-4(0))}{4(-\frac{1}{4})} = \frac{-1}{-1} = 1$

ب) حداکثر مسافت طی شده زمانی اتفاق می‌افتد که توپ دوباره با زمین

برخورد کند یعنی  $y = 0$

**متوسط**

-۲۹

حواستون باشه‌ها! سهمی زمانی از هر چهار ناحیه مختصات می‌گذرد که  $p < 0$

$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2m-4} < 0 \Rightarrow 2m-4 < 0 \Rightarrow m < 2$

**متوسط**

-۳۰

اگر یک ریشه ۵ واحد از ریشه دیگر بزرگ‌تر باشد می‌توان نوشت

$\alpha = 5 + \beta$

از طرفی از روی معادله  $s$  و  $p$  را به دست آورده و  $\alpha = 5 + \beta$  را در آن‌ها جایگذاری می‌کنیم:

$s = -\frac{b}{a} = \alpha + \beta \Rightarrow -\frac{2m}{m} = 5 + \beta + \beta \Rightarrow -2 = 5 + 2\beta \Rightarrow -7 = 2\beta \Rightarrow \beta = -3.5, \alpha = 1.5$

$p = \frac{c}{a} = \alpha\beta \Rightarrow \frac{m^2}{m} = -4 \Rightarrow m = -4$

**آسان**

-۳۱

چون یک ریشه  $k$  برابر ریشه دیگر است پس  $\alpha = 2\beta$

$s = \alpha + \beta = \frac{-b}{a}$

$2\beta + \beta = 9 \Rightarrow 3\beta = 9 \Rightarrow \beta = 3, \alpha = 6$

$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow 18 = \frac{m+1}{1} \Rightarrow m = 17$

حواستون باشه‌ها! این سوال اگر تشریحی نبود می‌توانستیم از فرمول

$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{ac}, \alpha = k\beta$  استفاده کنیم.

$\frac{(2+1)^2}{2} = \frac{(-9)^2}{m+1} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{81}{m+1} \Rightarrow m+1 = 18 \Rightarrow m = 17$

**متوسط**

-۳۲

ابتدا معادله را مرتب می‌کنیم:

$ax^2 + 3ax - a^2 + 2 = 0$

حواستون باشه‌ها! ریشه‌ها معکوس یکدیگرند یعنی  $\alpha = \frac{1}{\beta}$  و یا به عبارتی

$a = c$

$a = -a^2 + 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0 \Rightarrow (a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$

مجموع مقادیر  $a = -2 + 1 = -1$

**متوسط**

-۳۳

حواستون باشه‌ها! (۱) معادله درجه دو زمانی دو ریشه قرینه دارد  $b = 0$

(۲)  $\Delta > 0$  چک کردن

(۱)  $2m^2 - 3m = 0 \Rightarrow m(2m-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{3}{2} \end{cases}$

$$x_S = \frac{-2}{2\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}-6}{4}} = \frac{-4}{\sqrt{3}-6} = \frac{4}{6-\sqrt{3}}$$

و با جایگذاری در رابطه  $y$ :

$$y = 2 - \frac{3}{2}\left(\frac{4}{6-\sqrt{3}}\right) = 2 - \frac{6}{6-\sqrt{3}} = \frac{12-2\sqrt{3}-6}{6-\sqrt{3}} = \frac{6-2\sqrt{3}}{6-\sqrt{3}}$$

### متوسط

۳۱-

(آ) چقدر طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن برسد، به معنای  $t_s$  است.

$$t_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-5)} = 10$$

$$h_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[10000 - 4(0)]}{4(-5)} = \frac{-10000}{-20} = 500 \text{ متر} \quad (\text{ب})$$

(پ) بازگشت راکت به زمین به معنای محل برخورد با محور  $x$  هاست یعنی ریشه‌ها

$$100t - 5t^2 = 0 \Rightarrow 5t(20-t) = 0 \Rightarrow t = 0, t = 20$$

در لحظه صفر و ۲۰ ثانیه به زمین برخورد می‌کند.

### آسان

۳۲-

حواستون باشه‌ها! این نکته‌ای است که در کنکور چند بار استفاده شده.

اگر در یک سهمی ۲ نقطه روی نمودار سهمی با عرض‌های یکسان وجود داشته باشد  $x$  رأس سهمی از میانگین  $x$ ‌های دو نقطه به دست می‌آید.

$$x_S = \frac{0 + (-2)}{2} = -1$$

محور تقارن سهمی از رأس سهمی می‌گذرد.

### دشوار

۳۳-

صفرهای تابع به معنای ریشه‌های سهمی است پس:

$$\alpha\beta = \frac{\beta}{25\alpha} \Rightarrow 25\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

$$\alpha > \beta \rightarrow \text{چون} \rightarrow \alpha > \beta$$

$$\alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow y = 25\left(\frac{1}{5}\right)x^2 + 4x + \beta$$

$$\text{چون } \alpha \text{ ریشه است} \rightarrow 25\left(\frac{1}{5}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{5}\right) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = -1$$

$$\alpha = -\frac{1}{5} \Rightarrow 25\left(-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{5}\right) + \beta = 0 \Rightarrow \beta = 1 \text{ ق ق}$$

$$-5x^2 + 4x + 1 = 0 \quad \text{پس معادله به صورت}$$

$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}, y_S = \frac{-[16 - 4(-5)]}{4(-5)} = \frac{-[16 + 20]}{-20} = \frac{36}{20}$$

پس ناحیه اول قرار دارد.

$$-\frac{1}{4}x^2 + x = 0 \Rightarrow x\left(-\frac{1}{4}x + 1\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ در زمان شروع}$$

$$-\frac{1}{4}x + 1 = 0 \Rightarrow -\frac{1}{4}x = -1 \Rightarrow x = 4$$

$x = 4$  پس از ۴ متر بیش‌ترین مسافت طی کرده است.

### دشوار

۳۹-

مرحله اول: ابتدا درباره محیط محیط نرده صحبت شده است پس

$$y = 100 - 2x, 2x + y = 100$$

در مرحله دوم درباره بیش‌ترین مساحت سوال پرسیده است پس

$$S = xy$$

اما این معادله در طرف دوم برحسب دو مجهول نوشته شده است پس از اطلاعات مرحله اول استفاده می‌کنیم

$$S = x(100 - 2x) \Rightarrow S = 100x - 2x^2$$

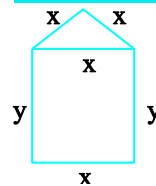
$$x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-100}{2(-2)} = \frac{100}{4} = 25$$

چون ابعاد مستطیل خواسته است پس  $x_S$  را در رابطه  $y$  جایگذاری می‌کنیم:

$$y = 100 - 2(25) = 100 - 50 = 50$$

### دشوار

۳۰-



حواستون باشه‌ها! مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  به دست می‌آید.

(۱) ابتدا درباره محیط پنجره صحبت شده است که

$$y = \frac{4-3x}{2} \leftarrow 3x + 2y = 4 \text{ سپس درباره حداکثر نوردی صحبت شده}$$

که به مساحت پنجره برمی‌گردد.

$$S = \text{مستطیل} + S = \text{متساوی‌الاضلاع} = \text{پنجره}$$

این مساحت چون طرف دوم برحسب  $x$  و  $y$  نوشته شده است از اطلاعات (۱)

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + xy \text{ پنجره استفاده می‌کنیم.}$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + x\left(\frac{4-3x}{2}\right) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + 2x - \frac{3}{2}x^2$$

$$S = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{2}\right)x^2 + 2x$$

$$x_S = \frac{-b}{2a}$$

باشد پس:

$$۱۲ + ۲k - ۳ - k < ۰ \Rightarrow ۹ + k < ۰ \Rightarrow k < -۹$$

و چون دو ریشه دارد پس:  $\Delta > ۰$

$$k^2 - 4(-9 - 3k) > ۰ \Rightarrow k^2 + 36 + 12k > ۰ \Rightarrow k^2 + 12k + 36 > ۰$$

$$\Delta = 144 - 4(36) = 144 - 144 = ۰$$

یک ریشه همواره مثبت است پس از اشتراک دو جواب خواهیم داشت:

$$k < -۹$$

### متوسط

۴۰-

x

y

$$2(x+y) = 240 \Rightarrow x+y = 120 \Rightarrow y = 120 - x$$

$$xy = x(120 - x) = 120x - x^2 \Rightarrow x_S = \frac{-b}{2a} = \frac{-120}{2(-1)} = 60$$

$$y_S = 120 - 60 = 60$$



### متوسط

۱- گزینه «۴»

اگر  $x + \frac{1}{x} = t$  در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$(x + \frac{1}{x})^2 = (t)^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} + 2(x \cdot \frac{1}{x}) = t^2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$$

پس با جایگذاری در معادله خواهیم داشت:

$$t + t^2 - 2 = 4 \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$t = -3, t = 2$$

$$x + \frac{1}{x} = -3, x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 + 1 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Delta = 9 - 4 = 5$$

### آسان

۲- گزینه «۲»

اگر  $x^2 + 2x = t$  در نظر بگیریم

$$t^2 + 10t - 39 = 0 \Rightarrow (t+13)(t-3) = 0$$

$$t = -13, t = 3$$

### متوسط

۳۴-

حواستون باشه! اگر دو نقطه روی نمودار سهمی باشد و دارای ی‌های یکسان

باشد  $x_S$  سهمی میانگین بین  $x$ های دو نقطه است. پس:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-1/5 + 3}{2} \Rightarrow \alpha + \beta = 1/5$$

### متوسط

۳۵-

$$2x + 3y = 120 \Rightarrow 2x = 120 - 3y \Rightarrow x = 60 - \frac{3}{2}y$$

$$xy = (60 - \frac{3}{2}y)y = 60y - \frac{3}{2}y^2$$

$$\text{مقدار ماکزیمم} = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[60^2 - 4(0)]}{4(-\frac{3}{2})} = \frac{-3600}{-6} = 600$$

### متوسط

۳۶-

چون یک ریشه  $\sqrt{5} + 3$  است پس

$$x = \sqrt{5} + 3 \Rightarrow x - 3 = \sqrt{5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 - 6x + 9 = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4(4) = 36 - 16 = 20$$

$$\text{ریشه} = \frac{+6 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \Rightarrow 3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}$$

### آسان

۳۷-

$$\alpha = \beta + 2$$

$$S = \alpha + \beta = \frac{-b}{a} \Rightarrow \beta + 2 + \beta = \frac{2}{2} \Rightarrow 2\beta + 2 = 1$$

$$\Rightarrow 2\beta = -1 \Rightarrow \beta = \frac{-1}{2}$$

$$\alpha = -\frac{1}{2} + 2$$

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow (\frac{3}{2})(-\frac{1}{2}) = \frac{k}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} = k$$

### متوسط

۳۸-

در معادله داده شده  $S = \alpha + \beta = -\frac{4}{2} = -2$  است پس  $\alpha = -2 - \beta$

یعنی ریشه‌های معادله ۲ واحد با یکدیگر اختلاف دارند و ناهم علامتند

$$p = \frac{c}{a} = (-2 - \beta)(\beta) = -\frac{1}{2}$$

$$(2 + \beta)(\beta) = \frac{1}{2}$$

$$(\beta(\beta + 2))^{1397} + (\alpha(\alpha + 2))^{1397} = (\frac{1}{2})^{1397} \times (\frac{1}{2})^{1397} = (\frac{1}{4})^{1397}$$

### دشواری

۳۹-

جدول تعیین علامت به صورت 

+	+	+
+	-	+

 است پس:

یعنی به ازای عدد ۲ حاصل این عبارت منفی خواهد بود:



$$2\sqrt{15} = 8 - x^2 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 60 = 64 + x^4 - 16x^2$$

با مرتب کردن معادله خواهیم داشت:

$$x^4 - 16x^2 + 64 - 60 = 0 \Rightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-16}{4} = -4 \text{ در نتیجه } b = 4, a = -16 \text{ خواهد بود}$$

**آسان**

**۵- گزینه «۱»**

حواستون باشهها!

(۱) در هر معادله‌ای اگر جمع ضرایب صفر باشد یکی از ریشه‌های آن معادله  $x=1$  است.

(۲) اگر  $f(a)=0$  باشد  $f(x)$  بر  $x-a$  بخش پذیر است.

چون جمع ضرایب صفر است پس حتماً  $x=1$  یکی از ریشه‌هاست و عبارت بر  $x-1$  بخش پذیر است.

$$\begin{array}{r} \cancel{3x^4} - 11x^2 + 5x + 3 \quad | \quad \frac{x-1}{3x^2 - 8x - 3} \\ \underline{\cancel{3x^4} + 3x^2} \phantom{+ 5x + 3} \\ -8x^2 + 5x + 3 \\ \underline{+ 8x^2 - 8x} \\ -3x + 3 \\ \underline{+ 3x - 3} \\ 0 \end{array}$$

پس تجزیه عبارت:

$$(x-1)(3x^2 - 8x - 3) = 0 \Rightarrow (x-1)(3x+1)(x-3) = 0$$

$$(x=1) + (x=-\frac{1}{3}) + (x=3) = \frac{11}{3}$$

**متوسط**

**۶- گزینه «۱»**

حواستون باشهها! اگر در معادله‌ای درجه دو  $ax^2 + bx + c = 0$  با شرط  $\Delta > 0$  یک ریشه  $k$  برابر ریشه دیگر باشد:

$$\frac{(k+1)^2}{k} = \frac{b^2}{ac}$$

$$\frac{(2+1)^2}{2} = \frac{3^2}{m^2 - m} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{9}{m^2 - m} \Rightarrow m^2 - m - 2 = 0$$

$$(m-2)(m+1) = 0 \Rightarrow m=2, m=-1$$

شرط  $\Delta > 0$

$$m=-1 \Rightarrow -2x^2 + 3x - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2) = 1 > 0$$

$$m=2 \Rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 9 - 4(2) = 1 > 0$$

$$x^2 + 2x = -13 \Rightarrow x^2 + 2x + 13 = 0$$

$$\Delta = 4 - 4(13)$$

ریشه ندارد  $\Delta = 4 - 52 = -48$

$$x^2 + 2x = 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x=1, x=-3$$

**دشوار**

**۳- گزینه «۳»**

حواستون باشهها!

(۱) ریشه، صفر کننده معادله است و اگر  $f(a)=0$  باشد  $f(x)$  بر  $x-a$  بخش پذیر است.

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p \quad (2)$$

چون یکی از ریشه‌های معادله را  $x=4$  داده است پس در ابتدا آن را صدق می‌دهیم.

$$(4)^2 - 8(4)^2 + a(4) + 4 = 0 \Rightarrow 64 - 128 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$4a = 60 \Rightarrow a = 15$$

پس:

$$\begin{array}{r} \cancel{x^4} - 8x^2 + 15x + 4 \quad | \quad \frac{x-4}{x^2 - 4x - 1} \\ \underline{\cancel{x^4} + 4x^2} \\ \cancel{3x^2} + 15x + 4 \\ \underline{+ 4x^2 - 16x} \\ -x + 4 \\ \underline{+ x - 4} \\ 0 \end{array}$$

پس تجزیه عبارت  $(x-4)(x^2 - 4x - 1) = 0$  خواهد بود  $S=4$  و  $p=-1$

$\alpha, \beta$  ریشه‌های پراتنز دوم هستند پس

$$\alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2p = 16 - 2(-1) = 16 + 2 = 18$$

در نتیجه پاسخ:

$$\alpha^2 + \beta^2 + a = 18 + 15 = 33$$

**دشوار**

**۴- گزینه «۲»**

چون  $\sqrt{3} - \sqrt{5}$  یک ریشه معادله است پس:

$$x = \sqrt{3} - \sqrt{5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} x^2 = 3 + 5 - 2\sqrt{15}$$

$$x^2 = 8 - 2\sqrt{15}$$



پس  $c=4$  و همچنین  $y_S = -3$  و  $\begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$  در معادله سهمی صدق می‌کند پس

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow y = ax^2 + bx + 4$$

$$4 = 25a + 5b + 4 \Rightarrow 0 = 25a + 5b \Rightarrow -5b = 25a$$

$$b = -5a \Rightarrow b^2 = 25a^2 (*)$$

از طرفی  $y_S = -3$  پس

$$-\frac{\Delta}{4a} = -3 \Rightarrow \frac{b^2 - 4(fa)}{4a} = 3 \Rightarrow 25a^2 - 16a = 12a \Rightarrow 25a^2 - 28a = 0$$

$$a(25a - 28) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ و } a = \frac{28}{25}$$

با جایگذاری در عبارت (\*)

$$b^2 = 25 \times \frac{28^2}{25^2} = \frac{28^2}{25} \Rightarrow b = \frac{28}{5}$$

پس معادله سهمی به صورت  $y = \frac{28}{25}x^2 + \frac{28}{5}x + 4$  است.

$$S = -5, p = \frac{5}{7}$$

حالا ما معادله سهمی می‌خواهیم که ریشه‌های آن  $\frac{1}{\beta}, \frac{1}{\alpha}$  باشد. از رابطه

$$x^2 - sx + p = 0$$

$$S = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{-5}{\frac{5}{7}} = -7$$

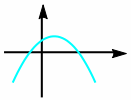
$$P = \left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{\frac{5}{7}} = \frac{7}{5}$$

پس معادله سهمی به صورت  $x^2 + 7x + \frac{7}{5} = 0$  و یا مرتب شده آن

$$5x^2 + 35x + 7 = 0$$

### دشوار

### ۱- گزینه ۳»



مرحله اول سوال به تعیین علامت سهمی برمی‌گردد پس یعنی

$-2$  و  $4$  ریشه‌های سهمی هستند و دهانه سهمی به سمت بالاست از طرفی

چون عرض از مبدا آن با سهمی داده شده یکی است پس  $\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$  در معادله صدق

می‌کند. با استفاده از این اطلاعات داریم:

$$y = a(x-4)(x+2) \Rightarrow 5 = a(0-4)(0+2)$$

$$5 = a(-4)(2) \Rightarrow 5 = -8a \Rightarrow \frac{-5}{8} = a$$

هر دو مقدار  $m$  قابل قبول است.

مجموع مقادیر یک است.

