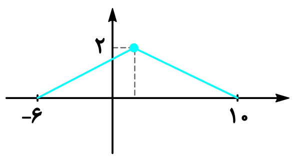
اصلاحیه

- فصل سوم – بخش ۳ سؤال ۴۰:گزینه ۱ صحیح است.
- فصل سوم – بخش ۴ تستی – سؤال ۲۴: پاسخ در گزینه‌ها نیست.

پاسخ درست:



- فصل سوم – آزمون تستی پایانی– عبارت خواسته شده $g(۴)+g(۱۲)$ است.
- فصل سوم – آزمون تستی پایانی– سوال ۱۳ – گزینه ۲ صحیح است.

پاسخنامه

سؤالات تشریحی

بخش ۱

۱- آسان

وقتی می‌نویسیم: $f : A \to B$ یعنی تابع f از مجموعهٔ A به مجموعهٔ B تعریف شده است. مجموعهٔ A رو دامنه و مجموعهٔ B رو هم‌دامنه می‌نامیم که B ممکن هست برد هم باشه.

توی این تابع، دامنه $D=[-۱,۲]$ هست و هم‌دامنه R هست و ما می‌دونیم برای $y=x^۲$، برد همهٔ اعداد نامنفی هست یعنی $R=[۰,+\infty)$ پس هر مجموعه‌ای که شامل برد باشه قابل قبول هست. از طرفی برای $x\in[-۱,۲]$ داریم: $R=[۰,۲]$ پس موارد «ب» و «ت» قابل قبول هستند زیرا دامنه‌ها برابر و برد را شامل می‌شوند.

۲- آسان

با توجه به نمودار تابع f، دامنه $[-۲,۱]$ است و برد $[-۱,۱]$. پس تابعی قابل قبول است که دامنه $[-۲,۱]$ باشد و با حفظ ضابطه، برد آن شامل $[-۱,۱]$ باشد (مفهوم هم‌دامنه)

پس فقط مورد «ت» قابل قبول است.

۳- دشوار

برای تشخیص تابع بودن از روی ضابطه، به نکته‌های زیر توجه کن:

۱) اگر y با توان فرد یک طرف تساوی باشه و سمت راست عبارت‌هایی برحسب x باشند، تابع است.

۲) اگر y داخل قدرمطلق باشه یا توان زوج داشته باشه، شک کن که احتمالاً تابع نباشه ولی با اطمینان نمی‌تونی بگی حتماً تابع نیست یادت باشه حالت‌های خاص و استثنا وجود دارند.

۳) برای اطمینان از تابع نبودن، دنبال عددی بگرد که اگر به جای x قرار بدی، دو مقدار برای y به دست بیاری و این خودش میشه مثال نقض برای اثبات تابع نبودن!

آ) $y=\sqrt{۴-x^۲}-\sqrt{x^۲-۴}$

همون‌طوری که می‌بینی، y یک طرف تنهاست و سمت راست عبارتی برحسب x. پس تابع هست (به دامنه‌ش فکر کن!)

ب) $|y|-x^۲-x-۱=۰$

شک می‌کنیم که احتمالاً تابع نباشه اما بیا $|y|$ رو تنها کنیم:

$|y|=x^۲+x+۱$

حالا به جای x اگر عدد صفر رو قرار بدیم داریم:

$x=۰ \Rightarrow |y|=۱ \Rightarrow y=\pm۱$

به ازای یک مقدار x، دو مقدار برای y داریم پس این رابطه تابع نیست.

پ) $x^۲+y^۲+۴x+۲y+\underbrace{۵}_{۴+۱}=۰$

برای بررسی روابطی به این شکل ابتدا سعی کن با مربع کامل کردن عبارت‌ها به فرم مناسبی برسی:

$(x^۲+۴x+۴)+(y^۲+۲y+۱)=۰ \Rightarrow (x+۲)^۲+(y+۱)^۲=۰$

دو عبارت نامنفی (توان ۲) با هم جمع شده و مساوی صفر شده‌اند پس لازم است هر دو صفر شوند یعنی $y=-۱, x=-۲$ یعنی نقطهٔ $(-۲,-۱)$ و می‌دانیم نقطه تابع است پس این رابطه تابع است.

پس حواست به این نکته باشه: رابطه $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=R^۲$، نمایشگر یک دایره به مرکز (α,β) و شعاع R است. بنابراین تابع نیست مگر این که $R=۰$

ت) $۱+x-x^۲|y|=۰$

با توجه به این که y درون قدرمطلق هست، حدس می‌زنیم رابطه تابع نباشد.

$۱+x=x^۲|y| \xrightarrow{x=۱} ۲=|y| \Rightarrow y=\pm۲$ تابع نیست

ث) $(x-۱)(y+۵)=۰$

ضرب دو پرانتز صفر شده، معنی آن این هست که حداقل یکی از پرانتزها صفر هست پس $x=۱$ یا $y=-۵$. درحالتی که $x=۱$ باشد می‌توان مقادیر مختلفی برای y درنظر گرفت پس تابع نیست.

ج) $f(x)=\begin{cases} x^۲-۳x & x\geq۱ \\ ۲x+۵ & x\leq۱ \end{cases}$

روابط چندضابطه‌ای درصورتی تابع هستند که یا بازه‌های روبه‌رویی، اشتراکی نداشته باشند یا اگر عددی در هر دو بازه وجود دارد، مقدار رابطه از هر دو ضابطه یکی باشد.

توی این رابطه، عدد ۱ در هر دو بازه وجود دارد پس مقداردهی را انجام می‌دهیم:

$۱^۲-۳(۱)=-۲ \ , \ ۲(۱)+۵=۷ \ , \ -۲\neq۷$

پس این رابطه تابع نیست.

چ) $|x|+|y-۱|=۰$

مجموع دو عبارت نامنفی برابر صفر شده، پس لازمه هر دو عبارت صفر باشند:

$|x|=۰ \Rightarrow x=۰$

$|y-۱|=۰ \Rightarrow y=۱$

پس باز هم به نقطهٔ $(۰,۱)$ رسیدیم که تابع هست.

۴- متوسط

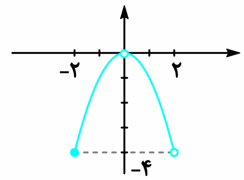
برای تشخیص برد تابع‌های درجه دوم باید حواست به رأس سهمی باشه که اگر طول رأس سهمی درون بازه باشه، حتماً مقدار عرض اون رو حساب کنیم:

مقدار ماکزیمم $y=-x^{۲} \quad x_A=\dfrac{-b}{۲a}=۰ \xrightarrow{\text{توی بازه هست}} y_A=-(۰)^{۲}=۰$

x	-۲	۰	۲
$-x^{۲}$	-۴	۰	-۴

$\Rightarrow R=[-۴,۰)$

روش دوم: به کمک نمودار



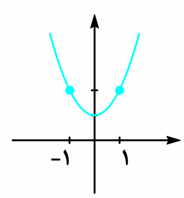
۵- آسان

اگر عدد حقیقی را x درنظر بگیریم، تابع g ابتدا x را به $x^{۲}$ تبدیل می‌کنه و سپس به $x^{۲}+۱$ پس:

$g(x)=x^{۲}+۱$

x	-۱	۰	۱
y	۲	۱	۲

برای رسم می‌تونیم از انتقال و نقطه‌یابی استفاده کنیم:



ب) از روی نمودار، بخش‌هایی از محور y که توسط نمودار پوشیده شده رو برمی‌داریم:

$R=[۱,+\infty)$

پ) هم‌دامنه، هر مجموعه‌ای است که شامل برد باشد پس مثلاً $[۰,+\infty)$ یا $\mathbb{R}$ می‌توانند هم‌دامنه باشند.

۶- متوسط

برای تشخیص ضابطهٔ تابع بیا چند مقدار از تابع رو ببینیم:

t	۵	۱۰	۱۵	۲۰
h	۱	۲	۳	۴

با مقایسهٔ مقادیر h (فاصلهٔ طی شده) با زمان t متوجه می‌شویم که مقادیر h، از تقسیم t بر ۵ به دست می‌آیند مثلاً: $۱۵\div ۵=۳$

بنابراین می‌توان نوشت:

$h(t)=\dfrac{t}{۵}$

که واحد t ثانیه و واحد h، کیلومتر است.

اگر $t\in[۲,۱۰]$، چون تابع h خطی هست برای محاسبهٔ برد کافیه ابتدا و انتهای دامنه رو در h جاگذاری کنیم:

$h(۲)=\dfrac{۲}{۵}=۰/۴\ \text{km}$

$h(۱۰)=\dfrac{۱۰}{۵}=۲\ \text{km}$

پس برد به صورت $[۰/۴,۲]$ است.

۷- متوسط

دو تابع f و g رو مساوی می‌نامیم اگر هر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $D_f=D_g$

۲) $\forall x\in D_f(=D_g): f(x)=g(x)$

شرط اول می‌گه دامنه‌ها برابر باشند، شرط دوم می‌گه به ازای xهای متعلق به دامنهٔ مشترک مقدار f و g (بُرد) مساوی باشند.

آ) $D_f=\dfrac{x-۱}{x+۳}\geq ۰ \Rightarrow D_f=(-\infty,-۳)\cup[۱,+\infty)$

$D_g=x-۱\geq۰ \Rightarrow x\geq۱ \cap x+۳>۰ \Rightarrow x\geq -۳$

$\Rightarrow D_g=[۱,+\infty)$

شرط اول برقرار نیست پس f و g مساوی نیستند (و دیگه لازم نیست شرط دوم رو چک کنیم)

ب) $D_f:(x=۴)\cup(x\neq۴)=\mathbb{R}$

$D_g=\mathbb{R}$

پس شرط اول برقرار هست. ✓

توی این قسمت، چون تابع f دو ضابطه‌ای هست پس هر دو بازه رو جداگانه درنظر می‌گیریم:

$x\neq۴ \Rightarrow f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱۶}{x-۴}=\dfrac{\cancel{(x-۴)}(x+۴)}{\cancel{x-۴}}=x+۴=g(x)$

$x=۴ \Rightarrow f(۴)=۲\ ,\ g(۴)=۴+۴=۸$

پس به ازای $x=۴$ مقدار f و g مساوی نیستند پس توابع f و g مساوی نیستند.

پ) $\left.\begin{array}{l} D_f=\mathbb{R}(\text{زیر رادیکال همواره مثبت و مخرج همواره مخالف صفر}) \\ D_g=\mathbb{R}(\text{زیر رادیکال همواره مثبت}) \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=D_g$ ✓

$f(x)=\dfrac{x^{۲}}{۲+\sqrt{۴+x^{۲}}}\times\dfrac{\sqrt{۴+x^{۲}}-۲}{\sqrt{۴+x^{۲}}-۲}=\dfrac{x^{۲}(\sqrt{۴+x^{۲}}-۲)}{۴+x^{۲}-۴}$

$=\sqrt{۴+x^{۲}}-۲=g(x)$

پس f و g مساویند.

