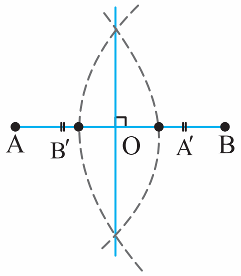
۱- آسان

پاره‌خط **AB** را رسم می‌کنیم، دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ بیشتر از نصف طول **AB** باز می‌کنیم و یک بار به مرکز **A** و بار دیگر به مرکز **B** کمانی می‌زنیم. این دو کمان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. این دو نقطه را به هم وصل کرده امتداد می‌دهیم. خط رسم شده همان عمودمنصف پاره‌خط **AB** است.

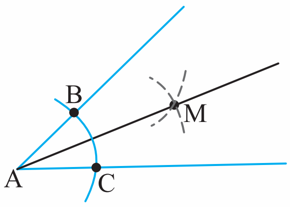


$AA' = BB'$

$OB = OA$

۲- آسان

زاویه $\hat{A}$ را در نظر می‌گیریم. به مرکز **A** و به شعاع دلخواه کمانی می‌زنیم تا اضلاع زاویه را در نقاط **B** و **C** قطع کند. به مرکز **B** و **C** دو کمان با شعاع یکسان طوری می‌زنیم که همدیگر را درون زاویه در نقطه **M** قطع کنند. از **A** به **M** وصل کرده امتداد می‌دهیم. این خط همان نیمساز زاویه **A** است.



۳- آسان

واژهٔ مکان هندسی شامل دو مورد است. یکی این که هر نقطه از مجموعه دارای یک ویژگی مشترک هستند و هر نقطه‌ای که دارای آن ویژگی باشد در آن مجموعه نقاط قرار می‌گیرد.

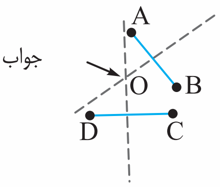
آ) دایره، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا یک نقطه ثابت به یک اندازهٔ ثابت باشد.

ب) عمودمنصف، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

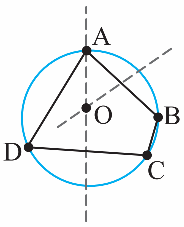
پ) نیمساز، مکان هندسی نقاطی از صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها تا دو ضلع زاویه به یک اندازه باشد.

۴- متوسط

آ) نقطه‌ای که از دو نقطه **A** و **B** به یک فاصله باشد روی عمودمنصف **AB** و نقطه‌ای که از دو نقطه **C** و **D** به یک فاصله باشد روی عمودمنصف **CD** قرار دارد و جواب محل برخورد عمودمنصف‌های این دو پاره‌خط است که به صورت زیر است:



ب)



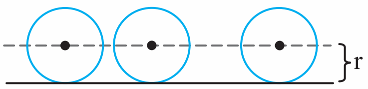
O روی عمودمنصف **AB** است پس $OA = OB$

O روی عمودمنصف **CD** است پس $OC = OD$

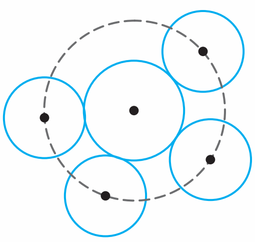
ABCD یک چهارضلعی محاطی است یعنی رأس‌های آن روی دایره قرار دارند.

۵- آسان

آ) خطی موازی سطح میز به فاصلهٔ شعاع دایره از آن



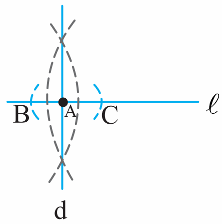
ب) دایره‌ای به مرکز توپ اول و به فاصله مجموع شعاع دایره‌ها



پ) دو خط در طرفین خط اصلی و به فاصله $\frac{۱}{۲}$ از آن

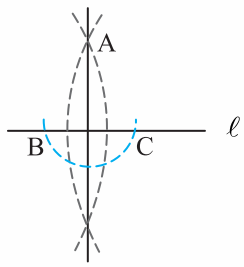
۶- متوسط

خط ℓ و نقطه **A** روی آن را در نظر بگیرید. به مرکز **A** دو کمان در طرفین طوری می‌زنیم که خط را در **B** و **C** قطع کند، $(AC = BC)$ حال به روش رسم عمودمنصف، عمودمنصف پاره‌خط **BC** را رسم می‌کنیم. این خط بر ℓ عمود است.



۷- آسان

خط ℓ و نقطه **A** خارج از آن را در نظر بگیرید. شبیه روش سوال ۶ عمل می‌کنیم و این بار کمان را طوری می‌زنیم که حتماً خط ℓ را در دو نقطه **B** و **C** قطع کند.

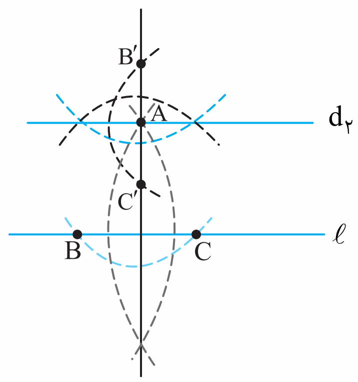


۸- متوسط

خط ℓ و نقطه **A** خارج از آن را در نظر بگیرید. به روش رسم خطی عمود بر خط ℓ از نقطه‌ای خارج آن (سوال ۷) خطی عمود بر ℓ گذرنده از **A** رسم می‌کنیم و آن را d_1 می‌نامیم. حال به روش رسم خطی عمود بر خط d_1 گذرنده از نقطه **A** روی خط d_1 خط عمود d_2 را رسم می‌کنیم (سوال ۶)

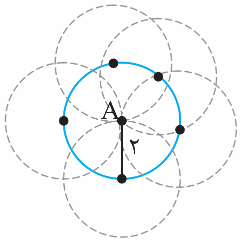
$$\begin{rcases} d_2 \perp d_1 \\ d_1 \perp \ell \end{rcases} \Rightarrow d_2 \parallel \ell$$

این خط d_2 همان خط موازی ℓ است.



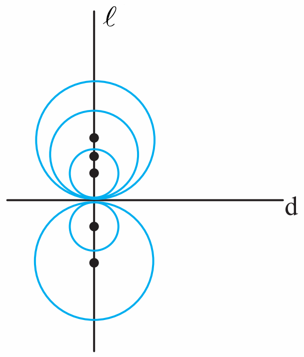
۹- آسان

دایره‌ای به مرکز **A** و به شعاع ۲ است.



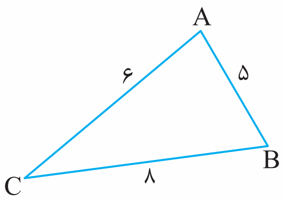
۱۰- متوسط

خط ℓ جواب مسأله است که خطی عمود بر خط **d** در نقطه **A** است.

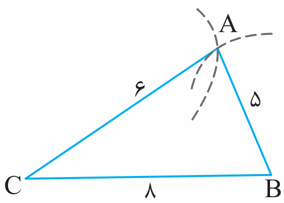


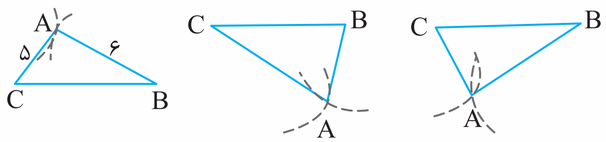
۱۱- متوسط

ابتدا مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم:



حال پاره‌خط **BC** را به طول ضلع ۸ رسم می‌کنیم. به مرکز **B** و شعاع ۵ کمانی می‌زنیم. همچنین به مرکز **C** و به شعاع ۶ کمان دیگری می‌زنیم. محل برخورد این دو کمان نقطهٔ **A** است برای این مسأله چهار مثلث رسم می‌شود که سه‌تای دیگر با مثلث اول هم‌نهشت هستند و بنابراین مسأله ۱ جواب دارد.



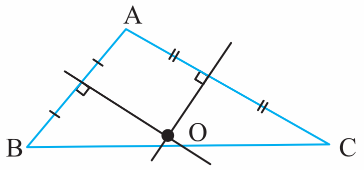


۱۲- متوسط

O روی عمودمنصف ضلع **AC** است پس $OA = OC$

O روی عمودمنصف ضلع **AB** است پس $OA = OB$

بنابراین $OB = OC$ و **O** مرکز دایره‌ای است که از **A** می‌گذرد بنابراین نقاط **B** و **C** نیز روی دایره قرار دارند.



۱۳- متوسط

نقطه **O** روی نیمساز زاویه $\hat{A}$ است پس فاصله آن تا دو ضلع زاویه برابر است یعنی

$OH = OH'$

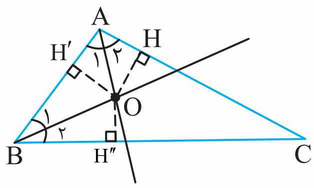
همچنین **O** روی نیمساز زاویه **B** است پس:

$OH' = OH''$

بنابراین:

$OH = OH' = OH''$

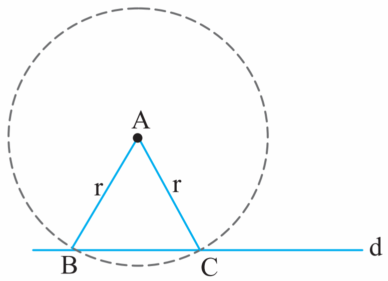
بنابراین دایره‌ای که به مرکز **O** و به شعاع **OH** رسم میشه از H' و H'' هم می‌گذره و مماس بر اضلاع مثلث هست بنابراین اضلاع مثلث مماس بر دایره می‌شوند.



۱۴- متوسط

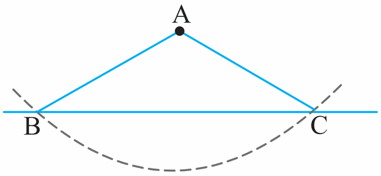
آ) به مرکز **A** و به شعاع **r** بزرگ‌تر از ۴، دایره‌ای می‌زنیم تا خط **d** را در دو نقطه **B** و **C** قطع کند، **ABC** مثلث موردنظر است.

$AB = AC = r$

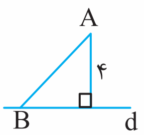


ب) به مرکز **A** و به شعاع $r = ۶$ دایره‌ای می‌زنیم. محل برخورد با **d** همان رئوس دیگر مثلث است.

$AB = AC = ۶$



پ)



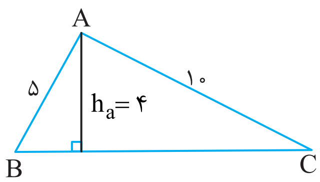
$S = ۸ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times BC \Rightarrow BC = ۴ \Rightarrow r^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۲۰$

$\Rightarrow r = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$

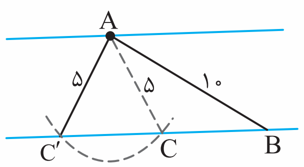
پس مشابه قسمت آ و ب، این بار دایره‌ای به شعاع $۲\sqrt{۵}$ می‌زنیم.

۱۵- دشوار

اول مثلث رو رسم شده فرض کن



برای رسم ابتدا دو خط موازی به فاصله ارتفاع $h_a = ۴$ رسم می‌کنیم. از نقطه **A** که روی خط بالایی قرار دارد، دو کمان به اندازه شعاع ۱۰ و ۵ می‌زنیم تا خط پایینی را در دو نقطه **B** و **C** قطع کند. **ABC** مثلث دلخواه است. همچنین ABC' جواب دیگر مسأله است.



و مسأله دو جواب دارد.

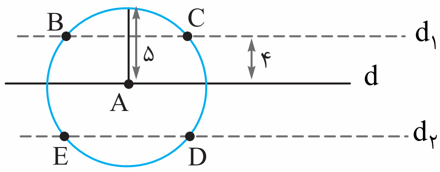
پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۱

۱- گزینهٔ «۲» آسان

طبق تعریف مکان هندسی دو مفهوم نیمساز و عمودمنصف، گزینهٔ ۲ درست است.

۲- گزینهٔ «۳» متوسط

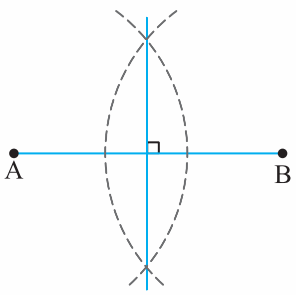


مکان هندسی نقاطی که از خط **d** به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشد، خط‌هایی موازی **d** در دو طرف **d** به فاصلهٔ ۴ است.

مکان هندسی نقاطی که از نقطه **A** به فاصلهٔ ۵ است، دایره‌ای به مرکز **A** و به شعاع ۵ است. جواب مسأله محل برخورد این دو مکان هندسی است که طبق شکل ۴ جواب دارد یعنی نقاط **B**، **C**، **D** و **E**.

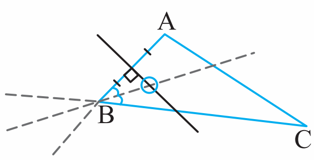
۳- گزینهٔ «۲» آسان

برای رسم عمودمنصف **AB** از ۲ کمان می‌توان استفاده کرد.



۴- گزینهٔ «۲» متوسط

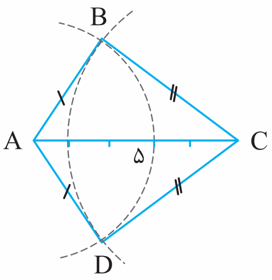
از دو سر پاره‌خط **AB** به یک فاصله است پس روی عمودمنصف **AB** قرار دارد.



از دو ضلع **AB** و **BC** به یک فاصله است.

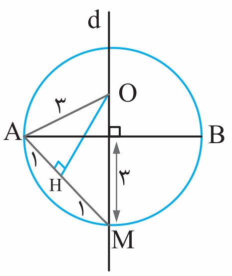
پس روی نیمساز زاویه **B** قرار دارد. برای امتداد دو ضلع **AB** و **BC** نیز همان امتداد نیمساز را داریم. محل برخورد این دو مکان هندسی (عمودمنصف و نیمساز) جواب مسأله است که یک نقطه است.

۵- گزینهٔ «۴» آسان



شکل حاصل کایت است و گزینه ۴ صحیح است.

۶- گزینهٔ «۳» متوسط



$AM = ۲ \Rightarrow AH = HM = ۱$

$OA = ۳ \Rightarrow OM = OB = ۳$ (شعاع دایره)

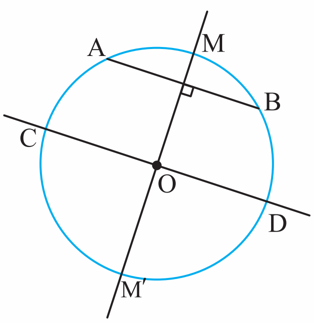
یادت باشه اگر از مرکز دایره به وسط وتری از دایره وصل کنیم بهش عمود هم میشه پس **OAH** قائم‌الزاویه است.

$$OH^۲ = ۳^۲ - ۱^۲ = ۸ \Rightarrow OH = \sqrt{۸} = ۲\sqrt{۲}$$

۷- گزینهٔ «۴» آسان

حواست باشه: نقاط تقاطع عمودمنصف هر وتر دایره با محیط دایره، یک قطر از دایره است.