### آسان

### ۷- گزینه ۳»

حواستون باشه! در سهمی‌ها زمانی که رأس سهمی داده شده باشد

$$y = a(x - x_S)^2 + y_S$$

چون در شکل رأس سهمی  $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$  داده شده است پس:

$$y = ax^2 + 4$$

با جایگذاری نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$  در این معادله می‌توان  $a$  را یافت پس:

$$2 = a + 4 \Rightarrow -2 = a$$

پس  $y = -2x^2 + 4$  در نتیجه  $a = -2, b = 0, c = 4$

$$2a - b + c = 2(-2) - 0 + 4 = 0$$

### متوسط

### ۸- گزینه ۳»

در مرحله اول چون پاره‌خط  $AB$  داده شده است پس:

$$x_B - x_A = 6$$

در مرحله دوم چون  $x_S$  سهمی عدد ۲ داده شده است و می‌دانیم  $x_S$  وسط دو

ریشه سهمی قرار دارد پس:

$$\frac{x_A + x_B}{2} = 2 \Rightarrow x_A + x_B = 4$$

از نتایج به دست آمده در مرحله اول و دوم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x_B - x_A = 6 \\ x_B + x_A = 4 \end{cases}$$

$$2x_B = 10 \Rightarrow x_B = 5, x_A = -1$$

در نتیجه ریشه‌های این سهمی  $-1$  و  $5$  است پس می‌توان معادله سهمی نوشت:

$$y = a(x-5)(x+1) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 3 = a(2-5)(2+1)$$

$$3 = a(-3)(3) \Rightarrow a = \frac{-1}{3}$$

در نتیجه معادله سهمی  $y = -\frac{1}{3}(x-5)(x+1)$

$$b + c = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3 \text{ پس } y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{5}{3}$$

### دشوار

### ۹- گزینه ۲»

ابتدا با توجه به شکل باید معادله سهمی را بنویسیم. چون محل برخورد با محور

$y$  را داده است.



$$2\left(\frac{1}{\beta}\right)^3 \beta - 5\beta = \frac{2}{\beta^2} - 5\beta =$$

$$2\alpha^2(\alpha\beta) - 5\beta \xrightarrow{p=\alpha\beta=1} 2\alpha^2 - 5\beta$$

$$\xrightarrow{2\alpha^2 = -5\alpha - 2} -5\alpha - 2 - 5\beta$$

$$-5(\alpha + \beta) - 2 \xrightarrow{S=\alpha+\beta=-\frac{5}{2}} -5\left(-\frac{5}{2}\right) - 2 = \frac{25}{2} - 2 = \frac{21}{2}$$

### دشوار

### ۱۴- گزینه «۲»

در این تیپ سوالات کوچک‌ترین توان را به عنوان  $t$  بگیرید.

$$(x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = t \Rightarrow ((x^2 + x)^{\frac{1}{6}})^2 = t^2 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{3}} = t^2$$

$$((x^2 + x)^{\frac{1}{6}})^3 = t^3 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{2}} = t^3$$

در نتیجه:

$$t^3 - t^2 - 6t = 0 \Rightarrow t(t^2 - t - 6) = 0 \Rightarrow t(t-3)(t+2) = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = 0 \Rightarrow S = -1$$

$$t = 3 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = 3 \Rightarrow x^2 + x = 3^6$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 3^6 = 0 \Rightarrow S = -1$$

$$t = -2 \Rightarrow (x^2 + x)^{\frac{1}{6}} = -2 \text{ ریشه ندارد.}$$

پس مجموع ریشه‌های این معادله  $-2$  است.

### آسان

### ۱۵- گزینه «۲»

حواستون باشه! بیش‌ترین مقدار سهمی  $y_s = \frac{-\Delta}{4a}$  است.

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = 0 \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$

$$16 - 4(m^2 - 3m) = 0 \Rightarrow m^2 - 3m - 4 = 0$$

$$m = -1, m = 4$$

max

چون سهمی زمانی که دهنه رو به پائین داشته باشد بیش‌ترین

مقدار را دارد پس  $m = -1$  قابل قبول است.

### آسان

### ۱۶- گزینه «۳»

در نتیجه معادله سهمی

$$y = -\frac{5}{8}(x-4)(x+2) \Rightarrow y = -\frac{5}{8}x^2 + \frac{5}{4}x + 5$$

مرحله آخر خط مماس در رأس سهمی است که به معنای  $y_s$  است پس:

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} \Rightarrow y_s = \frac{45}{8} \Rightarrow y - \frac{45}{8} = 0 \Rightarrow 8y - 45 = 0$$

### دشوار

### ۱۱- گزینه «۲»

در مرحله اول با توجه به معادله  $3x^2 - 6x - 2 = 0$  داریم:

$$S = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{3} = \frac{6}{3} \Rightarrow \alpha + \beta = 6$$

$$p = \left(\frac{\alpha}{3}\right)\left(\frac{\beta}{3}\right) = -\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\alpha\beta}{9} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \alpha\beta = -6$$

در مرحله دوم با توجه به ریشه‌های  $3\beta - 1$  و  $3\alpha - 1$  ریشه‌های

$$x^2 - sx + p = 0 \text{ را می‌سازیم.}$$

$$S = 3\alpha - 1 + 3\beta - 1 = 3(\alpha + \beta) - 2 = 3(6) - 2 = 16$$

$$p = (3\alpha - 1)(3\beta - 1) = 9\alpha\beta - 3\alpha - 3\beta + 1 = 9(-6) - 3(6) + 1 = -54 - 18 + 1 = -71$$

پس معادله به صورت  $x^2 - 16x - 71 = 0$  است در نتیجه

$$c = -71, b = -16$$

$$c - b = -71 + 16 = -55$$

### متوسط

### ۱۲- گزینه «۳»

حواستون باشه!

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{s^2 - 4p} \quad (1)$$

(۲) ریشه‌ها در معادله صدق می‌کند پس:

$$\alpha^2 + 3\alpha = 1 \xrightarrow{\text{در } \alpha \text{ ضرب شود}} \alpha^3 + 3\alpha^2 = \alpha$$

$$\beta^2 + 3\beta = 1 \xrightarrow{\text{در } \beta \text{ ضرب شود}} \beta^3 + 3\beta^2 = \beta$$

با جایگذاری این دو عبارت در صورت سوال داریم:

$$p = -1, s = -3 \text{ داریم } x^2 + 3x - 1 = 0$$

$$(\alpha - 1)(\beta + 1) = m - 2 \Rightarrow \alpha\beta + \alpha - \beta - 1 = m - 2$$

$$p + \sqrt{s^2 - 4p} - 1 = m - 2$$

$$-1 + \sqrt{9 + 4} - 1 = m - 2 \Rightarrow \sqrt{13} = m$$

### متوسط

### ۱۳- گزینه «۱»

حواستون باشه!

$$(1) \text{ چون } a = c \text{ پس ریشه‌ها معکوس یکدیگرند } \alpha = \frac{1}{\beta}$$

(۲) ریشه در معادله صدق می‌کند:



$$\begin{array}{c|c|c|c} & \frac{9}{4} & 1 & \\ \hline & - & + & - \\ \hline & & & \end{array} \quad (-\infty, -\frac{9}{4}) \cup (1, +\infty)$$

از اشتراک شرط اول و دوم داریم  $(1, +\infty)$

### دشوار

### ۲- گزینه «۲»

حواستون باشه‌ها! اگر  $f(x)$  و  $g(x)$  باهم برخورد داشته باشند پس از  $f(x) = g(x)$  داریم:

$$(آ) \Delta > 0 \text{ محل برخورد دارند.}$$

$$(ب) \Delta = 0 \text{ محل برخورد دارند.}$$

$$(پ) \Delta < 0 \text{ محل برخورد ندارند.}$$

در مرحله اول  $y = x^2$ ,  $y = ax - a$  را مساوی یکدیگر قرار می‌دهیم و  $\Delta = 0$

$$x^2 - ax + a = 0$$

$$\Delta = a^2 - 4a = 0 \Rightarrow a(a-4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ غ ق ق}, a = 4$$

در مرحله دوم در معادله داده شده  $a = 4$  را قرار می‌دهیم:

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

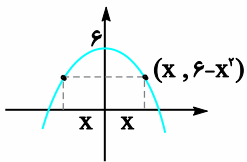
$$\Delta = 16 - 4(4) = 16 - 16 = 0$$

پس معادله یک جواب برای  $x$  دارد.

### دشوار

### ۳- گزینه «۴»

اول شکل رو بکشیم که بیشتر متوجه سوال بشویم:



پس مستطیل مورد نظر دارای طول  $2x$  و عرض  $6 - x^2$  است در نتیجه محیط آن

$$p = 2(\text{طول} + \text{عرض})$$

$$p = 2(2x + 6 - x^2)$$

$$p = 2(-x^2 + 2x + 6) = -2x^2 + 4x + 12$$

چون سوال ماکزیمم محیط را پرسیده است پس  $p_s = \frac{-\Delta}{4a}$

$$p_s = \frac{-[-16 - 4(-24)]}{-8} = \frac{16 + 96}{-8} = \frac{112}{-8} = -14$$

### آسان

### ۲- گزینه «۱»

اگر طول قاعده را  $x$  و ارتفاع وارد بر آن را  $y$  در نظر بگیریم در نتیجه با فرض

$$x + y = 8 \Rightarrow x + y = 8 \Rightarrow y = 8 - x$$

حالا چون درباره مساحت مثلث صحبت کرده پس:

$$S = \frac{xy}{2} \Rightarrow S = \frac{x(8-x)}{2} \Rightarrow S = 4x - \frac{1}{2}x^2$$

حواستون باشه‌ها! معادله درجه ۴ زمانی دو ریشه حقیقی دارد که  $p < 0$  و یا

$$\Delta = 0 \text{ و } \frac{-b}{2a} > 0$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{m-1}{2m} < 0 \quad \begin{array}{c|c|c|c} & 0 & 1 & \\ \hline & + & - & + \\ \hline & & & \end{array} \quad (0, 1)$$

### آسان

### ۱۷- گزینه «۳»

حواستون باشه‌ها! معادله نیم مجذوری زمانی دو ریشه حقیقی دارد که

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ p > 0 \end{cases}$$

$$S > 0 \Rightarrow \frac{+2m}{2} > 0 \Rightarrow m > 0 \quad (1)$$

$$p > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{m-1}{2} > 0 \Rightarrow \frac{m}{2} > \frac{1}{2} \Rightarrow m > \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4(m - \frac{1}{2}) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0$$

همواره برقرار  $\Rightarrow (2m-1)^2 > 0 \quad (3)$

اشتراک بین این سه شرط جواب مسئله است  $m > \frac{1}{2}$

### آسان

### ۱۸- گزینه «۴»

حواستون باشه‌ها! معادله نیم مجذوری زمانی یک ریشه حقیقی دارد که  $p < 0$  و یا

$$\Delta = 0 \text{ و } \frac{b}{2a} > 0 \text{ باشد.}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c} x & -6 & 2 & \\ \hline & - & + & - \\ \hline & & & \end{array} \quad m < -6 \text{ یا } m > 2$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{c}{a} < 0 \Rightarrow \frac{-m-6}{m-2} < 0$$

### آسان

### ۱۹- گزینه «۲»

حواستون باشه‌ها! شرط آنکه سهمی همواره بالای محور  $x$ ها باشد:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$$

$$(1) a > 0$$

$$(2) \Delta < 0 \Rightarrow 18 - 4(2a^2 + \frac{5}{2}a) < 0 \Rightarrow 9 - 4a^2 - 5a < 0$$

$$-4a^2 - 5a + 9 < 0$$

$$a = 1, a = -\frac{9}{4}$$





$a =$  دهنه سهمی

$b = x_s$  محل  $x_s$  و یا شیب سهمی در محور  $y$  ها]

$c =$  محل برخورد با محور  $y$

پس  $b > 0$  دهنه سهمی را نشان می‌دهد پس  $b > 0$

$-a =$  شیب محل برخورد با محور  $y$  است  $-a > 0$  پس  $a < 0$

درباره  $c + 2$  چون محل برخورد با محور  $y$  ها مشخص نیست نمی‌توان حرف

قطعی زد پس  $ab < 0$  [البته اگر  $c + 2 < 0$  در نظر بگیریم حدس‌هایی

درباره  $c$  می‌توان زد.]

### متوسط

### ۲۶- گزینه «۳»

حواستون باشه! از سال دهم می‌دانیم که معادلات درجه ۲ زمانی ۲ ریشه

حقیقی دارند که  $\Delta > 0$ .

پس با توجه به اینکه در این معادله درجه دو

$a = 2m - 1, b = 6, c = m - 2$  هست پس:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0$$

$$\Delta = 36 - 4(2m^2 - 5m + 2) = 36 - 8m^2 + 20m - 8$$

$$= -8m^2 + 20m + 28 > 0$$

که در این مرحله با توجه به نامعادله بودن عبارت باید از تعیین علامت استفاده

کنیم، ابتدا ریشه‌ها را به دست می‌آوریم:

$$m = -1, m = \frac{28}{8} = \frac{7}{2}$$

$x$	$-\infty$	$-1$	$\frac{7}{2}$	$+\infty$
		$-$	$+$	$-$
		$-$	$+$	$-$

$$-1 < m < 3.5$$

### متوسط

### ۲۷- گزینه «۱»

اول بیایید قسمت دوم سوال را معنی کنیم «مجموع ریشه‌ها معکوس

حاصل ضرب آن دو ریشه برابر است.»

$$S = \frac{1}{p}$$

$$\frac{-2m+1}{3} = \frac{3}{2-m} \Rightarrow (-2m+1)(2-m) = 9$$

$$\Rightarrow 2m^2 - 5m - 7 = 0 \Rightarrow (2m-7)(m+1) = 0$$

$$2m-7=0 \Rightarrow m = \frac{7}{2}, \Delta > 0$$

$$m+1=0 \Rightarrow m = -1, \Delta < 0$$

چون  $m = -1$  دلتا را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست.

### متوسط

### ۲۸- گزینه «۱»

بیشترین مساحت یعنی  $S_s = \frac{-\Delta}{4a}$

$$S_s = \frac{-[-16 - 4(0)]}{4(-\frac{1}{2})} = \frac{-16}{-2} = 8$$

روش دوم: هر گاه مجموع دو مقدار برابر مقداری ثابت باشد بیشترین

حاصل ضرب زمانی اتفاق می‌افتد که هر کدام نصف مقدار ثابت باشند.

$$x + y = 8$$

$$\text{پس } x = 4, y = 4$$

$$S = \frac{4 \times 4}{2} = 8$$

### متوسط

### ۲۹- گزینه «۲»

حواستون باشه! اگر مجموع دو عبارت مقدار ثابت شود حاصل ضرب آن‌ها

زمانی بیشترین مقدار می‌شود که هر کدام نصف عدد ثابت باشند پس:

$$2x + 3y = 12 \xrightarrow{\text{پس طبق نکته}} \begin{cases} 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \\ 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \end{cases}$$

پس بیشترین حاصل ضرب این عدد  $xy = 6$  است.

### دشوار

### ۳۰- گزینه «۳»

در ابتدا پاره‌خطی به طول ۳ cm از نقطه‌ای برش می‌دهیم.

$$\underline{x \quad \quad \quad 3-x}$$

با هر قسمت چون مثلث متساوی الاضلاع درست می‌کنیم

خواهیم داشت.

از آنجا که می‌دانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع از رابطه  $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$  به دست

می‌آید مجموع مساحت این مثلث

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{1}{3}(3-x)\right]^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{1}{9}(9-6x+x^2)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{4}$$

بیشترین این عبارت در  $\frac{-\Delta}{4a}$  اتفاق می‌افتد پس:

$$\frac{-\left[\frac{3}{36} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{18} \times \frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]}{4\left(\frac{\sqrt{3}}{18}\right)} = \frac{-\left[\frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right]}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{+\frac{1}{12}}{\frac{2\sqrt{3}}{9}} = \frac{9}{24\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3}{8\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

### متوسط

### ۳۱- گزینه «۱»

حواستون باشه! در معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$



اگر معادله اولیه را مرتب کنیم خواهیم داشت:

$$x^2 + x = 5$$

$$x(x+1) = 5 \xrightarrow[\text{شرط } x \neq -1]{\text{طرفین تقسیم بر } x} (x+1) = \frac{5}{x} \xrightarrow{\text{طرفین معکوس}}$$

$$\frac{1}{x+1} = \frac{x}{5} \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 3} \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3}{125}$$

پس باید معادله درجه دوم  $x^3 - 5x + p = 0$  بنویسیم که ریشه‌های آن

$$\frac{x_1^3}{125}, \frac{x_2^3}{125} \text{ باشد پس:}$$

$$S = \frac{x_1^3 + x_2^3}{125} = \frac{S^3 - 3ps}{125} = \frac{(-1)^3 - 3(5)}{125} = \frac{-1 - 15}{125} = -\frac{16}{125}$$

$$p = \frac{(x_1 x_2)^3}{(125)^2} = \frac{p^3}{(125)^2} = \frac{(-5)^3}{(125)^2} = \frac{-125}{15625} = -\frac{1}{125}$$

$$x^3 - 5x + p = 0 \Rightarrow x^3 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0 \Rightarrow 125x^3 + 16x - 1 = 0$$

### دشوار

### ۳۱- گزینه «۱»

بارها گفتم که از کنکور ۱۴۰۰ به بعد منتظر محاسبات عجیب و غریب باشید!

اول عبارت را مرتب کنید:

$$(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1)(\sqrt[3]{x^2} - 1) = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt[3]{x^4} - \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{x^2} - 1 = 2\sqrt[3]{x}$$

$$\Rightarrow x\sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - 2\sqrt[3]{x} = 0$$

$$(x-2)\sqrt[3]{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} (x-2)x = 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

حالا از رابطه  $S = \frac{-b}{a}$  ریشه‌ها را به دست آوریم.

$$S = -\frac{b}{a} = \frac{-(-2)}{1} = 2$$

### متوسط

### ۳۲- گزینه «۱»

اولین نکته این که مقدار تابع یعنی  $y = \frac{-\Delta}{4a}$  پس:

$$r = \frac{(-b^2 - 4ac)}{4a} \Rightarrow r = \frac{-(144 - 4(\Delta m^2 - m))}{4m}$$

$$4\Delta m = -144 + 4(\Delta m^2 - m) \Rightarrow 4\Delta m = -144 + 4\Delta m^2 - 4m$$

$$0 = 4\Delta m^2 - 8m - 144 \Rightarrow 0 = \Delta m^2 - 2m - 36 \Rightarrow (\Delta m + 12)(m - 3) = 0$$

حواستون باشه! نکته اول سوال به ریاضی دهم مربوط میشه اگر دو نقطه دارای

$y$  یکسان باشند در سهمی،  $x_S$  از میانگین  $x$ های دو نقطه به دست می‌آید. پس:

$$(0, 5), (-2, 5) \Rightarrow x_S = \frac{0 + (-2)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

نکته دوم سوال مربوط می‌شه به نقطه  $(0, 5)$  که چون  $x = 0$  هست پس

$y = 5$  عرض از مبدأ سهمی است.