ت) $\left.\begin{array}{l} D_f=\mathbb{R}(\text{مخرج مخالف صفر}) \\ D_g=\mathbb{R}\quad(\text{چند جمله ای}) \end{array}\right\} \Rightarrow D_f=D_g$

$f(x)=\dfrac{۵x^{۲}-۱۰}{۵}=\dfrac{۵(x^{۲}-۲)}{۵}=x^{۲}-۲=g(x)$

ضابطهٔ دو تابع هم مساوی هستند پس هر دو شرط برقرار است و بنابراین توابع f و g مساویند.

ث) $D_f=x^{۲}-۲x\geq۰ \Rightarrow x(x-۲)\geq۰ \Rightarrow$

	۰		۲	
$+$	۰	$-$	۰	$+$

$\Rightarrow D_f=(-\infty,۰]\cup(۲,+\infty)$

$D_g=x\geq۰\cap x-۲\geq۰ \Rightarrow x\geq۲ \Rightarrow D_g=[۲,+\infty)$

دامنهٔ f و g مساوی نیستند پس توابع f و g مساوی نیستند.

۸- آسان

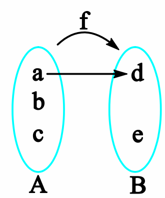
دو تابع f و g دارای دامنهٔ برابر هستند پس درصورتی مساوی می‌شوند که مقادیر f و g به ازای $x \in \mathbb{R}$ نیز مساوی شود:

$$x \neq 1 \Rightarrow g(x) = f(x)$$

$$x = 1 \Rightarrow g(1) = f(1) \Rightarrow -a + 3 = 1 + 1 \Rightarrow -a = -1 \Rightarrow a = 1$$

۹- دشوار

می‌دونیم رابطه‌ای تابع هست که به ازای هر مقدار x، فقط یک مقدار برای y داشته باشیم پس طبق نمودار روبه‌رو، از a می‌تونیم فقط به یکی از اعضای B پیکان وصل کنیم و بنابراین دو انتخاب برای a وجود داره.



به همین ترتیب برای b و c هم دو انتخاب وجود داره (محدودیت ورود پیکان نداریم)

پس $2 \times 2 \times 2$ یعنی 2^3 تابع مختلف و غیرتهی از A به B وجود دارد.

به طور کلی اگر A دارای n عضو و B دارای m عضو باشد تعداد توابع ناتهی از A به B برابر m^n است. توابع این سوال رو ببینیم:

۱) $f = \{(a, e)(b, e)(c, e)\}$

۲) $f = \{(a, e)(b, e)(c, d)\}$

۳) $f = \{(a, e)(b, d)(c, e)\}$

۴) $f = \{(a, e)(b, d)(c, d)\}$

۵) $f = \{(a, d)(b, d)(c, d)\}$

۶) $f = \{(a, d)(b, d)(c, e)\}$

۷) $f = \{(a, d)(b, e)(c, d)\}$

۸) $f = \{(a, d)(b, e)(c, e)\}$

به ترتیب نوشتن زوج مرتب‌ها دقت کن!

۱۰- دشوار

آ) $D = [-4, +\infty) \Rightarrow x \geq -4$

ب) $0 \leq x \leq 3 \Rightarrow$ f ثابت

پ) $\forall x > 3 \; ; \; f(x) = x^2$

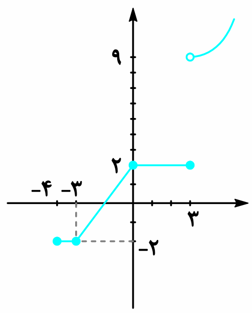
ت) $-3 \leq x < 0 \Rightarrow f(x) = ax + b$

ث) $\underbrace{f(3) = 2}_{\text{تابع ثابت}=2}, f(-3) = -2$

$$\begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow y = ax + 2$$

$$\begin{vmatrix} -3 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow a = +\frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -2 & -4 \leq x < -3 \\ \frac{4}{3}x + 2 & -3 \leq x < 0 \\ 2 & 0 \leq x \leq 3 \\ x^2 & x > 3 \end{cases}$$



پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۱

۱- گزینه «۱» آسان

گفتیم چندضابطه‌ای‌ها درصورتی تابع‌اند که مقدار هر ضابطه به ازای xهای یکسان یکی باشه پس

$$x = 0 \Rightarrow -2b = -a \Rightarrow 2b = a$$

$$x = 2 \Rightarrow 8 - a = 1 \Rightarrow 8 - 1 = a \Rightarrow a = 7 \Rightarrow 2b = 7 \Rightarrow b = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{7}{\frac{7}{2}} = 2$$

۲- گزینه «۱» متوسط

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+2} & x \leq -1 \cup x \geq 1 \\ \dfrac{x^2 - ax + b}{x-2} & -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$x = -1 \Rightarrow \frac{-2}{3} = \frac{1 + a + b}{3} \Rightarrow a + b + 1 = 2$$

$$\Rightarrow a + b = 1$$

$$x = 1 \Rightarrow 0 = \frac{1 - a + b}{-1} \Rightarrow 1 - a + b = 0 \Rightarrow -a + b = -1$$

پس از حل دستگاه داریم $a = 1, b = 0$ پس $ab = 0$

۳- گزینه «۲» — متوسط

همون‌طوری که می‌دونی در زوج مرتب اگر مولفه‌های اول برابـر باشـند، الزاماً باید مولفه‌های دوم هم یکسان باشند پس:

$$\begin{cases}(۳, m^۲)\\(۳, m+۲)\end{cases} \Rightarrow m^۲ = m+۲ \Rightarrow m^۲ - m - ۲ = ۰ \Rightarrow m = -۱, ۲$$

چون در مولفه‌های اول m داریم پس جاگذاری می‌کنیم:

$$m=-۱ \Rightarrow f = \{(۳,۱)(۲,۱)(-۲,-۱)(-۱,۴)\}$$

این رابطه تابع هست پس $m=-۱$ قابل قبول است و گزینهٔ ۲ درست اسـت.

اما چرا $m=۲$ جواب نیست؟

$$m=۲ \Rightarrow f = \{(۳,۴)(۲,۱)(-۲,۲)(۲,۴)\}$$

برای $x=۲$ دو مقدار برای y داریم پس f تابع نمی‌شود.

۴- گزینه «۲» — دشوار

$$x=-۱ \Rightarrow ۱+a = \frac{-۱+۳}{۱} \Rightarrow ۱+a=۲ \Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} x^۲+۱ & x \geq -۱ \\ \dfrac{x^۳-۳x}{x+۲} & x \leq -۱ \end{cases}$$

برخورد با محور x یعنی $y=۰$

$$f(x)=۰ \xrightarrow{(۱)} x \geq -۱$$

$x^۲+۱=۰ \Rightarrow$ جواب ندارد $\Rightarrow$ برخورد نداریم.

$$(۲)\ x \leq -۱ \Rightarrow \frac{x^۳-۳x}{x+۲} = ۰ \Rightarrow x(x^۲-۳)=۰$$

$$\Rightarrow x = ۰, -\sqrt{۳}, +\sqrt{۳}$$

با توجه به دامنه $(x \leq -۱)$، فقط $x=-\sqrt{۳}$ قابل قبول است.

۵- گزینه «۱» — متوسط

بررسی گزینه‌ها:

$$۱)\ \begin{cases} D_f : ۸x - x^۲ \geq ۰ \Rightarrow ۰ \leq x \leq ۸ \Rightarrow D_f = [۰,۸] \\ D_g : (x \geq ۰) \cap (۸-x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۸) \Rightarrow D_g = [۰,۸] \end{cases} \Rightarrow D_f = D_g$$

$g(x) = \sqrt{x}.\sqrt{۸-x} = \sqrt{x(۸-x)} = f(x) \Rightarrow$ f و g مساویند

$۲)\ D_f : -x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰ , D_g : -x^۳ \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰$

$g(x) = \sqrt{-x^۳} = \sqrt{-x^۲ \times x} = |x|\sqrt{-x} \neq f(x) \Rightarrow$ مساوی نیستند.

$۳)\ f(۴)=۳ , g(۴)=۸ \Rightarrow$ مساوی نیستند.

۴)

$\begin{matrix} D_f = (-\infty, ۳] \cup (۱, +\infty) \\ D_g = (۱, +\infty) \end{matrix} \Rightarrow D_f \neq D_g \Rightarrow$ مساوی نیستند.

۶- گزینه «۳» — دشوار

$$D_f = \mathbb{R} - \{۲\} \Rightarrow D_g = \mathbb{R} - \{۲\}$$

تابع کسری هست با مخرج درجه ۲ که با توجه به این کـه در دامنـهٔ آن فقـط یک عدد حذف شده پس عدد ۲ ریشهٔ مضاعف مخرج بوده و مخرج به صورت $k(x-۲)^۲$ هست. با مقایسهٔ مخرج با این عبارت $k=۱$ هست و

$$x^۲+bx+c = (x-۲)^۲ \Rightarrow x^۲+bx+c = x^۲-۴x+۴$$

$$\Rightarrow b=-۴, c=۴$$

$$\Rightarrow g(x) = \frac{x^۲-۴}{(x-۲)^۲} = \frac{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}{\cancel{(x-۲)}(x-۲)} = \frac{x+۲}{x-۲} = f(x)$$

$$\Rightarrow a=۲ \Rightarrow a+c = ۲+۴ = ۶$$

۷- گزینه «۱» — دشوار

$$x=۲ \Rightarrow f(۲)=g(۲) \Rightarrow b=۲+c$$

$$x \neq ۲ \Rightarrow \frac{x^۲-۵x+a}{x-۲} = x+c$$

$$\Rightarrow x^۲-۵x+a = x^۲+(c-۲)x-۲c$$

$$c-۲=-۵ \Rightarrow c=-۳$$

$$a=-۲c \Rightarrow a=۶$$

$$b=۲+(-۳)=-۱$$

$$abc = ۶\times(-۱)\times(-۳) = ۱۸$$

۸- گزینه «۴» — متوسط

$$D_f : -x > ۰ \Rightarrow x < ۰ \Rightarrow D_f = (-\infty, ۰)$$

پس گزینه‌های ۲ و ۳ رد هستن.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{-x}} \times \frac{\sqrt{-x}}{\sqrt{-x}} = \frac{\cancel{x}\sqrt{-x}}{-\cancel{x}} = -\sqrt{-x}$$

که البته با توجه به این که $f(-۱)=-۱$، تنها گزینهٔ ۴ درست هست.