عمودمنصف MM' را رسم می‌کنیم که قطر دیگری از دایره است و موازی با **AB** است (CD)



۸- گزینهٔ «۳» — آسان

می‌دانیم که هر نقطه‌ای که روی نیمساز زاویه باشه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است یعنی $BH = BH'$ پس:

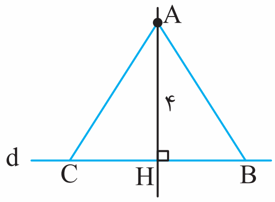
$$x^۲ = ۵x + ۶ \Rightarrow x^۲ - ۵x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x-۶)(x+۱) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۶ \checkmark , x = -۱ \text{ غ ق ق}$$

$$x = ۶ \Rightarrow \begin{cases} AH = ۱۸ \\ BH = ۳۶ \end{cases}$$

$$\Rightarrow AB^۲ = ۳۶^۲ + ۱۸^۲ = (۲ \times ۱۸)^۲ + ۱۸^۲ = ۵ \times ۱۸^۲ \Rightarrow AB = ۱۸\sqrt{۵}$$

۹- گزینهٔ «۲» — آسان



$AB = AC$

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AH \times BC \Rightarrow ۴ = \frac{۱}{۲} \times ۴ \times BC \Rightarrow BC = ۴ \Rightarrow HB = HC = ۲$$

$$\Rightarrow AB^۲ = AH^۲ + HB^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ = ۲۰ \Rightarrow AB = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

۱۰- گزینهٔ «۳» — آسان

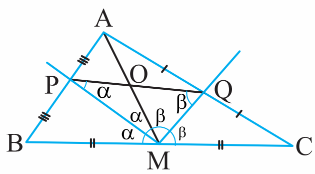
طبق قضیه نامساوی مثلث در صورتی سه عدد **a** و **b** و **c** می‌توانند طول اضلاع یک مثلث باشند که مجموع هر دو ضلع از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد:

$$\left.\begin{array}{l} x + ۳ > ۷ \Rightarrow x > ۴ \\ x + ۷ > ۳ \Rightarrow x > -۴ \text{ بدیهی} \\ ۷ + ۳ > x \Rightarrow x < ۱۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} ۴ < x < ۱۰$$

x عددی طبیعی است پس مقادیری که **x** می‌تواند داشته باشد برابر است با:

$$x = ۵, ۶, ۷, ۸, ۹$$

۱۱- گزینهٔ «۴» — دشوار



Q روی نیمساز است پس $QA = QC$

P روی نیمساز است پس $PA = PB$

$$AMC: \frac{AM}{MC} = \frac{AQ}{QC} = ۱$$

$$AMB: \frac{AM}{MB} = \frac{AP}{BP} = ۱$$

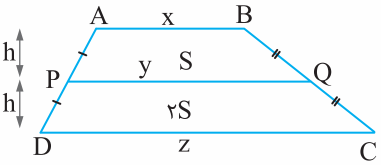
$$\xrightarrow{MB = MC} \frac{QA}{QC} = \frac{AP}{BP}$$

$$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC \Rightarrow B\hat{M}P = M\hat{P}Q = \alpha$$

یعنی مثلث **OMP** متساوی الساقین است و $OM = OP$

۱۲- گزینهٔ «۲» — متوسط

$$\frac{S_{ABQP}}{S_{QCDP}} = \frac{۱}{۲}$$



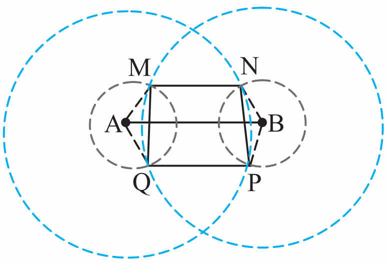
می‌دانیم که $y = \frac{x+z}{۲}$ و داریم:

$$\frac{۱}{۲} = \frac{S_{ABQP}}{S_{QCDP}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}(x + \frac{x+z}{۲})\cancel{h}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}(z + \frac{x+z}{۲})\cancel{h}} = \frac{\frac{۳x+z}{۲}}{\frac{۳z+x}{۲}} = \frac{۳x+z}{۳z+x}$$

$$\frac{۳x+z}{x+۳z} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow x + ۳z = ۶x + ۲z \Rightarrow z = ۵x$$

$$\Rightarrow \text{نسبت قاعده‌ها} = \frac{x}{z} = \frac{۱}{۵}$$

۱۳- گزینهٔ «۳» — دشوار



می‌دانیم که در دو دایره متقاطع، خط‌المرکزین بر وتر مشترک عمود هست یعنی

$$\left.\begin{array}{l} AB \perp MQ \\ AB \perp NP \end{array}\right\} \Rightarrow MQ \parallel NP$$

دو مثلث **AMQ** و **BNP** هم‌نهشت هستند. پس $MQ = NP$. در چهارضلعی **MNPQ** دو ضلع مقابل **MQ** و **NP** هم موازی و هم برابرند پس **MNPQ** متوازی‌الاضلاع است. از طرفی $NM \parallel AB \parallel PQ$، پس زوایا قائمه هستند در نتیجه چهارضلعی مستطیل است.

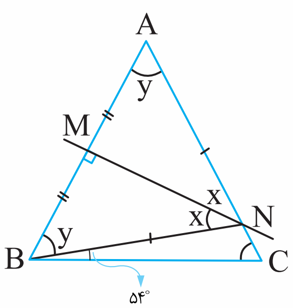
۱۴- گزینهٔ «۳» — متوسط

M وسط **AB** است پس $AM = MB$

N روی عمودمنصف ضلع **AB** است پس

$AN = NB$

بنابراین $\hat{B}_۱ = \hat{A}$



$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰ \Rightarrow y + y + ۵۴ + y + ۵۴ = ۱۸۰$$

$$\Rightarrow ۳y = ۷۲ \Rightarrow y = ۲۴$$

$$\overset{\Delta}{MBN}: y + x = ۹۰ \Rightarrow x = ۶۶$$

۱- آسان

آ) $\frac{۶}{۱۸}=\frac{۱۱}{۳۳}\ ,\ \frac{۳۳}{۱۱}=\frac{۱۸}{۶}$

ترکیب مخرج در صورت انجام شده و داریم:

ب) $\frac{۴+۱۴}{۱۴}=\frac{۱۰+۳۵}{۳۵}\Rightarrow\frac{۱۸}{۱۴}=\frac{۴۵}{۳۵}$

ترکیب صورت در مخرج انجام شده و داریم:

$$\frac{۴}{۱۸}=\frac{۱۰}{۴۵}$$

تفضیل مخرج در صورت داریم:

$$\frac{۵-۱۲}{۱۲}=\frac{۱۰-۲۴}{۲۴}\Rightarrow\frac{-۷}{۱۲}=\frac{-۱۴}{۲۴}\ ,\ \frac{۵}{-۷}=\frac{۱۰}{-۱۴}$$

۲- متوسط

آ) استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری بر مبنای تعداد محدودی مشاهدات یعنی بررسی یک موضوع در چند حالت و نتیجه‌گیری کلی از آن است. در استدلال استقرایی از جزء به کل می‌رسیم.

مثلاً اگر در چند مثلث متفاوت جمع زوایای داخلی آن‌ها را حساب کنیم می‌بینیم در هر مورد به عدد ۱۸۰ می‌رسیم و می‌توان نتیجه‌گیری کرد که جمع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

نکته: نتیجهٔ استدلال استقرایی یک حدس کلی است و ممکن است درست نباشد.

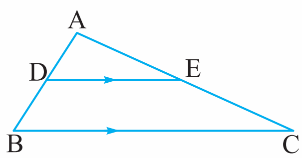
ب) استدلال استنتاجی: استدلالی است بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را قبلاً پذیرفته‌ایم. این روش استدلالی به استدلال مستقیم معروف است شبیه کاری که در هندسه برای اثبات قضیه‌ها از فرض به حکم می‌رسیم.

به نتایج مهم و پر کاربردی که از استدلال استنتاجی حاصل می‌شوند، قضیه می‌گوییم.

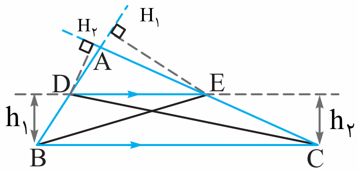
۳- دشوار

اگر در مثلثی، خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، آن‌گاه پاره‌خط‌های ایجاد شده روی این دو ضلع متناسبند. به عبارتی در مثلث زیر داریم:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$



اثبات: از D به C و از E به B وصل می‌کنیم.



دو مثلث $\overset{\Delta}{DEB}$ و $\overset{\Delta}{EBC}$ را در نظر بگیرید هر دو دارای قاعدهٔ مشترک DE هستند و چون $DE \parallel BC$ پس ارتفاع آن‌ها نیز برابر است $(h_۱=h_۲)$

بنابراین $S_{\overset{\Delta}{DEB}}=S_{\overset{\Delta}{EBC}}$ و داریم:

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}AD\times EH_۱}{\frac{۱}{۲}DB\times EH_۱}=\frac{AD}{DB}\\ \frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}AE\times DH_۲}{\frac{۱}{۲}EC\times DH_۲}=\frac{AE}{EC}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

۴- آسان

همونطوری که در شکل نشان داده شده $IJ \parallel BO$. طبق قضیه تالس داریم:

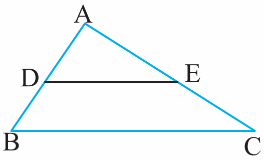
$$\frac{AI}{IB}=\frac{AJ}{JO}\Rightarrow\frac{۲x}{۵}=\frac{x+۴}{۷/۵}\Rightarrow ۱۵x=۵x+۲۰$$

$$\Rightarrow ۱۰x=۲۰\Rightarrow \boxed{x=۲}$$

$$AB=x+۴+۷/۵=۱۳/۵$$

۵- متوسط

قضیهٔ تالس می‌گوید اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود، دو ضلع دیگر را با یک نسبت قطع می‌کند که به آن تالس جزء به جزء می‌گوییم و داریم:



$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

با ترکیب صورت در مخرج داریم:

$$\frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC}\Rightarrow\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$$

که به آن تالس جزء به کل گوییم.

یعنی نسبت قطعهٔ بالایی یک ضلع به کل ضلع برابر نسبت قطعه بالایی ضلع دیگر به کل آن ضلع است.

همچنین با ترکیب در صورت داریم:

$$\frac{AB}{DB}=\frac{AC}{EC}$$

یا

$$\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$$

۶- آسان

آ) $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$ تالس جزء به جزء

ب) $\frac{DB}{DA}=\frac{EC}{EA}$ تالس جزء به جزء

پ) $\frac{DB}{BA}=\frac{EC}{AC}$ تالس جزء به کل

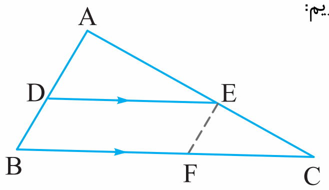
ت) $\frac{AB}{BD}=\frac{DE}{BC}$ تالس جز به کل

ث) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ تالس جزء به کل

ج) $\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}$ تالس جز به کل

۷- دشوار

تعمیم قضیه تالس: اگر خطی موازی یک ضلع مثلثی رسم شود به طوری که دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، داریم:



(۱) $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

اثبات: تناسب بین دو کسر اول را در سوال ۵ به عنوان تالس جزء به کل دیدیم. حال داریم:

پاره‌خط **EF** را موازی **DB** رسم می‌کنیم. طبق قضیه تالس $(EF \parallel BD)$ داریم:

$\frac{BF}{BC}=\frac{AE}{AC}$

چهارضلعی **BDEF** متوازی‌الاضلاع است بنابراین $BF=DE$ و با جاگذاری داریم:

$\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$ (۲)

از (۱) و (۲) داریم:

$\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

۸- آسان

آ) نادرست　　ب) درست

پ) نادرست　　ت) نادرست

ث) درست　　ج) درست

۹- متوسط

برهان خلف روش اثبات به طور غیر مستقیم است و به این صورت انجام می‌شود که فرض کنیم حکم درست نباشد (نقیض حکم یا فرض خلف) و به یک تناقض با فرض قضیه یا اطلاعات قبلی می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل است و حکم درست است.

حال به اثبات به کمک برهان خلف می‌پردازیم:

فرض: $n\in\mathbb{N}$ و n^2 عدد فرد است

حکم: **n** عدد فرد است

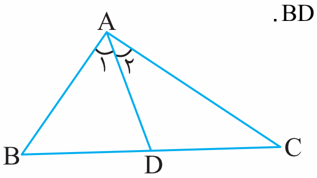
فرض خلف: **n** فرد نباشد پس **n** زوج است

اگر **n** زوج باشد در این صورت n^2 نیز زوج است زیرا

$n=2k \Rightarrow n^2=4k^2=2\underbrace{(2k^2)}_{k'}=2k'$ زوج ×

که به تناقض با فرض مسئله (n^2 فرد) می‌رسیم پس فرض خلف غلط است و حکم درست است.

۱۰- متوسط



فرض: **AD** نیمساز زاویه **A** و $BD\neq DC$.

حکم: $AB\neq AC$.

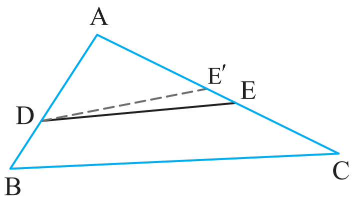
نقیض حکم: $AB=AC$.

مثلث **ABC** را در نظر بگیریم:

اگر $AB=AC$ پس مثلث متساوی‌الساقین است و بنابراین نیمساز زاویه **A** همان میانه است پس **D** وسط **B** و **C** است و $BD=DC$ که تناقض با فرض است پس نقیض حکم غلط است و حکم درست است.

۱۱- دشوار

عکس قضیه تالس: اگر در مثلثی، خطی دو ضلع زاویه را طوری قطع کند که تکه‌های ایجاد شده روی آن‌ها با هم متناسب باشد، آن‌گاه این خط با ضلع سوم موازی است.



فرض: $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

حکم: $DE \parallel BC$

فرض کنیم حکم درست نباشد و $DE \nparallel BC$. از نقطه **D** خط DE' را موازی **BC** رسم می‌کنیم طبق قضیه تالس داریم:

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AB}=\frac{AE'}{AC}$

طبق فرض داریم:

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$

و از مقایسه این دو رابطه داریم:

$AE'=AE$

بنابراین **E** و E' بر هم منطبق هستند و این یک تناقض است زیرا $DE \parallel BC$ اما $DE' \nparallel BC$ بنابراین فرض خلف غلط است و حکم درست است.

-۱۲ متوسط

آ) خط **DE** موازی ضلع **BC** در مثلث **ABC** است اگر و تنها اگر

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$$

ب) مثلث **ABC** قائم‌الزاویه است اگر و تنها اگر مربع یک ضلع با مجموع مربعات دو ضلع دیگر برابر باشد به عبارتی $BC^2=AB^2+AC^2$

پ) ۱-عکس قضیه: اگر در مثلثی دو زاویه برابر باشند، آن‌گاه اضلاع روبه‌رو به آن دو زاویه نیز برابرند. عکس قضیه نیز درست است بنابراین صورت دو شرطی آن به صورت زیر است:

«در هر مثلث دو ضلع برابرند اگر و تنها اگر زوایای روبه‌رو به آن دو ضلع برابر باشند»

۲- عکس: اگر زوایای روبه‌رو در یک چهارضلعی مکمل باشند رئوس این چهارضلعی روی یک دایره قرار دارد.

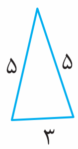
عکس قضیه درست است و فرم دو شرطی آن این‌گونه است:

«رئوس یک چهارضلعی روی یک دایره قرار دارد (محاطی است) اگر و تنها اگر زوایای مقابل آن مکمل هم باشند.»

-۱۳ متوسط

مثال نقض: مثالی است که درستی یک حدس کلی را رد می‌کند.

آ) مثال نقض: عدد ۲ که اول هست ولی فرد نیست.

ب) مثال نقض: 

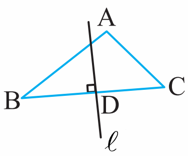
این مثلث متساوی‌الساقین است ولی متساوی‌الاضلاع نیست.

پ) عدد $\frac{1}{2}$ دارای مربع $\frac{1}{4}$ است و $\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$

ت) $\sqrt{2}$ و $-\sqrt{2}$ دو عدد گنگ هستند و $-\sqrt{2}+\sqrt{2}=0$ و صفر عددی گویاست.