پس  $c = 5$

و در آخر این اطلاعات را در  $y = ax^2 + bx + c$  جایگذاری می‌کنیم و متوجه می‌شویم که:

$$y = ax^2 + bx + 5 \xrightarrow{(1, 11)} 11 = a + b + 5 \Rightarrow 6 = a + b$$

همچنین چون  $x_S = -1$  پس  $-\frac{b}{2a} = -1$  و در نتیجه  $b = 2a$  از این دو

اطلاعات داریم:

$$6 = a + 2a \xrightarrow{a+b=6} 6 = 3a \Rightarrow a = 2, b = 6$$

پس  $y = 2x^2 + 6x + 5$

و در نهایت با جایگذاری گزینه‌ها در این معادله سهمی به گزینه  $(-1, 2)$

می‌رسیم.

### دشوار

### ۳۳- گزینه «۱»

حواستون باشه! از کنکور ۱۴۰۰ به بعد اعداد عجیب و غریب که دیدید اصلا

تعجب نکنید.

قسمت اول سوال از روش  $t$  می‌خواهیم استفاده کنیم:

$$x^2 = t \Rightarrow t^2 - 7t - 5 = 0$$

$$\Delta = 49 - 4(-5) = 49 + 20 = 69$$

$$t_{\text{ریشه}} = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2}$$

$$x^2 = \frac{7 \pm \sqrt{69}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \\ x = -\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}} \end{cases}$$

$$S = 0$$

$$p = \left(\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}\right)\left(-\sqrt{\frac{7 + \sqrt{69}}{2}}\right) = -\frac{7 + \sqrt{69}}{2}, p^2 = \frac{49 + 69 + 14\sqrt{69}}{4}$$

$$2p^2 = 59 + 7\sqrt{69}$$

### دشوار

### ۳۴- گزینه «۱»

$$x^2 + x - 5 = 0 \Rightarrow s = -1, p = -5$$

خب حالا بریم یک ایده داشته باشیم برای ساختن ریشه‌های جدید:

## ۳۵- گزینه «۳»

## متوسط

نکته سوال: اگر یک ریشه معادله درجه دو  $k$  برابر ریشه دیگری باشد:

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{(k+1)^2}{k}$$

در نتیجه:

$$\frac{a^2}{12} = \frac{(3+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{12} = \frac{16}{3} \Rightarrow a^2 = 2^6 \Rightarrow a = \pm 8$$

پس اختلاف این دو مقدار ۱۶ واحد است.

$$|-8-8|=16$$

## ۳۶- گزینه «۱»

## دشوار

اول  $x$  و  $y$  رأس سهمی را به دست می‌آورید:

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2k} = \frac{2}{k}$$

$$y_s = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-b^2-4ac}{4a} = \frac{-16+4(-6k)}{4k} = \frac{-16-24k}{4k} = \frac{-4-6k}{k}$$

حال این  $x$  و  $y$  را در معادله خط جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{-4-6k}{k} = -4\left(\frac{2}{k}\right) - 4$$

$$\frac{-4-6k}{k} = \frac{-8}{k} - 4 \Rightarrow \frac{-4-6k}{k} = \frac{-8-4k}{k} \Rightarrow -2k = -4$$

$$k = 2$$

$$y_s = \frac{-4-12}{2} = \frac{-16}{2} = -8 \quad ; \quad y_s = \frac{-4-6k}{k}$$

## ۳۷- گزینه «۳»

## دشوار

نکته اول: حواستون باشه! هر موقع ریشه‌های مشترک را خواسته باید

$$y_1 = y_2 \text{ پس:}$$

$$x^2 + 2x - 3m = x^2 + 6x + m \Rightarrow -4m = 4x \Rightarrow -m = x$$

پس ریشه مشترک  $-m$  است.

$$m^2 - 6m + m = 0 \Rightarrow m^2 - 5m = 0 \Rightarrow m(m-5) = 0$$

$$\Rightarrow m = 0, m = 5$$

اگر  $m = 0$  را در نظر بگیریم دو معادله به صورت  $x^2 + 6x = 0$  پس

$$x = 0, x = -6$$

و اگر در معادله دیگر قرار دهیم  $x^2 + 2x = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = -2$  که اختلاف

ریشه‌های غیر مشترک ۴ واحد است.

و اگر  $m = 5$  را در نظر بگیریم  $x^2 + 6x + 5 = 0$  که ریشه‌های آن

$$x = -1, x = -5$$

و اگر در معادله دیگر قرار دهیم  $x^2 + 2x - 15 = 0$  که ریشه‌های

$$x = -5, x = 3$$

در حالت دوم هم اختلاف ریشه‌های غیر مشترک ۴ واحد است.

## ۳۸- گزینه «۳»

## متوسط

$$m = -\frac{12}{5}, m = 3$$

نکته دوم اینکه چون گفته کم‌ترین مقدار پس دهنه سهمی باید به سمت بالا

باشد پس  $m$  باید مثبت باشد در نتیجه:

$$y = 3x^2 - 12x + 14$$

نکته سوم اینکه معادله محور تقارن همون معادله  $x_s = \frac{-b}{2a}$  است پس

$$x_s = \frac{12}{6} = 2$$

## دشوار

## ۳۳- گزینه «۱»

این سوال سال ۱۴۰۱ بچه‌ها رو خیلی اذیت کرد!

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$$

$$2/5\alpha^2 + 2/5\beta^2 + 0/5\alpha^2 - 0/5\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$$

$$2/5(\alpha^2 + \beta^2) + 0/5(\alpha^2 - \beta^2) = 12\sqrt{2} + 85$$

$$2/5(s^2 - 2p) + 0/5(\sqrt{s^2 - 4p}) = 12\sqrt{2} + 85$$

نکات سوال:

$$(|\alpha - \beta| = \sqrt{s^2 - 4p}, \alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p)$$

حالا چون از روی معادله  $x^2 + 6x + a = 0$  می‌شه فهمید که

$$p = a, s = -6$$

$$2/5(36 - 2a) + 0/5(\sqrt{36 - 4a}) = 12\sqrt{2} + 85$$

ایده بعدی این سوال اینه که قسمت بدون رادیکال طرف اول رو با قسمت بدون

رادیکال طرف دوم برابر بگیریم:

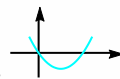
$$90 - 5a = 85 \Rightarrow a = 1$$

## متوسط

## ۳۴- گزینه «۱»

نکته اول: در معادله سهمی وقتی  $c = 0$  است پس سهمی از مبدا مختصات می‌گذرد.

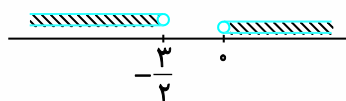
نکته دوم: سهمی که از مبدا مختصات بگذرد و از ناحیه سوم نگذرد به صورت



خواهد بود پس  $a > 0, b < 0, c = 0$  است و همچنین  $\Delta > 0$ .

$$a > 0, \quad 3 + 2a < 0, \quad b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow (3 + 2a)^2 - 0 > 0$$

پانوجه شرط ۱ و ۲ داریم:



در نتیجه شرط اول و دوم هیچ اشتراکی ندارد پس هیچ مقدار  $a$  جواب سوال

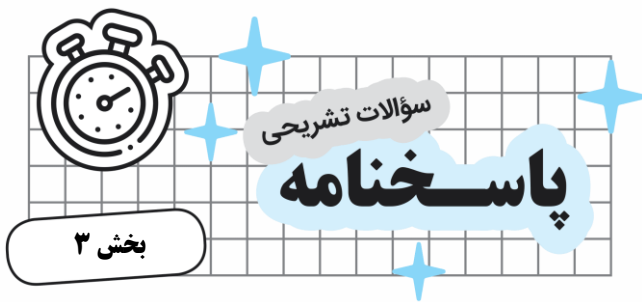
است.

$$20\beta^2 + 20\alpha^2 + 20\beta^2 - 20\beta = 17 \Rightarrow 20(\beta^2 + \alpha^2) - 20\beta(\beta - 1) = 17$$

$$20(S^2 - 2p) - 20\left(\frac{b}{a}\right) = 17 \Rightarrow 20\left(1 + 2\frac{b}{a}\right) - 20\frac{b}{a} = 17$$

$$20 + 40\frac{b}{a} - 20\frac{b}{a} = 17 \Rightarrow 20 + 40\frac{b}{a} - 20\frac{b}{a} = 17 \Rightarrow 20\frac{b}{a} = -3$$

$$\frac{b}{a} = -\frac{3}{20} \xrightarrow{\text{اختلاف ریشه‌ها}} \sqrt{S^2 - 4p} = \sqrt{1 - 4\left(\frac{3}{20}\right)} = \sqrt{\frac{8}{20}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$



## آسان

-۱

آ) برای حل معادلات کسری باید کسرها رو یکی کنیم. یادت باشه که راه‌حل یکی کردن کسرها مخرج مشترک گرفته. پس به مخرج کسرها نگاه کن و ببین ک.م.م (کوچک‌ترین مضرب مشترک) بین مخرج‌ها چی هست. به عبارتی ببین چه عبارتی رو به عنوان مخرج بگیری که بر همه‌ی مخرج‌ها بخش‌پذیر باشه.

این‌جا چون مخرج کسر اول به مخرج کسر دوم بخش‌پذیر هست، همون میشه. ک.م.م بین مخرج‌ها.

$$\frac{1 \times 1}{(x-2)^2 \times 1} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-2)} = 3 \Rightarrow \frac{1+2x-4}{(x-2)^2} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2x-3}{x^2-4x+4} = \frac{3}{1}$$

حالا می‌تونم طرفین وسطین کنم. راه دیگه این بود که ۳ رو هم به سمت چپ بیارم و مخرج مشترک با کسرها بگیرم.

$$3x^2 - 12x + 12 = 2x - 3 \Rightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (x-3)(3x-5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \text{ قق} \\ x = \frac{5}{3} \text{ قق} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند چون هیچ مخرجی رو صفر نمی‌کنند.

ب) سه تا مخرج داریم که بین دوتای اون، عبارت مشترک داریم پس بیا همه رو بیاریم یک طرف و ک.م.م بگیریم:

نکته اول سوال اینه که محور تقارن دو سهمی مشترک هستند پس  $x_S$  در دو سهمی را مساوی قرار می‌دهیم پس:

$$x_S = \frac{-b}{2a} \Rightarrow \frac{-a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

نکته دوم سوال این هست که دو نقطه با عرض یکسان یعنی  $y = 1$  در هر دو معادله صدق می‌کند و  $x$ های یکسان تولید می‌کند پس:

$$x^2 + 2x - 2 = 1 \Rightarrow x^2 + 2x = 3$$

$$x^2 - 2x + b = 1 \Rightarrow -(x^2 + 2x) + b = 1$$

$$\frac{x^2 + 2x = 3}{-} \rightarrow -3 + b = 1 \Rightarrow b = 4$$

$$ab = 8$$

## دشواری

## ۳۹- گزینه «۳»

$$x_S = \frac{-5+3}{2} \text{ پس } \text{نکته اول سوال دو نقطه با عرض‌های یکسان هست}$$

نکته دوم نقطه رأس سهمی به مختصات  $(-1, 1)$  داده شده پس باتوجه به معادله  $y = a(x - x_S)^2 + y_S$  خواهیم داشت:

$$y = a(x+1)^2 + 1$$

$$p = \frac{a+1}{a}, S = \frac{-2a}{a} \text{ در نتیجه } y = ax^2 + 2ax + a + 1$$

نکته سوم: اینکه در سوال  $\alpha^2 + \beta^2$  را که می‌دانیم  $S^2 - 2p$  برابر است داده پس:

$$S^2 - 2p = 5 \Rightarrow 4 - 2\left(\frac{a+1}{a}\right) = 5 \Rightarrow 4a - 2a - 2 - 5a = 0$$

$$\Rightarrow -2 = 3a \Rightarrow -\frac{2}{3} = a$$

نکته چهارم: محل برخورد محور سهمی با محور  $y$ ها، همان  $c$  است پس:

$$c = a + 1 = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

## دشواری

## ۴۰- گزینه «۴»

در مرحله اول از معادله  $ax^2 - ax - b = 0$  خواهیم داشت:

$$S = \alpha + \beta = 1$$

$$p = \alpha\beta = \frac{-b}{a}$$

همچنین از اونجایی که  $\alpha = 1 - \beta$  با ضرب  $\beta$  در طرفین خواهیم داشت

$$p = \frac{-b}{a} = \beta(1 - \beta) \text{ پس } \alpha\beta = \beta(1 - \beta)$$

حالا می‌ریم سر اطلاعات دوم و اولین کار  $40\beta^2$  را به  $20\beta^2 + 20\beta^2$  تبدیل می‌کنیم پس:

$$\Rightarrow -2y^2 - 3y + 6 = 0 \Rightarrow \Delta = 57 \Rightarrow y = \frac{3 \pm \sqrt{57}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{57}}{4}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند زیرا ریشه هیچ مخرجی از کسره‌های معادله نیستند.  
(ث)

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x-2+x-5x(x-2)}{x(x-2)} = 0 \Rightarrow 2x-2-5x^2+10x=0$$

$$\Rightarrow -5x^2+12x-2=0 \Rightarrow 5x^2-12x+2=0 \Rightarrow \Delta=104$$

$$\Rightarrow x = \frac{12 \pm \sqrt{104}}{10} = \frac{6 \pm \sqrt{26}}{5}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

(ج) حواست هست که مخرج دو تا کسر یکی هست!

$$\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} - \frac{x-1}{x-3} = 0 \Rightarrow \frac{2x-x+1}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x+4) + (x+1)(x-3)}{(x-3)(x+4)} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2}$$

هر دو جواب قابل قبول هستند.

(ج) اگر یکم دقت کنی می‌بینی که مخرج کسر سمت راستی از ضرب دو تا

مخرج کسره‌های سمت چپی به دست میاد پس همون رو به عنوان مخرج

مشترک در نظر بگیر:

$$\frac{x(x-1) + 3(2x-3) + 3x(1)}{2x^2 - 5x + 3} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 6x - 9 + 3x = 0 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \text{ ق ق } 1 \\ x=-9 \text{ ق ق } -9 \end{cases} \Rightarrow x = -9$$

### متوسط

-۲

(آ) سوال اینه: آیا میشه تو معادلات کسری، صورت و مخرج رو به یک

عبارت جبری ساده کرد؟ و پاسخ این هست که بله میشه ساده کرد چون

می‌دونیم در معادلات کسری مخرج باید مخالف صفر باشه و بنابراین قابلیت

ساده کردن رو داره:

$$\frac{2x(x-4)}{x-4} = x^2 + x - 12 \Rightarrow 2x = x^2 + x - 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-4) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ (ق ق)}, x = 4 \text{ (ق ق)}$$

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x} - \frac{4x-4}{x^2-4} = 0$$

$$\begin{cases} x+2 \\ x \\ x^2-4=(x-2)(x+2) \end{cases} \Rightarrow \text{م.م.ک} = x(x-2)(x+2)$$

حالا صورت هر کسر رو در عبارتی ضرب می‌کنیم که مخرج کسرش اون عبارت رو نسبت به ک.م.ک کم داشته باشه (دقیقاً شبیه مخرج مشترک کسره‌های عددی)

$$\frac{3x(x-2) + 2(x^2-4) - (4x-4)(x)}{x(x^2-4)} = 0$$

می‌دونیم کسری برابر صفر هست که صورت صفر بشه پس دیگه با مخرج کسر کاری نداریم. پس:

$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-2 \end{cases}$$

یه نکته مهم رو همین جا یاد بگیر: هر جوابی که از حل معادله کسری به دست میاد باید چک کنی.

اونهایی قابل قبول هستند که مخرج هیچ کسری رو صفر نکنند پس یادت نره

غ ق ق  $\Rightarrow$  مخرج کسر اول و سوم رو صفر می‌کنه  $x = -2$

ق ق  $\Rightarrow$  مخرج هیچ کسری رو صفر نمی‌کنه  $x = 4$

پس فقط جواب معادله  $x = 4$  است.

(پ) باز هم شبیه قسمت (ب) عمل می‌کنیم:

$$\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} - \frac{2-x}{x^2-x} = 0$$

$$\begin{cases} (x-1)(x+1) \\ x+1 \\ x(x-1) \end{cases} \Rightarrow \text{م.م.ک} = x(x^2-1)$$

$$\frac{2x(x) + 2x(x-1) - (2-x)(x+1)}{x(x^2-1)} = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x^2 - 2x + x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{جمع ضرائب}} x = 1 \quad x = -\frac{2}{5}$$

$$x = 1 \text{ ریشه مخرج کسر اول و سوم است پس (غ ق ق) است اما } x = -\frac{2}{5}$$

قابل قبول است.

(ت) باز هم اول همه رو بیار یک طرف و مخرج مشترک بگیر. فقط قبلیش

حواست باشه که  $y^2 - 9 = (y-3)(y+3)$  اما توی کسر آخر  $(3-y)$

داریم پس همون اول قرینه کن و منفی رو توی کسر تأثیر بده.

$$\frac{y+2}{y+3} - \frac{y^2}{y^2-9} - 1 - \frac{y-1}{y-3} = 0$$

$$\Rightarrow (y+2)(y-3) - y^2 - (y^2-9) - (y-1)(y+3) = 0$$



$$a = -1, b = 9$$

### متوسط

-۵

اگره بخواد این معادله جواب نداشته باشه پس به ازای هیچ مقداری از  $x$  نباید جوابی به ما بدهد، با طرفین وسطین کردن معادله داریم:

$$mx - m = 2x + 1$$

با مقایسه جمله به جمله سمت چپ و راست، باید گفت که برای این که معادله جواب نداشته باشد لازم هست که مقدار  $m$  برابر با ۲ بشه. چرا؟  
به این خاطر:

$$x(m-2) = m+1 \Rightarrow x = \frac{m+1}{m-2}$$

و این کسر زمانی فاقد معنی است (بی معنی است) که مخرج صفر بشه یعنی  $m$  برابر ۲ بشه پس  $m = 2$

### آسان

-۶

برای حل مسائلی از این قبیل لازم هست اول مسأله رو با دقت بخونی تا ببینی دقیقاً موضوع بر سر چی هست و بعد سه مورد رو در جدول در نظر بگیری، دو مورد تک تک افراد یا موضوعات مسأله هست و مورد سوم افراد با هم یا موضوعات همزمان هست. مثلاً تو این مسأله نقاش اول، نقاش دوم و هر دو با هم سه مورد جدول هستند.