۹- گزینه «۲» — متوسط

بررسی گزینه‌ها:

$۱)\ x=۰ \Rightarrow y^۲=۴ \Rightarrow y=\pm ۲$ تابع نیست

۲) y به صورت عبارتی برحسب x هست پس تابع است

زیرا به ازای هر مقدار x، فقط یک مقدار برای y به دست میاد

$۳)\ x=۱ \Rightarrow |y+۲|=۲ \Rightarrow y=۰,-۴ \Rightarrow$ تابع نیست

$۴)\ x=۱ \Rightarrow |y|=۱ \Rightarrow y=\pm ۱ \Rightarrow$ تابع نیست

۱۰- گزینه «۲» دشوار

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{x-x^۲} & D_f=[۰,۱] \\ g(x)=\sqrt{x}.\sqrt{۱-x} & D_g=[۰,۱] \end{cases} \text{و}\ f(x)=g(x)\Rightarrow$$ f و g مساوی

$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{|x|}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \\ g(x)=\frac{|x|}{x}=\begin{cases} ۱ & x>۰ \\ -۱ & x<۰ \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$ f و g مساوی

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{x-۲}} \Rightarrow D_f(-\infty,۱]\cup(۲,+\infty) \\ g(x)=\frac{\sqrt{x-۱}}{\sqrt{x-۲}} \Rightarrow D_g=(۲,+\infty) \end{cases} \Rightarrow$$ f و g نامساوی

$$\begin{cases} f(x)=x\sqrt{x^۲-۱} & D_f=(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)=D_g \\ g(x)=\sqrt{x^۴-x^۲} & g(x)=|x|\sqrt{x^۲-۱}\neq f(x) \end{cases} \Rightarrow$$ f و g نامساوی

۱۱- گزینه «۲» آسان

نمایشی قابل قبول است که دامنه همان $[۰,\frac{۱}{۳}]$ باشد و هم‌دامنه، شامل برد باشد و ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=x^۲$ حفظ شود پس

$$\begin{cases} f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^۲ \end{cases},\quad \begin{cases} f:[۰,\frac{۱}{۳}]\to[۰,+\infty) \\ f(x)=x^۲ \end{cases}$$ هر دو قابل قبولند.

۱۲- گزینه «۲» آسان

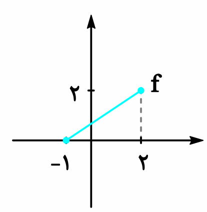
مجموعهٔ A دارای ۲ عضو و مجموعهٔ B دارای ۳ عضو است پس تعداد توابع از A به B برابر $۳^۲$ یعنی ۹ است.

۱۳- گزینه «۲» متوسط

آ) نادرست. مثال نقض:

$D_f=[-۱,۲]$

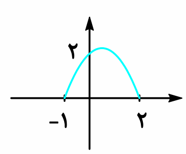
$R_f=[۰,۲]$



درحالی که $f\neq g$

$D_g=[-۱,۲]$

$R_g=[۰,۲]$



ب) درست است ـ ممکن است برد، همهٔ هم‌دامنه را شامل شود.

پ) نادرست ـ برد، زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

ت) درست

۱۴- گزینه «۳» متوسط

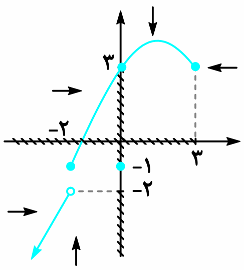
$D_f=D_g=\mathbb{R}$

$$g(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x^۲ & x<۰ \end{cases}$$

به ازای $x\geq ۰$ برابرند ولی درحالت کلی با وجود برابری دامنه‌ها، برابر نیستند پس گزینهٔ ۳ تنها گزینهٔ درست است.

۱۵- گزینه «۴» دشوار

یه روش باحال بهت یاد بدم؟! وقتی می‌خوای دامنه تعیین کنی فرض کن چراغ قوه‌ای رو برداشتی و از پشت نمودار و به سمت محور x (موازی محور y) نور می‌تابونی، هرجا روی محور x سایه افتاد دامنه است. همین اتفاق از سمت چپ و راست روی محور y برد رو نشون می‌ده.



$D_f=(-\infty,۳]$

$R_f=(-\infty,-۲)\cup[-۱,۳]$

۱۶- گزینه «۱» آسان

$M(۳۸)=۲/۸۹(۳۸)+۷۰/۶۴=۱۸۰/۴۶$

۱۷- گزینه «۲» متوسط

تابع f همانی است یعنی هر عددی بهش بدی «همان» را برمی‌گرداند.

$f(x)=x$

$g(x)=k$ (عدد ثابت k)

$f^۲(۳)+۴g(۵)=\frac{۱}{۲}f(۲) \Rightarrow ۳^۲+۴k=\frac{۱}{۲}\times ۲$

$\Rightarrow ۹+۴k=۱ \Rightarrow ۴k=-۸ \Rightarrow k=-۲$

$\Rightarrow g(x)=-۲$

$g(۲۰۵)=-۲$

۱۸- گزینه «۱» آسان

$f(x)=x \Rightarrow (a-۲b)x+۲b+a=x$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-۲b=۱ & (\text{ضریب } x) \\ ۲b+a=۰ & (\text{عدد ثابت}) \end{cases}$$

$۲a=۱ \Rightarrow a=\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$

$af(۳)-۲b=\frac{۱}{۲}(۳)-۲(-\frac{۱}{۴})=\frac{۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=۲$

۱۹ـ گزینه «۳» — آسان

$$x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow f(-\frac{۱}{۲})=g(-\frac{۱}{۲})$$

$$\Rightarrow ۲(-\frac{۱}{۲})-۱=۱-k \Rightarrow -۲=۱-k \Rightarrow k=۱+۲=۳$$

۲۰ـ گزینه «۳» — آسان

همون‌طوری که از دامنه مشخص هست، دامنه تنها ۳ عضو داره پس تابع هم به صورت سه نقطه هست پس گزینه‌های ۱ و ۲ رد میشن. اگر f رو به زبان ریاضی بنویسیم:

$$f(x)=\frac{x}{۲}+۳$$

$$f(-۱)=-\frac{۱}{۲}+۳=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

$$f(۰)=۳$$

$$f(۳)=\frac{۳}{۲}+۳=\frac{۹}{۲}=۴/۵$$

که در گزینه ۳ درست رسم شده است.

۲۱ـ گزینه «۳» — متوسط

وحیده در کل $x+۱۰$ پرتاب انجام داده که $x+۷$ از آنها گل شده است پس تابع عملکرد او به صورت $f(x)=\frac{۷+x}{۱۰+x}$ است.

۲۲ـ گزینه «۱» — متوسط

مخرج کسر تابع، درجه دوم است اما یک عدد از دامنه خارج شده پس $x=۱$ ریشه مضاعف مخرج است و می‌توان مخرج را به صورت زیر نوشت:

$$x^۲+bx+c=(x-۱)^۲=x^۲-۲x+۱$$

$$\Rightarrow b=-۲, c=۱$$

۲۳ـ گزینه «۲» — دشوار

$$\frac{-۲x^۲+ax+b}{x^۲+۳}\ge ۰$$

می‌دونیم اگر $x^۲+۳>۰$ پس کافیه صورت نامنفی باشه:

$$-۲x^۲+ax+b\ge ۰$$

بازه جواب $[-۳,۴]$ هست پس ریشه‌ها، ۳- و ۴ هستند.

مجموع ریشه‌ها $s=۱ \Rightarrow \frac{-a}{-۲}=۱ \Rightarrow a=۲$

ضرب ریشه‌ها $p=-۱۲ \Rightarrow \frac{-b}{۲}=-۱۲ \Rightarrow b=۲۴$

$$\Rightarrow a+b=۲۶$$

۲۴ـ گزینه «۳» — متوسط

$$y=\frac{\sqrt{x}+۱}{x\sqrt{x}+۱}$$

دامنه صورت و مخرج رو جداگانه حساب می‌کنیم و سپس اشتراک می‌گیریم:

صورت: $x\ge ۰ \quad (۱)$

$$\text{مخرج}:\begin{cases} x\ge ۰ & (۲)\\ x\sqrt{x}+۱\ne ۰ \Rightarrow x\sqrt{x}\ne -۱ \Rightarrow x^۳\ne -۱ \Rightarrow x\ne -۱ & (۳)\end{cases}$$

از اشتراک این سه مجموعه داریم $x\ge ۰$ یعنی:

$$D=[۰,+\infty)$$

۲۵ـ گزینه «۴» — آسان

$$x+۲\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۲$$

$$x+۳\ge ۰ \Rightarrow x\ge -۳$$

$$\sqrt{x+۲}\ge\sqrt{x+۳} \xrightarrow[\text{توان ۲}]{\text{طرفین به}} x+۲\ge x+۳ \Rightarrow ۲\ge ۳ (\text{غ ق ق}) \Rightarrow \varnothing$$

از اشتراک سه قسمت خواهیم داشت: $\varnothing$

۲۶ـ گزینه «۲» — متوسط

$$x(x-۱)=۰ \Rightarrow x=۰, x=۱$$

$x^۲+۹=۰ \Rightarrow x^۲=-۹$ جواب ندارد

$$\frac{x+۴}{x-۲}=۰ \Rightarrow x=-۴$$

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

درنتیجه $D=\mathbb{R}-\{۰,۱,-۴,۲\}$ است و بنابراین A شامل ۴ عضو است.

۲۷ـ گزینه «۳» — متوسط

اگر عبارت زیر رادیکال همواره نامنفی باشد دامنه آن $\mathbb{R}$ خواهد بود پس

$$(۲a-۳)x^۲+۴ax+۲a-۳$$

شرط همواره نامنفی $a>۰, \Delta<۰$ است پس:

$$۲a-۳>۰ \Rightarrow a>\frac{۳}{۲}$$

$$b^۲-۴ac<۰ \Rightarrow ۱۶a^۲-۴(۲a-۳)^۲<۰ \Rightarrow ۱۶a^۲<۴(۲a-۳)^۲$$

$$\Rightarrow ۴a^۲<(۲a-۳)^۲$$

از طرفین جذر بگیریم:

$$|۲a|<|۲a-۳| \Rightarrow \underbrace{-۲a+۳<۲a}_{۳<۴a}\underbrace{<۲a-۳}_{۰<-۳}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۴}<a\cap\varnothing \Rightarrow \varnothing$$

۲۸- گزینه «۲» — آسان

چون دامنه دو عضو ۱ و ۱- را ندارد پس این دو ریشه‌های مخرج هستند.

$$(x-۱)(x+۱)=x^{۲}-۱\xrightarrow{\times ۲}۲x^{۲}-۲\Rightarrow a=۰\,,\,-۲b=-۲\Rightarrow b=۱$$

در نتیجه $۱x+۰$ جواب مسئله است.