ث) عدد ۱۳۱ عددی اول و بزرگ‌تر از ۱۲۷ است.

ج) در مثلث قائم‌الزاویه، هر ضلع قائمه خودش ارتفاع است و بنابراین با ارتفاع برابر است.

چ) 

خط ℓ عمودمنصف **BC** و **AD** میانه وارد بر **BC** است و بر هم منطبق نیستند.

-۱۴ آسان

اول بیا به روش قدیمی نصف ضرب قاعده در ارتفاع بریم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times AH$$

از طرفی توی مثلث قائم‌الزاویه، اضلاع قائمه خودشون عمود بر هم هستند و می‌تونیم بنویسیم:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC$$

با مساوی قرار دادن این دو رابطه داریم:

$$\frac{1}{2}BC\times AH=\frac{1}{2}AB\times AC\ \Rightarrow\ BC\times AH=AB\times AC$$

یعنی ضرب ارتفاع وارد بر وتر در خود وتر مساوی هست با ضرب دو ضلع قائمه.

-۱۵ متوسط

خب عادت کردیم به این که اولین راه برای حل تناسب طرفین ـ وسطین هست اما الان می‌خواهیم با ویژگی‌های دیگر تناسب که یاد گرفتیم حل کنیم:

آ) $$\frac{a}{10+a}=\frac{b}{8+b}\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{a}{10+a-a}=\frac{b}{8+b-b}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{10}=\frac{b}{8}\xrightarrow{\text{تعویض وسطی‌ها}}\frac{a}{b}=\frac{10}{8}\Rightarrow\boxed{\frac{a}{b}=\frac{5}{4}}$$

ب) $$\frac{3a+10}{10+2a}=\frac{3b+7}{7+2b}\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}}\frac{3a+10-10-2a}{10+2a}$$

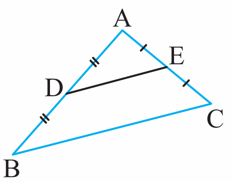
$$=\frac{3b+7-7-2b}{7+2b}\Rightarrow\frac{a}{10+2a}=\frac{b}{7+2b}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}}\frac{a}{10+2a-2a}=\frac{b}{7+2b-2b}\Rightarrow\frac{a}{10}=\frac{b}{7}$$

$$\Rightarrow\boxed{\frac{a}{b}=\frac{10}{7}}$$

-۱۶ آسان

مثلث دلخواه **ABC** را در نظر می‌گیریم و وسط اضلاع **AB** و **AC** را به هم وصل می‌کنیم و آن را **DE** می‌نامیم.



$$AD=DB\Rightarrow\frac{AD}{DB}=1\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{AD}{AC}=\frac{1}{2}$$

$$AE=EC\Rightarrow\frac{AE}{EC}=1\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{AD}{AC}=\frac{AE}{AC}$$

و طبق عکس قضیه تالس $OE\parallel BC$

از طرفی طبق تالس جزء به کل داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$

$$\Rightarrow\frac{DE}{BC}=\frac{1}{2}\Rightarrow BC=2DE$$

یعنی **BC** دو برابر **DE** است یا **DE** نصف **BC** است.

۱۷- آسان

آ) $PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس جز به جز}} \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}$

$$\Rightarrow \frac{AP}{\underset{۲}{\cancel{۶}}}=\frac{۲}{\underset{۱}{\cancel{۳}}} \Rightarrow \boxed{AP=۲}$$

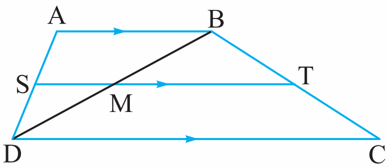
تالس جز به کل : $\frac{AP}{AB}=\frac{PQ}{BC} \Rightarrow \frac{۲}{۸}=\frac{PQ}{۹} \Rightarrow PQ=\frac{۱۸}{۸}=\frac{۹}{۴}$

ب) $ST \parallel NO \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{۳y+۳}{۶}=\frac{\overset{۲}{\cancel{۸}}}{\cancel{۴}} \Rightarrow ۳y+۳=۱۲ \Rightarrow \boxed{y=۳}$

تالس جزء به کل : $\frac{MS}{MN}=\frac{ST}{NO} \Rightarrow \frac{\overset{\overset{۱}{\cancel{۲}}}{\cancel{۸}}}{\underset{۳}{\cancel{۱۲}}}=\frac{\overset{۳}{\cancel{۶}}}{۴x+۱} \Rightarrow ۴x+۱=۹ \Rightarrow \boxed{x=۲}$

۱۸- دشوار

به این رابطه که قرار هست اثبات کنیم، تالس در ذوزنقه می‌گیم و برای شروع اثبات کافی هست یک قطر ذوزنقه رو رسم کنیم.



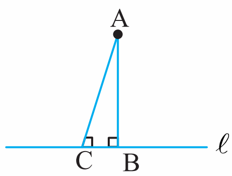
قطر **BD** رو رسم کردم و محل برخورد با **ST** رو **M** نامگذاری کردم و داریم:

$$\overset{\Delta}{ABD}: \frac{SD}{AS}=\frac{MD}{BM} \xrightarrow{\text{معکوس}} \frac{BM}{MD}=\frac{AS}{SD} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{BDC}: \frac{BM}{MD}=\frac{BT}{TC} \quad (۲) \xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$$

۱۹- متوسط

فرض کنیم حکم درست نباشد و بتوان ازیک نقطه خارج از یک خط، دو عمود رسم کرد بنابراین داریم:



$AB \perp \ell$

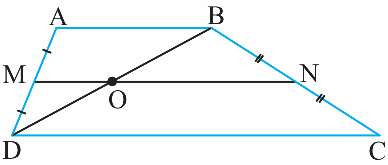
$AC \perp \ell$

در این‌صورت مثلثی تشکیل شده که دو زاویه ۹۰° داره و این یعنی مجموع زوایای این مثلث بیشتر از ۱۸۰° هست و تناقض داره با این قضیه که می‌دونیم جمع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.

پس ببین که تناقض همیشه با فرض مسأله نیست و گاهی با واقعیت‌هایی هست که از قبل می‌دونیم.

۲۰- دشوار

حواست باشه که وسط‌های ساق‌ها به هم وصل شده و اگر قطر **BD** رو رسم کنیم داریم:



$$\overset{\Delta}{ADB}: \frac{MD}{AD}=\frac{MO}{AB}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow AB=۲OM \Rightarrow OM=\frac{AB}{۲}$$

$$\overset{\Delta}{BDC}: \frac{BN}{BC}=\frac{ON}{DC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ON=\frac{DC}{۲}$$

$$MN=OM+ON=\frac{AB}{۲}+\frac{DC}{۲}=\frac{AB+CD}{۲}$$

پاسخنامه

سؤالات تستی

بخش ۲

۱- گزینهٔ «۱» آسان

یه نگاه به عبارتی که داده بنداز و با صورت کسرها مقایسه کن، می‌بینی که صورت‌ها با هم جمع شدن. می‌دونیم که:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f} \Rightarrow \frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$$

بنابراین:

$$\frac{۲a}{۳}=\frac{۲b-۱}{۴}=\frac{c+۳}{۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۲a+۲b-۱+c+۳}{۳+۴+۵}=\frac{\overbrace{۲a+۲b+c}^{۱۶}+۲}{۱۲}=\frac{۱۸}{۱۲}=\frac{۳}{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{۲a}{۳}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=\frac{۹}{۴} \\ \frac{۲b-۱}{\underset{۲}{\cancel{۴}}}=\frac{۳}{\cancel{۲}} \Rightarrow ۲b-۱=۶ \Rightarrow b=\frac{۷}{۲} \\ \frac{c+۳}{۵}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲c+۶=۱۵ \Rightarrow c=\frac{۹}{۲} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{ab}{c}=\frac{\frac{\cancel{۹}}{۴}\times\frac{۷}{\cancel{۲}}}{\frac{\cancel{۹}}{\cancel{۲}}}=\frac{۷}{۴}$$

۲- گزینهٔ «۱» دشوار

$$\overset{\Delta}{BB'C'}:\frac{A'C}{BC}=\frac{AA'}{BB'}$$

$$\overset{\Delta}{BCC'}:\frac{A'B}{BC}=\frac{AA'}{CC'}$$

از جمع دو رابطه بالا داریم:

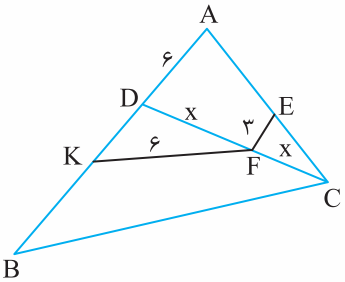
$$\frac{AA'}{BB'}+\frac{AA'}{CC'}=\frac{A'C+A'B}{BC}=\frac{BC}{BC}=۱$$

$$\xrightarrow{\div AA'}\boxed{\frac{۱}{BB'}+\frac{۱}{CC'}=\frac{۱}{AA'}}$$

اثبات رو نوشتم که بدونی رابطه از کجا اومده اما تـو حفظـش کـن و بعـداً بـاز استفاده کن. پس:

$$\frac{۱}{BB'}+\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow\frac{۱}{BB'}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}\Rightarrow BB'=۱۲$$

۳- گزینهٔ «۲» متوسط



$$\overset{\Delta}{ADC}:\frac{FC}{DC}=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow DC=۲FC$$

$$\xrightarrow{FC=x} DC=۲x$$

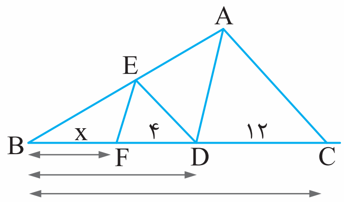
$$\Rightarrow DF=x$$

$$\overset{\Delta}{BDC}:\frac{FD}{DC}=\frac{KF}{BC}$$

$$\frac{\cancel{x}}{۲\cancel{x}}=\frac{۶}{BC}\Rightarrow\boxed{BC=۱۲}$$

۴- گزینهٔ «۳» دشوار

تو شکل‌هایی که اثری از «**Zoro**» می‌بینی! ☺، یعنی یه **Z** افتاده توی مثلث، از فرمول زیر استفاده کن:



$$\Rightarrow BD^۲=BF\times BC$$

پس:

$$(x+۴)^۲=x(x+۱۶)$$

$$\cancel{x^۲}+۸x+۱۶=\cancel{x^۲}+۱۶x\Rightarrow ۱۶=۸x\Rightarrow x=۲$$

۵- گزینهٔ «۳» آسان

پاره‌خط وسطی، دقیقاً وسط ساق‌های ذوزنقه رو به هم وصـل کـرده پـس طبـق فرمول $MN=\frac{AB+CD}{۲}$ داریم:

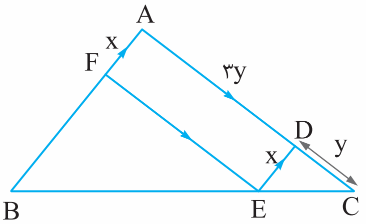
$$۱۱-۳x=\frac{x+۴+۳-۲x}{۲}\Rightarrow ۲۲-۶x=۷-x$$

$$۱۵=۵x\Rightarrow\boxed{x=۳}$$

۶- گزینهٔ «۴» دشوار

$$\frac{AF}{FB}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow FB=۳\underbrace{AF}_{x}$$

از این ترفند **x** گذاری توی تالس و تشابه استفاده کن و حالشو ببر!



$$\underset{(FE\|AD)}{\overset{\Delta}{ABC}}:\frac{۳x}{۴x}=\frac{EF}{AC}$$

$$\underset{(ED\|AB)}{ABC}:\frac{CD}{AC}=\frac{x}{۴x}\Rightarrow AC=۴\underbrace{CD}_{y}\Rightarrow AD=۳y$$

$$\frac{S_{AFED}}{S_{ABC}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}AB\times AC\times\cancel{\sin A}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}AF\times AD\times\cancel{\sin A}}=\frac{\cancel{۴x}\times\cancel{۴y}}{\cancel{x}\times\cancel{۳y}}=\frac{۱۶}{۳}$$

۷- گزینهٔ «۱» آسان

تالس جزء به جزء: $\frac{۴}{x}=\frac{\cancel{۶}^{۲}}{\cancel{۳}}\Rightarrow x=۲$

تالس جزء به کل: $\frac{۶}{۹}=\frac{y}{۱۰}\Rightarrow y=\frac{۶۰}{۹}=\frac{۲۰}{۳}$

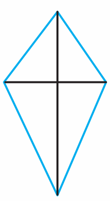
$$y-x=\frac{۲۰}{۳}-۲=\frac{۱۴}{۳}$$

۸- گزینهٔ «۲» آسان

گزینهٔ (۱): عکس قضیه می‌گوید: مثلثی که دو ارتفاع برابر دارد متساوی‌الساقین است که درست است.

عکس گزینهٔ (۲): هر چهارضلعی که در آن قطرها بر هم عمود باشد لوزی است که درست نیست.

مثلاً در کایت:



عکس گزینهٔ (۳): هر مثلثی که سه زاویه برابر دارد متساوی‌الاضلاع اسـت کـه درست است.

عکس گزینهٔ (۴): هر چهارضلعی که قطرها با هم برابر باشـد مسـتطیل اسـت و درست است.

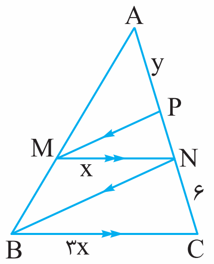
۹- گزینهٔ «۴» — متوسط

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{\overset{۲}{\cancel{۸}}}{\underset{۳}{\cancel{۱۲}}} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow EF = \frac{۲}{۳}AB$$

$$\overset{\Delta}{BDC}: \frac{\cancel{۴}}{\underset{۳}{\cancel{۱۲}}} = \frac{EF}{CD} \Rightarrow EF = \frac{۱}{۳}CD$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{\cancel{۳}}AB = \frac{۱}{\cancel{۳}}CD \Rightarrow \frac{AB}{CD} = \frac{۱}{۲}$$

۱۰- گزینهٔ «۴» — دشوار



$$BC = ۳\underbrace{MN}_{x}$$

$$\overset{\Delta}{ABC}: \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$

$$\frac{AN}{AC} = \frac{x}{۳x} = \frac{۱}{۳}$$

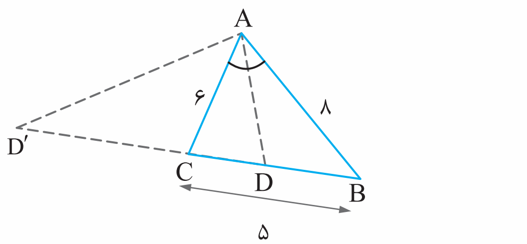
$$\Rightarrow \frac{AN}{AC-AN} = \frac{۱}{۳-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{AN}{NC} = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{NC=۶} \boxed{AN=۳}$$

!Z طبق قضیه زورو: $AN^۲ = AP \cdot AC \Rightarrow ۹ = y(۹) \Rightarrow y = ۱$

۱۱- گزینهٔ «۳» — دشوار

یادت باشه که در هر مثلث، نیمساز هر زاویه درونی، ضلع روبه‌روی آن زاویه را به نسبت دو ضلع زاویه قطع می‌کند. این قضیه برای نیمساز زاویه خارجی هم برقرار هست.



$$\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{۶}{۸} = \frac{DC}{۵-DC} \Rightarrow DC = \frac{۱۵}{۷} \quad (۱)$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{D'B}{D'C} \Rightarrow \frac{۴}{۳} = \frac{۵+D'C}{D'C} \Rightarrow D'C = ۱۵ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow DD' = DC + CD' = \frac{۱۵}{۷} + ۱۵ = \frac{۱۲۰}{۷}$$

۱۲- گزینهٔ «۳» — آسان

گزینه ۳ صحیح است زیرا در مثلث قائم‌الزاویه محل همرسی عمودمنصف‌های اضلاع روی وتر است.