صحبت از اتمام یک کار هست و زمان روز هستش پس اول تعداد روزها رو مشخص می کنیم و بعد مقدار کاری که هر سه مورد در یک واحد زمانی (یک روز) رو کار می کنند در نظر می گیریم و معادله می نویسیم و حل می کنیم:

	تعداد روزها	مقدار کار در یک روز
نقاش اول	$t-15$	$\frac{1}{t-15}$
نقاش دوم	$t$	$\frac{1}{t}$
با هم	$4$	$\frac{1}{4}$

حالا معادله رو از روی ستون آخر می نویسیم:

$$\frac{1}{t-15} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4t + 4t - 60 = t^2 - 15t$$

$$\Rightarrow t^2 - 23t + 60 = 0 \Rightarrow (t-20)(t-3) = 0$$

$t = 3$  غیر قابل قبول هست چون نقاش اول ۱۵ روز زودتر کار رو تموم می کنه پس مدت زمان نقاش دوم بیشتر از ۱۵ هست پس

$$t = 20, t = 3$$

$$t-15=5, t=20$$

### آسان

-۷

مسأله شبیه سوال ۶ هست با این تفاوت که به جای مدت زمان کار کردن، صحبت از سرعت کار هست و اصول حل سوال همون هست که در سوال ۶ داریم:

ب) تو این قسمت هم سوالی که پیش میاد اینه که آیا همیشه از طرفین یک معادله (حالا کسری یا غیر کسری) یک عبارت جبری رو ساده کرد؟ و پاسخ اینه که همیشه ساده کرد فقط یک شرط داره و اونم اینه که ریشه اون عبارت (اگر ریشه داشت) هم یک جواب معادله هستش: به شرطی که ریشه مخرج نباشد.

$$\frac{x+3}{x-1} = \frac{(x-3)(x+3)}{2} \Rightarrow \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{2}, x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} x^2 - 5x + 6 = 2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x=1(\text{ق ق}), x=4(\text{ق ق})$$

### آسان

-۸

اگر  $x = 2$  یک جواب برای معادله باشد به معنی این هستش که در معادله صدق می کنه:

$$x = 2 \Rightarrow \frac{2}{2} + \frac{2k}{1} = 5 \Rightarrow 2k = 4 \Rightarrow k = 2$$

حالا  $k$  رو در معادله جاگذاری کنیم و بریم سراغ محاسبه ریشه دیگر:

$$\frac{2}{x} + \frac{2x}{x-1} = 5$$

می دونی یکی از روش های دیگر حل معادله گویا اینه که همه عبارت ها رو در همون ک.م.م ضرب کنی؟ مثلاً اینجا همه رو در  $x(x-1)$  ضرب کن:

$$2(x-1) + 2x(x) - 5x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x - 2 + 2x^2 - 5x^2 + 5x = 0 \Rightarrow -3x^2 + 7x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow (3x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}(\text{ق ق}), x = 2(\text{ق ق})$$

جواب ۲ رو که خود سوال داده بود پس جواب دیگر  $(x = \frac{1}{3})$  است.

### متوسط

-۹

اول کار بریم صورت و مخرج کسر اول را به ۲ ساده کنیم:

$$\frac{x}{x+3} + \frac{3-x}{x-1} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

حالا اگره یه کم دقت کنیم می بینیم که مخرج کسر سمت راست تساوی در ضرب مخرج های سمت چپ تساوی به دست میاد پس بیا دو کسر سمت چپ رو هم مخرج کنیم:

$$\frac{x}{x+3} - \frac{x}{x-1} + 9 = \frac{ax+b}{x^2+2x-3} \Rightarrow \frac{-x+9}{x^2+2x-3} = \frac{ax+b}{x^2+2x-3}$$

از اون جایی که می دونیم دو کسر با مخرج های مساوی داریم، بنابراین زمانی معادله بی شمار جواب داره که صورت ها هم همواره برابر باشند (فارغ از این که مقدار  $x$  چی هست!) بنابراین  $a$  باید مساوی  $-1$  یعنی ضریب  $x$  باشه و  $b$  برابر با ۹ باشه پس:

(حواست باشه که درسته ۵ کیلو نمک اضافه کردیم اما به هر حال به مقدار وزن کل محلول هم ۵ کیلو اضافه شده پس ۵ رو هم در صورت و هم در مخرج اضافه کن!) حالا قرار هست این نسبت به ۷ درصد برسه پس:

$$\frac{13}{205-x} = \frac{7}{100} \Rightarrow 1435 - 7x = 1300 \Rightarrow 7x = 135 \Rightarrow x \cong 19/3$$

پس کارگر باید تقریباً ۱۹/۳ کیلوگرم آب را تبخیر کند.

### متوسط

-۱۰

این مسأله هم شبیه به مسأله قبل هست فقط باید حواست به مجهول‌ها باشه:

$$A \text{ مقدار حل شونده در ظرف } A = \frac{50}{100} \times (3n + 10) = \frac{1}{2}(3n + 10) = \frac{3}{2}n + 5$$

$$B \text{ مقدار حل شونده در ظرف } B = \frac{n}{100} \times 50 = \frac{n}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{3}{2}n + 5 + \frac{n}{2} + 7n + \frac{5}{2}}{3n + 10 + 50 + 7n + \frac{5}{2}} = \frac{60}{100} \text{ (حل شونده: ۶۰٪)}$$

$$\Rightarrow \frac{9n + 15}{10n + \frac{125}{2}} = \frac{6}{10} \Rightarrow 90n + 75 = 60n + 375 \Rightarrow 30n = 300 \Rightarrow n = 10$$

### آسان

-۱۱

حتماً می‌دونی که به مستطیلی که طول و عرض اون، متناسب با نسبت طلایی باشه، مستطیل طلایی می‌گوئیم. معنی این تناسب این هست که نسبت طول به عرض، برابر با نسبت مجموع طول و عرض به طول باشه. به عبارتی:

$$L \quad \omega \quad \frac{L}{\omega} = \frac{\omega + L}{L}$$

حالا در این مسأله، طول و عرض زمین ورزشی متناسب با نسبت طلایی هستند پس:

$$x \quad y \quad \frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$$

از طرفی محیط برابر ۱۴۴ هست یعنی:  $2(x+y) = 144$  پس:

$$x + y = 72$$

و به عبارتی  $y = 72 - x$  با جایگذاری در تناسب داریم:

$$\frac{x}{72-x} = \frac{72}{x} \Rightarrow x^2 + 72x - (72)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-72 \pm \sqrt{5 \times 72^2}}{2} = \frac{-72 \pm \sqrt{5} \times 72}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-72 + 72\sqrt{5}}{2} = 36\sqrt{5} - 36$$

$$y = 72 - (36\sqrt{5} - 36) = 108 - 36\sqrt{5}$$

### متوسط

-۱۲

	تعداد ساعت	مقدار کار در یک ساعت
ماشین A	۲t	$\frac{1}{2t}$
ماشین B	t	$\frac{1}{t}$
با هم A و B	۴	$\frac{1}{4}$

فرض کردیم سرعت کار ماشین B، دو برابر سرعت کار ماشین A باشه.

پس تعداد ساعتی که ماشین A صرف انجام کار می‌کنه دو برابر همین زمان برای ماشین B هست.

$$\Rightarrow \frac{1}{2t} + \frac{1}{t} = \frac{1}{4} \xrightarrow{\times 4} 2 + 4 = t \Rightarrow t = 6 \Rightarrow 2t = 12$$

ماشین B در ۶ ساعت کار را تمام می‌کند.

ماشین A کار رو در ۱۲ ساعت تموم می‌کنه.

### متوسط

-۸

اگر سرعت حرکت کشتی رو V در نظر بگیریم، از فیزیک می‌دونی که  $V = \frac{x}{t}$

و بنابراین  $t = \frac{x}{V}$  مدت زمان رفت برابر  $\frac{144}{V}$  هست اما طبق توضیحات

مسئله مدت زمان برگشت برابر  $\frac{144}{V-8}$  است. پس از ۲ ساعت توقف و با

در نظر گرفتن این که مجموع مدت زمان سفر رفت و برگشت ۱۷ است داریم:

$$\frac{144}{V} + \frac{144}{V-8} + 2 = 17 \Rightarrow 144(V-8+V) = 15V(V-8)$$

$$\Rightarrow 288V - 1152 = 15V^2 - 120V \Rightarrow 15V^2 - 408V + 1152 = 0$$

$$\Delta = (-408)^2 - 4(15)(1152) = 97344 \Rightarrow V = \frac{408 \pm 312}{30}$$

سرعت حرکت کشتی در جهت آب ۲۴ کیلومتر بر ساعت است  $\Rightarrow V = 24$  ق ق  
 زیرا سرعت در خلاف جهت جریان آب ۸ کیلومتر  $\Rightarrow V = 3/2$  غ ق  
 کم تر است و غیرممکن است

### متوسط

-۹

خب این مسأله رو به راحتی با تناسب حل می‌کنیم. پس بیا اول ببینیم تو آب‌نمکی که کارگر درست کرده چقدر نمک وجود داره و بعد نسبت نمک به محلول رو مقایسه کنیم. ۲۰۰ کیلوگرم آب نمک ۴ درصدی داریم:

$$\frac{4}{100} \times 200 = 8 \text{ kg مقدار نمک:}$$

پس نسبت نمک به محلول اولیه  $\frac{8}{200}$  هست، ۵ کیلوگرم نمک موجود داریم

که اضافه می‌کنیم و فرض کنیم به مقدار x باید از محلول تبخیر کنیم، پس نسبت نمک به محلول میشه:

$$\frac{8+5}{200+5-x}$$



حالا جواب‌ها رو امتحان می‌کنیم:

$$x = 2 \Rightarrow \sqrt{2+2} = 2-4 \quad \text{غ ق ق منفی}$$

$$x = 7 \Rightarrow \sqrt{7+2} = 7-4 \Rightarrow 3 = 3 \quad \text{ق ق ق}$$

(ب)

$$2\sqrt{x} = \sqrt{3x+4} \xrightarrow{\text{توان } 2} 4x = 3x+4$$

$$\Rightarrow x = 4 \quad \text{ق ق}$$

(پ) از اونجایی که می‌دونیم برای حل معادله رادیکالی لازم هست زیر رادیکال نامنفی باشه پس می‌دونیم  $x \geq 0$  و بنابراین می‌تونیم با کمک اتحاد مزدوج

بنویسیم:

$$1-x = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

در این صورت طبق نکته‌ای که در پاسخ سوال ۲ اومده بود داریم:

$$\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = (1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})$$

(یادت نره این معادله رو هم در نظر بگیریم!)

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 + \sqrt{x} \quad \text{یا } 1 - \sqrt{x} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1 \quad \text{ق ق} \\ 2\sqrt{x} + x = 0 \Rightarrow \sqrt{x}(2 + \sqrt{x}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \quad \text{ق ق} \\ \sqrt{x} = -2 \quad \text{غ ق ق} \end{cases} \end{cases}$$

(ت) یک معادله گویا و رادیکالی با هم داریم. اول مخرج مشترک بگیریم:

$$(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2) = x-2$$

$$\Rightarrow 5(\sqrt{x}-2) - 2(x-2) + 1(\sqrt{x}+2) = 0 \Rightarrow 6\sqrt{x} - 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{x} = 2x + 4 \Rightarrow 3\sqrt{x} = x + 2 \Rightarrow 9x = x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad (\text{ق ق}), x = 4 \quad (\text{غ ق ق}) \Rightarrow x = 1$$

(ث)

$$(\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1})^2 = 4^2$$

$$\Rightarrow x+3+3x+1+2\sqrt{(x+3)(3x+1)} = 16$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{3x^2+10x+3} = 12-4x \Rightarrow \sqrt{3x^2+10x+3} = 6-2x$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 3x^2+10x+3 = 36-24x+4x^2 \Rightarrow x^2-34x+33 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow \sqrt{4} + \sqrt{4} = 4 \Rightarrow \text{ق ق} \\ x = 33 \Rightarrow \sqrt{36} + \sqrt{100} = 4 \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$$

آسان

-۱۵

فرض کنیم پدربزرگ تعداد  $n$  اسباب‌بازی با قیمت  $x$  تومان گرفته پس

$$nx = 120000 \quad \text{یعنی}$$

$$n = \frac{120000}{x} \quad (1)$$

اگر برای هر اسباب‌بازی هزار تومان تخفیف بگیرد یعنی  $x-1000$ ، تعداد

اسباب‌بازی‌ها به  $(n+4)$  می‌رسد:

$$n+4 = \frac{120000}{x-1000} \Rightarrow n = \frac{120000}{x-1000} - 4 \quad (2)$$

با مقایسه (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{120000}{x} = \frac{120000}{x-1000} - 4$$

$$\Rightarrow \frac{120000x - 120000x + 120000000}{x(x-1000)} = 4$$

$$\xrightarrow{\div 4} 30000000 = x^2 - 1000x \Rightarrow x^2 - 1000x - 30000000 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6000)(x+5000) = 0 \Rightarrow x = 6000 \text{ یا } x = -5000 \quad \text{غ ق ق}$$

پس قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف ۶۰۰۰ تومان بوده است.

آسان

-۱۳

از آنجایی که میانگین کل آزمون‌های آرمان رو داریم پس تعداد کل آزمون‌ها

و تعداد کل امتیازات رو پیدا می‌کنیم.

اگر تعداد آزمون‌هایی که امتیاز ۹ گرفته رو  $n$  در نظر بگیریم پس تعداد کل

آزمون‌ها  $(n+5)$  هست.

از طرفی تعداد کل امتیازات برابر جمع ۳۶ با  $9n$  (تعداد آزمون‌های ۹ امتیازی

ضربدر امتیازش) است یعنی  $36+9n$  پس داریم:

$$\frac{36+9n}{5+n} = 8 \Rightarrow 36+9n = 8n+40 \Rightarrow n = 4$$

جواب قابل قبول است پس آرمان در چهار آزمون متوالی امتیاز ۹ گرفته

است.

متوسط

-۱۴

اول این رو بگم که برای حل معادلات گنگ (رادیکالی)، راه‌حل، توان‌رسانی

هست حتی گاهی نیاز هست دوبار توان‌رسانی رو انجام بدیم، تنها نکته‌ای که

این راه‌حل داره اینه که توان‌رسانی گاهی جواب‌های اضافی تولید می‌کنه و به

همین دلیل باید جواب‌ها رو توی معادله صدق بدی (جای‌گذاری کنی) چون هم

ممکنه زیر رادیکال رو منفی کنن هم عبارت جلوی رادیکال رو

$$\sqrt{x+2} = x-4 \xrightarrow{\text{توان } 2} x+2 = (x-4)^2 \Rightarrow x+2 = x^2-8x+16$$

$$\Rightarrow x^2-9x+14 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-7) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ و } x = 7$$





مختصات هر نقطه‌ای که روی محور  $x$  باشد به صورت  $(x, 0)$  هست. از طرفی یادت هست که فرمول فاصله دو نقطه چی بود؟

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (0-3)^2} = 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 9 = 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=-2 \end{cases}$$

پس نقطه به صورت  $(-2, 0)$  یا  $(6, 0)$  جواب مسأله است.

### آسان

-۱۹

اول این که حواست باشه عدد صحیح خواسته و بعد بیا به صورت معادله دربیاریم:

$$\sqrt{x} - x = \frac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{3x}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{4}x^2$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4}x^2 - x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{9}{4}x - 1\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ق ق} \\ x = \frac{4}{9} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

( $\frac{4}{9}$  عدد غیر صحیح است)

مسأله ۱ جواب دارد.

### متوسط

-۲۰

(آ) اگر عدد را به سمت راست ببریم داریم:  $\sqrt{x} = -2$

اما امکان ندارد که مقدار رادیکالی منفی شود بنابراین ریشه حقیقی ندارد.

(ب) مجموع دو عبارت نامنفی برابر ۱- نمی‌شود بنابراین معادله جواب ندارد.

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2x+3} = -1$$

$$1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1$$

$$x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

(ب) اشتراک این مجموعه تهی است

بنابراین عددی وجود ندارد که همزمان بتواند در دو رادیکال قرار گیرد پس معادله فاقد جواب حقیقی است.

### متوسط

-۲۱

$$t = \frac{300}{V}$$

$$t-2 = \frac{300}{V+5} \Rightarrow \left(\frac{300}{V} - 2\right) = \frac{300}{V+5}$$

$$300(V+5) - 2V(V+5) = 300V$$

$$300V + 1500 - 2V^2 - 10V = 300V \Rightarrow 2V^2 + 10V - 1500 = 0$$

$$V^2 + 5V - 750 = 0 \Rightarrow (V-25)(V+30) = 0$$

$$V = 25, V = -30$$

### آسان

-۲۲

$$x^2 + 4 = t$$

دقت کن که جمع دو رادیکال برابر صفر شده و می‌دونیم رادیکال‌ها عبارت‌های نامنفی هستند پس تنها زمانی این مجموع برابر صفر میشه که هر دو رادیکال مساوی صفر باشند.

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} = 0 \Rightarrow (x-2)(x-5) = 0 \Rightarrow x = 2, 5$$

که  $x=2$  جواب مشترک بین هر دو معادله است و هر دو رادیکال رو صفر می‌کنه پس  $x=2$  جواب است.

### متوسط

-۱۹

با توجه به این که زیر رادیکال‌ها عبارت‌های درجه ۲ داریم بهتر هست اول تعیین دامنه کنیم و در صورت وجود دامنه، معادله رو حل کنیم:

$$3 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 3 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{3} \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$$

$$x^2 - 25 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 25 \Rightarrow |x| \geq 5 \Rightarrow x \leq -5 \cup x \geq 5$$

همون طوری که می‌بینیم هیچ اشتراکی بین دامنه‌ها وجود نداره پس هیچ عددی نمی‌تونه توی هر دو رادیکال به طور همزمان قرار بگیره پس معادله جواب ندارد.

### دشواری

-۱۷

اول دامنه را مشخص می‌کنیم:

$$x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \quad (1)$$

$$x - \sqrt{x+3} \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{x+3} \Rightarrow x^2 - x - 3 \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{1-\sqrt{13}}{2} \cup x \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2} \quad (2)$$

از طرفی  $x^2$  و رادیکال هر دو عبارت‌های نامنفی هستند که با هم جمع شده‌اند پس  $(x-1)$  هم لزوماً یک عبارت نامنفی است:

$$x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1 \quad (3)$$

چون دامنه‌ی مشترک داریم سرخ حل می‌رویم.

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} x \geq \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\sqrt{x} - \sqrt{x+3} = -x^2 + x - 1$$

$$\Delta = 1 - 4(-1)(-1) = -3 < 0$$

عبارت سمت راست رو در نظر بگیر:

در عبارت سمت راست  $\Delta < 0, a < 0$  یعنی مقدار عبارت همواره عددی منفی هست و یک رادیکال نمی‌تونه با عدد منفی برابر بشه پس معادله جواب ندارد.

### آسان

-۱۸

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

$\Rightarrow$  اشتراک = ۳

$$x^3 + x + m = 0$$

با توجه به این که معادله یک جواب دارد، این جواب همان  $x = 3$  است که دو رادیکال اول رو صفر کرده پس:

$$3^3 + 3 + m = 0 \Rightarrow m = -30$$

### متوسط

**۲۸-**

مجموع دو رادیکال (دو عبارت نامنفی) برابر صفر شده بنابراین تک-تک رادیکالها صفر هستند:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x^3 + x^2 + 2x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{دسته بندی}} x^2(x+1) + 2(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x^2+2) = 0 \Rightarrow x = -1, x^2+2 \neq 0$$

جواب معادله باید هر دو رادیکال رو صفر کنه پس  $x = -1$  تنها جواب معادله است.