۲۹- گزینه «۲» — متوسط

اگر دو تابع با یکدیگر برابر باشند آنگاه $f(x)=g(x)\,,\,D_f=D_g$ پس

$$D_f: x\neq ۴ \;\Rightarrow\; D_g: x\neq ۴$$

پس مخرج تابع g باید شامل یک ریشه ۴ باشد درنتیجه

$$(x-۴)^{۲}=x^{۲}-۸x+۱۶ \;\Rightarrow\; a=-۸\,,\,b=۱۶$$

همچنین اگر ضابطه‌ها یکسان نباشند پس

$$g(x)=\frac{۳(x+\frac{c}{۳})}{(x-۴)^{۲}}$$

صورت و مخرج با یکدیگر ساده شده‌اند پس $\frac{c}{۳}=-۴$ درنتیجه $c=-۱۲$

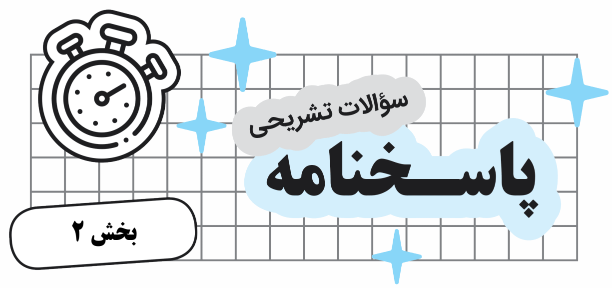
$$a+b+c=-۸+۱۶-۱۲=-۴$$

۳۰- گزینه «۲» — آسان

$$x=۰ \;\Rightarrow\; g(۰)=۳$$

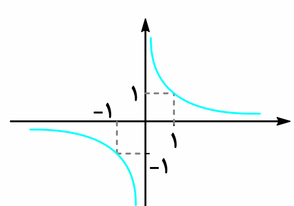
$$f(۰)=۲k+۵$$

$$۲k+۵=۳ \;\Rightarrow\; ۲k=-۲\Rightarrow\; k=-۱$$



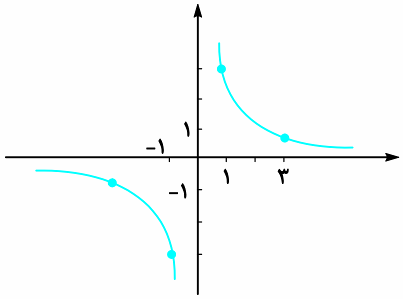
۱- — متوسط

آ) نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ که به نمودار پروانه‌ای معروف هست بـه ایـن صـورت رسم می‌شه:



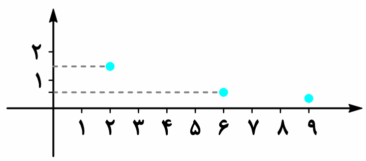
$$D=\mathbb{R}-\{۰\}\,,\,R=\mathbb{R}-\{۰\}$$

پس نمودار $y=\frac{۳}{x}$ در راستای عمودی کشیده می‌شه (۳ برابر)



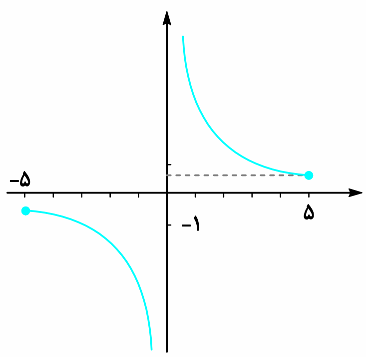
ب)

x	۲	۶	۹
$\frac{۳}{x}$	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$

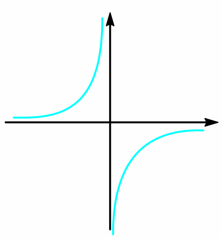


پ)

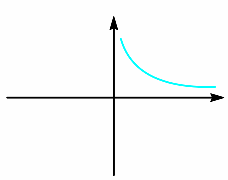
x	-۵	۵
$\frac{۳}{x}$	$-\frac{۳}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$



ت) $S(x)=-\frac{۳}{x}$ همون نمودار $y=\frac{۳}{x}$ هست که نسبت بـه محـور xهـا قرینه شده.



ث)



۲- — متوسط

دامنه صورت، کل اعداد حقیقی است و محدودیتی ایجاد نمی‌کند و $\mathbb{R}-\{۱,۲\}$ نشان می‌دهد که $x=۱$ و $x=۲$ ریشه‌های مخرج بوده‌اند و مخرج را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x-۱)(x-۲)=x^{۲}-ax+۲b$$

$$x^{۲}-۳x+۲=x^{۲}-ax+۲b$$

$$\Rightarrow a=۳\,,\,b=۱ \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{۳}{۱}=۳$$

۳- متوسط

مخرج کسر درجه ۲ است در حالی که فقط یک عضو از $\mathbb{R}$ حذف شده و معنی آن این است که a ریشهٔ مضاعف مخرج هست و مخرج به فرم اتحاد مربع است:

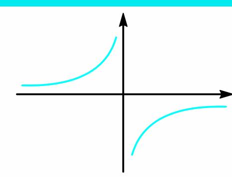
$$x^{۲}-۶x+b=(x-a)^{۲}$$

$$x^{۲}-۶x+b=x^{۲}-۲ax+a^{۲}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲a=-۶ \Rightarrow a=۳ \\ b=a^{۲} \Rightarrow b=۹ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x-۳}{(x-۳)^{۲}}=\frac{۱}{x-۳} \Rightarrow f(۴)=\frac{۱}{۴-۳}=۱$$

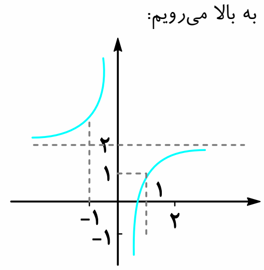
۴- دشوار



$y=\frac{۱}{x}$

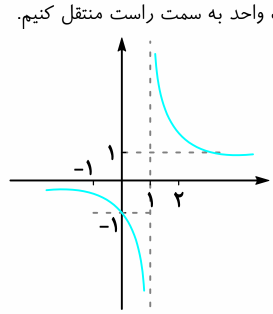
آ) $y=\frac{۲x-۱}{x}=۲-\frac{۱}{x}=-\frac{۱}{x}+۲$

ابتدا نسبت به محور x قرینه و سپس ۲ واحد به بالا می‌رویم:



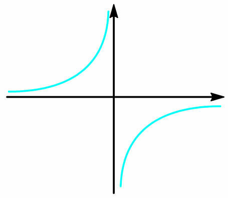
ب) $y=\frac{۱}{x-۱}, x>۱$

با توجه به انتقال تابع، کافیست به اندازه یک واحد به سمت راست منتقل کنیم.



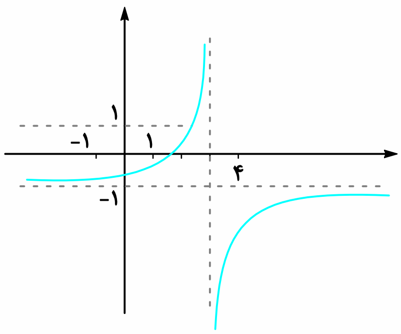
پ) $y=\frac{-۱}{x}$

یادت باشه که اگر نمودار $-f(x)$ را خواستی بکشی باید نمودار f رو نسبت به محور xها قرینه کنی:



ت) $y=\frac{-x+۲}{x-۳}=\frac{-(x-۲)}{x-۳}=-\frac{x-۳+۱}{x-۳}=-۱-\frac{۱}{x-۳}$

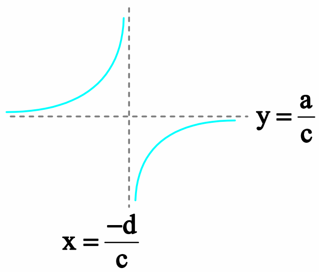
۳ واحد به سمت راست، قرینه نسبت به محور x، ۱ واحد به پایین.



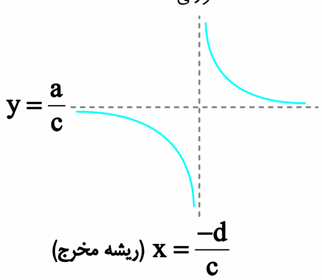
نکته مهم: توابعی به فرم $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ رو توابع هموگرافیک می‌نامیم.

نمودار این توابع از دو فرم زیر تبعیت می‌کنند:

۱) $ad-bc>۰ \Rightarrow$ صعودی



۲) $ad-bc<۰ \Rightarrow$ نزولی



۵- آسان

آ) x درصد آلودگی را نشان می‌دهد پس $x=٪۵۰$ یا $x=\frac{۱}{۲}$

$$f(\frac{۱}{۲})=\frac{۲۵۵(\frac{۱}{۲})}{۱۰۰-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{۲۵۵}{۲}}{\frac{۱۹۹}{۲}}=\frac{۲۵۵}{۱۹۹}=۱/۲۸ \text{ میلیون تومان}$$

ب) تابع به صورت کسری است پس دامنه به صورت $R-\{\text{ریشه مخرج}\}$ نوشته می‌شود.

$D=\mathbb{R}-\{۱۰۰\}$

۶- آسان

آ) در انتهای ماه پنجم $t=5$ است پس:

$$n(5)=\frac{9500(5)-2000}{4+t}=\frac{45500}{9}=5055/5$$

یعنی حدود ۵۰۵۵ نفر

ب) $n(t)=5500$ پس:

$$\frac{9500t-2000}{4+t}=5500$$

$$\Rightarrow 9500t-2000=22000+5500t$$

$4000t=2000 \Rightarrow t=5/5 \Rightarrow$ پس از ۵/۵ ماه

۷- دشوار

می‌دانیم رابطهٔ بین سرعت، زمان و فاصله از رابطهٔ $V=\frac{x}{t}$ به دست می‌آید

پس:

$$60=\frac{10}{t_1} \Rightarrow t_1=\frac{1}{6}, 100=\frac{x-10}{t_2} \Rightarrow t_2=\frac{x-10}{100}$$

اگر طول کل مسیر رو با x نشون بدیم:

$$V=\frac{x}{t_1+t_2}=\frac{x}{\frac{1}{6}+\frac{x-10}{100}}=\frac{x}{\frac{100+6x-60}{600}}=\frac{600x}{6x+40}$$

$$\Rightarrow V(x)=\frac{600x}{6x+40}$$

ب) $V(x)=90$ پس: $\frac{600x}{6x+40}=90$

$$\Rightarrow 600x=540x+3600 \Rightarrow 60x=3600 \Rightarrow x=60\,km$$

۸- متوسط

آ) $x^2-7x+10\neq 0 \Rightarrow (x-2)(x-5)\neq 0$

$$\Rightarrow x\neq 2,5 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{2,5\}$$

ب) $x^3-2x^2-3x+4\neq 0$

برای حل این نامساوی به دلیل این که درجه ۳ هست یکی از اعداد $1,-1,2,-2$ را به ترتیب جایگذاری می‌کنیم:

$$x=1 \Rightarrow 1-2-3+4=0$$

پس یکی از ریشه‌ها $x=1$ است برای یافتن بقیه از تقسیم کردن کمک می‌گیریم:

$$\begin{array}{r|l} \cancel{x^3}-2x^2-3x+4 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{-\cancel{x^3}\overset{+}{-}x^2} & x^2-x-4 \Rightarrow x^2-x-4\neq 0 \Rightarrow \Delta=17 \\ -\cancel{x^2}-3x & \\ \underline{+\cancel{x^2}\overset{-}{+}x} & \\ -4x+4 & \\ \underline{-4x+4} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{1,\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}\}$$

پ) مخرج $\neq 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)\neq 0 \to x\neq 1,-2$

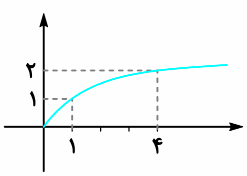
$$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{1,-2\}$$

ت) $x^2+1\neq 0 \Rightarrow x^2\neq -1$ همواره درست $\Rightarrow D=\mathbb{R}$

زیرا x^2+1 در مخرج کسر هیچ‌گاه صفر نمیشه و همواره مقدار مثبتی به ما می‌دهد.