۱۳- گزینهٔ «۲» — آسان

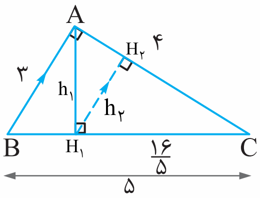
$$\frac{e}{۳} = \frac{a+b}{۲} = \frac{c+۲d}{۵} = \frac{۳c+۶d}{۱۵}$$

$$\frac{۵e}{۱۵} \qquad \frac{۲a+۲b}{۴}$$

$$\frac{\overbrace{۵e+۲a+۲b+۳c+۶d}^{A}}{۱۵+۴+۱۵} = \frac{e}{۳} \Rightarrow \frac{e}{۳} = \frac{A}{۳۴} \Rightarrow A = ۳۴(\frac{e}{۳})$$

۱۴- گزینهٔ «۲» — دشوار

$$AB \times AC = AH_۱ \times BC \Rightarrow ۳ \times ۴ = h_۱ \times ۵ \Rightarrow h_۱ = \frac{۱۲}{۵}$$



AB و $H_۱H_۲$ هر دو عمود بر ضلع AC هستند.

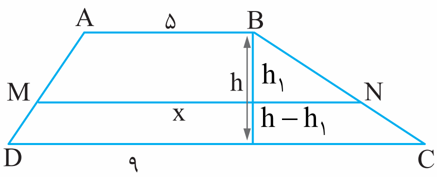
بنابراین $AB \parallel H_۱H_۲$ و طبق تالس داریم:

$$\overset{\Delta}{AH_۱C}: H_۱C^۲ = ۴^۲ - (\frac{۱۲}{۵})^۲ = \frac{۲۵۶}{۲۵} \Rightarrow H_۱C = \frac{۱۶}{۵}$$

تالس در ABC: $\frac{\frac{۱۶}{۵}}{۵} = \frac{h_۲}{۳} \Rightarrow h_۲ = \frac{۳ \times ۱۶}{۲۵}$

$$\Rightarrow \frac{h_۲}{h_۱} = \frac{\frac{۳\times ۱۶}{\cancel{۲۵}^{۵}}}{\frac{۱۲}{\cancel{۵}}} = \frac{۴}{۵}$$

۱۵- گزینهٔ «۲» — دشوار



$$\frac{(x+۵)h_۱}{۲} = \frac{(x+۹)(h-h_۱)}{۲} \Rightarrow \frac{h-h_۱}{h_۱} = \frac{x+۵}{x+۹}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{h_۱} - ۱ = \frac{x+۵}{x+۹} \Rightarrow \frac{h}{h_۱} = \frac{۲x+۱۴}{x+۹} \quad (۱)$$

$$S_{ABCD} = ۲S_{ABNM} \Rightarrow \frac{(۵+۹)}{۲}h = ۲ \times \frac{(x+۵)}{۲}h_۱$$

$$\Rightarrow ۷h = (x+۵)h_۱ \Rightarrow \frac{h}{h_۱} = \frac{x+۵}{۷} \quad (۲)$$

$$\frac{۲x+۱۴}{x+۹} = \frac{x+۵}{۷} \Rightarrow x^۲ + ۱۴x + ۴۵ = ۱۴x + ۹۸$$

$$\Rightarrow x^۲ = ۵۳ \Rightarrow x = \sqrt{۵۳}$$

۱۶- گزینهٔ «۲» آسان

$$\overset{\Delta}{MDC}: \frac{MA}{۷+MA}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{MA}{۷}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow MA=\frac{۲۸}{۵}$$

$$\frac{MB}{MB+۵}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{MB}{۵}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow MB=۴$$

$$\overset{\Delta}{MAB}_{\text{محیط}}: \frac{۲۸}{۵}+۴+۴=۵/۶+۸=۱۳/۶$$

۱۷- گزینهٔ «۱» آسان

$$\frac{۴}{y}=\frac{y^{۲}}{۵-x} \Rightarrow y^{۳}=۴(۵-x) \quad (۱)$$

$$\frac{۴}{y+۴}=\frac{x+۱}{y+x+۱} \xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{۴}{y}=\frac{x+۱}{y} \Rightarrow x+۱=۴$$

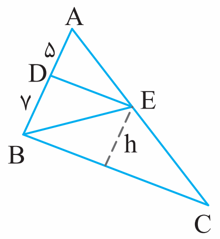
$$\Rightarrow \boxed{x=۳} \xrightarrow{(۱)} y^{۳}=۴(۲) \Rightarrow \boxed{y=۲}$$

$$y-۲x=۲-۶=-۴$$

۱۸- گزینهٔ «۴» متوسط

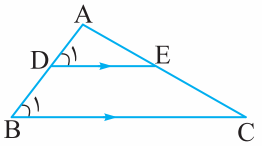
$$\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \Rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{۵}{۱۲}$$

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}}=\frac{\cancel{\frac{۱}{۲}}BC\times \cancel{h}}{\cancel{\frac{۱}{۲}}DE\times \cancel{h}}=\frac{BC}{DE}=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$



۱- آسان

$$\left.\begin{array}{l} DE \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی و مورب}} \hat{D}_۱=\hat{B}_۱ \\ \hat{A}=\hat{A} \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \Rightarrow \underset{(\text{زز})}{\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}}$$



۲- آسان

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} BC \parallel DE \\ BD \ \text{مورب}, \end{array}\right) \Rightarrow \hat{B}=\hat{D} \\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲ \ (\text{متقابل به راس}) \end{array}\right. \Rightarrow \underset{\text{زز}}{ABC \sim ADE}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\overset{۲}{\cancel{۳۳}}}{\underset{۲}{\cancel{۲۲}}}=\frac{AC}{۱۸}=\frac{۲۱}{DE}}_{AC=۲۷}, \frac{۲۱}{DE}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow DE=۱۴$$

۳- متوسط

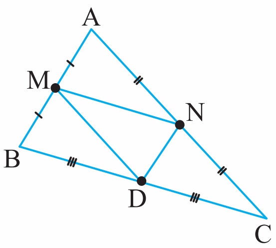
$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}=۱ \Rightarrow MN \parallel BC$$

و به همین ترتیب: $NP \parallel AB$ و $MP \parallel AC$

بنابراین چهارضلعی‌های ایجاد شده از جمله **MNPB** متوازی‌الاضلاع هستند و زاویه‌های روبه‌رو برابرند پس:

$$\hat{N}=\hat{B}, \hat{A}=\hat{P}, \hat{C}=\hat{M}$$

پس دو مثلث **ABC** و **MNP** به حالت برابری دو زاویه متشابه‌اند.

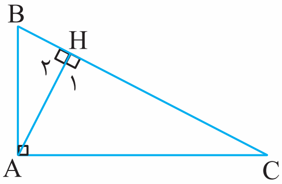


۴- متوسط

$$\begin{cases} \hat{A}=\hat{H}_1 \\ \hat{C}\ \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \underset{(\text{زز})}{\sim} \overset{\triangle}{AHC} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \hat{A}=\hat{H}_2 \\ \hat{B}\ \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \underset{(\text{زز})}{\sim} \overset{\triangle}{ABH} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{AHC}$$



۵- متوسط

در سوال قبل دیدیم که هر سه مثلث قائم‌الزاویه متشابه‌اند. با نوشتن نسبت اضلاع داریم:

آ) $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AC}{AB}=\frac{AH}{BH}=\frac{HC}{AH} \Rightarrow AH^2=BH\times HC$

ب) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHB} \Rightarrow \frac{AH}{AC}=\frac{AB}{BC}=\frac{HB}{AB} \Rightarrow AB^2=BH\times BC$

پ) $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AHC} \Rightarrow \frac{AH}{AB}=\frac{AC}{BC}=\frac{HC}{AC} \Rightarrow AC^2=CH\times BC$

از جمع روابط بالا داریم:

ت) $AB^2+AC^2=BH\times BC+CH\times BC$

$=BC(BH+HC)=BC(BC)=BC^2$

که همون رابطه فیثاغورس هست.

ث) $S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times AC=\frac{1}{2}AH\times BC \Rightarrow AB\times AC=AH\times BC$

۶- متوسط

آ) $h^2=d\cdot e \Rightarrow 25=7e \Rightarrow e=\frac{25}{7}$

ب) $b^2=e(d+e) \Rightarrow b^2=3(8) \Rightarrow b=\sqrt{24}$

$c^2=d(d+e)=5(8) \Rightarrow c=\sqrt{40}$

پ) اعداد فیثاغورسی $\Rightarrow d+e=10$

$b^2=e(10) \Rightarrow 36=10e \Rightarrow e=3.6$

$d=10-3.6=6.4$

$h^2=ed=3.6\times 6.4 \Rightarrow h=\sqrt{3.6\times 6.4}=4.8$

۷- متوسط

آ) $BH+HC=BC \Rightarrow 9+HC=10 \Rightarrow HC=1$

$AH^2=BH\times HC \Rightarrow AH^2=9\times 1=9 \Rightarrow AH=3$

$AB^2=BH\times BC \Rightarrow AB^2=9\times 10=90 \Rightarrow AB=\sqrt{90}$

$(AC)^2=HC\times BC \Rightarrow AC^2=1\times 10=10 \Rightarrow AC=\sqrt{10}$

ب) $AC^2=HC\times BC \Rightarrow 25=2BC \Rightarrow BC=\frac{25}{2}$

$BH+HC=BC \Rightarrow BH+2=\frac{25}{2} \Rightarrow BH=\frac{21}{2}$

$AH^2=BH\times HC \Rightarrow AH^2=\frac{21}{2}\times 2=21 \Rightarrow AH=\sqrt{21}$

$AB^2=BH\times BC \Rightarrow AB^2=\frac{21}{2}\times\frac{25}{2} \Rightarrow AB=\frac{5\sqrt{21}}{2}$

پ) $BC^2=36+64=100 \Rightarrow BC=10$

$AB^2=BH\times BC \Rightarrow 64=10BH \Rightarrow BH=\frac{64}{10}=6.4$

$AB\times AC=AH\times BC \Rightarrow 8\times 6=AH\times 10 \Rightarrow AH=\frac{48}{10}=4.8$

ت) $AB^2=AH^2+BH^2$

$12^2=6^2+BH^2 \Rightarrow BH^2=144-36=108 \Rightarrow BH=6\sqrt{3}$

$AB^2=BH\times HC \Rightarrow 12^2=6\sqrt{3}\times BC \Rightarrow BC=\frac{144}{6\sqrt{3}}=8\sqrt{3}$

$BH+HC=BC \Rightarrow HC=8\sqrt{3}-6\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

$AC^2=HC\times BC \Rightarrow AC^2=2\sqrt{3}\times 8\sqrt{3} \Rightarrow AC^2=48$

$\Rightarrow AC=4\sqrt{3}$

۸- متوسط

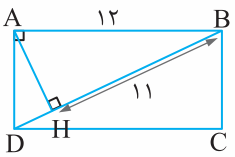
$\overset{\triangle}{ABH}: AH^2=12^2-11^2=23$

$AH=\sqrt{23}$

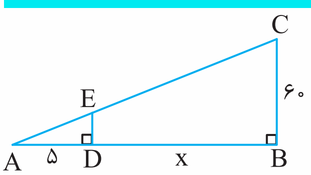
$AH^2=BH\times HD \Rightarrow 23=11\times HD, HD=\frac{23}{11}$

$BD=11+\frac{23}{11}=\frac{144}{11}$

$AD^2=HD\times BD=\frac{23}{11}\times\frac{144}{11} \Rightarrow AD=\frac{12}{11}\sqrt{23}$



۹- آسان

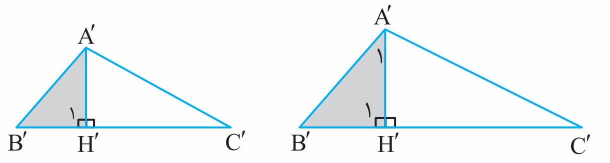


$AB=AD+BD=5+x$

$$\begin{cases} \hat{B}=\hat{D}=90^\circ \\ \hat{A}\ \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADE} \underset{\text{زز}}{\sim} \overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{5}{x+5}=\frac{1}{60} \Rightarrow x+5=300$$

$\Rightarrow AB=300$

۱۰- آسان



آ) می‌دونیم که اگر نسبت تشابه دو مثلث **k** باشه، نسبت نیمسازها هم **k** هست پس:

$$\frac{AH}{A'H'}=k$$

$$\begin{cases} A_1+B=A'_1+B' \Rightarrow A_1=A'_1 \\ B=B' \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{زز}}{ABH\sim A'B'H'}$$

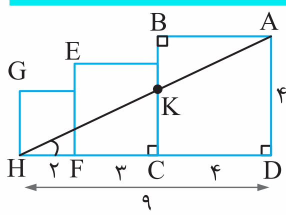
ب) $\Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\frac{AB}{A'B'}=k$

پ) $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}AH\times BC}{\cancel{\frac{1}{2}}A'H'\times B'C'}=k\times k=k^2$

ت) $\frac{P_{ABC}}{P_{A'B'C'}}=\frac{AB+BC+AC}{A'B'+B'C'+A'C'}=\frac{kA'B'+kB'C'+kA'C'}{A'B'+B'C'+A'C'}=k$

به نتیجه‌گیری‌ها توجه کن!

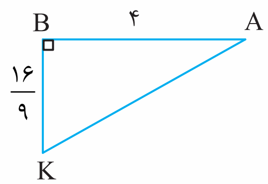
۱۱- متوسط



$$\begin{cases} \hat{H}=\hat{H}\ \text{مشترک} \\ \hat{C}=\hat{D}=90^\circ \end{cases} \Rightarrow \underset{\text{زز}}{\overset{\triangle}{HKC}\sim\overset{\triangle}{HAD}} \Rightarrow \frac{KC}{4}=\frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow KC=\frac{20}{9} \Rightarrow BK=4-\frac{20}{9}=\frac{16}{9}$$

$$AK^2=4^2+(\frac{16}{9})^2=16+\frac{256}{81}=\frac{1552}{81} \Rightarrow AK=\frac{\sqrt{1552}}{9}=\frac{4\sqrt{97}}{9}$$



۱۲- متوسط

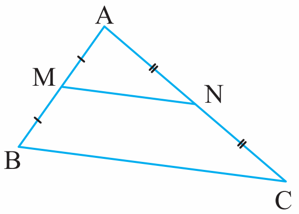
$$ADE\sim ABC \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ADE}}=K^2$$

تالس: $\frac{x}{x+1}=\frac{x+2}{2x+3} \Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{x+2}{x+1} \Rightarrow x^2+x=x+2$

$$\Rightarrow x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2} \Rightarrow K=\frac{\overset{AD}{x}}{\underset{AB}{2x+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{ABD}}=(\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}+1})^2=\frac{2}{9+4\sqrt{2}}$$

۱۳- آسان



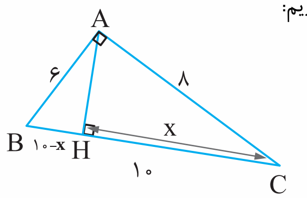
$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{MN}{BC}=\frac{1}{2} \Rightarrow AMN\sim ABC$$

(با نسبت تشابه $\frac{1}{2}$)

$$\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=(\frac{1}{2})^2=\frac{1}{4} \Rightarrow S_{ABC}=4S_{AMN}\ *$$

$$\frac{S_{AMN}}{S_{MNBC}}=\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}-S_{AMN}}\overset{*}{=}\frac{S_{AMN}}{4S_{AMN}-S_{AMN}}=\frac{1}{3}$$