### متوسط

**۲۹-**

کارگرها	زمان	مقدار کار در یک روز
A	t	$\frac{1}{t}$
B	۲t	$\frac{1}{2t}$
C	۴t	$\frac{1}{4t}$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{2t} + \frac{1}{4t} = \frac{1}{20} \times 20t \rightarrow 20 + 10 + 5 = t \Rightarrow t = 35$$

پس کارگر سوم در  $4 \times 35$  یعنی ۱۳۵ روز انجام می‌دهد.

### دشواری

**۳۰-**

$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{A} \quad x + \frac{1}{x} = A \quad \text{فرض کنیم: آن گاه}$$

و داریم:

$$A + \frac{1}{A} = 2$$

$$\Rightarrow A = 1 \Rightarrow x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow \text{معادله جواب ندارد}$$

### متوسط

**۳۱-**

$$\sqrt{t} + \sqrt{t+12} = 3 \Rightarrow \sqrt{t+12} = 3 - \sqrt{t}$$

$$t + 12 = 9 + t - 6\sqrt{t} \Rightarrow 3 = -6\sqrt{t} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \sqrt{t}$$

چون رادیکال خروجی منفی ندارد مسئله جواب ندارد.

### آسان

**۳۳-**

برای حل معادلات گنگ می‌توان آن‌ها را به توان دو رساند با توجه به آن که

$$\sqrt{x} = 1 \quad \text{می‌دانیم } O + \frac{1}{O} = 2 \quad \text{زمانی اتفاق می‌افتد که } O = 1 \quad \text{باشد پس } \sqrt{x} = 1$$

پس  $x = 1$  است در نتیجه

$$\frac{2(1)+1}{1+2} + \frac{1+2}{1-4} = \frac{3}{3} + \frac{3}{-3} = 0$$

### متوسط

**۳۴-**

$t = \text{شیر اول}$

$$t - 15 = \text{شیر دوم}$$

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+15} = \frac{3}{100} \Rightarrow \frac{t-15+t}{t(t-15)} = \frac{3}{100} \Rightarrow \frac{2t-15}{t^2-15t} = \frac{3}{100}$$

$$3t^2 - 45t = 200t - 1500 \Rightarrow 3t^2 - 45t - 200t + 1500 = 0$$

$$3t^2 - 245t + 1500 = 0 \Rightarrow (3t-20)(t-75) = 0 \Rightarrow t = 75$$

### آسان

**۳۵-**

$$A = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots}}}}}}$$

$$A^2 = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\dots}}}}} \dots} \Rightarrow A^2 = \sqrt{A} \Rightarrow A^2 - \sqrt{A} = 0$$

$$\Rightarrow A = 0 \text{ (غ ق ق)} \quad A = \sqrt{\text{ق ق}} \Rightarrow A = \sqrt{A^2} \Rightarrow A = A^2 \Rightarrow A = 1$$

### دشواری

**۳۶-**

اول معادله رو تا حد امکان ساده کنیم:

$$\frac{x^2-1}{x^3+5x^2-x-5} + \frac{x^2+x}{x^3+6x^2+5x} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x+5)(x-1)(x+1)} + \frac{x(x+1)}{x(x+5)(x+1)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} = 1 \Rightarrow \frac{2}{x+5} = 1 \Rightarrow x+5 = 2 \Rightarrow x = -3$$

### متوسط

**۳۷-**

مجموع سه عبارت نامنفی برابر صفر شده پس همزمان هر سه صفر هستند و

جواب معادله اشتراک صفرهای رادیکالهاست.

$$\frac{2x^2+1}{x^2+5}=1 \Rightarrow 2x^2+1=x^2+5 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$



## دشوار

## ۱- گزینه «ا»

حواستون باشه! عبارت  $t + \frac{1}{t} \geq 2$  خواهد بود اگر  $t$  مثبت باشد در این سوال

کسر اول و آخر معکوس یکدیگرند و  $\frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} > 0$  است پس مجموع آن

تنها زمانی برابر ۲ خواهد شد که  $\frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} = 1$  باشد پس

$$\frac{x^2-x+3}{2x^2+x+1} + \frac{2x^2+x+1}{x^2-x+3} + \frac{1}{x^2+1} > 2$$

در نتیجه طرف اول تساوی مقداری بیش از دو تولید خواهد کرد و هیچ‌گاه با دو برابر نخواهد بود پس این معادله جواب ندارد.

## متوسط

## ۲- گزینه «ا»

حواستون باشه! در عبارات گویا اگر عبارت ساده شده در طرفین ریشه مخرج باشد آن را حساب نمی‌کنیم! در هر پراتز مخرج مشترک بگیرید.

$$\left(\frac{2x-6-x-2}{x-3}\right)\left(\frac{x-8+x+2}{x-8}\right) = x^2 - 7$$

$$\left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left(\frac{2x-6}{x-8}\right) = x^2 - 7 \Rightarrow \left(\frac{x-8}{x-3}\right)\left[\frac{2(x-3)}{x-8}\right] = x^2 - 7$$

$$2 = x^2 - 7 \Rightarrow 9 = x^2$$

قق  $x = +3, x = -3$  (ریشه مخرج)

چون  $(x+8), (x-3)$  حاوی ریشه مخرج هستند در ریشه‌ها آن‌ها را حساب نکردیم.

## متوسط

## ۳- گزینه «ا»

عبارت  $\frac{4x-1}{x+2} = t$  پس

$$4t - \frac{1}{t} - 5 = 0 \Rightarrow 4t^2 - 3 - 5t = 0$$

$$4t^2 - 5t - 3 = 0 \Rightarrow (4t+3)(t-1) = 0$$

$$\frac{2x-1}{x+3} = t$$

$$\sqrt{t} + \frac{1}{\sqrt{t}} = 2$$

زمان  $O + \frac{1}{O} = 2$  می‌شود که هر یک  $O = 1$  باشد پس

$$\sqrt{t} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2x-1}{x+3}} = 1 \Rightarrow \frac{2x-1}{x+3} = 1 \Rightarrow 2x-1 = x+3 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{صدق} \Rightarrow \sqrt{\frac{8-1}{4+3}} + \sqrt{\frac{4+3}{8-1}} = 2$$

## دشوار

## ۳۳-

اول معادله گویا رو حل می‌کنیم که مجهول نداره:

$$\frac{x+1}{5} + \frac{4}{x} = 2 \xrightarrow{\times 5x} x^2 + x + 20 = 10x$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Rightarrow (x-4)(x-5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4, x = 5$$

$$x = 4 \Rightarrow \sqrt{4m+1} = 3 \Rightarrow 4m+1 = 9 \Rightarrow 4m = 8 \Rightarrow m = 2$$

$$x = 5 \Rightarrow \sqrt{5m+1} = 3 \Rightarrow 5m+1 = 9 \Rightarrow 5m = 8 \Rightarrow m = \frac{8}{5}$$

و هر دو جواب قابل قبول هستند.

## آسان

## ۳۳-

نقطه‌ای روی خط  $y = 3x$  است پس آن را  $(x, 3x)$  فرض می‌کنیم فاصله از **A** تا **B** به یک اندازه است پس:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (3x-0)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (3x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{9x^2} = \cancel{x^2} - 4x + 2 + \cancel{9x^2} + \cancel{6x} + 1$$

$$-2 = 4x \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 3x = -\frac{3}{2}$$

مختصات نقطه  $(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$  است.

## متوسط

## ۳۴-

با جاگذاری خواهیم داشت:

$$\frac{y}{2+6} = \frac{27+k}{100-68} \Rightarrow \frac{y}{8} = \frac{27+k}{32}$$

$$\frac{y}{1} = \frac{27+k}{4} \Rightarrow 28 = 27+k \Rightarrow 1 = k$$

## متوسط

## ۳۵-

$$\frac{2x^2+1}{x^2+5} = t \quad t + \frac{1}{t} = 2$$

زمانی معکوس دو عبارت مجموع دو خواهد داشت که هر یک، یک باشند.



چون در این معادله  $\Delta > 0, s > 0, p > 0$  پس این معادله دو ریشه مثبت دارد.

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = -2 \text{ ریشه ندارد}$$

### دشوار

### ۷- گزینه «۲»

هرگاه حاصل ضرب دو پراتنز صفر شود باید تک تک پراتنرها را مساوی صفر قرار دهیم پس

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

حواستون باشه! زمانی که دو عبارت در هم ضرب می‌شوند ریشه مورد قبول ریشه‌ای است که در اشتراک دامنه‌ها قرار داشته باشد و عبارتی را بی‌معنی نکند. پس در اینجا  $x = \pm 1$  قابل قبول نیستند چون در دامنه  $\sqrt{x-3}$  صدق نمی‌کنند.

### دشوار

### ۸- گزینه «۲»

عبارت رادیکال اول و دوم را به صورت اتحاد مربع کامل می‌نویسیم پس

$$\sqrt{(\sqrt{x-3}+2)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-3}-2)^2} = 8$$

$$|\sqrt{x-3}+2| + |\sqrt{x-3}-2| = 8$$

قدرمطلق اول چون مجموع دو عبارت مثبت است پس عبارتی است مثبت:

$$\sqrt{x-3}+2 + |\sqrt{x-3}-2| = 8$$

$$\sqrt{x-3}-2 = 8 - \sqrt{x-3}-2$$

با حل معادله قدرمطلق داریم:

$$2\sqrt{x-3} = 8 \Rightarrow \sqrt{x-3} = 4 \Rightarrow x-3 = 16 \Rightarrow x = 19$$

$$\sqrt{x-3}-2 = -8 + \sqrt{x-3}+2 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

پس معادله در کل  $x = 19$  ریشه دارد.

### دشوار

### ۹- گزینه «۳»

حواستون باشه! هرگاه حاصل جمع چند عبارت مثبت صفر باشد

قطعاً تک تک آن عبارت‌ها صفر بوده است. جواب‌های نهایی باید در اشتراک دامنه‌ها باشد.

$$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = 1$$

جواب مشترک  $x = 1$  است. پس معادله یک جواب دارد.

### متوسط

### ۱۰- گزینه «۱»

حواستون باشه! وقتی از معادلات رادیکالی صحبت می‌کنیم اگر رادیکال‌ها در

دامنه خود اشتراک نداشته باشند آن معادله قطعاً جواب ندارد پس

$$t = -\frac{1}{2}, t = 3$$

$$\frac{4x-1}{x+2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 8x-2 = -x-2 \Rightarrow 9x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\frac{4x-1}{x+2} = 3 \Rightarrow 4x-1 = 3x+6 \Rightarrow x = 7$$

پس اختلاف ریشه‌ها ۷ است.

### دشوار

### ۴- گزینه «۳»

در ابتدا مدت زمان حل سوالات با هم را به ساعت تبدیل می‌کنیم. ۲۰ دقیقه

معادل  $\frac{20}{60}$  یعنی  $\frac{1}{3}$  ساعت است که اگر با ۱ ساعت آن را جمع کنیم

$$1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

اگر حل شاگرد به تنهایی را با  $t+2$  و مدت زمان حل دبیر به تنهایی را با  $t$  نمایش دهیم خواهیم داشت:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+2} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{t+2+t}{t(t+2)} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{2t+2}{t^2+2t} = \frac{3}{4}$$

$$3t^2 + 6t = 8t + 8 \Rightarrow 3t^2 - 2t - 8 = 0$$

$$(3t+4)(t-2) = \begin{cases} t = -\frac{4}{3} \text{ غ ق} \\ t = 2 \end{cases}$$

پس شاگرد در  $t+2=4$  ساعت کار را به تنهایی انجام می‌دهد.

### متوسط

### ۵- گزینه «۲»

در ابتدا باید مشخص کنیم در ۴۰۰ کیلوگرم محلول چقدر نمک موجود است پس

$$400 \times \frac{5}{100} = 20 \text{ کیلوگرم}$$

حاصل ابتدا ۵ کیلوگرم نمک را به محلول اضافه می‌کنیم که خواهیم داشت

$$\frac{20+5}{400+5}$$

سپس برای آن که به غلظت موردنظر برسیم باید آب تبخیر کنیم پس

$$\frac{25}{405-x} = \frac{8}{100} \Rightarrow 2500 = 3240 - 8x \Rightarrow 8x = 740$$

$$x = 92.5 \text{ کیلوگرم}$$

### دشوار

### ۶- گزینه «۱»

اگر  $t = \sqrt{\frac{x^2+1}{x}}$  در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$t^2 - 4t - 12 = 0 \Rightarrow (t-6)(t+2) = 0$$

$$t = 6, t = -2$$

$$\sqrt{\frac{x^2+1}{x}} = 6 \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = 36 \Rightarrow x^2+1 = 36x \Rightarrow x^2-36x+1=0$$



که این جواب در معادله صدق نمی‌کند پس معادله جواب دیگری ندارد.

### دشوار

### ۱۴- گزینه «۳»

با به توان دو رساندن طرفین داریم:

$$\sqrt{1-\frac{15}{x}} + \sqrt{1+\frac{15}{x}} = \sqrt{2}$$

$$\cancel{x} - \frac{15}{\cancel{x}} + \cancel{x} + \frac{15}{\cancel{x}} + 2\sqrt{1-\frac{225}{x^2}} = \cancel{x}$$

$$\sqrt{1-\frac{225}{x^2}} = 0 \Rightarrow 1-\frac{225}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 225 \Rightarrow \begin{cases} x = +15 \text{ (ق ق)} \\ x = -15 \text{ (ق ق)} \end{cases}$$

### متوسط

### ۱۵- گزینه «۱»

ما به دنبال حاصل  $\sqrt{6+5\sqrt{6+5\sqrt{6+5\sqrt{6+\dots}}}} = A$  هستیم پس می‌توانیم:

$$\sqrt{6+5\sqrt{\frac{6+5\sqrt{6+\dots}}{A}}} = A$$

$$\sqrt{6+5A} = A \Rightarrow 6+5A = A^2 \Rightarrow A^2 - 5A - 6 = 0$$

$$(A-6)(A+1) = 0 \Rightarrow A = 6, A = -1$$

چون  $A$  حاصل رادیکال است منفی نمی‌تواند باشد پس  $A = 6$  قابل قبول است.

### دشوار

### ۱۶- گزینه «۲»

ابتدا طرف اول معادله را ساده و گویا می‌کنیم پس

$$\frac{9(2-\sqrt{x})}{2+\sqrt{x}} \times \frac{2-\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} = \frac{9(2-\sqrt{x})^2}{4-x}$$

حاصل با جاگذاری دو طرفین و وسطین داریم:

$$\frac{9(2-\sqrt{x})^2}{4-x} = 4-x \Rightarrow 9(2-\sqrt{x})^2 = (4-x)^2$$

$$|3(2-\sqrt{x})| = |4-x|$$

از طرفین جذر می‌گیریم

$$6-3\sqrt{x} = 4-x \Rightarrow x-3\sqrt{x}+2=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1, \sqrt{x}=2$$

$$x=1 \text{ (ق ق)}, x=4 \text{ (ق ق)}$$

$$6-3\sqrt{x} = -4+x \Rightarrow x+3\sqrt{x}-10=0 \Rightarrow (\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-2)=0$$

$$\sqrt{x} = -5 \text{ (غ ق)}, x=4 \text{ (ق ق)}$$

### آسان

### ۱۷- گزینه «۲»

با توجه به اینکه عبارت‌ها مزدوج هم هستند داریم:

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7} = A$$

$$\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7} = 20$$

$$1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x$$

$$2x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} + x \geq 0 \Rightarrow x \geq \sqrt{x-1} \Rightarrow x^2 \geq x-1$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 \geq 0 \text{ همواره مثبت}$$

از اشتراک دامنه‌ها  $x=1$  تنها ریشه ممکن می‌تواند باشد اما با صدق  $x=1$  در معادله خواهیم داشت

$$\sqrt{0+1} = 0+0 \Rightarrow 1=0$$

پس  $x=1$  در معادله صدق نمی‌کند در نتیجه این معادله جواب ندارد.

### دشوار

### ۱۱- گزینه «۱»

هر یک از عبارت‌ها باید صفر باشند.

$$x^3 + 5x^2 - 10x - 8 = 0 \Rightarrow (x^3 - 8)(5x^2 - 10x) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 2x + 4) + 5x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(9x^2 + 2x + 4 + 5x) = 0$$

$$(x-2)(9x^2 + 7x + 4) = 0 \Rightarrow x=2, x = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$(x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 2$$

اشتراک پاسخ‌ها جواب مسئله است پس تنها  $x=2$  هر دو رادیکال را صفر می‌کند.

### دشوار

### ۱۲- گزینه «۴»

با چک کردن دامنه‌ها داریم:

$$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$5-x \geq 0 \Rightarrow 5 \geq x$$

$$x-6 \geq 0 \Rightarrow x \geq 6$$

که این سه دامنه اشتراک ندارند پس جواب تهی است.

### آسان

### ۱۳- گزینه «۴»

چون  $x=4$  در معادله صدق می‌کند پس:

$$4+a = \sqrt{20-16} \Rightarrow 4+a = \sqrt{4}$$

$$4+a = 2 \Rightarrow a = -2$$

پس معادله به صورت  $x-2 = \sqrt{5x-x^2}$  با حل معادله گنگ داریم:

$$x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0 \Rightarrow (2x-1)(x-4) = 0$$

$$x = \frac{1}{2}, x = 4$$



$$\frac{1}{100-V} - \frac{1}{100+V} = \frac{5}{1200} \Rightarrow \frac{100+V-100+V}{10000-V^2} = \frac{1}{240}$$

$$\Rightarrow \frac{2V}{10000-V^2} = \frac{1}{240} \Rightarrow V^2 + 480V - 10000 = 0$$

$$\Rightarrow (V-20)(V+500) = 0 \Rightarrow \begin{cases} V=20 \text{ ق ق} \\ V=-500 \text{ غ ق} \end{cases}$$

### آسان

### ۲۰- گزینه «۴»

اگر در نظر بگیریم که بهروز کار را در  $t$  ساعت انجام داده است فرهاد چون ۹

ساعت آن را دیرتر انجام داده است پس ساعت انجام کار فرهاد  $t+9$  خواهد

بود. پس:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{20}$$

مخرج مشترک

$$\frac{t+9+t}{t(t+9)} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2t+9}{t^2+9t} = \frac{1}{20}$$

طرفین وسطین

$$t^2 + 9t = 40t + 180 \Rightarrow t^2 - 31t - 180 = 0$$

$$(t-36)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 36 \text{ ق ق}$$

چون زمان منفی نمی‌شود قابل قبول نیست.  $t = -5$

### دشواری

### ۲۱- گزینه «۲»

حواستون باشه! این سوال احتمالاً شمارو اذیت کرده!