۹- متوسط

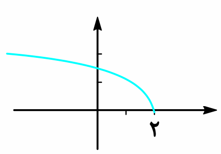
نمودار تابع رادیکالی $y=\sqrt{x}$ به صورت زیر هست که به «ابرو» معروفه!



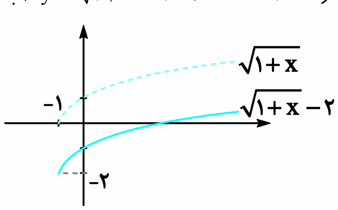
حالا واسه انتقال اول دقت کن ببین ریشهٔ داخل رادیکال چه عددی هست شروع نمودار از همون عدده.

بعد اگر ضریب x مثبت بود نمودار رو به سمت راست بکش و اگر ضریب x منفی بود، نمودار رو به سمت چپ بکش.

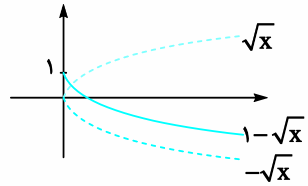
آ) $y=\sqrt{-x+2} \Rightarrow x=2$ ضریب x منفی و



ب) $y=\sqrt{1+x}-2 \Rightarrow x=-1$ به سمت راست



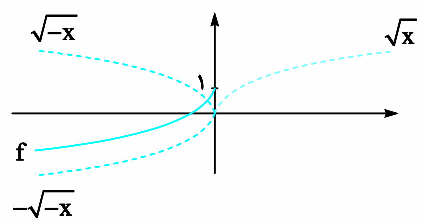
پ) نمودار $y=1-\sqrt{x}$



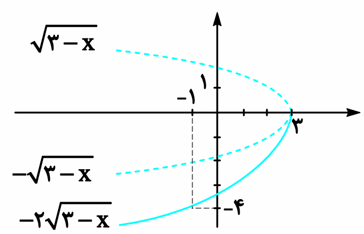
ت)

$$y=-\sqrt{-x}+1$$

قرینه نسبت به محور x ‏‏ قرینه نسبت به محور y



ث) نمودار $y=-2\sqrt{3-x}$



۱۰- متوسط

دامنه توابع رادیکالی، xهایی ست که زیر رادیکـال رو منفـی نکنـه پـس کافیـه عبارت زیر رادیکال رو بزرگ‌تر مساوی صفر بذاریم و نامعادله رو حل کنیم:

آ) $2x+6\geq 0 \Rightarrow 2x\geq -6 \Rightarrow x\geq -3 \Rightarrow D=[-3,+\infty)$

ب) $3x+1\geq 0 \Rightarrow 3x\geq -1 \Rightarrow x\geq -\frac{1}{3} \Rightarrow D=[-\frac{1}{3},+\infty)$

پ) $x\geq 0 \Rightarrow D=[0,+\infty)$

ت) $x<0 \Rightarrow 2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2 \xrightarrow{\cap} D_1=(-\infty,0)$

$x\geq 0 \Rightarrow D_2=[0,+\infty)$

$D=D_1\cup D_2=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

۱۱- دشوار

حواست هم به رادیکال‌ها باشه هم به مخرج کسر:

آ) $\begin{cases} x-1\geq 0 \Rightarrow x\geq 1 \\ x^2-64\neq 0 \Rightarrow x^2\neq 64 \Rightarrow x\neq \pm 8 \end{cases}$

$\xrightarrow{\cap} D=[1,+\infty)-\{8\}$

ب) صورت چند جمله‌ای است $\Rightarrow \mathbb{R}$

رادیکال‌های با فرجه فرد محدودیتی ایجاد نمی‌کنند و اون‌ها رو نادیده می‌گیریم.

مخرج: $|x|-5\neq 0 \Rightarrow |x|\neq 5 \Rightarrow x\neq \pm 5 \Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-5,+5\}$

پ) $\begin{cases} x-4\geq 0 \Rightarrow x\geq 4 \\ |x|-7\neq 0 \Rightarrow |x|\neq 7 \Rightarrow x+\pm 7 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D=[4,+\infty)-\{7\}$

۱۲- دشوار

آ) $x^2+3\geq 0$ همواره برقرار

$x+|x|\neq 0 \Rightarrow |x|\neq -x \Rightarrow x>0 \Rightarrow D=(0,+\infty)$

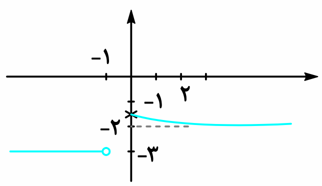
ب) $\begin{cases} 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \xrightarrow{\sqrt{}} |x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1 \\ |x|-x>0 \Rightarrow |x|>x \Rightarrow x<0 \end{cases}$

$\xrightarrow{\cap} D=[-1,0)$

پ) $\begin{cases} x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3 \\ 6-x>0 \Rightarrow x<6 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D=[3,6)$

۱۳- دشوار

$$f(x)=\begin{cases} -\sqrt{x+2} & x\geq 0 \\ -3 & x<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} & 0 & 2 \\ \hline & -\sqrt{2} & -2 \end{array}$$



$D=(-\infty,-1)\cup[0,+\infty)$

$\mathbb{R}=(-\infty,-\sqrt{2}]$

۱۴- متوسط

$\underset{x=1}{|x-1|}\,\underset{x=\pm 2}{(x^2-4)}\geq 0$

می‌دونیم قدرمطلق همواره مثبت هست فقط به ازای ریشهٔ عبارت داخلـی صـفر میشه.

x	−∞		−۲		۱		۲		+∞
|x−۱|		+		+	0	+		+	
x²−۴		+	0	−		−	0	+	
P		+	0	−	0	−	0	+	
		ج						ج	

$D=(-\infty,-2)\cup[2,+\infty)$

۱۵- دشوار

تو اینجور سوال‌ها اول بدون توجه به نمودار، دامنهٔ تابعی که داده رو مشخص کن، مثلا تو این سوال تابع رادیکالی داده پس:

$$-xf(x)\ge ۰$$

$$\Rightarrow\ xf(x)\le ۰\ \Rightarrow \begin{cases} ۱)\ \begin{cases} x\le ۰ \\ f\ge ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{ربع دوم} \\ ۲)\ \begin{cases} x\ge ۰ \\ f\le ۰ \end{cases} \Rightarrow \text{ربع چهارم} \end{cases}$$

پس دامنه یا xهایی رو مشخص می‌کنیم که در این دو ربع، نمودار داشته باشیم:

$$D=[-۴\,,-۲]\cup[۰\,,۴]$$

۱۶- متوسط

حواست باشه که ۳ تا رادیکال داریم:

$$۱)\ x+۳\ge ۰\ \Rightarrow\ x\ge -۳$$

$$۲)\ x+۲\ge ۰\ \Rightarrow\ x\ge -۲$$

$$۳)\ \sqrt{x+۳}-\sqrt{x+۲}\ge ۰\ \Rightarrow\ \sqrt{x+۳}\ge\sqrt{x+۲}$$

$$\xrightarrow{\text{توان ۲}}\ x+۳\ge x+۲\ \Rightarrow\ ۳\ge ۲\ \Rightarrow\ \text{همواره برقرار}$$

پس با اشتراک‌گیری داریم:

$$x\ge -۲$$

$$\Rightarrow\ D=[-۲\,,+\infty)$$

۱۷- دشوار

$$x^۲+|\underbrace{x+۲}_{x=-۲}|+۳x\ge ۰\ \Rightarrow$$

$$۱)\ x\ge -۲\ \Rightarrow\ x^۲+x+۲+۳x\ge ۰\ \Rightarrow\ x^۲+۴x+۲\ge ۰$$

$$\Delta=۸\ \Rightarrow\ x=\frac{-۴\pm\sqrt{۸}}{۲}=-۲\pm\sqrt{۲}\ \Rightarrow$$

$$x\le -۲-\sqrt{۲}\ \cup\ x\ge -۲+\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه ابتدایی}} D_۱=[-۲+\sqrt{۲}\,,+\infty)$$

$$۲)\ x<-۲\ \Rightarrow\ x^۲-x-۲+۳x\ge ۰\ \Rightarrow\ x^۲+۲x-۲\ge ۰$$

$$\Delta=۱۲\ \Rightarrow\ x=\frac{-۲\pm\sqrt{۱۲}}{۲}=-۱\pm\sqrt{۳}\ \Rightarrow$$

$$x\le -۱-\sqrt{۳}\cup x\ge -۱+\sqrt{۳}$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک با بازه ابتدایی}} D_۲=(-\infty\,,-۱-\sqrt{۳})$$

$$\Rightarrow\ D=D_۱\cup D_۲=(-\infty\,,-۱-\sqrt{۳})\cup[-۲+\sqrt{۲}\,,+\infty)$$

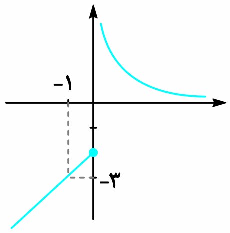
۱۸- متوسط

آ) $f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{x} & x>۰ \\ x-۲ & x\le ۰ \end{cases}$

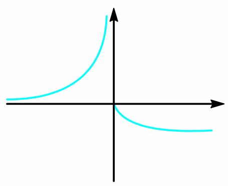
$$\begin{array}{c|cc} & ۰ & -۱ \\ \hline & -۲ & -۳ \end{array}$$

$$D=\mathbb{R}-\{۰\}$$

$$R=(-\infty\,,-۳]\cup(۰\,,+\infty)$$



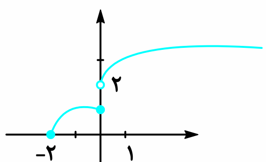
ب) $D=\mathbb{R}-\{۰\}$ و $R=\mathbb{R}-\{۰\}$



پ) $D=[-۲\,,+\infty)$

$$\begin{array}{c|cc} x & -۲ & ۰ \\ \hline \sqrt{x+۲} & ۰ & \sqrt{۲} \end{array}$$

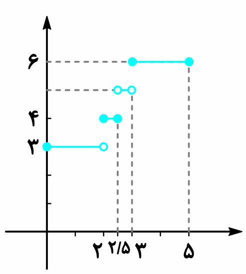
$$R=[۰\,,\sqrt{۲}]\cup(۲\,,+\infty)$$



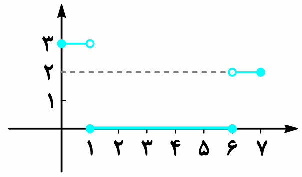
۱۹- آسان

آ) $f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰\le x<۲ \\ ۴ & ۲\le x\le ۲/۵ \\ ۵ & ۲/۵<x<۳ \\ ۶ & ۳\le x\le ۵ \end{cases}$

ب)



۲۰- آسان



۲۱- دشوار

برای رسم توابع براکتی (جزء صحیح) لازمه بازه رو طوری تقسیم‌بندی کنیم کـه عبارت داخل براکت به فاصلهٔ ۱ واحدی قرار بگیره.