۱۴- متوسط



طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$AB\times AC=AH\times BC$$

$$6\times 8=10AH$$

$$\Rightarrow AH=4.8$$

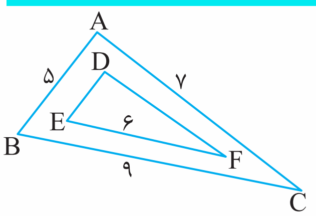
$$AH^2=BH\times HC$$

$$\Rightarrow (4.8)^2=x(10-x) \Rightarrow x^2-10x+(\frac{48}{10})^2=0$$

$$\Rightarrow 100x^2-1000x+2304=0 \Rightarrow \Delta=78400$$

$$\Rightarrow x=\frac{1000+280}{200}=6.4$$

۱۵- آسان



اضلاع دو مثلث موازی هستند پس دو مثلث متشابه هستند. نسبت مساحت‌های دو مثلث متشابه برابر مجذور نسبت تشابه اون‌ها هست:

$$\frac{S}{S'}=\frac{S_{ABC}}{S_{DEF}}=(\frac{9}{6})^2=(\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$$

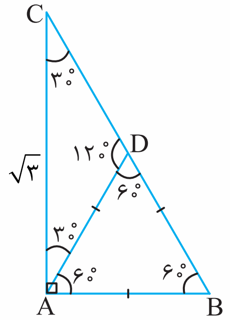
$$\frac{S-S'}{S'}=\frac{S}{S'}-1=\frac{9}{4}-1=\frac{5}{4}$$

۱۶- متوسط

$$\hat{A}+D=D+D_{۱}=۱۸۰ \Rightarrow \begin{cases}\hat{A}=\hat{D}_{۱}\\ \hat{B}=\hat{B}\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{BED}\sim\overset{\triangle}{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{AC}=\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{AB} \Rightarrow \frac{۴}{۱۲}=\frac{۳}{۴+x} \Rightarrow x=۵$$

۱۷- متوسط



$$\overset{\triangle}{ABC}: \sin\hat{B}=\frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{BC} \Rightarrow BC=۲$$

۱۸- آسان

$$AB \parallel DE \Rightarrow \hat{A}=\hat{D}$$
متقابل به راس $\Rightarrow C_{۱}=C_{۲}$ $\Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\sim\overset{\triangle}{CDE}$

می‌دونیم که توی مثلث‌های متشابه، نسبت میانه‌ها همون نسبت تشابه هست:

$$\frac{BM}{M'E}=\frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{۳}{۴}=\frac{AC}{۳۵-AC} \Rightarrow ۱۰۵-۳AC=۴AC$$

$$\Rightarrow ۷AC=۱۰۵ \Rightarrow AC=۱۵$$

۱۹- آسان

طبق تشابه دو مثلث داریم:

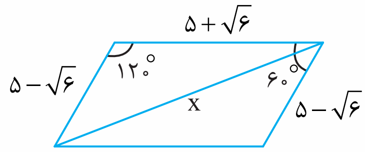
$$\frac{AB}{DE}=\frac{AC}{CE}=\frac{BC}{DC} \Rightarrow \frac{۴}{۱۲}=\frac{\frac{۲۰}{۳}}{y}=\frac{x}{۱۶}$$

$$\frac{x}{۱۶}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow x=\frac{۱۶}{۳}, \frac{\frac{۲۰}{۳}}{y}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow y=۲۰$$

$$x+y=\frac{۱۶}{۳}+۲۰=\frac{۷۶}{۳}$$

۲۰- متوسط

قضیهٔ کسینوس‌ها رو یادته؟



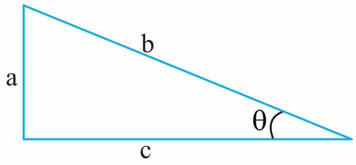
$$x^{۲}=(۵+\sqrt{۶})^{۲}+(۵-\sqrt{۶})^{۲}-۲(۵-\sqrt{۶})(۵+\sqrt{۶})\cos ۱۲۰°$$

$$=۲۵+۶+\cancel{۱۰\sqrt{۶}}+۲۵+۶-\cancel{۱۰\sqrt{۶}}-\cancel{۲}(۲۵-۶)\times\frac{-۱}{\cancel{۲}}$$

$$=۶۲+۱۹=۸۱ \Rightarrow \boxed{x=۹}$$

یادآوری قضیه کسینوس‌ها: در هر مثلث دلخواه:

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}-۲bc\cos\theta$$



۱- گزینهٔ «۳» آسان

نسبت مساحت مثلث‌ها ۴ است پس $\frac{S_{۱}}{S_{۲}}=۴$ و $K=۲$ و می‌دونیم نسبت محیط‌ها برابر نسبت تشابه یعنی همون ۲ هست.

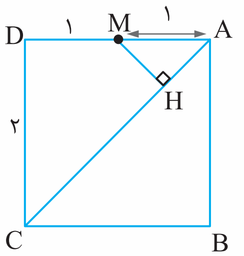
بنابراین نسبت محیط مثلث کوچک‌تر به محیط مثلث بزرگ‌تر $\frac{۱}{۲}$ هست.

۲- گزینهٔ «۲» آسان

با توجه به روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه، گزینه ۲ جواب است و رابطه درست به این صورت است:

$$AH^{۲}=BH\times HC$$

۳- گزینهٔ «۲» متوسط



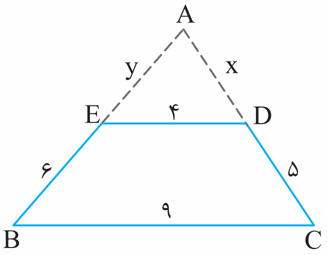
$$\begin{matrix}\hat{B}=\hat{B}\\ \hat{A}=\hat{H}=۹۰°\end{matrix} \Rightarrow \overset{\triangle}{ACD}\sim\overset{\triangle}{AMH}$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{AD}=\frac{BM}{BD} \Rightarrow \frac{MH}{۲}=\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

$$\Rightarrow MH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴– گزینهٔ «۴» آسان

$$BC \parallel ED \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADE} \Rightarrow \frac{۴}{۹}=\frac{y}{y+۶}=\frac{x}{x+۵}$$



$$\frac{x}{x+۵}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹x=۴x+۲۰ \Rightarrow x=۴$$

$$\frac{y}{y+۶}=\frac{۴}{۹} \Rightarrow ۹y=۴y+۲۴$$

$$۵y=۲۴ \Rightarrow y=\frac{۲۴}{۵}$$

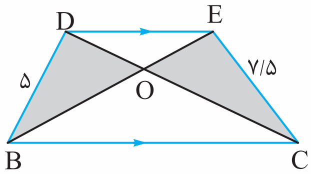
$$\overset{\Delta}{ADE}\ \text{محیط} = x+y+۴=۴+۴/۸+۴=۱۲/۸$$

۵– گزینهٔ «۴» دشوار

اگر از **D** به **E** وصل کنیم داریم:

$$\frac{AD}{BD}=\frac{۴}{۵}$$
$$\frac{AE}{EC}=\frac{۶}{۷/۵}=\frac{۶}{\frac{۱۵}{۲}}=\frac{۱۲}{۱۵}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow \frac{AD}{BD}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow DE \parallel BC$$

پس چهارضلعی **BDEC** ذوزنقه است:



$\overset{\Delta}{DEC}$ و $\overset{\Delta}{BDE}$ دارای قاعده مشترک و ارتفاع برابر هستند پس $S_{DEC}=S_{BDE}$ هر دو منهای S_{ODE} شدن

$$S_{ODB}=S_{OEC} \Rightarrow \frac{S_{ODB}}{S_{OEC}}=۱$$

۶– گزینهٔ «۲» آسان

$$BE \parallel CF \Rightarrow \frac{AB}{BC}=\frac{AE}{EF} \quad (۱)$$

$$CE \parallel DF \Rightarrow \frac{AC}{CD}=\frac{AE}{EF} \quad (۲)$$

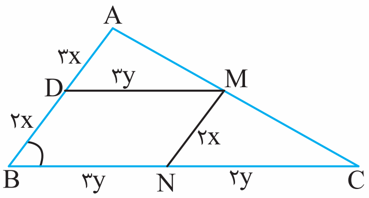
$$\xrightarrow{(۱),(۲)} \frac{AB}{BC}=\frac{AC}{CD} \Rightarrow \frac{۵}{۳}=\frac{۸}{CD} \Rightarrow CD=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

۷– گزینهٔ «۴» دشوار

تو همچین تست‌هایی بهترین راه‌حل استفاده از ضرائب **x** و **y** و ... هست ببین:

$$\frac{DA}{DB}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow \begin{cases} DA=۳x \\ DB=۲x \end{cases} \Rightarrow \frac{DM}{BC}=\frac{۳}{۵}=\frac{۳y}{۵y} \Rightarrow NC=۲y$$

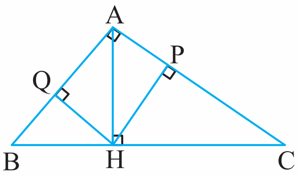
و الی آخر



$$\frac{S_{DMBN}}{S_{ABC}}=\frac{۲\cancel{x}\times ۳\cancel{y}\times \cancel{\sin B}}{\frac{۱}{۲}\times ۵\cancel{x}\times ۵\cancel{y}\times \cancel{\sin B}}=\frac{۱۲}{۲۵}$$

$$\frac{۱۲}{۲۵}\times ۱۰۰=٪۴۸$$

۸– گزینهٔ «۱» دشوار



$$\begin{matrix} S_{ABH}=\frac{۱}{۵}S_{ABC} \\ S_{AHC}=\frac{۴}{۵}S_{ABC} \end{matrix} \Rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ACH}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۴}{۵}}=\frac{۱}{۴}=(\frac{۱}{۲})^۲ \Rightarrow K=\frac{۱}{۲}$$

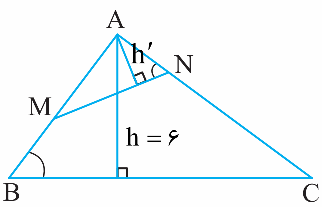
مجهول مسأله $\frac{HQ}{HP}$ است که ارتفاع‌های دو مثلث متشابه با $K=\frac{۱}{۲}$ هستند

بنابراین این نسبت نیز $\frac{۱}{۲}$ است.

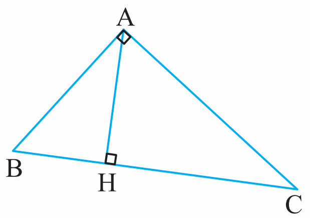
۹– گزینهٔ «۲» متوسط

$$\overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \begin{cases} A=A \\ \hat{N}=\hat{B} \end{cases} \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=(\frac{h}{h'})^۲$$

$$\Rightarrow (\frac{۶}{h'})^۲=۳ \Rightarrow \frac{۶}{h'}=\sqrt{۳} \Rightarrow h'=\frac{۶}{\sqrt{۳}}=۲\sqrt{۳}$$



۱۰- گزینه «۲» — آسان



$$AB^۲+AC^۲=BC^۲$$

$$۴^۲+۳^۲=BC^۲ \Rightarrow BC=۵$$

$$AH\times BC=AB\times AC$$

$$AH\times ۵=۳\times ۴$$

$$\Rightarrow AH=\frac{۱۲}{۵}=۲/۴$$

۱۱- گزینه «۲» — آسان

$$AC=۶, AB=۸ \Rightarrow BC=۱۰$$

$$h\times BC=۶\times ۸ \Rightarrow h=\frac{۴۸}{۱۰}=۴/۸$$

۱۲- گزینه «۳» — آسان

$$AH^۲=BH\times CH=۱۶ \Rightarrow AH=۴$$

$$AH^۲+HC^۲=AC^۲ \Rightarrow AC^۲=۱۶+۴=۲۰ \Rightarrow AC=۲\sqrt{۵}$$

$$AH^۲+BH^۲=AB^۲ \Rightarrow ۱۶+۶۴=AB^۲ \Rightarrow AB=\sqrt{۸۰}=۴\sqrt{۵}$$

$$S=۲\sqrt{۵}\times ۴\sqrt{۵}=۴۰$$

۱۳- گزینه «۴» — آسان

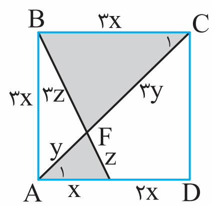
نسبت مساحت‌ها $\frac{۱}{۴}$ است پس $k=\frac{۱}{۲}$

نسبت میانه‌ها نیز برابر **k** است پس:

$$\frac{۲m-۱}{m+۶}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۴m-۲=m+۶ \Rightarrow ۳m=۸ \Rightarrow m=\frac{۸}{۳}$$

۱۴- گزینه «۱» — دشوار

AE رو برابر **x** فرض می‌کنیم در این‌صورت **ED** برابر $۲x$ هست و طول مربع $۳x$ میشه.



اضلاع دیگه رو هم به طور متناسب اسم‌گذاری می‌کنیم

$$\begin{cases}\hat{A}_۱=\hat{C}_۱\\ \hat{F}_۱=\hat{F}_۲\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AFE}\sim\overset{\triangle}{BFC} \Rightarrow k=۳$$

$$BE^۲=x^۲+۹x^۲=۱۰x^۲ \Rightarrow BE=\sqrt{۱۰}x$$

$$\Rightarrow EF=\frac{\sqrt{۱۰}x}{۴} \Rightarrow AC=۳\sqrt{۲}x \Rightarrow AF=\frac{۳\sqrt{۲}x}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{AF}=\frac{\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}x}{\frac{۱}{۴}۳\sqrt{۲}x}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$$

۱۵- گزینه «۳» — آسان

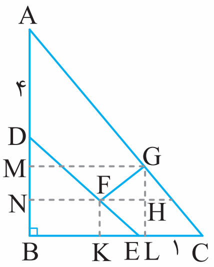
$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}\\ \hat{E}=\hat{C}\end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{AED}\sim\overset{\triangle}{ABC} \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{x+۱}=\frac{x}{۱۵} \Rightarrow x^۲+x-۳۰=۰$$

$(x+۶)(x-۵)=۰ \Rightarrow x=۵ \ , \ x=-۶$ غ ق ق

۱۶- گزینه «۲» — دشوار

از نقاط **F** و **G** خطوطی موازی با اضلاع قائم مثلث **ABC** رسم می‌کنیم.