در طرف اول مخرج مشترک بگیرید و در طرف دوم صورت و مخرج رو ساده

کنید:

$$\frac{3\sqrt{x+1} - \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2-1} - 3\sqrt{x+1}}{9-x+1} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{-2\sqrt{x^2-1}}{10-x} = \sqrt{x-1}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x+1}\sqrt{x-1}}{10-x} \rightarrow \frac{-2\sqrt{x+1}}{10-x} = 1$$

شرط دامنه رادیکال‌ها این هست که  $x > 1$   
پس می‌توان  $\sqrt{x-1} \neq 0$  را از طرفین ساده کرد

$$\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} -2\sqrt{x+1} = 10-x \xrightarrow{\text{به خاطر شرط رادیکال باشد } x \geq 10}$$

$$4(x+1) = 100 - 20x + x^2 \Rightarrow 4x + 4 = 100 - 20x + x^2$$

$$0 = x^2 - 24x + 96$$

$$\Delta = (-24)^2 - 4(96) = 192$$

با ضرب طرفین در یکدیگر داریم:

$$(\sqrt{x+3} - \sqrt{x-7})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x-7}) = 20A$$

$$x+3-x+7=20A \Rightarrow 10=20A \Rightarrow \frac{1}{2}=A$$

### متوسط

### ۱۸- گزینه «۴»

ابتدا شرط‌های معادلات گنگ را بررسی کنیم.

$x$	$-\infty$	$-2$	$0$	$+\infty$
		$+$	$-$	$+$

$$\Rightarrow a \leq 2 \text{ یا } a \geq 0$$

$$1) 2a^2 + 4a \geq 0 \Rightarrow 2a(a+2) \geq 0 \Rightarrow$$

$$2) 2 - 3a \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 3a \Rightarrow \frac{2}{3} \geq a$$

اشتراک این جواب  $0 \leq a \leq \frac{2}{3}$  خواهد بود.

حال طرفین وسطین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\sqrt{2a^2 + 4a} = 2 - 3a \Rightarrow 2a^2 + 4a = 4 + 9a^2 - 12a$$

$$0 = 7a^2 - 16a + 4 \Rightarrow 0 = (7a-2)(a-2) \Rightarrow a = \frac{2}{7}, a = 2$$

چون  $\frac{2}{7}$  در شرط دامنه صدق می‌کند پس قابل قبول است در نتیجه

$$\frac{a+1}{a} = \frac{\frac{2}{7}+1}{\frac{2}{7}} = \frac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{7}} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$$

### دشواری

### ۱۹- گزینه «۳»

با توجه به سوال سرعت قایق موتوری در آب را که به تنهایی  $\frac{1000}{5}$  متر دقیقه است

پس در جهت رودخانه این سرعت به  $100+V$  و در خلاف رودخانه این

سرعت به  $100-V$  می‌رسد که  $V$  در آن سرعت آب رودخانه است. از

طرفی چون اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است پس

$$t_2 - t_1 = 5 \xrightarrow{t = \frac{x}{V}} \frac{x_2}{V_2} - \frac{x_1}{V_1} = 5 \Rightarrow \frac{1200}{100-V} - \frac{1200}{100+V} = 5$$

در این مرحله با رد گزینه می‌توان به جواب رسید مثلاً اگر گزینه ۳ را در این

عبارت جایگزین کنیم خواهیم داشت  $V = 20$

$$\frac{1200}{100-20} - \frac{1200}{100+20} = 5 \Rightarrow 15 - 10 = 5 \quad \checkmark$$

ولی اگر بخواهیم سوال را با مخرج مشترک حل کنیم خواهیم داشت:

$$1200 \left( \frac{1}{100-V} - \frac{1}{100+V} \right) = 5$$

تمامی کسرها را در یک طرف جمع کرده و مخرج مشترک بگیریم:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{x^3+8} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = 0$$

$$\frac{1}{x+2} - \frac{x^2-9x-2}{(x+2)(x^2-2x+4)} - \frac{6x}{x^2-2x+4} = 0$$

$$\frac{x^2-2x+4-x^2+9x+2-6x^2-12x}{(x+2)(x^2-2x+4)} = 0$$

$$6x^2+5x-6=0 \Rightarrow (2x+3)(3x-2)=0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, x = \frac{2}{3}$$

یک ریشه مثبت دارد.

### متوسط

### ۲۵- گزینه «۴»

حواستون باشه! هر موقع از مستطیل طلایی صحبت کردن با توجه به تمرین

کتاب درسی رابطه زیر در ذهن باید بیاد.

$$\frac{\text{طول}}{\text{عرض}} = \frac{\text{طول} + \text{عرض}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

در مرحله اول اگر طول مستطیل را  $L$  و عرض مستطیل را  $W$  در نظر بگیریم

$$\frac{L}{W} = \frac{5}{4} \text{ است.}$$

در مرحله دوم به طول مستطیل  $x$  اضافه می‌شود تا مستطیل طلایی شود پس

$$\frac{L+x}{w} = \frac{L+x+w}{L+x} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

با جایگذاری رابطه مرحله اول ( $w = \frac{4}{5}L$ ) در رابطه ی به دست آمده در

$$\text{مرحله دوم} \left( \frac{L+x}{w} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \text{ خواهیم داشت:}$$

$$\frac{L+x}{\frac{4}{5}L} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} \frac{L+x}{L} = \frac{4}{10}(1+\sqrt{5}) = \frac{2}{5}(1+\sqrt{5})$$

چون نسبت مساحت مستطیل طلایی ( $S = (L+x)(w)$ ) را به مساحت

$$\text{مستطیل اولیه} (S = Lw) \text{ خواسته است پس } \frac{L+x}{L} \text{ جواب مسئله است.}$$

### متوسط

### ۲۶- گزینه «۳»

حواستون باشه! حل این سوال به روش‌های مختلفی انجام می‌شه ما به انتخاب

یک روش رو براتون گذاشتیم.

اول بیایید و مخرج مشترک طرف اول عبارت رو بگیرید.

$$\frac{(1-x)^2 + x^2}{[x(1-x)]^2} = \frac{160}{9}$$

$$\text{ریشه} = \frac{24 \pm 8\sqrt{3}}{2} = 12 \pm 4\sqrt{3}$$

حواستون باشه!  $12 - 4\sqrt{3}$  به خاطر کوچک‌تر از ۱۰ بودن قابل قبول نیست.

### دشوار

### ۲۷- گزینه «۳»

حواستون باشه! این سوال در اصل برای کتاب دهم فصل سوم هست ولی

چون ایده جالبی داشت بهتر دیدیم که از چشم شما هم دور نماند.

اول اطلاعات مسئله رو مخرج مشترک بگیریم و ساده کنیم:

$$\frac{a^3-1+a^3+1}{a^6-1} = 2$$

$$\frac{2a^3}{a^6-1} = 2 \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 2a^6 - 2 = 2a^3 \xrightarrow{\text{مرتب}} 2a^6 - 2a^3 - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{ساده}} a^6 - a^3 - 1 = 0 \quad (*)$$

حالا حاصل عبارتی که خواسته شده رو به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$\frac{1}{(a^3+1)-\sqrt{a^3}} + \frac{1}{(a^3+1)+\sqrt{a^3}} = \frac{a^3+1+\sqrt{a^3}+a^3+1-\sqrt{a^3}}{(a^3+1)^2-a^3}$$

$$= \frac{2a^3+2}{a^6+2a^3+1-a^3} = \frac{2a^3+2}{a^6+a^3+1} \xrightarrow{\text{چون } a^6=a^3+1} \frac{2a^3+2}{a^3+1+a^3+1}$$

$$= \frac{2a^3+2}{2a^3+2} = 1$$

و در آخر ۱ به توان هر عددی همچنان ۱ است.

### متوسط

### ۲۸- گزینه «۴»

حواستون باشه! شرط آن که معادلات گنگ جواب حقیقی قابل قبول داشته

باشند آن است که

$\geq 0$  زیر رادیکال باشد

$$(1) \quad 2x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{3}{2}$$

$$(2) \quad x + \sqrt{x-2} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x-2} \geq -x \Rightarrow x-2 \geq x^2$$

$$\Rightarrow 0 \geq x^2 - x + 2 \Rightarrow \text{ریشه ندارد و همواره مثبت است}$$

$$(3) \quad 2-x \geq 0 \Rightarrow 2 \geq x$$

$$(4) \quad x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

این چهار شرط با توجه به شرط دوم که تهی است اشتراک ندارند پس این

معادله دارای جواب نیست.

### آسان

### ۲۹- گزینه «۴»



ت) معادله  $\sqrt{x} + 2 = 0$  اصلاً ریشه‌ای ندارد چون  $\sqrt{x} = -2$  وجود ندارد. نادرست

## متوسط

-۲

آ) شیب خط  $2x - 3y + 3 = 0$  برابر با  $\frac{2}{3}$  و شیب خط  $3x + 2y = 0$  برابر با  $-\frac{3}{2}$  است چون قرینه و معکوس یکدیگرند پس عمود هستند.

$$\text{ب) } (2(-1) - 1, 2(4) - 2) = (-3, 6)$$

$$\text{پ) دو ریشه } \Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1) = 4 + 4 = 8$$

$$\text{ت) } \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

## متوسط

-۳

$$y - 2x + 1 = 0$$

$$\text{فاصله نقطه از خط} = \frac{|0 - 2(3) + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{+5}{\sqrt{5}}$$

$$\text{مساحت } \left(\frac{5}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{25}{5} = 5$$

## متوسط

-۴

$$2x + 2y = 10 \Rightarrow 2y = 10 - 2x \Rightarrow y = 5 - x$$

$$S = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$= x(5 - x) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \Rightarrow 5x - \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$= 5x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)x^2 \Rightarrow 5x - \frac{1}{11}x^2$$

$$x_s = -\frac{b}{2a} = \frac{-5}{2\left(-\frac{1}{11}\right)} = \frac{-5 \times 11}{-2} = \frac{55}{2}$$

$$y_s = 5 - \frac{55}{2} = 5 + \frac{75}{2} = \frac{185}{2}$$

## دشواری

-۵

$$AB = \sqrt{(-1-3)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{آ)}$$

$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

ب) M میانه BC است پس نقطه وسط پاره خط BC, M خواهد بود

$$M = \left(\frac{1+3}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (2, 1)$$

صورت کسر اتحاد مربع کامل را باز کنید و در مخرج دو عبارت را در هم ضرب کنید.

$$\frac{1+x^2-2x+x^2}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9} \Rightarrow \frac{2x^2-2x+1}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x^2-x)+1}{(x-x^2)^2} = \frac{160}{9}$$

حالا  $x^2 - x = t$  در نظر بگیرید.

$$\frac{2t+1}{t^2} = \frac{160}{9} \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 18t+9=160t^2$$

$$160t^2 - 18t - 9 = 0$$

$$(16t+3)(10t-3) = 0 \Rightarrow t_1 = -\frac{3}{16}, t_2 = \frac{3}{10}$$

$$x^2 - x + \frac{3}{16} = 0 \Rightarrow 16x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 16^2 - 4(-48) = 64 \Rightarrow S = 1$$

$$x^2 - x - \frac{3}{10} = 0 \Rightarrow 10x^2 - 10x - 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 100 - 4(-30) = 100 + 120 = 220 \Rightarrow S = 1$$

$$\Rightarrow S_1 + S_2 = 2$$



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۱

## متوسط

-۱

آ) چون دو خط  $x = 5, y = 0$  برهم عمودند پس شیب‌های قرینه معکوس دارند. درست

ب) فرمول معادله به صورت  $x^2 - Sx + P = 0$  است پس  $x^2 - 3x - 10 = 0$  است. نادرست

پ) علامت b از  $x_s = -\frac{b}{2a}$  به دست می‌آید و چون  $a > 0$  است پس

$b < 0$  است. نادرست





$$\text{ب) } \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = A \xrightarrow[\text{توان } 2]{\text{طرفین}} \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = A^2$$

$$s + 2\sqrt{p} = A^2 \Rightarrow \sqrt{s + 2\sqrt{p}} = A$$

$$\sqrt{4+2} = A \Rightarrow \sqrt{6} = A$$

### آسان

-۹

صفر تابع یعنی عددی که اگر در معادله صدق کند آن را صفر کند

$$5^3 - a(5)^2 - 8(5) - 10 = 0 \Rightarrow 125 - 25a - 40 - 10 = 0$$

$$75 = 25a \Rightarrow 3 = a$$

با جایگذاری  $a$  در معادله  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 8x - 10$  چون  $x = 5$  یک

ریشه آن است پس

$$x^3 - 3x^2 - 8x - 10 \left| \begin{array}{l} x-5 \\ \hline x^2 + 2x + 2 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} -x^3 + 5x^2 \\ \hline 2x^2 - 8x - 10 \\ -2x^2 + 10x \\ \hline 2x - 10 \\ -2x + 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

در نتیجه تجزیه عبارت  $(x-5)(x^2 + 2x + 2) = 0$

$$x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4(2) = -4 \text{ ندارد ریشه}$$

### متوسط

-۱۰

با توجه به معادله سهمی  $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$  و ریشه‌های مشخص شده

در شکل ۱ و ۲

$$y = a(x - (-1))(x - 2)$$

$$y = a(x+1)(x-2) \xrightarrow[\text{و جایگذاری آن در معادله}]{\substack{\text{با استفاده از نقطه} \\ \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array} \right]}} -1 = a(0+1)(0-2)$$

$$-1 = -2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}(x+1)(x-2) \text{ پس ضابطه سهمی}$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 1$$

### دشواری

-۱۱

حواستون باشه‌ها! ایده حل این سوال را در ذهن نگه دارید.

$H$  نقطه برخورد ارتفاع با ضلع  $BC$  است پس ابتدا معادله خط  $AH$  را نوشته و با  $BC$  دستگاه حل می‌کنیم.

$$1 \rightarrow \text{قرینه معکوس} = \frac{-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1 \text{ شیب } BC$$

$$\text{معادله خط } AH \rightarrow y - 3 = 1(x+1) \Rightarrow y = x + 4$$

$$\text{معادله خط } BC \rightarrow y - 0 = -1(x-3) \Rightarrow y = -x + 3$$

$$\begin{cases} y = x + 4 \\ y = -x + 3 \end{cases}$$

$$2y = 7 \Rightarrow y = \frac{7}{2}, x = -\frac{1}{2} \quad H = \left(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$MH = \sqrt{\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

### متوسط

-۹

برای یافتن معادله ابتدا فاصله نقطه  $A$  تا خط  $BC$  را به عنوان اندازه‌ی ارتفاع و فاصله دو نقطه  $B$  و  $C$  را به عنوان اندازه قاعده می‌یابیم.

$$\text{معادله خط } BC: \frac{-2}{3-1} = \frac{-2}{2} = -1$$

$$y - 0 = -1(x-3) \Rightarrow y = -x + 3 \Rightarrow y + x - 3 = 0$$

$$\text{فاصله } A \text{ تا } BC = AH = \frac{|3-1-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$BC = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$$

$$S = \frac{2\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = 1$$

### آسان

-۹

برای نوشتن معادله درجه ۲ از رابطه  $x^2 - sx + p = 0$  استفاده می‌کنیم:

$$s = 3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2} = 6$$

$$p = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 9 - 2 = 7$$

پس معادله  $x^2 - 6x + 7 = 0$  است.

### متوسط

-۸

$$\text{با توجه به معادله داده شده } s = \frac{-b}{a} = 4, p = \frac{c}{a} = 1$$

$$\bar{\alpha}) \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + \beta^3 + \beta^2}{(\alpha+1)(\beta+1)} = \frac{\alpha^3 + \beta^3 + \alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta + \alpha + \beta + 1} = \frac{s^3 - 3ps + s^2 - 2p}{p + s + 1}$$

$$\frac{4^3 - 3(4) + 16 - 2}{1 + 4 + 1} = \frac{64 - 12 + 16 - 2}{5} = \frac{66}{5}$$



$$\frac{Y_A(t+30)}{Y_A(40)} = \frac{100Y_B}{tY_B} \Rightarrow \frac{t+30}{40} = \frac{100}{t} \Rightarrow t^2 + 30t - 4000 = 0$$

$$\Rightarrow (t+80)(t-50) = \begin{cases} t = -80 \text{ ق ق} \\ t = 50 \text{ ق ق} \end{cases}$$

پس اگر از سمت **B** به مسئله نگاه کنیم از ساعت ۸:۱۵ اگر ۵۰ دقیقه جلو بیاییم ساعت ۹:۰۵ خواهد بود. و همچنین اگر از سمت **A** به مسئله نگاه کنیم از ساعت ۷:۴۵ اگر  $70 = t + 30$  ۸۰ دقیقه جلو بیاییم ۹:۰۵ خواهد بود.