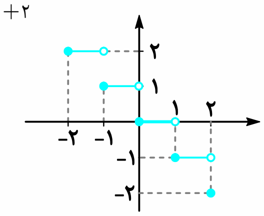
آ) $-2\le x<-1 \Rightarrow [x]=-2 \Rightarrow y=+2$

$-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=1$

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=0$

$1\le x<2 \Rightarrow [x]=1 \Rightarrow y=-1$

$x=2 \Rightarrow [2]=2 \Rightarrow y=-2$

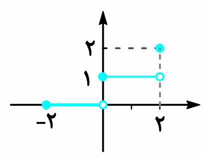


ب) داخل براکت $\frac{x}{2}$ هست پس بازه رو ۲ واحدی بگیـر (بـرعکس!) تـا $\frac{x}{2}$ در بازهٔ یک واحدی قرار بگیره.

$-2\le x<0 \Rightarrow -1\le \frac{x}{2}<0 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=-1 \Rightarrow y=0$

$0\le x<2 \Rightarrow 0\le \frac{x}{2}<1 \to [\frac{x}{2}]=0 \Rightarrow y=1$

$x=2 \Rightarrow y=1+[1]=2$



به رابطه بین طول پله‌ها و ضریب x داخل براکت دقت کن!

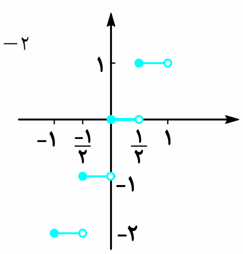
پ) تو این قسمت برعکس قسمت قبلی ضریب x داخل براکت ۲ هسـت پـس بازه‌ها رو نصف کن یعنی به فاصلهٔ $\frac{1}{2}$ در نظر بگیر (بازم برعکس!)

$-1\le x<\frac{-1}{2} \Rightarrow -2\le 2x<-1 \Rightarrow y=-2$

$-\frac{1}{2}\le x<0 \Rightarrow -1\le 2x<0 \Rightarrow y=-1$

$0\le x<\frac{1}{2} \Rightarrow 0\le 2x<1 \Rightarrow y=0$

$\frac{1}{2}\le x<1 \Rightarrow 1\le 2x<2 \Rightarrow y=1$



می‌بینی! ضریب x برابر ۲ بود اما طول پله‌ها نصف شده!

۲۲- دشوار

آ) $[-2,-1) \Rightarrow y=x+2$

x	-2	-1
$x+2$	0	1

$[-1,0) \Rightarrow y=x+1$

x	-1	0
$x+1$	0	1

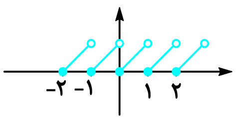
$[0,1) \Rightarrow y=x$

x	0	1
x	0	1

$[1,2) \Rightarrow y=x-1$

x	1	2
$x-1$	0	1

برای رسم پاره‌خط‌ها کافیه نقطه‌ای ابتدا و انتها رو جایگذاری کنی!



همونطوری که از نمودار پیداست برد این تابع $[0,1)$ هست و یادت باشه:

$0\le x-[x]<1$

ب) $y=x+[x] \quad [-2,2)$

$[-2,-1)\Rightarrow y=x-2$

x	-2	-1
$x-2$	-4	-3

$[-1,0) \Rightarrow y=x-1$

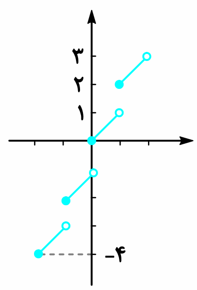
x	-1	0
$x-1$	-2	-1

$[0,1) \Rightarrow y=x$

x	0	1
x	0	1

$[1,2] \Rightarrow y=x+1$

x	1	2
$x+1$	2	3

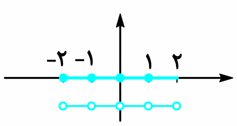


پ) $y=[x]+[-x] \quad [-2,2]$

از ویژگی‌های براکت می‌دونیم که:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

پس:



ت) $y=|x|+[x] \quad (-1,1)$

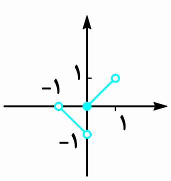
با توجه به این که قدر مطلق داریم پس به علامت بازه‌ها توجه کنیم:

$-1<x<0 \Rightarrow y=-x+(-1)=-x-1$

x	-1	0
$-x-1$	0	-1

$0\le x<1 \Rightarrow y=x+0=x$

x	0	1
x	0	1



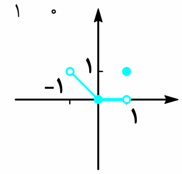
۲۳- دشوار

آ) $-1\le x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=-x$

x	-1	0
$-x$	1	0

$0\le x<1 \Rightarrow [x]=0 \Rightarrow y=0$

$x=1 \Rightarrow y=1[1]=1$

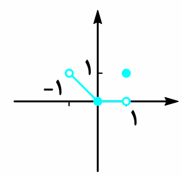


ب) چون تابع کسری هست اول دامنه رو تعیین کنیم:

$[x]\neq 0 \Rightarrow x\notin[0,1)$

$-1\le x\le 0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow y=\frac{x}{-1}=-x$

$x=1 \Rightarrow y=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow y=(1,1)$



یادت باشه:

$[x]=n \Rightarrow n\le x<n+1$

۲۴- متوسط

$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$

$=|x-2|+|x-3|$

حال به بازهٔ x دقت کنیم:

$[x]=2 \Rightarrow \underbrace{2\le x}_{x-2\ge 0}\underbrace{< \ 3}_{x-3<0}$

پس عبارت مساوی هست با:

$=\cancel{x}-2-\cancel{x}+3=1$

۲۵- دشوار

همونطور که از قسمت شماره ۲۳ توی نکته یاد گرفتیم:

$[3x+1]=x+4 \Rightarrow \underbrace{x+4\le 3x+1}_{1}<x+4+1$ ، $\underbrace{3x+1<x+4+1}_{2}$

۱) $x+4\le 3x+1 \Rightarrow 2x\ge 3 \Rightarrow x\ge \frac{3}{2}$

۲) $3x+1<x+5 \Rightarrow 2x<4 \Rightarrow x<2$

با اشتراک گرفتن بین بازه‌های بدست آمده مجموعه جواب به صورت $[\frac{3}{2},2)$ است.

۲۶- دشوار

اول به این نکتهٔ مهم توجه کن که تنها در صورتی می‌تونی یه عدد رو که داخل براکت جمع و تفریق شده رو از براکت بیرون بیاری که اون عدد صحیح باشه یعنی:

$[x+k]=[x]+k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

در غیر این صورت اجازهٔ خروج نداره!

$[x+\frac{5}{2}]+[x+\frac{1}{2}]=4 \Rightarrow [x+\frac{1}{2}+2]+[x+\frac{1}{2}]=4$

$\Rightarrow [x+\frac{1}{2}]+2+[x+\frac{1}{2}]=4 \Rightarrow 2[x+\frac{1}{2}]=2$

$\Rightarrow [x+\frac{1}{2}]=1 \Rightarrow 1\le x+\frac{1}{2}<2 \Rightarrow \frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ مجموع جواب $=[\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

۲۷- دشوار

با توجه به رادیکال درون مخرج کسر، عبارت زیر رادیکال باید فقط مثبت باشد

$[x]^2-3>0 \Rightarrow [x]^2>3 \Rightarrow [x]>\sqrt{3}$ یا $[x]<-\sqrt{3}$

$[x]>\sqrt{3} \Rightarrow [x]\ge 2 \Rightarrow x\ge 2$

$[x]<-\sqrt{3} \Rightarrow [x]\le -2 \Rightarrow x<-2+1 \Rightarrow x<-1$

$\Rightarrow$ مجموعه جواب $=(-\infty,-1)\cup[2,+\infty)$

یادت باشه: اگر $n\in\mathbb{Z}$

$[x]>n \Rightarrow x\ge n+1$

$[x]\ge n \Rightarrow x\ge n$

$[x]<n \Rightarrow x<n$

$[x]\le n \Rightarrow x<n+1$

۲۸- دشوار

یادت هست که $0\le x-[x]<1$ پس $0\le 2x-2[x]<2$ و برد تابع $f(x)$ به صورت $[0,2)$ است.