تعمیم قضیه تالس:

$$\overset{\triangle}{BDE}: FK \parallel BD \Rightarrow \frac{FK}{BD}=\frac{FE}{DE}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow FK=\frac{۱}{۴}BD \xrightarrow{FK=HL}$$

$$HL=\frac{۱}{۴}BD \quad (۱)$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: GL \parallel AB \Rightarrow \frac{GH}{AB}=\frac{CG}{AC}=\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow GL=\frac{۱}{۴}AB \quad (۲)$$

$$GH=GL-HL \xrightarrow{(۱),(۲)} GH=\frac{۱}{۴}(AB-BD)=\frac{۱}{۴}\times ۴=۱ \quad (۳)$$

$$\overset{\triangle}{BDE}: FN \parallel BE \Rightarrow \frac{FN}{BE}=\frac{DF}{DE}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow FN=\frac{۳}{۴}DE \quad (*)$$

$$\overset{\triangle}{ABC}: GM \parallel BC \Rightarrow \frac{GM}{BC}=\frac{AG}{AC}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow GM=\frac{۳}{۴}BC$$

$$\xrightarrow{GM=NH} NH=\frac{۳}{۴}BC \quad (**)$$

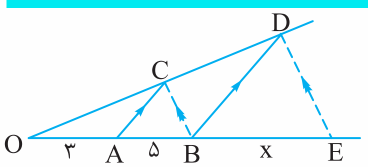
$$FH=NH-FN \xrightarrow{(*)\text{ و }(**)} FH=\frac{۳}{۴}(BC-DE)=\frac{۳}{۴}EC=\frac{۳}{۴} \quad (۴)$$

$$\overset{\triangle}{FGH}: FG^۲=GH^۲+FH^۲ \xrightarrow{(۳),(۴)} FG^۲=(\frac{۳}{۴})^۲+۱^۲=\frac{۲۵}{۱۶}$$

$$\Rightarrow FG=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

البته ارزش خالی گذاشتن این تست توی پاسخنامه بیشتر از حل کردنشه! ☺

۱۷- گزینه «۳» — متوسط



و اما رابطهٔ **Zoro**:

$$(۳+۵)^۲=۳\times(۳+۵+x)$$

$$۶۴=۳(x+۸) \Rightarrow x+۸=\frac{۶۴}{۳} \Rightarrow x=\frac{۶۴}{۳}-۸=\frac{۴۰}{۳}=۱۱\frac{۱}{۳}$$

۱۸- گزینهٔ «۲» آسان

یه فرمول به درد بخور دیگه یاد بگیر:

$$EF=\frac{DC-AB}{۲}\Rightarrow EF=\frac{۸-۴}{۲}=\frac{۴}{۲}=۲$$

۱۹- گزینهٔ «۴» متوسط

$$\begin{cases}\hat{D}=\hat{C}\\ \hat{B}=\hat{B}\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{BDE}\sim ABC\Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{BE}{AB}=\frac{DE}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{۱۸}{۲۴+x}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۱۴}}}{\underset{۲}{\cancel{۲۸}}}=\frac{y}{۲۴}$$

$$\frac{\cancel{۱۸}}{۲۴+x}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲۴+x=۳۶\Rightarrow x=۱۲$$

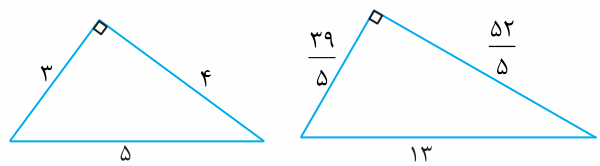
$$\frac{y}{۲۴}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow y=۱۲$$

۲۰- گزینهٔ «۳» آسان

$$\text{محیط}=۱۲\Rightarrow ۲x-۷+x+x-۱=۱۲$$

$$۴x-۸=۱۲$$

$$۴x=۲۰\Rightarrow x=۵\Rightarrow \begin{cases}x=۵\\ x-۱=۴\\ ۲x-۷=۳\end{cases}$$



$$k=\frac{۱۳}{۵}\qquad ۲x+۳=۱۳$$

$$۳\times\frac{۱۳}{۵}=\frac{۳۹}{۵}\qquad ۴\times\frac{۱۳}{۵}=\frac{۵۲}{۵}\qquad \frac{۵۲}{۵}-\frac{۳۹}{۵}=\frac{۱۳}{۵}$$

۱- آسان

آ) درست زیرا:

$$\frac{x}{y}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow x=۲a\,,y=۳a$$

$$\frac{۳y-۳}{۳x-۲}=\frac{۹a-۳}{۶a-۲}=\frac{۳(۳a-۱)}{۲(۳a-۱)}=\frac{۳}{۲}$$

ب) نادرست؛ پاره‌خط با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

پ) نادرست؛ در اثبات تالس ازتشابه استفاده نمی‌کنیم بلکه از مقایسهٔ مساحت‌ها استفاده می‌کنیم.

ت) درست

۲- متوسط

آ) متشابه

ب) ۴/۸ ـ ۶/۴ زیرا:

$$۶^۲+۸^۲=۱۰۰\xrightarrow{\sqrt{\ }}۱۰$$

$$۶\times۸=x\times۱۰\Rightarrow x=۴/۸$$

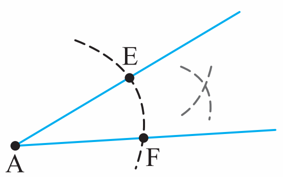
$$۸^۲=y\times۱۰\Rightarrow y=۶/۴$$

پ) حاصل‌ضرب تکه‌های ایجاد شده روی وتر

ت) به نسبت دو ضلع دیگر مثلث

۳- آسان

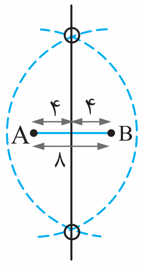
برای رسم نیمساز زاویه $A\hat{B}C$ کافی است سه کمان از نقاط **A** و **E** و **F** بزنیم:



۴- آسان

مکان هندسی نقاطی که از **A** و **B** به فاصله ۱۰ سانتی‌متر باشد، دایره‌هایی به مرکز **A** و **B** و به شعاع ۱۰ سانتی‌متر است که همون‌طور که از روی شکل پیداست دو نقطه با این ویژگی وجود داره.

چرا که نقطه‌ای که از **A** و **B** به یک فاصله باشد حتماً روی عمودمنصف قرار می‌گیره.



۵- متوسط

طبق قضیه نامساوی مثلث:

$$5x+2x+1>x \Rightarrow 6x>-1 \Rightarrow x>-\frac{1}{6}$$

$$5x+x>2x+1 \Rightarrow 4x>1 \Rightarrow x>\frac{1}{4}$$

$$2x+1+x>5x \Rightarrow 2x<1 \Rightarrow x<\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}$$

۶- متوسط

پاره‌خط **MN** موازی **BC** است طبق قضیه تالس:

$$\frac{3x}{2}=\frac{x^2+5}{3} \Rightarrow 2x^2+10=9x \Rightarrow 2x^2-9x+10=0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow AN+AM=9+6=15 \\ x=\frac{5}{2} \Rightarrow AN+AM=\frac{45}{4}+\frac{15}{2}=\frac{75}{4} \end{cases}$$

هر دو جواب قابل قبول هست و در صورتی که گزینه داشته باشیم می‌تونیم جواب موردنظر رو انتخاب کنیم.

۷- آسان

$$\frac{12-x}{10-y}=\frac{x}{y}$$

اگرچه به کمک قوانین دیگر تناسب میشه به کسر موردنظر رسید.

اما با یه دقت کوچولو می‌بینیم که در طرفین وسطین جملهٔ xy در هر دو طرف دیده میشه، پس از طرفین وسطین استفاده می‌کنیم:

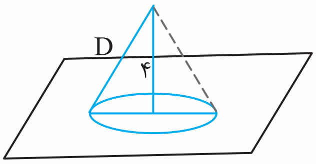
$$(12-x)(y)=x(10-y) \Rightarrow 12y-\cancel{xy}=10x-\cancel{xy}$$

$$\Rightarrow 12y=10x \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}=1+\frac{5}{6}=\frac{11}{6}$$

۸- متوسط

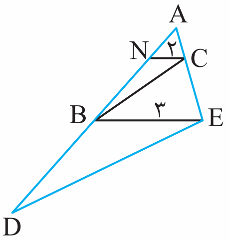
می‌دانیم که فاصله نقطه **M** از خطوط موردنظر، ارتفاع (عمودی) هست که از **M** به اون خط رسم میشه و در یک نقطه عمود میشه از طرفی فاصلهٔ ۵ از **M** یعنی دایره‌هایی به مرکز **M** و شعاع ۵ که در فضا تبدیل به کره‌ای به شعاع ۵ میشه و از اونجایی که $5>4$ بنابراین بی‌شمار نقطه برخورد با صفحه **p** داریم و بی‌شمار خط راست با این ویژگی وجود دارد.



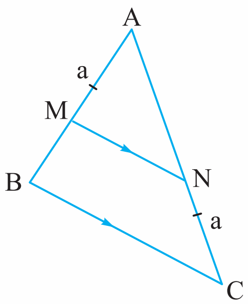
۹- متوسط

$$\overset{\Delta}{ABE} \xrightarrow{\text{تالس}} NC \parallel BE \Rightarrow \frac{AC}{AE}=\frac{2}{3}$$

$$\overset{\Delta}{ADE}: \frac{AC}{AE}=\frac{BC}{DE} \Rightarrow \frac{BC}{DE}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AB}{AD}=\frac{2}{3}$$



۱۰- متوسط



$$AB=\frac{3}{4}AC$$

$$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$$

$$\frac{AM}{\frac{3}{4}\cancel{AC}}=\frac{AN}{\cancel{AC}} \Rightarrow AM=\frac{3}{4}AN$$

$$\Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{4}AN}$$

$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{\frac{3}{4}\cancel{AN}}{MB}=\frac{\cancel{AN}}{NC} \Rightarrow MB=\frac{3}{4}NC=\frac{3}{4}a$$

$$\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB}=\frac{a}{a+\frac{3}{4}a}=\frac{a}{\frac{7}{4}a}=\frac{4}{7}$$

۱۱- دشوار

دو مثلث قابل انطباق نیستند یعنی $k \neq ۱$ و بنابراین کوچک‌ترین ضلع با طول ۳ نیست. پس کوچک‌ترین ضلع یا **a** است یا **b**.

$$p=۳+۴+۵=۱۲ ,\ \text{نسبت تشابه}=\frac{۳}{۴} \text{ یا } \frac{۳}{۵}$$

$$\text{نسبت تشابه}=\frac{۳}{۴} \Rightarrow p_۲=\frac{۳}{۴}\times ۱۲=۹$$

$$\text{نسبت تشابه}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow p_۲=\frac{۳}{۵}\times ۱۲=۷/۲$$

پس بیشترین محیط برابر ۹ است.

۱۲- متوسط

نسبت تشابه مثلث **ABC** به مثلث **ADE** برابر $\frac{۳}{۵}$ است. پس نسبت ارتفاع این مثلث هم $\frac{۳}{۵}$ است.

$$\frac{AH}{AH'}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{HH'}{AH'}=\frac{۲}{۵}$$

$$\frac{EF}{DE}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow \frac{S_{CGFE}}{S_{ADE}}=\frac{EF\cdot HH'}{\frac{۱}{۲}\times DE\times AH'}=\frac{۱}{۵}\times\frac{۲}{۵}\times ۲=\frac{۴}{۲۵}=۱۶\%$$

۱۳- آسان

$$h^۲=dc=۱۵ \Rightarrow h=\sqrt{۱۵}$$

$$b^۲=c(d+c)=۳(۸)=۲۴ \Rightarrow b=۲\sqrt{۶}$$

$$c^۲=d(d+c)=۵(۸)=۴۰ \Rightarrow c=۲\sqrt{۱۰}$$

۱۴- متوسط

مثلث‌های متساوی‌الاضلاع به دلیل برابری زاویه‌های آن‌ها (همگی ۶۰ هستند) همواره متشابه هستند و نسبت تشابه آن‌ها برابر نسبت طول اضلاع آن‌هاست همچنین نسبت محیط‌های آن‌ها برابر نسبت طول اضلاع آن‌هاست.

پاسخنامه سؤالات تشریحی

آزمون تشریحی ۲

۱- آسان

آ) نادرست - برای تشابه دو مثلث تنها برابری دو زاویه کافی است.

ب) درست - هر دو مثلث هم‌نهشت، متشابه با نسبت تشابه $k=۱$ هستند.

پ) نادرست- اگر نسبت ارتفاع‌ها ۳ است پس نسبت محیط‌ها هم ۳ است.

ت) نادرست - $AB^۲=BH\cdot BC$

۲- متوسط

آ) $\frac{۹}{۴}$

کوچک‌ترین اضلاع: $\frac{۳}{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\sqrt{۳}}$ بزرگ‌ترین اضلاع: $\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۶}$

اضلاع متوسط: $\frac{۳}{۲}=\frac{۶}{۴}$

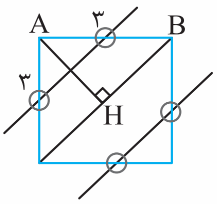
بنابراین دو مثلث متشابه با $k=\frac{۳}{۲}$ هستند پس نسبت مساحت‌ها برابر $k^۲$ یعنی $\frac{۹}{۴}$ است.

ب) $\frac{a+۳c+۴}{b+۳d+۱۴}=\frac{۲}{۷}$

پ) نصف وتر

ت) میانگین حسابی بین قاعده‌های ذوزنقه یا $\frac{a+b}{۲}$

۳- متوسط

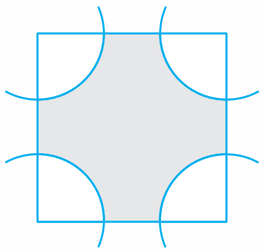


$$\text{طول قطر}=a\sqrt{۲}=۳\sqrt{۲} \Rightarrow AH=\frac{۳\sqrt{۲}}{۲}$$

مکان هندسی فاصله از قطر مربع، دو خط موازی قطر به فاصله $\frac{۳}{۲}$ از آن است و با توجه به طول **AH** این دو خط محیط دایره را در ۴ نقطه قطع می‌کنند.

۴- متوسط

فاصله از رئوس، دایره‌هایی به شعاع ۱ و به مرکز رئوس است.



ناحیهٔ موردنظر ناحیهٔ هاشور خورده در شکل است. مساحت اون هم میشه مساحت مربع منهای ۴ تا ربع دایره یعنی یک دایره کامل به شعاع ۱:

$$S_{\text{هاشور خورده}} = S_{\text{مربع}} - S_{\text{دایره}} = 4^2 - \pi(1)^2 = 16 - \pi$$

۵- آسان

خطها با هم موازی‌اند پس به کمک تالس در ذوزنقه داریم:

$$\frac{2x+1}{x+5} = \frac{2x}{x+3} \Rightarrow (2x+1)(x+3) = 2x(x+5)$$

$$\Rightarrow \cancel{2x^2} + 6x + x + 3 = \cancel{2x^2} + 10x \Rightarrow 3 = 3x \Rightarrow \boxed{x=1}$$

۶- متوسط

بازم قضیه زورو **Z**:

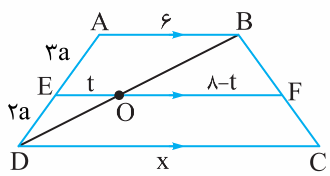
$$OB^2 = OA \cdot OE$$

$$6^2 = 2(6+BE) \Rightarrow 36 = 12 + 2BE \Rightarrow 24 = 2BE \Rightarrow BE = 12$$

۷- دشوار

فرض کن:

$$3DE = 2AE = 6a \Rightarrow \begin{cases} DE = 2a \\ AE = 3a \end{cases}$$



$$\overset{\Delta}{DAB}: \frac{2a}{5a} = \frac{OD}{DB} \Rightarrow \frac{t}{6} = \frac{2}{5} \Rightarrow t = \frac{12}{5} \Rightarrow OF = \frac{28}{5}$$

$$\frac{OD}{BD} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{OB}{DB} \Rightarrow \frac{3}{5} = \frac{\frac{28}{5}}{x} \Rightarrow x = \frac{5 \times \frac{28}{5}}{3} = \frac{28}{3}$$

۸- متوسط

طبق فرمولی که قبلاً به دست آوردیم:

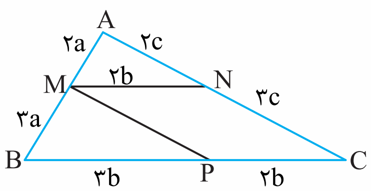
$$\left.\begin{aligned} MN &= \frac{a+b}{2} \\ PQ &= \frac{a-b}{2} \end{aligned}\right\}$$ از اون‌جایی که MN وسط قاعده‌ها رسم شده:

$$\frac{MN}{PQ} = \frac{\frac{a+b}{2}}{\frac{a-b}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

۹- دشوار

$$3AM = 2MB = 6a \Rightarrow AM = 2a$$

$$MB = 3a$$



$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{MN}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{5} = \frac{2b}{5b}$$

متوازی‌الاضلاع $MNPC \Rightarrow MN = PC \Rightarrow PC = 2b \Rightarrow BP = 3b$

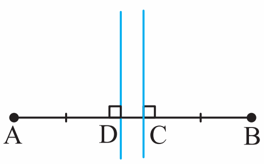
$$\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3} = \frac{2C}{3C}$$

$$\frac{S_{MNCP}}{S_{ABC}} = \frac{3\cancel{c} \times 2\cancel{b} \times \cancel{\sin C}}{\frac{1}{2} 5\cancel{c} \times 5\cancel{b} \times \cancel{\sin C}} = \frac{6 \times 2}{10} = \frac{6}{5}$$

۱۰- متوسط

در این اثبات فرض می‌کنیم دو عمودمنصف بر یک پاره‌خط رسم شده در این‌صورت ℓ_1 و ℓ_2 هر دو بر **AB** عمودند و آن را نصف می‌کنند. بنابراین $\ell_1 \parallel \ell_2$ و هر دو از نقطه‌های وسط **AB** می‌گذرند و این تناقض است با این‌که هر پاره‌خط تنها یک نقطه وسط دارد.