## متوسط

-۱

آ) درست

$$x^2 = t \Rightarrow 2t^2 - 7t - 4 = 0 \Rightarrow (2t+1)(t-4) = 0 \quad \text{ب) نادرست}$$

$$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$x^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-[49 - 4(-3)]}{4(-3)} = \frac{-61}{-12} = \frac{61}{12} \quad \text{پ) نادرست}$$

$$12 + t = 16 \Rightarrow t = 4 \quad \text{ت) درست}$$

## متوسط

-۲

$$\text{آ) وسط پاره خط } \left( \frac{-1+(-3)}{2}, \frac{-1+4}{2} \right) = (-2, -3) \Rightarrow \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

$$\text{ب) } \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

$$\text{پ) } \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\text{ت) } x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 2+1 = -1+x_D$$

$$\Rightarrow 3 = -1+x_D \Rightarrow x_D = 4$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 3+(-2) = 4+y_D$$

$$\Rightarrow 1 = 4+y_D \Rightarrow y_D = -3$$

## آسان

-۳

میانۀ **AM** وارد بر ضلع **BC** به وسط ضلع **BC** وارد می‌شود پس ابتدا وسط **BC** را تعیین می‌کنیم

$$M = \left( \frac{4+7}{2}, \frac{3+2}{2} \right) = \left( \frac{11}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

$$x^2 - x - 5\sqrt{x^2 - x + 5} + 9 = 0$$

$$x^2 - x + 5 - 5\sqrt{x^2 - x + 5} + 4 = 0 \quad \frac{x^2 - x + 5 = t}{\rightarrow}$$

$$t - 5\sqrt{t} + 4 = 0 \quad \xrightarrow[\text{صفر است}]{\text{جمع ضرایب}} \sqrt{t} = 1, \sqrt{t} = 4$$

$$t = 1, t = 16$$

$$x^2 - x + 5 = 1 \Rightarrow x^2 - x + 4 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(4) \Rightarrow \Delta = -15 \quad \text{ریشه ندارد.}$$

$$x^2 - x + 5 = 16 \Rightarrow x^2 - x - 11 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4(-11) \Rightarrow \Delta = 1 + 44 = 45$$

$$\text{ریشه} = \frac{1 \pm \sqrt{45}}{2}$$

## دشوار

-۱۲

ابتدا باید بفهمیم در محلول ۲۰۰ گرم جای ۴ درصدی چقدر شکر موجود بوده است.

$$200 \times \frac{4}{100} = 8 \quad \text{شکر گرم}$$

حالا با توجه به فرمول غلظت  $\frac{\text{حل شونده}}{\text{حلال}}$  = غلظت و تبخیر شده آب برای

رسیدن به محلول ۷ درصدی:

$$\frac{7}{100} = \frac{8}{200-x} \Rightarrow 1400 - 7x = 800$$

$$600 = 7x \Rightarrow x = \frac{600}{7}$$

## دشوار

-۱۳

$$\begin{array}{c} 7:45 \quad t+30 \quad t \quad 8:15 \\ A \times \quad V_A \quad \times \quad M \quad \times \quad V_B \quad \times B \end{array}$$

قطار **A** چون ۷:۴۵ شروع به حرکت کرده است در رسیدن به **M** که نقطه‌ی برخورد دو قطار است ۳۰ دقیقه بیشتر حرکت کرده است.

$$\begin{array}{c} 100 \text{ min} \quad M \quad 40 \text{ min} \\ A \times \quad V_B \quad \times \quad V_A \quad \times B \end{array}$$

حالا در شکل دوم با توجه به صورت سوال قطار **A** از **M**، ۴۰ دقیقه طول می‌کشد تا به **B** برسد و قطار **B** ۱۰۰ دقیقه طول می‌کشد که از **M** به **A** برسد. با توجه به رابطه  $x = Vt$ ، مسافت طی شده از **A** تا **M** در دو شکل برابر است پس  $(V_A)(t+30) = 100V_B$  همچنین طول مسافت طی شده در رسیدن **B** تا نیز با یکدیگر برابر است پس  $(V_A)(40) = tV_B$  از تقسیم دو رابطه به دست آمده داریم

## دشوار

-۷

$$G = \left( \frac{(-2) + 1}{3}, \frac{1 + (-2) + 4}{3} \right) = (1, 1) \quad (A)$$

$$AM \text{ معادله میانه} \Rightarrow M = \left( \frac{-2+4}{2}, \frac{1+(-2)}{2} \right) = (1, -\frac{1}{2}) \quad (B)$$

$$AM \text{ معادله: } x = 1$$

$$BH \text{ شیب} \rightarrow 1 \text{ قرینه و معکوس} \rightarrow \frac{BH \text{ شیب}}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$BH \text{ معادله: } y + 2 = 1(x - 2) \Rightarrow y = x - 4$$

D محل تلاقی BH و AM است پس دستگاه حل می کنیم.

$$y = 1 - 4 \Rightarrow y = -3$$

$$D(+1, -3)$$

$$x_A + x_C = x_B + x_{D'} \Rightarrow 1 + 1 = -2 + x_{D'} \Rightarrow 4 = x_{D'} \quad (B)$$

$$y_A + y_C = y_B + y_{D'} \Rightarrow 4 + 1 = -2 + y_{D'} \Rightarrow y_{D'} = 7$$

$$BD' = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{36+81} = \sqrt{117}$$

## متوسط

-۸

با توجه به ارتباط بین ریشه ها  $\alpha = 2\beta - 1$

حالا s و p را از روی معادله به دست می آوریم و در آن ها  $\alpha = 2\beta - 1$  قرار

می دهیم:

$$s = \frac{-b}{a} = -\frac{(1)}{4} = \alpha + \beta \Rightarrow -\frac{1}{4} = 2\beta - 1 + \beta \Rightarrow \frac{3}{4} = 3\beta \Rightarrow \beta = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 = -\frac{1}{2} \text{ داریم } \alpha = 2\beta - 1 \text{ در } \beta$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{m}{4} = \alpha\beta \Rightarrow \frac{1}{4m} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{4m} = \frac{-1}{8}$$

$$\Rightarrow -4m = 8 \Rightarrow m = -2$$

## آسان

-۹

ابتدا  $x^2 - 1$  را برابر با t در نظر می گیریم:

$$x^2 - 1 = t \Rightarrow t^2 - t - 6 = 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) = 0$$

$$t = 3 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2 - 1 = 3 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$t = -2 \xrightarrow{t=x^2-1} x^2 - 1 = -2 \Rightarrow x^2 = -1$$

حاصل عبارت توان زوج منفی نمی تواند باشد پس این معادله ریشه ندارد.

در نتیجه صفرهای تابع تنها  $x = \pm 2$  خواهد بود.

## آسان

-۱۰

شیر اول در  $\frac{1}{3}$  ساعت، شیر دوم در  $\frac{1}{4}$  ساعت و شیر سوم در x ساعت استخر

را پر می کنند. پس

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{4x + 3x + 12}{12x} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{7x + 12}{12x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 28x + 48 = 36x \Rightarrow 48 = 8x \Rightarrow 6 = x$$

فاصله ی دو نقطه A و M را می یابیم

$$AM = \sqrt{\left(\frac{11}{2} + 5\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 0\right)^2}$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{21}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{441}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{466}{4}} = \sqrt{116.5}$$

## متوسط

-۴

محل برخورد سه میانه مثلث مرکز ثقل مثلث خواهد بود پس

$$G = \left( \frac{3+0-4}{3}, \frac{1+3+0}{3} \right) = \left( -\frac{1}{3}, \frac{4}{3} \right)$$

در مرحله بعد معادله خط AC را باید پیدا کنیم:

$$AC \text{ شیب} = \frac{0-1}{-4-3} = \frac{-1}{-7} = \frac{1}{7}$$

$$AC \text{ معادله خط } y - 0 = \frac{1}{7}(x + 4) \Rightarrow y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7} \Rightarrow 7y - x - 4 = 0$$

حال فاصله نقطه G تا خط AC را به دست می آوریم:

$$d = \frac{\left| 7\left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) - 4 \right|}{\sqrt{49+1}} = \frac{\left| \frac{28}{3} + \frac{1}{3} - 4 \right|}{\sqrt{50}} = \frac{\frac{17}{3}}{\sqrt{50}} = \frac{17}{3\sqrt{50}}$$

## آسان

-۵

ابتدا محل برخورد دو خط را با استفاده از دستگاه به دست می آوریم:

$$\begin{cases} y - x = 7 \\ 2y + x = 17 \end{cases}$$

$$3y = 24$$

$$y = 8, x = 1$$

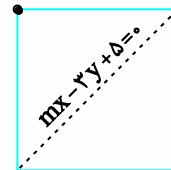
حال فاصله نقطه (1, 8) را از خط  $y - 2x - 1 = 0$  به دست می آوریم:

$$d = \frac{\left| 8 - 2(1) - 1 \right|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}}$$

## دشوار

-۶

A(1, 2)



فاصله رأس A تا قطر به اندازه نصف قطر مربع خواهد بود.

$$\text{نصف قطر} = \frac{|m(1) - 2(2) + 5|}{\sqrt{m^2 + 9}} = \frac{|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 9}} \xrightarrow{\text{کل قطر}} \frac{2|m + 1|}{\sqrt{m^2 + 9}}$$

رابطه قطر مربع و مساحت مربع از رابطه  $(\sqrt{2})$  (طول ضلع) = قطر و در نتیجه

$$\text{مساحت} = \frac{(\text{قطر})^2}{2} = \frac{\left(\frac{2|m+1|}{\sqrt{2}}\right)^2}{2}$$

$$\frac{\left(\frac{2|m+1|}{\sqrt{m^2+9}}\right)^2}{2} = 2 \Rightarrow \frac{4(m^2 + 2m + 1)}{m^2 + 9} = 4 \Rightarrow m^2 + 2m + 1 = m^2 + 9$$

$$2m = 8 \Rightarrow m = 4$$

## دشوار

## ۲- گزینه «۴»

$\alpha$  در معادله صدق می‌کند پس:  $\alpha^2 - \alpha - 3 = 0$

$$\alpha^3 - \frac{27}{\alpha^3} = \frac{\alpha^6 - 27}{\alpha^3} = \frac{(\alpha^2)^3 - 3^3}{\alpha^3}$$

از معادله:

$$\frac{(\alpha^2 - 3)(\alpha^2 + 3\alpha^2 + 9)}{\alpha^3} = \alpha^2 - 3 = \alpha$$

$$\alpha^2 = \alpha + 3$$

$$= \frac{\cancel{\alpha^2}[\alpha^2(\alpha^2 + 3) + 9]}{\alpha^2} = \frac{(\alpha + 3)(\alpha + 6) + 9}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 9\alpha + 18 + 9}{\alpha^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + 9\alpha + 27}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 9(\alpha + 3)}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 9\alpha^2}{\alpha^2} = \frac{10\alpha^2}{\alpha^2} = 10$$

## دشوار

## ۳- گزینه «۲»

اگر کمی دقت کنیم می‌بینیم که  $x = 1$  در معادله درجه سه صدق می‌کند.

$$x = 1 \Rightarrow \cancel{1^3} + \cancel{4} \cdot \cancel{1} = 4$$

پس  $(x - 1)$  یک عامل برای عبارت است:

$$\frac{x^3 + (a-1)x^2 + (4-a)x - 4}{x^2 + ax + 4} \begin{array}{l} \text{طرفین} \\ \text{وسطین} \end{array} \left| \begin{array}{l} x-1 \\ \text{(*)} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{r} \cancel{x^3} + x^2 \\ \underline{\cancel{ax^2} + (4-a)x - 4} \\ \phantom{\cancel{x^3}} + ax \\ \underline{\phantom{\cancel{x^3}} + 4x - 4} \\ \phantom{\cancel{x^3}} - 4x + 4 \\ \phantom{\cancel{x^3}} \phantom{+} 0 \end{array}$$

(\*) حالا این عبارت باید دو ریشه حقیقی متمایز مثبت داشته باشد پس:

$$\Delta > 0 \Rightarrow a^2 - 16 > 0 \Rightarrow a^2 > 16 \Rightarrow |a| > 4 \Rightarrow a < -4 \cup a > 4 \quad (1)$$

$$s > 0 \Rightarrow \frac{-a}{1} > 0 \Rightarrow a < 0 \quad (2)$$

$$p > 0 \Rightarrow \checkmark \xrightarrow{(1) \cap (2)} a > -4$$

## متوسط

## ۴- گزینه «۱»

اگر نمودار بخواد بر محور  $x$ ها مماس بشه باید  $\Delta = 0$  باشه، به عبارتی باید از

$y = 0$ ، دو ریشه برابر (ریشه تکراری) به دست بیاد:

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3 - \frac{x}{m} = 0 \Rightarrow \frac{x}{m} = 3 \Rightarrow x = 3m \\ mx - 1 = 0 \Rightarrow nx = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{m} \end{cases}$$

## متوسط

## -۱۱

ابتدا تمام کسرها را در مخرج مشترک آن‌ها ضرب می‌کنیم.

$$\frac{2x}{x-2} - \frac{6}{1} = \frac{2}{x} \xrightarrow{x(x-2)} (x)(x-2) \left( \frac{2x}{x-2} - \frac{6}{1} \right)$$

$$= (x)(x-2) \left( \frac{2}{x} \right) \Rightarrow 2x^2 - 6x^2 + 12x = 2x - 4$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 10x - 4 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 5x - 2 = 0$$

چون حاصل جمع ریشه را خواسته است پس  $S = -\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$

## دشوار

## -۱۲

اگر  $\sqrt{x} = t$  را در نظر بگیریم آنگاه  $x = t^2$  خواهد بود پس:

$$\frac{4-t}{2-t^2} = 2+t \xrightarrow{\text{طرفین وسطین}} 4-t = (2+t)(2-t^2)$$

$$\cancel{4} - t = \cancel{4} - 2t^2 + 2t - t^2 \Rightarrow t^3 - 3t + 2t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$t(t^2 + 2t - 3) = 0 \Rightarrow t(t+3)(t-1) = 0$$

$$t = 0 \Rightarrow \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$t + 3 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow \sqrt{x} = -3 \Rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

$$t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

پس معادله دو ریشه دارد.

## آسان

## -۱۳

ریشه‌های معادله  $x = 3$ ،  $x = 5$  است پس

$$y = a(x-3)(x-5) \xrightarrow{\left. \begin{array}{l} 3 \\ 5 \end{array} \right\}} 3 = a(0-3)(0-5)$$

$$3 = a(-3)(-5) \Rightarrow \frac{1}{5} = a$$

$$y = \frac{1}{5}(x^2 - 8x + 15) \Rightarrow y = \frac{1}{5}x^2 - \frac{8}{5}x + 3$$



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تستی پایانی

## متوسط

## ۱- گزینه «۴»

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2 \rightarrow s \\ \alpha\beta = -1 \rightarrow p \end{cases}$$

$$\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta}{\alpha + \beta}$$

$$= \frac{s^2 - 2p + p}{s} = \frac{s^2 - p}{s} = \frac{4 + 1}{2} = \frac{5}{2}$$

حالت دوم:  $4a + 3 = 0$  و در نتیجه  $a = -\frac{3}{4}$  که در این صورت عبارت به  $5ax$  تبدیل می شود که باز هم ریشه آن  $x = 0$  است. پس دو مقدار برای  $a$  داریم.

## متوسط

## ۷- گزینه «ب»

بازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰٪ داریم پس ۴/۴ حل شونده داریم زیرا:

$$11 \times \frac{40}{100} = 4/4$$

به همین ترتیب چهار کیلوگرم رنگ با غلظت ۷۰٪ یعنی وجود ۲/۸ حل شونده.

محلول نهایی ۴/۴ + ۲/۸ حل شونده دارد یعنی ۷/۲ حل شونده.

از طرفی محلول نهایی  $11 + 4 = 15$  کیلوگرم است و اگر مقدار تبخیر شده را  $x$  فرض کنیم داریم:

$$\frac{7/2}{15-x} = \frac{50}{100} \Rightarrow \frac{7/2}{15-x} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 15-x = 14/4 \Rightarrow x = 0/6$$

## دشوار

## ۸- گزینه «ب»

$$\sqrt{x^3 + 5x^2 - 10x - 8} + \sqrt{x^2 + x - 6} = 0$$

توی این معادله، مجموع دو رادیکال با فرجه زوج برابر با صفر شده است. می‌دونیم که رادیکال همواره نامنفی هست و اگر جمع دو رادیکال نامنفی برابر صفر شده، معنی اون این هست که هر دو رادیکال برابر صفر هستند و معادله در صورتی دارای جواب هست که هر دو رادیکال هم زمان صفر بشن. صفرهای رادیکال دوم را به دست میاریم ببینیم آیا هیچ کدام رادیکال اول رو صفر می‌کنند یا خیر.

$$x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$$

$$x = 2 \Rightarrow 8 + 20 - 20 - 8 = 0 \quad \checkmark$$

$$x = -3 \Rightarrow -27 + 45 + 30 - 8 \neq 0$$

پس تنها جواب معادله  $x = 2$  است.

## دشوار

## ۹- گزینه «ا»

بین دو کسر سمت چپی مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{x^2 + \sqrt{x} + x^2 - \sqrt{x}}{x^2 - x} = \frac{4}{x^2 + x + 1} \Rightarrow \frac{2x^2}{x(x^2 - 1)} = \frac{4}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{x(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{4}{x^2+x+1}$$

جملات  $x^2 + x + 1$  را از مخرج‌های کسرها ساده می‌کنیم و می‌دانیم فاقد ریشه ( $\Delta < 0$ ) و همواره مثبت هستند.

$$\Rightarrow 2x^2 = 4x^2 - 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, x = 2$$

غ ق ق  
(ریشه مخرج)

$$\Rightarrow 3m = \frac{1}{m} \Rightarrow 3m^2 = 1 \Rightarrow m^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow m = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$$

پس دو جواب برای  $m$  داریم.

## دشوار

## ۵- گزینه «ب»

$$y = x^2 + 2mx \Rightarrow x_A = \frac{-b}{2a} = \frac{-2m}{2} = -m$$

$$y_A = (-m)^2 + 2m(-m) = m^2 - 2m^2 = -m^2$$

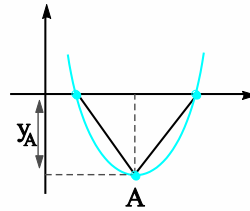
$$\Rightarrow \Delta \begin{vmatrix} -m \\ -m^2 \end{vmatrix}$$

تلاقی با محور  $x$ ها یعنی  $y = 0$  پس:

$$x^2 + 2mx = 0$$

$$\Rightarrow x(x + 2m) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = -2m$$

از اونجا که رأس سهمی دقیقاً وسط ریشه‌هاست پس مثلث حاصل، متساوی الساقین است و  $h = |y_A|$  و طول قاعده برابر  $|x_2 - x_1|$  است.



$$h = |-m^2| = m^2 \Rightarrow S = \frac{1}{2}(m^2)|-2m - 0|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m^2(+2m) = 8 \Rightarrow m^3 = 8 \Rightarrow m = 2$$

## دشوار

## ۶- گزینه «ب»

سمت چپ معادله رو مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{3x + 2x + 4}{x + 2} = \frac{2}{1 + ax} \Rightarrow \frac{5x + 4}{x + 2} = \frac{2}{1 + ax}$$

حالا طرفین وسطین کنیم:

$$(\Delta x + 4)(1 + ax) = 2(x + 2)$$

$$\Delta x + \Delta ax^2 + 4ax + 4 = 2x + 4 \Rightarrow \Delta ax^2 + (\Delta a + 4)x = 2x$$

$$\Rightarrow \Delta ax^2 + (\Delta a + 2)x = 0 \Rightarrow x(\Delta ax + \Delta a + 2) = 0$$

همان‌طور که مشخص است  $x = 0$  یک ریشه برای معادله است و چون می‌خواهیم معادله فقط یک جواب داشته باشد پس سراغ داخل پرانتز می‌رویم:

حالت اول:  $a = 0$  در نتیجه داخل پرانتز به ۳ تبدیل می‌شود که ریشه ندارد.