اما برای g داریم:

$0\le 2x-[2x]<1$

چون به طور کلی می‌تونیم بگیم:

$0\le$ ☺ $-[$☺$]<1$

پس:

$R_f=[0,2)$

$R_g=[0,1)$

۲۹- آسان

آ) می‌توان y را برحسب x محاسبه کرد پس تابع هست. ✓

ب) $x=1$ خطی قائم موازی محور y است پس تابع نیست. ✗

پ) $y=-2$ تابع ثابت است. ✓

ت) $0+3\neq 0-1$ پس تابع نیست. ✗

ث) اگر قرار دهیم $x=1$ آن‌گاه $y^2=1\ ,\ y=\pm 1$ پس تابع نیست. ✗

۳۰- دشوار

فرض کنیم $[x]=n$ پس:

$$n\le x<n+۱$$

هر سه طرف را با $k\in\mathbb{Z}$ جمع می‌کنیم:

$$\underbrace{n+k}\le\underbrace{x+k}<\underbrace{n+k}+۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$[x+k]=n+k$$

طبق فرض $n=[x]$ پس: $[x+k]=[x]+k$

سؤالات تستی
پاسخنامه
بخش ۲

۱- گزینه «۳» متوسط

$$f(x)=\frac{ax-۲}{x-a}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{a\}$$

اگر f یک تابع ثابت هست یعنی حاصل تقسیم صورت به مخرج یک عدد میشه

اگر از صورت a (ضریب x) رو فاکتور بگیریم:

$$f(x)=\frac{ax-۲}{x-a}=\frac{a(x-\frac{۲}{a})}{x-a}=a\Rightarrow x-\frac{۲}{a}=x-a$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{a}=a\Rightarrow a^۲=۲\Rightarrow a=\pm\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}f(x)=\sqrt{۲}\,,\,x\ne\sqrt{۲}\\ f(x)=-\sqrt{۲}\,,\,x\ne-\sqrt{۲}\end{cases}\Rightarrow \text{گزینه ۳}$$

۲- گزینه «۴» دشوار

مخرج کسر: $x^۲-۴\ne۰\Rightarrow x^۲\ne۴\Rightarrow x\ne\pm۲\quad(۱)$

مخرج کسر: $x^۲+۳x\ne۰\Rightarrow x(x+۳)\ne۰\Rightarrow x\ne۰,-۳\quad(۲)$

مخرج کسر: $۱+\frac{۲}{x^۲+۳x}\ne۰\Rightarrow\frac{۲}{x^۲+۳x}\ne-۱\Rightarrow x^۲+۳x\ne-۲$

$$\Rightarrow x^۲+۳x+۲\ne۰\xrightarrow{a+c=b}x\ne-۱,-۲\quad(۳)$$

باتوجه به شرط‌های ۱ تا ۳، این اعداد در دامنه قرار ندارند:

$$۰,-۳,\pm۲,-۱$$

$$D=\mathbb{R}-\{-۳,-۲,-۱,۰,۲\}$$

۳- گزینه «۳» متوسط

تابع کسری است، مخرج درجه ۲ است اما دامنه برابر $\mathbb{R}$ است معنی آن این است که مخرج فاقد ریشه است پس:

$a\ne۰$ (درجه ۲ باشد) $\rightarrow$ (اگر درجه ۱ باشد حتما ریشه دارد)

$$\Delta<۰\Rightarrow ۴-۴a(۵)<۰\Rightarrow ۴-۲۰a<۰$$

$$\Rightarrow ۴<۲۰a\Rightarrow a>\frac{۱}{۵}$$

۴- گزینه «۱» دشوار

سعی می‌کنیم تابع رو کمی ساده کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲-۲x-۳}{۲x^۲+۲x}=\frac{(x-۳)\cancel{(x+۱)}}{۲x\cancel{(x+۱)}}=\frac{x-۳}{۲x}$$

$$=\frac{x}{۲x}-\frac{۳}{۲x}=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۲x}$$

اگر به ضابطهٔ جدید توجه کنیم می‌بینیم که مقدار $\frac{۳}{۲x}$ از $\frac{۱}{۲}$ کم شده و هیچوقت صفر نمیشه (کسری که صورت صفر نباشه، صفر نمیشه!) پس مقدار y هیچوقت $\frac{۱}{۲}$ نمیشه پس: $R=\mathbb{R}-\{\frac{۱}{۲}\}$

۵- گزینه «۱» متوسط

$$D_f=\mathbb{R}-\{۱\}\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

پس مخرج کسر g دارای ریشه مضاعف $x=۱$ است و به فرم $(x-۱)^۲$ نوشته می‌شود:

$$x^۲-۲cx+۱=x^۲-۲x+۱$$

$$\Rightarrow ۲c=۲\Rightarrow c=۱$$

از طرفی ضابطه‌ها برابرند:

$$\frac{ax+b}{x^۲-۲x+۱}=\frac{۵}{x-۱}$$

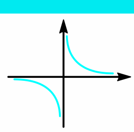
$$\Rightarrow ax^۲-ax+bx-b=۵x^۲-۱۰x+۵$$

$$\Rightarrow a=۵\,,-b=۵\Rightarrow b=-۵$$

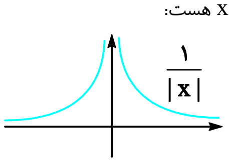
$$\Rightarrow a+b+c=۵+۱-۵=۱$$

۶- گزینه «۲» متوسط

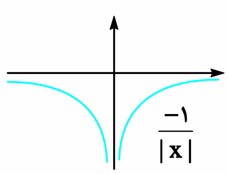
می‌دونی که نمودار $y=\frac{۱}{x}$ به صورت



هست برای رسم تابع $y=\frac{-۱}{|x|}$، باتوجه به اینکه x داخل قدرمطلق رفته باید بخش‌هایی از نمودار که زیر محور x هست رو به بالای محور x قرینه کنیم و سپس تاثیر ۱- در کل تابع، قرینه کردن کل نمودار نسبت به محور x هست:

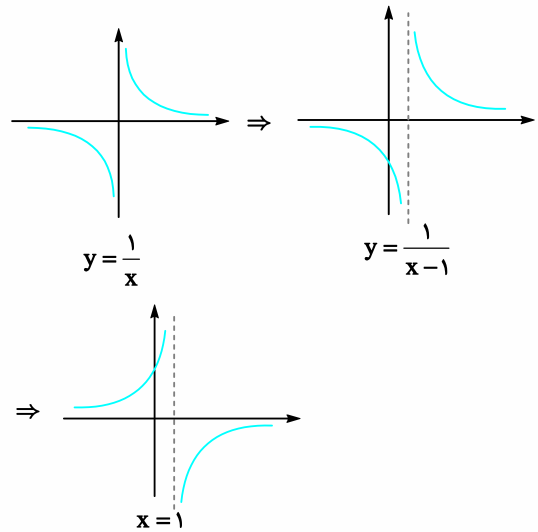


$\Rightarrow$



۷- گزینه «۱» — متوسط

اگر از انتقال استفاده کنیم، نمودار $\frac{۱}{x}$ به اندازه ۱ واحد به راست منتقل می‌شه، سپس نسبت به محور x، قرینه میشه.



۸- گزینه «۱» — دشوار

با توجه به وجود قدر مطلق در مخرج کسر دو بازهٔ متفاوت در نظر می‌گیریم:

$$۱)\ x\geq ۰ \Rightarrow |x|=x \Rightarrow x^۲-x-۲\neq ۰$$

$$\Rightarrow (x-۲)(x+۱)\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۱,۲ \xrightarrow{x\geq ۰} \text{فقط ۲ قابل قبول}$$

$$۲)\ x< ۰ \Rightarrow |x|=-x \Rightarrow x^۲+x-۲\neq ۰$$

$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\neq ۰ \Rightarrow x\neq -۲,۱ \xrightarrow{x<۰} \text{فقط (−۲) قابل قبول}$$

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\{-۲,+۲\}$$

۹- گزینه «۳» — آسان

باز همون داستان مخرج درجه ۲ و ریشه مضاعف:

$$x=-۱ \ \text{مضاعف} \Rightarrow x^۲+ax+b=(x+۱)^۲$$

$$\Rightarrow x^۲+ax+b=x^۲+۲x+۱$$

با مقایسه طرفین:

$$a=۲, b=۱ \Rightarrow a+b=۳$$

۱۰- گزینه «۳» — آسان

$$۲-|x-۳|\geq ۰ \Rightarrow ۲\geq |x-۳|$$

$$|x-۳|\leq ۲ \Rightarrow -۲\leq x-۳\leq ۲ \Rightarrow ۱\leq x\leq ۵$$

اعداد صحیح بازه $=۱,۲,۳,۴,۵$

یادت باشه:

$$|☺|\leq a \xrightarrow{a>۰} -a\leq ☺ \leq a$$

$$|☺|\geq a \xrightarrow{a>۰} ☺\leq -a \cup ☺\geq a$$

۱۱- گزینه «۳» — دشوار

دامنه تابع رادیکالی:

$$ax^۲-۳bx+c\geq ۰$$

نتیجه شده: $\{\frac{۳}{۲}\}$ یعنی این عبارت فقط به ازای $x=\frac{۳}{۲}$ تعریف شده هست و در بقیه اعداد تعریف نشده هستش.

خب پس یعنی $x=\frac{۳}{۲}$ ریشه هست و به ازای بقیه مقادیر عبارت منفی میشه پس میشه گفت به صورت: $k(x-\frac{۳}{۲})^۲$ هست که k منفی باشه.

$$-x^۲-۳bx+c=k(x-\frac{۳}{۲})^۲$$

$$=k(x^۲-۳x+\frac{۹}{۴})=kx^۲-۳kx+\frac{۹}{۴}k$$

مقایسه کنیم:

$$x^۲ \ \text{ضریب}: -۱=k$$

$$x \ \text{ضریب} -۳b=-۳k \Rightarrow b=-۱ \Rightarrow ۲b^۲+۴c=۲-۹=-۷$$

$$\text{عدد تنها}: c=\frac{۹}{۴}k \Rightarrow c=-\frac{۹}{۴}$$

۱۲- گزینه «۱» — دشوار

عبارت زیر رادیکال به ظاهر درجه ۲ هست اما دامنه به شکل بازهٔ $(۳,+\infty]$ است. می‌دونیم این بازه مربوط به عبارت‌ها و نامعادلات درجه اول هست زیرا مجموعه جواب نامعادله‌های درجه دوم یا $[a,b]$ یا $(-\infty,a]\cup[b,+\infty)$ هست پس $a=۰$ و داریم:

$$ax^۲+bx+۳c=bx+۳c\geq ۰$$

پس به صورت $b(x-۳)$ بوده.

$$bx+۳c=bx-۳b \Rightarrow b=-c \Rightarrow b+c=۰$$

$$\Rightarrow a+b+c=۰$$

۱۳- گزینه «۲» — متوسط

$$\text{رادیکال داخلی}: ۱-۳x\geq ۰ \Rightarrow ۱\geq ۳x \Rightarrow x\leq \frac{۱}{۳}$$

$$\text{رادیکال خارجی}: ۲-\sqrt{۱-۳x}\geq ۰$$

$$\Rightarrow ۲\geq \sqrt{۱-۳x} \xrightarrow{\text{توان ۲}} ۴\geq ۱-۳x$$

$$\Rightarrow ۳x\geq ۱-۴ \Rightarrow ۳x\geq -۳ \Rightarrow x\geq -۱$$

اشتراک این دو بازه:

$$D=[-۱,\frac{۱}{۳}]$$

اعداد صحیح بازه $=-۱,۰$

۱۴- گزینه «۴» متوسط

تابعی که دامنه‌ش رو می‌خواد به فرم رادیکالی هست پس:

$(۲x-۲)f(x)\geq ۰$ یا $(۲x-۲).y>۰$

و دو حالت ممکنه اتفاق بیافته:

$$۱)\ \begin{cases}۲x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۱\\ y\geq ۰\end{cases} \Rightarrow D_۱=[۲,+\infty)$$

یعنی به ازای سمت راست $x=۱$ نمودار بالای محور x باشه.