پس تناقض، یکتا بودن نقطه وسط پاره‌خط است.



۱۱- متوسط

می‌دونیم که نسبت محیط‌های دو مثلث متشابه، برابر نسبت تشابه (نسبت اضلاع متناظر) است پس کافیه **k** رو پیدا کنیم.

$$1)\ \begin{cases} 3, 4, 6 \\ 4, 2 \text{ یا } x \end{cases} \times$$

$$2)\ \begin{cases} 3, 4, 6 \\ 2\ x\ 4 \end{cases} \checkmark \qquad \frac{3}{2} = \frac{4}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{3}, k = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{3}{2}$$

۱۲- متوسط

طبق روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

$$AB^۲ = AH\cdot AC$$

$$x^۲=(x-۲)(x\cancel{-۲}+x\cancel{+۲}) \Rightarrow x^۲=۲x^۲-۴x$$

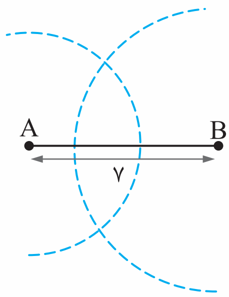
$$\Rightarrow x^۲-۴x=۰ \Rightarrow x(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ & \text{غ ق ق} \\ x=۴ \end{cases}$$

$$BH^۲=AH\cdot HC=(۲)(۶)=۱۲ \Rightarrow BH=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳}$$

۱۳- متوسط

یادت هست که!

مکان هندسی نقاطی که از یک نقطه به یک فاصله مشخص باشن، دایره بود پس به مرکز **B** و شعاع ۷ و همچنین به مرکز **A** و شعاع ۵ دو دایره می‌زنیم محل‌های برخورد آن‌ها دو نقطه هست که جواب‌های مسأله هستند.



۱۴- متوسط

$$\overset{\triangle}{ABH}: x^۲=۲۰^۲-۱۲^۲=۴۰۰-۱۴۴=۲۵۶ \Rightarrow x=۱۶$$

$$۱۲^۲=x\cdot y \Rightarrow ۱۴۴=۱۶\times y \Rightarrow y=۹$$

$$z^۲=y(y+x)=۹(۲۵) \Rightarrow z=۳(۵)=۱۵$$

۱- گزینهٔ «۳» آسان

برای این که دو کمان همدیگر را قطع کنند، باید دهانهٔ پرگار بیشتر از نصف **AB** باز شود یعنی بیشتر از $\frac{۵}{۲}$.

۲- گزینهٔ «۲» آسان

فاصله از یک نقطه همیشه نشون دهنده مکان هندسی مربوط به دایره است.

۳- گزینهٔ «۳» آسان

M روی عمودمنصف است پس:

$$MA=MB$$

$$x^۲=۲x \Rightarrow x=۰,۲ \Rightarrow \boxed{x=۲}$$

$$H\hat{M}B=۴۵^\circ \Rightarrow MH=HB=a$$

$$\overset{\triangle}{MHB}: a^۲+a^۲=۴^۲ \Rightarrow ۲a^۲=۱۶ \Rightarrow a^۲=۸$$

$$\Rightarrow a=۲\sqrt{۲} \Rightarrow AB=۲HB=۴\sqrt{۲}$$

۴- گزینهٔ «۲» آسان

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \Rightarrow \frac{۱۰-x}{x}=\frac{۸}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲x=۱۰-x \Rightarrow ۳x=۱۰ \Rightarrow x=\frac{۱۰}{۳}$$

۵- گزینهٔ «۱» متوسط

$$HH' \parallel AB \Rightarrow \frac{HH'}{AB}=\frac{CH}{BC} \ (\text{جزء به کل})$$

$$\frac{HH'}{۳}=\frac{۴-x}{۴} \Rightarrow HH'=\frac{۳}{۴}(۴-x)$$

$$\overset{\triangle}{BH'C}: (HH')^۲=BH\times HC \Rightarrow [\frac{۳}{۴}(۴-x)]^۲=x(۴-x)$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۶}(۱۶-۸x+x^۲)=۴x-x^۲ \Rightarrow ۹-\frac{۹}{۲}x+\frac{۹}{۱۶}x^۲=۴x-x^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۲۵}{۱۶}x^۲-\frac{۱۷}{۲}x+۹=۰ \Rightarrow ۲۵x^۲-۱۳۶x+۱۴۴=۰$$

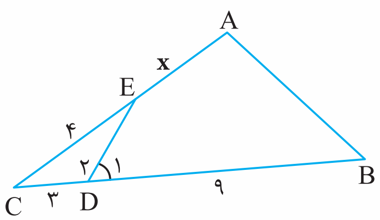
$$\Rightarrow (۲۵x-۳۶)(x-۴)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۴ & \text{غ ق ق} \\ x=\frac{۳۶}{۲۵}=۱/۴۴ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۶- گزینهٔ «۱» متوسط

$$\begin{cases} \hat{D}_۱+\hat{A}=۱۸۰^\circ \\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow \hat{A}=\hat{D}_۲$$

$$\begin{cases} \hat{A}=\hat{D}_۲ \\ \hat{C}=\hat{C} \ \text{مشترک} \end{cases} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{ECD} \Rightarrow \frac{ED}{AB}=\frac{CE}{BC}=\frac{CD}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{۱}{\cancel{۴}}}{\underset{۳}{\cancel{۹+۳}}}=\frac{۳}{۴+x} \Rightarrow ۴+x=۹ \Rightarrow x=۵$$



۷- گزینهٔ «۲» — آسان

$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}=\hat{B}=90^\circ\\ \hat{C}_1=\hat{C}_2 \ \text{متقابل به راس}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ADC}\sim\overset{\triangle}{BCE}$$

$$\text{فیثاغورس} \Rightarrow CE^2=BE^2+BC^2 \Rightarrow 4=1+BC^2 \Rightarrow BC=\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

۸- گزینهٔ «۳» — آسان

$$K^2=\frac{49}{128} \Rightarrow k=\sqrt{\frac{49}{128}}=\frac{7}{8\sqrt{2}}$$

$$\frac{21}{a}=\frac{7}{8\sqrt{2}} \Rightarrow a=\frac{8\sqrt{2}\times 21}{7}=24\sqrt{2}$$

۹- گزینهٔ «۳» — دشوار

$$AM \parallel DN \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{MN}{BM} \quad (1)$$

$$EN \parallel AM \Rightarrow \frac{AE}{AC}=\frac{MN}{MC} \quad (2)$$

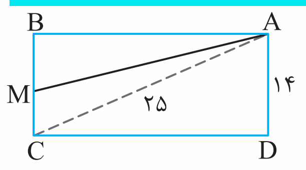
با تقسیم تناسب (۱) به تناسب (۲) داریم:

$$\frac{\frac{AD}{AB}}{\frac{AE}{AC}}=\frac{\frac{MN}{BM}}{\frac{MN}{MC}} \Rightarrow \frac{AD\times AC}{AB\times AE}=\frac{MC\times \cancel{MN}}{BM\times \cancel{MN}}$$

$$\xrightarrow{MB=MC} \frac{AD\times AC}{AB\times AE}=1$$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC} \xrightarrow{AB=\frac{2}{3}AC} \frac{\frac{2}{3}AC}{AC}=\frac{2}{3}$$

۱۰- گزینهٔ «۲» — دشوار



$$CD^2=25^2-14^2=429$$

$$CD=\sqrt{429}$$

$$\frac{S_{\overset{\triangle}{ABM}}}{S_{AMCD}}=\frac{5}{9} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{S_{ABM}}{S_{AMCD}+S_{AMB}}=\frac{5}{5+9}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABM}}{S_{ABCD}}=\frac{5}{14} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}\cancel{AB}\times BM}{\cancel{AB}\times AD}=\frac{5}{14} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2}BM}{14}=\frac{5}{14}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}BM=5 \Rightarrow BM=10 \Rightarrow AM^2=10^2+(\sqrt{429})^2=529$$

$$\Rightarrow AM=23$$

۱۱- گزینهٔ «۳» — متوسط

در چنین مقایسه‌هایی کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین اضلاع را با هم مقایسه کن و سپس ضلع متوسط رو پیدا کن و مقایسه کن.

در گزینه ۳، با نسبت تشابه $(k=3)$، طول اضلاع با اضلاع مسأله متناسب هستند.

۱۲- گزینهٔ «۱» — آسان

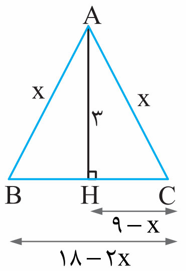
گزینه ۱ درست است.

اگر زوایای غیرقائم از دو مثلث قائم‌الزاویه برابر باشند، مثلث‌ها به حالت دو زاویه متشابه می‌شوند.

۱۳- گزینهٔ «۴» — متوسط

$$\overset{\triangle}{AHC}: x^2=3^2+(9-x)^2 \Rightarrow \cancel{x^2}=9+81-18x+\cancel{x^2}$$

$$\Rightarrow 18x=90 \Rightarrow x=5 \Rightarrow BC=18-10=8$$



$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\times 8\times 3=12$$

۱۴- گزینهٔ «۳» — متوسط

$$DD'\parallel BC \Rightarrow \frac{AD}{AB}=\frac{AD'}{AC}=\frac{DD'}{BC}=\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DD'}{8}=\frac{1}{3} \Rightarrow DD'=\frac{8}{3}$$

$$EE'\parallel BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{EE'}{BC}=\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{EE'}{8}=\frac{2}{3} \Rightarrow EE'=\frac{16}{3}$$

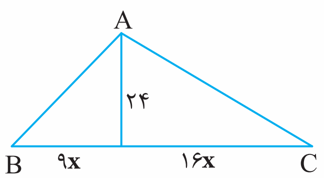
$$\Rightarrow DD'+EE'=\frac{8}{3}+\frac{16}{3}=8$$

۱۵- گزینهٔ «۳» — متوسط

$$AH^2=BH\times CH$$

$$24^2=(9x)(16x) \Rightarrow x^2=\frac{24\times 24}{9\times 16}=4 \Rightarrow x=2$$

$$\Rightarrow BC=9(2)+16(2)=50$$



۱۶- گزینه «۳» آسان

در گزینه‌های (۱) و (۲) و (۴)، تشابه مثلث‌ها را بـه حالـت برابـری دو زاویـه داریم.

۱۷- گزینه «۳» آسان

$$\overset{\Delta}{ABC} \underset{زز}{\sim} \overset{\Delta}{CDE} \begin{cases} \hat{A}=\hat{C} \\ \hat{B}=E \end{cases}$$

$$k=\frac{DE}{BC}=\frac{۲}{۱}=۲ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{CDE}}=(\frac{۱}{۲})^{۲}=\frac{۱}{۴}$$

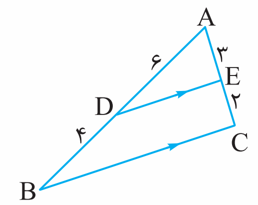
۱۸- گزینه «۳» آسان

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{۵x+۱}{۵x-۱}=\frac{۳x}{۳x-۱}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{۵x+۱-۵x+۱}{۵x-۱}=\frac{۳x-۳x+۱}{۳x-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۵x-۱}=\frac{۱}{۳x-۱} \Rightarrow ۶x-۲=۵x-۱$$

$$x=۱$$

$\Rightarrow$ 

$$\frac{DE}{BC}=\frac{۶}{۴+۶}=\frac{۶}{۱۰}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{BC}{DE}=\frac{۵}{۳}$$

۱۹- گزینه «۴» آسان

قضیه‌ای رو می‌تونیم به صورت دوشرطی بنویسیم که عکس قضیـه هـم برقـرار باشد. اما در گزینه ۴ عکس قضیـه برقـرار نیسـت زیـرا هـر چهارضـلعی کـه قطرهایش همدیگر را نصف کنند، لزوماً متوازی‌الاضلاع نیست.

۲۰- گزینه «۱» آسان

مثال نقض آن مثلث قائم‌الزاویه است کـه نقطـه همرسـی ارتفـاع‌هـای آن روی مثلث است.

پاسخنامه سؤالات تستی

آزمون پلاس

۱- گزینه «۴»

$$\frac{S_{MNCB}}{S_{AMN}}=۴ \Rightarrow \frac{S_{ABC}-S_{AMN}}{S_{AMN}}=۴ \Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}-۱=۴$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=۵$$

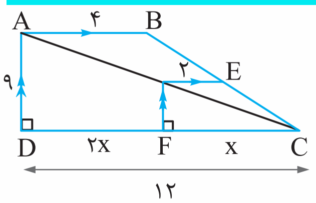
از طرفی طبق قضیه اساسی تشابه مثلث‌های **AMN** و **ABC** متشابه‌انـد پـس اگر نسبت تشابه **k** باشد:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}}=k^{۲} \Rightarrow k^{۲}=۵ \Rightarrow k=\sqrt{۵}$$

که همان نسبت دو قاعده ذوزنقه است ولی در گزینه ها نیست.

اما عکس این نسبت $\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ یعنی گزینه ۴ است که می‌تواند جواب مسأله باشـد چون ذکر نکرده نسبت کدام قاعده به کدام قاعده.

۲- گزینه «۴»



$$OE \parallel AB \Rightarrow \frac{OC}{AC}=\frac{۲}{۴}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{CF}{FC}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۳x=۱۲$$

$$\Rightarrow x=۴ \Rightarrow DF=۸$$

$$\frac{OF}{AD}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{OF}{۹}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow OF=۳$$

$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{۱}{۲}(۳+۹)\times ۸=۴۸$$

۳- گزینه «۱»

نقطه **D** روی نیمساز زاویه **A** است پس $DH=DH'$ و داریم:

$$x^{۲}-۵=۵x+۱ \Rightarrow x^{۲}-۵x-۶=۰$$

$$\Rightarrow (x-۶)(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۶ \\ x=-۱ \ \text{غ ق ق} \end{cases}$$

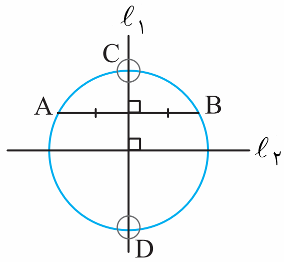
$$x=۶ \Rightarrow AC=۱۰, AB=۸$$

طبق قضیه‌ای داریم نیمساز هر زاویه داخلی مثلث، ضلـع روبـه‌رو را بـه نسـبت اضلاع قطع می‌کند یعنی:

$$\frac{DC}{BD}=\frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DC}{BD}=\frac{۸}{۱۰}$$

۴- گزینهٔ «۴»

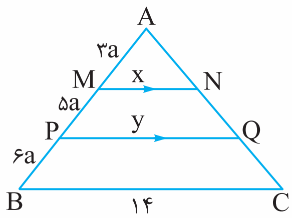
هرگاه عمودمنصف وتری از دایره رو رسم کنیم ازمرکز دایره رد میشه و بنابراین قطری از دایره است. اگر محل برخورد رو با **C** و **D** نشون بدیم، عمودمنصف پاره‌خط **CD** از مرکز دایره می‌گذره و چون عمود بر ℓ_1 هست، موازی **AB** میشه.