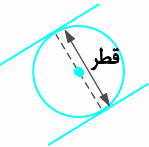


$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A \\ x_B & y_B \\ x_C & y_C \\ x_D & y_D \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-1+2+1) - (4-2+2)| = \frac{5}{2}$$

**گزینه ۱۴ «۴» متوسط**

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$$

دو خط موازی هستند پس فاصلهٔ اون‌ها قطر دایره رو به ما می‌ده!



$$\text{قطر} = \frac{|C - C'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|10 - 1|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{20}} = \frac{9}{2\sqrt{5}}$$

$$\text{محیط} = \text{قطر} \times \pi = \frac{9\sqrt{5}}{10} \pi$$

**گزینه ۱۵ «۴» متوسط**

ریشه‌ها دو عدد صحیح متوالی‌اند پس تفاضل ریشه‌ها برابر ۱ هست:

$$|\alpha - \beta| = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} = 1 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = |a| \Rightarrow \Delta = a^2$$

$$\Rightarrow m^2 - 80 = 1 \Rightarrow m^2 = 81 \Rightarrow m = \pm 9$$

**گزینه ۱۶ «۴» متوسط**

$\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله هستند بنابراین در معادله صدق می‌کنند:

$$2\alpha^2 + 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\beta^2 + 2\beta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\beta^2 + 2\beta)^{1397} + (\alpha^2 + 2\alpha)^{1397} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1397} + \left(\frac{1}{2}\right)^{1397}$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{1397} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1396}$$

**گزینه ۱۷ «۲» دشوار**

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 + 5x^2 - x - 5} + \frac{x^2 + x}{x^3 + 6x^2 + 5x} = 1$$

یادت باشه!

در هر معادله اگر مجموع ضرائب صفر باشه، حتماً به ریشه ۱ هست و عبارت

بر  $(x-1)$  بخش‌پذیر است. همچنین در هر معادله اگر مجموع ضرائب توان

های فرد با مجموع ضرائب توان‌های زوج برابر باشه، حتماً یک ریشه ۱- هست

یک ریشه دارد.

**گزینه ۱۰ «۱» متوسط**

با کمک تغییر متغیر  $t = x - \sqrt{x}$  داریم:

$$t^2 - \frac{11}{10}t + \frac{1}{10} = 0 \xrightarrow{\times 10} 10t^2 - 11t + 1 = 0$$

$$\xrightarrow{a+b+c} t=1, t=\frac{c}{a} = \frac{1}{10}$$

$$\begin{cases} x - \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x \\ \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ هر دو قابل قبول}$$

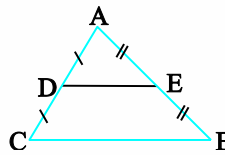
$$x - \sqrt{x} = \frac{1}{10} \Rightarrow x - \frac{1}{10} = \sqrt{x} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{5}x + \frac{1}{100} = x$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{1}{100} = 0 \xrightarrow{\times 100} 100x^2 - 120x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta > 0$$

دو ریشه غیرصفر دارد پس هر دو قابل قبول هستند.

پس معادله چهار جواب حقیقی دارد.

**گزینه ۱۱ «۲» آسان**



DE = ?

طبق قضیه تالس جزءه کل داریم:

$$\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AB} = \frac{DE}{BC}$$

و از آنجایی که D و E وسط دو ضلع AC و AB هستند پس  $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$

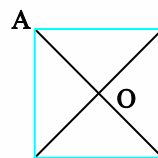
برابر  $\frac{1}{2}$  است پس:

$$\frac{DE}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow DE = \frac{1}{2}BC, BC = \sqrt{(-2-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

$$\Rightarrow DE = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

**گزینه ۱۲ «۳» آسان**



$$OA = \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{16+9} = 5$$

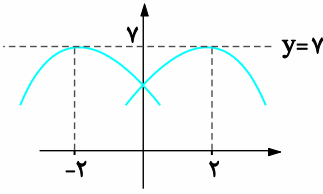
$$\text{قطر مربع} = 5 \times 2 = 10$$

اگر a طول ضلع مربع باشد، طول قطر  $a\sqrt{2}$  است پس:

$$a\sqrt{2} = 10 \Rightarrow a = \frac{10}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{100}{2} = 50$$

**گزینه ۱۳ «۱» متوسط**

$$b = -4 \Rightarrow y_v = -x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x_{S_p} = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{-2} = -2$$



فاصله دو نقطه تماس  $4 = 7 - (-2)$  است.



### ۱- گزینه «۲»

دو ریشه‌ی قرینه داره پس اولاً دو ریشه داره یعنی  $\Delta > 0$  و دوماً قرینه

هستند. این یعنی این که  $s = 0, p < 0$

نتیجه  $s = 0$  یعنی  $b = 0$  زیرا  $s = -\frac{b}{a}$  هستش پس:

$$m^3 - 4m = 0 \Rightarrow m(m^2 - 4) = 0 \Rightarrow m = 0, \pm 2 \quad (1)$$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{m+3}{3} < 0 \Rightarrow -3 < m < 0 \quad (2)$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow b^2 - 4ac > 0 \xrightarrow{b=0} -4ac > 0 \Rightarrow ac < 0$$

که همان معنی  $p < 0$  را دارد که در قسمت (۲) حل شد.

از بین اعدادی که برای  $m$  به دست آمدند تنها  $m = -2$  شرط (۲) را دارد

پس فقط یک مقدار برای  $m$  داریم.

### ۲- گزینه «۲»

دو ریشه مختلف‌العلامت یعنی  $p < 0$

$$p < 0 \Rightarrow \frac{m}{m+1} < 0 \Rightarrow -1 < m < 0$$

### ۳- گزینه «۲»

با در نظر گرفتن تغییر متغیر  $t = x^2 - 4x$  داریم:

$$t - \frac{20}{t} - 1 = 0 \xrightarrow{\times t} t^2 - t - 20 = 0$$

$$\Rightarrow (t-5)(t+4) = 0 \Rightarrow t = 5, -4$$

$$(1) t = 5 \Rightarrow x^2 - 4x = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$$

و عبارت بر  $(x+1)$  بخش پذیر است. پس مخرج کسر اول هم بر  $(x-1)$  و

هم بر  $(x+1)$  بخش پذیر هست:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+1)(x+5)} + \frac{x(x+1)}{x(x+1)(x+5)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+5} = 1 \Rightarrow \frac{2}{x+5} = 1 \Rightarrow x+5=2 \Rightarrow x=-3$$

### متوسط

### ۱۸- گزینه «۴»

نمودار سهمی محور  $x$  را در دو نقطه قطع کرده پس علامت  $\Delta$  مثبت است

از طرفی هر دو ریشه منفی هستند پس ضرب ریشه‌ها مثبت و جمع ریشه‌ها

منفی است.

$$y = (m-2)x^2 - 2(m+1)x + 12$$

$$(1) \Delta > 0 \Rightarrow 4(m+1)^2 - 4(12)(m-2) > 0 \Rightarrow 4m^2 - 40m + 100 > 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 10m + 25 > 0 \Rightarrow (m-5)^2 > 0 \xrightarrow{\text{همواره برقرار}} m \neq 5$$

$$(2) p > 0 \Rightarrow \frac{c}{a} > 0 \Rightarrow \frac{12}{m-2} > 0 \Rightarrow m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$$

$$s < 0 \Rightarrow \frac{-b}{a} < 0 \Rightarrow \frac{2m+2}{m-2} < 0 \Rightarrow -1 < m < 2$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2) \cap (3)} \emptyset$$

### دشوار

### ۱۹- گزینه «۴»

اول رادیکال رو یک طرف معادله تنها کنیم:

$$\sqrt{4x-3} = 2-3x \xrightarrow{\text{به توان ۲ برسانیم}} 4x-3 = 4+9x^2-12x$$

$$\xrightarrow{\text{مرتب کنیم}} 9x^2 - 16x + 7 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(9x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ق ق غ (جلوی رادیکال منفی میشه)} \\ x = \frac{7}{9} \text{ ق ق غ (جلوی رادیکال منفی میشه)} \end{cases}$$

پس معادله هیچ جوابی ندارد.

### دشوار

### ۲۰- گزینه «۲»

سهمی، بر خط  $y=7$  مماس شده پس  $y_{S_p} = 7$

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} \Rightarrow \frac{4ac - b^2}{4a} = 7 \Rightarrow \frac{-12 - b^2}{-4} = 7$$

$$\Rightarrow b^2 = 28 - 12 = 16 \Rightarrow b = \pm 4$$

$$b = 4 \Rightarrow y_1 = -x^2 + 4x + 3$$

$$\Rightarrow x_{S_1} = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-2} = 2$$



$$(۲) \Delta < 0 \Rightarrow ۲۴ - ۴(1-a)(-a) < 0$$

$$۲۴ + ۴a - ۴a^2 < 0 \Rightarrow ۴a^2 - ۴a - ۲۴ < 0 \Rightarrow a^2 - a - ۶ < 0 \Rightarrow -۲ < a < ۳$$

$$\xrightarrow{(۱) \cap (۲)} -۲ < a < ۱$$

### ۸- گزینه «۳»

محور  $x$  را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع می‌کند پس  $(۲, ۰)$  نقطه‌ای از نمودار است:

$$f(۲) = 0 \Rightarrow ۱۶ - ۲۰ - ۲ + m = 0$$

$$\Rightarrow m = ۶ \Rightarrow f(x) = ۲x^2 - ۵x^2 - x + ۶$$

$$\cancel{۲x^2} - ۵x^2 - x + ۶ \quad \left| \begin{array}{l} x-۲ \\ ۲x^2 - x - ۳ \end{array} \right.$$

$$-\cancel{۲x^2} + ۴x^2$$

$$\cancel{-x}^2 - x + ۶$$

$$\cancel{-x}^2 - ۲x$$

$$-۳x + ۶$$

$$+۳x - ۶$$

$$۲x^2 - x - ۳ = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} x = -۱ \\ x = -\frac{c}{a} = \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

### ۹- گزینه «۱»

کسر اول و کسر سوم معکوس هم هستند با تغییر متغیر داریم:

$$t = \frac{x^2 - x + ۳}{۲x^2 + x + ۱} \Rightarrow t + \frac{۱}{t} = ۲ - \frac{۱}{x^2 + ۱}$$

می‌دانیم که  $\frac{۱}{x^2 + ۱}$  همواره عددی مثبت است و  $\frac{۱}{x^2 + ۱} < ۱$  بنابراین

$$۲ - \frac{۱}{x^2 + ۱} \text{ همواره عددی کوچکتر از } ۲ \text{ است در صورتی که داریم:}$$

$$t + \frac{۱}{t} \geq ۲ \text{ یا } t + \frac{۱}{t} \leq -۲$$

پس این معادله جواب ندارد.

### ۱۰- گزینه «۱»

با تغییر متغیر حل می‌کنیم:

$$t = x^2 + ۴x + ۳$$

$$t = \sqrt{t+۲} \xrightarrow{\text{توان } ۲} t^2 = t+۲ \Rightarrow t^2 - t - ۲ = 0$$

$$\xrightarrow{a+c=b} t = -۱, t = \frac{c}{a} = \frac{+۲}{۱} = ۲$$

$$\Rightarrow (x-۵)(x+۱) = 0 \Rightarrow x = -۱, ۵$$

$$(۲) t = -۴ \Rightarrow x^2 - ۴x = -۴ \Rightarrow x^2 - ۴x + ۴ = 0$$

$$\Rightarrow (x-۲)^2 = 0 \Rightarrow x = ۲$$

### ۱۳- گزینه «۲»

$$x = ۲ \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۲(۴a - ۷) = ۲ \Rightarrow ۴a - ۷ = ۱$$

$$\Rightarrow ۴a = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

$$\Rightarrow x(۲x^2 - x - ۵) = ۲ \Rightarrow ۲x^3 - x^2 - ۵x - ۲ = 0$$

یکی از جوابها  $x = ۲$  است پس معادله بر  $(x-۲)$  بخش پذیر است.

تقسیم بر این عامل بقیه جملات را به دست می‌آوریم:

$$\cancel{۲x^3} - x^2 - ۵x - ۲ \quad \left| \begin{array}{l} x-۲ \\ ۲x^2 + ۳x + ۱ \end{array} \right.$$

$$-\cancel{۲x^3} + ۴x^2$$

$$\cancel{-x}^2 - ۵x - ۲$$

$$-\cancel{-x}^2 + ۶x$$

$$x - ۲$$

$$-x + ۲$$

$$\Rightarrow ۲x^2 + ۳x + ۱ = 0$$

$$\text{مجموع دو ریشه} = \frac{-b}{a} = \frac{-۳}{۲}$$

### ۵- گزینه «۲»

$$۵x^2 + ۳x - ۲ = 0 \Rightarrow s = \frac{-۳}{۵}, p = \frac{-۲}{۵}$$

$$۴x^2 - kx + ۲۵ = 0, s' = \frac{۱}{\alpha^2} + \frac{۱}{\beta^2} = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2 \beta^2} = \frac{s'^2 - ۲p}{p^2}$$

$$= \frac{9}{25} + \frac{4}{5} = \frac{29}{25} = \frac{29}{25} = \frac{29}{25}$$

$$\Rightarrow \frac{-b}{a} = \frac{۲۹}{۴} \Rightarrow \frac{k}{۴} = \frac{۲۹}{۴} \Rightarrow k = ۲۹$$

### ۶- گزینه «۱»

می‌دانیم که  $\alpha, \beta$  ریشه‌های معادله هستند پس در معادله صدق می‌کنند:

$$x^2 - ۲x - ۴ = 0 \Rightarrow \alpha^2 - ۲\alpha - ۴ = 0 \Rightarrow \alpha^2 - ۴ = ۲\alpha$$

$$(\alpha^2 - ۴)^2 + ۴\beta^2 = (۲\alpha)^2 + ۴\beta^2 = ۴\alpha^2 + ۴\beta^2 = ۴(\alpha^2 + \beta^2)$$

$$= ۴(s'^2 - ۲p) = ۴(۴ + ۸) = ۴۸$$

$$s = ۲, p = -۴$$

### ۷- گزینه «۴»

اگر بخواهیم نمودار همواره بالای محور  $x$ ها باشد پس باید  $\Delta < 0, a > 0$  باشد.

$$(۱) a > 0 \Rightarrow ۱ - a > 0 \Rightarrow a < ۱$$



$$A(1, 1) \Rightarrow m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$B(-3, -1) \Rightarrow m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \Rightarrow x - 2y + 1 = 0, C(3, -3)$$

$$CH = \frac{|3 - 2(-3) + 1|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

### گزینه ۱۶»

نقطه روی نیمساز ناحیه اول قرار گرفته پس مختصات اون می‌تونه  $(\alpha, \alpha)$

باشه و  $\alpha > 0$ :

$$\text{فاصله} = 3 \Rightarrow \frac{|\alpha + \alpha - 1|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = 3 \Rightarrow \frac{|2\alpha - 1|}{10} = 3 \Rightarrow |2\alpha - 1| = 30$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha - 1 = 30 \Rightarrow 2\alpha = 31 \Rightarrow \alpha = \frac{31}{2} \text{ قق} \\ 2\alpha - 1 = -30 \Rightarrow 2\alpha = -29 \Rightarrow \alpha = -\frac{29}{2} \text{ غ قق } (\alpha < 0) \end{cases}$$

### گزینه ۱۷»

$$(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$$

$$t = x^2 + x \Rightarrow t^2 - 18t + 72 = 0$$

$$\Rightarrow (t - 6)(t - 12) = 0 \Rightarrow t = 6 \text{ یا } t = 12$$

$$\begin{cases} x^2 + x = 6 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow s_1 = \frac{-b}{a} = -1 \\ x^2 + x = 12 \Rightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Rightarrow s_2 = -1 \end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها} = -1 - 1 = -2$$

### گزینه ۱۸»

معادله درجه دوم در صورتی دو جواب حقیقی و متمایز داره که  $\Delta > 0$

$$a^2 - 4(4)(-4) > 0 \Rightarrow a^2 + 64 > 0$$

پس به ازای هر مقدار  $a$  رابطه برقرار است.

### گزینه ۱۹»

جمع سه رادیکال با فرجه زوج برابر صفر شده پس هر سه صفر بوده‌اند.

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = -1 \\ x^2 + 4x + 5 = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \text{ضرب ریشه‌ها} = \frac{c}{a} = 3 \end{cases}$$

$$\text{ضرب هر سه ریشه} = -2 \times 3 = -6$$

### گزینه ۱۱»

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1 - (-1)|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{2}{13}$$

### گزینه ۱۲»

$$\frac{9(2 - \sqrt{x})}{2 + \sqrt{x}} = 4 - x$$

از اونجایی که می‌دونیم  $x$  زیر رادیکال قرار گرفته پس  $x \geq 0$  و بنابراین همیشه عبارت سمت راست رو تجزیه کرد:

$$4 - x = (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})$$

$$\Rightarrow \frac{9(2 - \sqrt{x})}{2 + \sqrt{x}} = (2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})$$

با در نظر گرفتن ریشه پرانتز  $(2 - \sqrt{x})$  را ساده می‌کنیم.

$$2 - \sqrt{x} = 0 \Rightarrow 2 = \sqrt{x} \Rightarrow x = 4$$

$$(2 + \sqrt{x})^2 = 9 \Rightarrow 4 + x + 4\sqrt{x} = 9 \Rightarrow x + 4\sqrt{x} - 5 = 0$$

$$t = \sqrt{x} \Rightarrow t^2 + 4t - 5 = 0 \Rightarrow t = -5 \text{ غ قق } t = 1 \text{ قق}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

### گزینه ۱۳»

$$G = \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \right)$$

$$= \left( \frac{0 + 1 + (-2)}{3}, \frac{3 + 2 + 1}{3} \right) = \left( \frac{-1}{3}, 2 \right)$$

### گزینه ۱۴»

قرینه نقطه دلخواه به مختصات  $(\alpha, \beta)$  نسبت به مبدأ مختصات برابر

$$(-\alpha, -\beta) \text{ است پس قرینه نقطه } A \text{ به صورت } (2, -3) \text{ است.}$$

با چک کردن گزینه‌ها داریم:

$$2x + y = 2(2) - 3 = 1$$

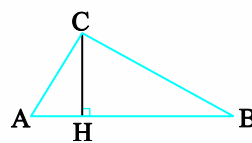
پس گزینه ۳ درست است.

### گزینه ۱۵»

طول ارتفاع  $CH$  برابر فاصله رأس  $C$  از

ضلع  $AB$  است پس کافیت معادله ضلع

$AB$  رو بنویسیم و فاصله رو به دست بیاریم:





از طرفی معادله دارای یک جواب است پس هر سه رادیکال فقط یک ریشه مشترک دارند. پس ریشه مشترک دو رادیکال اول رو پیدا می‌کنیم و در رادیکال سوم قرار می‌دیم:

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3 \quad \cap \rightarrow x = 3$$

$$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

$$x^3 + x + m = 0 \xrightarrow{x=3} 27 + 3 + m = 0 \Rightarrow m = -30$$

### ۲۰- گزینه «۲»

$$\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \Rightarrow \sqrt{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x+2} + \frac{x^2+2x}{x-4} = \frac{2(1)+1}{1+2} + \frac{(1)^2+2(1)}{1-4} = \frac{3}{3} + \frac{3}{-3} = 0$$