۵- گزینهٔ «۲»

$$\frac{r}{3}=\frac{s}{5}=\frac{t}{6}=a \Rightarrow \begin{cases} r=3a\\ s=5a\\ t=6a\end{cases}$$

$$\frac{AM}{AP}=\frac{x}{y}\Rightarrow \frac{3a}{8a}=\frac{x}{y}\Rightarrow \frac{x}{y}=\frac{3}{8}$$



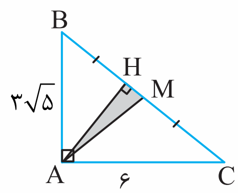
$$\frac{AP}{AB}=\frac{y}{14}\Rightarrow \frac{8\cancel{a}}{\cancel{14}\cancel{a}}=\frac{y}{\cancel{14}}\Rightarrow y=8\Rightarrow x=3$$

$$\Rightarrow x+y=8+3=11$$

۶- گزینهٔ «۴»

$$BC^2=(3\sqrt{5})^2+6^2=81\Rightarrow BC=9$$

$$BM=\frac{9}{2}=CM=AM$$



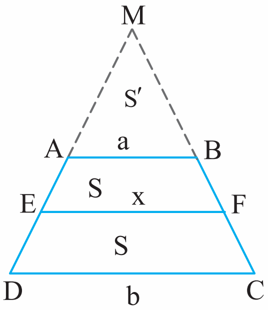
$$AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow AH\times 9=3\sqrt{5}\times 6\Rightarrow AH=2\sqrt{5}$$

$$MH^2=(\frac{9}{2})^2-(2\sqrt{5})^2=\frac{81}{4}-20=\frac{1}{4}\Rightarrow MH=\frac{1}{2}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AMH}}=\frac{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\cancel{6}^{3}\times 3\cancel{\sqrt{5}}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\cancel{2}\cancel{\sqrt{5}}\times\frac{1}{2}}=18$$

۷- گزینهٔ «۴»

اگر دو ساق ذوزنقه رو امتداد بدیم، طبق قضیه اساسی تشابه داریم:



$$\overset{\triangle}{MAB}\sim\overset{\triangle}{MEF}\Rightarrow\frac{S_{MAB}}{S_{MEF}}=(\frac{a}{x})^2$$

$$\Rightarrow\frac{S'}{S'+S}=\frac{a^2}{x^2}\quad(1)$$

$$MEF\sim MDC\Rightarrow\frac{S_{MEF}}{S_{MDC}}=(\frac{x}{b})^2\Rightarrow\frac{S'+S}{S'+2S}=\frac{x^2}{b^2}\quad(2)$$

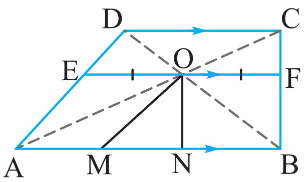
$$\xrightarrow{(1),(2)}\frac{S'}{S'+S}+\frac{S'+2S}{S'+S}=\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{x^2}\Rightarrow\frac{2\cancel{(S'+S)}}{\cancel{S'+S}}=\frac{a^2+b^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2=\frac{a^2+b^2}{x^2}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{x^2}}$$

۸- گزینهٔ «۱»

از نقطهٔ **O** یعنی محل تلاقی قطرهای ذوزنقه، پاره‌خطی موازی قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم. در این‌صورت $OE=OF$ و بنابراین چهارضلعی‌های **AMOE** و **BNOF** متوازی‌الاضلاع هستند. پس $OM=OE$ و $NB=OF$ و در نتیجه $AM=BN$ پس:

$$\frac{AM}{BN}=1$$



۹- گزینهٔ «۳»

$\overset{\Delta}{GEC} \xrightarrow{\text{تالس}} FA = ۲K , AB = ۵K$

از طرفی دو مثلث **GAF** و **GAB** هم‌ارتفاع هستند پس:

$$\frac{S_{GAF}}{S_{GAB}} = \frac{AF}{AB} = \frac{۲}{۵} \Rightarrow S_{GAF} = \frac{۲}{۵} S_{GAB} \quad (۱)$$

$$\overset{\Delta}{GDC} : \frac{S_{GAB}}{S_{GDC}} = \left(\frac{GA}{GD}\right)^۲ = \left(\frac{۲}{۳}\right)^۲ = \frac{۴}{۹}$$

$$\xrightarrow{\text{تفضیل در مخرج}} \frac{S_{GAB}}{S_{GDC} - S_{GAB}} = \frac{۴}{۹-۴} \Rightarrow \frac{S_{GAB}}{S_{ABCD}} = \frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow S_{GAB} = \frac{۴}{۵} S_{ABCD} \xrightarrow{(۱)} S_{GAF} = \frac{۲}{۵}\left(\frac{۴}{۵} S_{ABCD}\right) = \frac{۸}{۲۵} S_{ABCD}$$

که ۳۲ درصد مساحت ذوزنقه است.

۱۰- گزینهٔ «۳»

طبق تشابه مثلث‌ها، داریم:

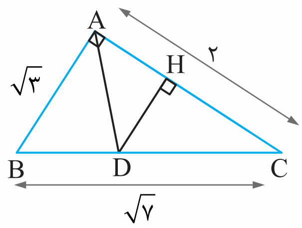
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{ADC} \sim \overset{\Delta}{ABD} \sim \overset{\Delta}{HDC}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} BC^۲ = ۳ + ۴ = ۷ \Rightarrow BC = \sqrt{۷}$$

$$\overset{\Delta}{ABC} \text{ رابطه طولی در } : AD \times BC = AB \times AC \Rightarrow \sqrt{۷} AD = ۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow AD = \frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}$$

$$\overset{\Delta}{ADC} \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} DC^۲ = ۲^۲ - \left(\frac{۲\sqrt{۳}}{\sqrt{۷}}\right)^۲ = \frac{۱۶}{۷} \Rightarrow DC = \frac{۴}{\sqrt{۷}}$$



$$\frac{S_{HDC}}{S_{ADC}} = \left(\frac{\frac{۴}{\sqrt{۷}}}{۲}\right)^۲ = \frac{۴}{۷}$$

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲ = \frac{۳}{۴}$$

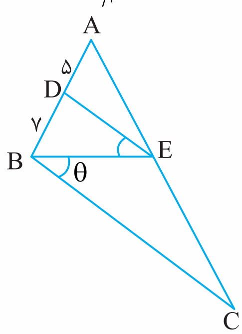
$$\frac{S_{HDC}}{S_{ABD}} = \frac{۱۶}{۲۱}$$

۱۱- گزینهٔ «۴»

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تعمیم تالس}} \frac{DE}{BC} = \frac{۵}{۵+۷} = \frac{۵}{۱۲} \quad (۱)$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{موازی و مورب}} D\hat{E}B = E\hat{B}C$$

$$\frac{S_{BCE}}{S_{BDE}} = \frac{\cancel{\frac{۱}{۲}} \cancel{BE} \times BC \times \cancel{\sin\theta}}{\cancel{\frac{۱}{۲}} \cancel{BE} \times DE \times \cancel{\sin\theta}} = \frac{BC}{DE} \overset{(۱)}{=} \frac{۱۲}{۵} = ۲/۴$$

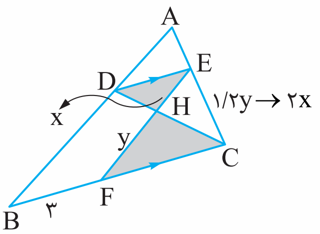


۱۲- گزینهٔ «۱»

$$۳y = ۵x \Rightarrow y = \frac{۵}{۳} x$$

$$EC = ۱/۲y = ۱/۲\left(\frac{۵}{۳} x\right) = ۲x$$

$$DE \parallel BC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{AE}{AC} = \frac{x}{۳x} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow DE = \frac{۱}{۳} BC$$



$$\overset{\Delta}{DEH} \sim \overset{\Delta}{HFC} \Rightarrow \frac{DE}{FC} = \frac{x}{y} = \frac{۳}{۵} \Rightarrow DE = \frac{۳}{۵} FC$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۵} FC = \frac{۱}{۳} BC \Rightarrow BC = \frac{۹}{۵} FC$$

$$\xrightarrow{BC = FC + ۳} FC + ۳ = \frac{۹}{۵} FC$$

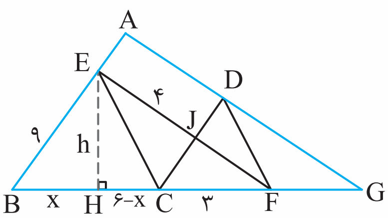
$$\Rightarrow ۳ = \frac{۴}{۵} FC \Rightarrow FC = \frac{۱۵}{۴} \Rightarrow BC = \frac{۱۵}{۴} + ۳ = \frac{۲۷}{۴} = ۶/۷۵$$

۱۳- گزینهٔ «۴»

$$\overset{\Delta}{FBE} \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{CF}{BC} = \frac{FJ}{EJ} \Rightarrow \frac{۳}{۶} = \frac{FJ}{۴} \Rightarrow FJ = ۲$$

$$\begin{cases} F\hat{D}C = E\hat{C}D \\ C\hat{E}F = E\hat{F}D \end{cases} (\text{موازی و مورب}) \Rightarrow \overset{\Delta}{FDJ} \sim \overset{\Delta}{FJC}$$

پس برای محاسبه **DF** کافیه **EC** رو به دست بیاریم.



$$\overset{\Delta}{EHC} : EC^۲ = (۶-x)^۲ + h^۲$$

$$\overset{\Delta}{EHF} : h^۲ + (۹-x)^۲ = ۶^۲$$

$$\overset{\Delta}{EHB} : h^۲ + x^۲ = ۹^۲ \Rightarrow h^۲ = ۸۱ - x^۲ \quad (۱)$$

$$h^۲ + (۹-x)^۲ = ۳۶ \xrightarrow{(۱)} ۸۱ - \cancel{x^۲} + ۸۱ + \cancel{x^۲} - ۱۸x = ۳۶$$

$$\Rightarrow ۱۶۲ - ۱۸x = ۳۶ \Rightarrow ۱۸x = ۱۲۶ \Rightarrow \boxed{x = ۷}$$

$$h^۲ = ۸۱ - ۷^۲ = ۸۱ - ۴۹ = ۳۲ \Rightarrow (۶-x)^۲ + h^۲ = EC^۲$$

$$\Rightarrow EC^۲ = (۶-۷)^۲ + ۳۲ \Rightarrow EC^۲ = ۳۳ \Rightarrow EC = \sqrt{۳۳}$$

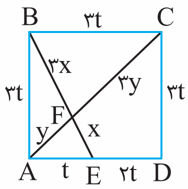
$$\Rightarrow \frac{DF}{EC} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{DF}{\sqrt{۳۳}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow DF = \frac{\sqrt{۳۳}}{۲}$$

۱۴- گزینهٔ «۱»

$AE=t \Rightarrow ED=۲t \Rightarrow AD=۳t$

$\overset{\Delta}{BFC} \sim \overset{\Delta}{AEF} \Rightarrow \frac{BC}{AE}=۳$

$\Rightarrow FC=۳FA , FB=۳FE$



$\overset{\Delta}{ABE}: BE^۲=AE^۲+AB^۲ \Rightarrow BE^۲=t^۲+(۳t)^۲=۱۰t^۲$

$\Rightarrow BE=\sqrt{۱۰}t$

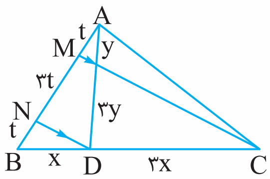
$\overset{\Delta}{ACD}: AC^۲=CD^۲+AD^۲=(۳t)^۲+(۳t)^۲=۱۸t^۲ \Rightarrow AC=۳\sqrt{۲}t$

$\frac{EF}{AF}=\frac{x}{y}=\frac{۴x}{۴y}=\frac{BE}{AC}=\frac{\sqrt{۱۰}t}{۳\sqrt{۲}t}=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

۱۵- گزینهٔ «۳»

$BD=\frac{۱}{۴}BC \Rightarrow BC=۴BD \Rightarrow BD=x , DC=۳x$

$AD=۴AE \Rightarrow AE=y , ED=۳y$



$\overset{\Delta}{AND}: \frac{AM}{MN}=\frac{AE}{EO}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow AM=t , MN=۳t$

$\overset{\Delta}{BMC}: \frac{BN}{NM}=\frac{BD}{DC}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow BN=t$

$\frac{AB}{AM}=\frac{AM+MN+NB}{AM}=\frac{۵t}{t}=۵$

۱۶- گزینهٔ «۴»

در مثلث $\overset{\Delta}{DPC}$، **PH** ارتفاع وارد بر وتر هست پس:

$PH^۲=DH\cdot HC=AP\cdot PB \Rightarrow PH^۲=۳\times ۹=۲۷$

$\Rightarrow PH=AD=\sqrt{۲۷}=۳\sqrt{۳}$

فیثاغورس $\Rightarrow DP^۲=AD^۲+AP^۲=۲۷+۹=۳۶ \Rightarrow DP=۶$

۱۷- گزینهٔ «۲»

$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMN} \sim \overset{\Delta}{ABC}$

$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}=(\frac{x}{۳x})^۲=\frac{۱}{۹}\quad (۱)$

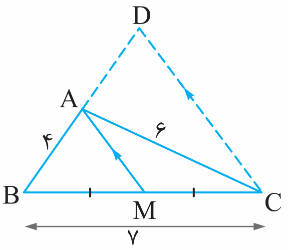
$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AEF} \sim \overset{\Delta}{ABC} \Rightarrow \frac{S_{AEF}}{S_{ABC}}=(\frac{۲x}{۳x})^۲=\frac{۴}{۹}$

$\xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{S_{BEFC}}{S_{ABC}}=\frac{۵}{۹}\quad (۲)$

با تقسیم تساوی‌های (۱) و (۲) داریم:

$\frac{\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}}}{\frac{S_{DEFC}}{S_{ABC}}}=\frac{\frac{۱}{۹}}{\frac{۵}{۹}} \Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{BEFC}}=\frac{۱}{۵}$

۱۸- گزینهٔ «۲»

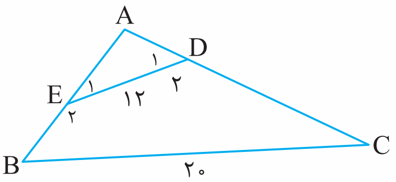


$AM \parallel DC \xrightarrow{\text{تالس}} \frac{BM}{MC}=\frac{AB}{AD} \xrightarrow{BM=MC} ۱=\frac{۴}{AD}$

$\Rightarrow AD=۴$

$BD=AB+AD=۴+۴=۸$

۱۹- گزینهٔ «۲»



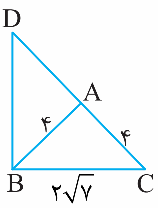
$$\left.\begin{array}{l}\begin{cases}\hat{B}+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ\\ \hat{D}_۱+\hat{D}_۲=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \hat{B}=\hat{D}_۱\\ \begin{cases}\hat{C}+\hat{E}_۲=۱۸۰^\circ\\ \hat{E}_۱+\hat{E}_۲=۱۸۰^\circ\end{cases}\Rightarrow \hat{C}=\hat{E}_۱\end{array}\right\}\Rightarrow ABC\sim ADE$$

$k=\frac{۱۲}{۲۰}=\frac{۳}{۵} \Rightarrow \frac{S_{ADE}}{S_{ABC}}=k^۲=\frac{۹}{۲۵}$

$\Rightarrow \frac{S_{ABC}-S_{ADE}}{S_{ABC}}=\frac{۲۵-۹}{۲۵} \Rightarrow \frac{S_{BCDE}}{S_{ABC}}=\frac{۱۶}{۲۵}=۰/۶۴$

۲۰- گزینهٔ «۳»

مثلث $\overset{\Delta}{BDC}$ قائم‌الزاویه است زیرا میانه **AB** نصف **DC** است.



$\overset{\Delta}{BDC}: BD^۲=DC^۲-BC^۲=۸^۲-(۲\sqrt{۷})^۲=۶۴-۲۸=۳۶ \Rightarrow BD=۶$