یا:

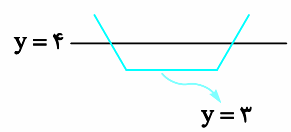
$$۲)\ \begin{cases}۲x-۲\leq ۰ \Rightarrow x\leq ۱\\ y\leq ۰\end{cases} \Rightarrow D_۲=[-۲,۱]$$

$$D_۱\cup D_۲=[-۲,۱]\cup[۲,+\infty)$$

۱۵- گزینه «۴» دشوار

$$|x+۱|+|x-۲|-۴\geq ۰ \Rightarrow |x+۱|+|x-۲|\geq ۴$$

از فصل قبل می‌دونیم نمودار تابع سمت چپ گلدانی هست و کف گلدان $y=|b-a|=|۲-(-۱)|=۳$ هست پس خط $y=۴$ بالاتر از کف گلدان قرار می‌گیره:



پس کافیه دو خط کناری رو با $y=۴$ برخورد بدیم:

$$۱)\ x<-۱ \Rightarrow -x-۱-x+۲\geq ۴ \Rightarrow -۲x\geq ۳ \Rightarrow x\geq -\frac{۳}{۲}$$ ق ق

$$۲)\ x>۲ \Rightarrow x+۱+x-۲\geq ۴ \Rightarrow ۲x\geq ۵ \Rightarrow x\geq \frac{۵}{۲}$$ ق ق

$$\Rightarrow D=\mathbb{R}-\underbrace{(-\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲})}_{\text{اعداد صحیح حذف شده}=-۱,۰,۱,۲}$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

$$|۲x-۱|<۱ \Rightarrow -۱<۲x-۱<۱ \Rightarrow ۰<۲x<۲$$

$$\Rightarrow ۰<x<۱ \Rightarrow [x]=۰$$

همچنین: $۰<x<۱ \Rightarrow ۰<x^۲<۱ \Rightarrow [x^۲]=۰$

$$\Rightarrow [x^۲]+[x]=۰$$

۱۷- گزینه «۲» آسان

$$f(x)=[x]$$

$$f(x-[x])=[x-[x]]$$

می‌دونیم که: $۰\leq x-[x]<۱$

پس: $[x-[x]]=۰$

۱۸- گزینه «۲» متوسط

می‌دونیم که:

$$[x]+[-x]=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$f([x]+[-x])=\begin{cases}f(۰) & x\in\mathbb{Z}\\ f(-۱) & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}[۰] & x\in\mathbb{Z}\\ [-۱] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}=\begin{cases}۰ & x\in\mathbb{Z}\\ -۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\mathbb{R}=\{-۱,۰\}$$

۱۹- گزینه «۲» دشوار

از اونجایی که می‌دونیم حاصل‌جمع دو براکت، عدد صحیح هست پس:

$$[x]+[۴x-\frac{۱}{۳}]\in\mathbb{Z} \Rightarrow ۸+x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

پس x عدد صحیح است و می‌تونه از جزء صحیح خارج بشه:

$$\Rightarrow \cancel{x}+۴x+[\underbrace{\frac{-۱}{۳}}_{-۱}]=۸+\cancel{x}$$

$$\Rightarrow ۴x=۹ \Rightarrow x=\frac{۹}{۴} \Rightarrow$$ یک جواب دارد.

۲۰- گزینه «۲» آسان

$$[x-\frac{۳}{۲}]+[x-\frac{۱}{۲}]=\frac{۱}{۲}$$

بدون حل معادله می توونیم بگیم این معادله هیچ جوابی نداره چون امکان نداره مجموع دو براکت برابر $\frac{۱}{۲}$ بشه.

۲۱- گزینه «۳» آسان

صورت چند جمله‌ای هست و محدودیتی برای x ایجاد نمی‌کنه پس:

$$[x]^۲-۴>۰ \Rightarrow [x]^۲>۴ \Rightarrow |[x]|>۲$$

$$\begin{cases}[x]>۲ \Rightarrow x\geq ۲\\ [x]<-۲ \Rightarrow x<-۲\end{cases} \Rightarrow D=(-\infty,-۲)\cup[۲,+\infty)$$

۲۲- گزینه «۳» آسان

$$y=[\frac{x}{۲}]$$

ضریب x داخل براکت $\frac{۱}{۲}$ است پس بازه‌ها را ۲ واحدی در نظر می‌گیریم:

$$-۲\leq x<۰$$

$$۰\leq x<۲$$

پس دو پله با طول ۲ واحد داریم:

مجموع طول‌ها $=۲+۲=۴$

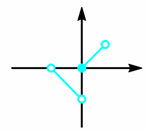
۲۳- گزینه «۴» — متوسط

$-1<x<0 \Rightarrow y=-x+[x]=-x-1$

x	-1	0
$-x-1$	0	-1

$0\le x<1 \Rightarrow y=x+[x]=x+0=x$

x	0	1
x	0	1



روش تستی: گزینه ۱ رد هست چون ۱− رو توپر کشیده درحالی که در بازه نیست.

گزینه ۲ رد هست چون $y(0)=0$

اگر $x=-\frac{1}{2}$ آن‌گاه $y=-\frac{1}{2}$ پس گزینه ۳ هم رد میشه.

۲۴- گزینه «۳» — دشوار

اول توجه کنیم چون $3x$ جلوی تابع جزء صحیح قرار گرفته پس $3x\in\mathbb{Z}$

$$[x]=3x \Rightarrow \underbrace{3x\le x}_{\substack{2x\le 0\\ x\le 0}} \underbrace{<3x+1}_{\substack{x<3x+1\\ -1<2x\\ -\frac{1}{2}<x}} \Rightarrow -\frac{1}{2}<x\le 0$$

$x=0 \Rightarrow [0]=3(0)$ ✓

$-\frac{1}{2}<x<0 \Rightarrow [x]=-1 \Rightarrow 3x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{3}$

پس معادله تنها دو جواب دارد.

۲۵- گزینه «۴» — متوسط

$1)\ 1-x^2\ge 0 \Rightarrow 1\ge x^2 \Rightarrow 1\ge |x|$

$-1\le x\le 1$

$2)\ [x]+[-x]\ne 0 \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

$\xrightarrow{1\cap 2} (-1,1)-\{0\}$

۲۶- گزینه «۱» — متوسط

$x-5\in\mathbb{Z} \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow 2x\,,3x\in\mathbb{Z}$

$2x+3x=x-5 \Rightarrow 4x=-5 \Rightarrow x=-\frac{5}{4} \Rightarrow$ غ ق ق

۲۷- گزینه «۲» — متوسط

x داخل جزء صحیح ضریب ۲ دارد پس بازه‌ها را به طول $\frac{1}{2}$ می‌گیریم:

$0\le x<\frac{1}{2}$

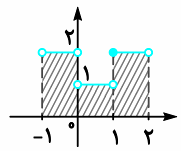
$\frac{1}{2}\le x<1$

$1\le x<\frac{3}{2}$

$\frac{3}{2}\le x<2$

پس ۴ پاره خط مساوی داریم.

۲۸- گزینه «۱» — آسان



$-1<x<0 \Rightarrow y=-(-1)+1=2$

$0<x<1 \Rightarrow y=1(0)+1=0 \qquad (x\ne 0)$

$1\le x<2 \Rightarrow y=1(1)+1=2$

$S=(1\times 2)+(1\times 1)+(1\times 2)=5$

۲۹- گزینه «۳» — آسان

$[-\frac{5}{3}]+[-\frac{10}{3}]+[-5]=[-1/6]+[-3/3]-5=-2-4-5=-11$

۳۰- گزینه «۳» — دشوار

بازه‌ها را ۰/۵ واحد در نظر می‌گیریم:

و چون ضریب x منفی هست

و نقاط تو خالی و توپر را جابجا می‌کنند $x=0\,,x=-\frac{1}{2}$ را هم جداگانه حساب می‌کنیم:

$x=-\frac{1}{2} \Rightarrow [-2(-\frac{1}{2})]=[1]=\boxed{1}$

$-\frac{1}{2}<x<0 \Rightarrow 0<-2x<1 \Rightarrow [-2x]=\boxed{0}$

$x=0 \Rightarrow [-2(0)]=0$

$0<x<\frac{1}{2} \Rightarrow -1<-2x<0 \Rightarrow [-2x]=\boxed{-1}$

$x=\frac{1}{2} \Rightarrow [-2(\frac{1}{2})]=[-1]=-1$

$\frac{1}{2}<x<1 \Rightarrow -2<-2x<-1 \Rightarrow [-2x]=\boxed{-2}$

پس ۴ مقدار متفاوت به دست می‌آید.

۳۱- گزینه «۴» — متوسط

$\frac{1}{2}\le x\le 1 \Rightarrow 1\le\frac{1}{x}\le 2$

$1)\ 1\le\frac{1}{x}<2 \Rightarrow [\frac{1}{x}]=1$

$2)\ \frac{1}{x}=2 \Rightarrow [2]=2$

۳۲- گزینه «۱» — آسان

$2\le -2x+\frac{1}{3}<3$

$\frac{5}{3}\le -2x<\frac{8}{3}$

$-\frac{4}{3}<x\le -\frac{5}{6}$

۳۳ـ گزینه «۲» — دشوار

$[x^۲+x]=-۱ \Rightarrow -۱\le x^۲+x<۰$

$۱)\ x^۲+x\ge -۱ \Rightarrow x^۲+x+۱\ge ۰$ همواره برقرار

زیرا $\Delta<۰, a>۰$ است پس $x\in\mathbb{R}$

$۲)\ x^۲+x<۰ \Rightarrow x(x+۱)<۰ \Rightarrow -۱<x<۰$

$\Rightarrow -۱<x<۰ \Rightarrow ۰<x^{۲۰}<۱ \Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$

۳۴ـ گزینه «۱» — آسان

$[x]+۱=۰ \Rightarrow [x]=-۱$

$\Rightarrow -۱\le x<۰ \Rightarrow D=\mathbb{R}-[-۱,۰)$

۳۵ـ گزینه «۳» — دشوار

$([x]-۲)(۳-[x])\ge ۰$

$$۱)\ \begin{cases}[x]-۲\ge ۰ \Rightarrow [x]\ge ۲ \Rightarrow x\ge ۲\\ ۳-[x]\ge ۰ \Rightarrow [x]\le ۳ \Rightarrow x<۴\end{cases} \Rightarrow [۲,۴)$$

$$۲)\ \begin{cases}[x]-۲\le ۰ \Rightarrow [x]\le ۲ \Rightarrow x<۳\\ ۳-[x]\le ۰ \Rightarrow [x]\ge ۳ \Rightarrow x\ge ۳\end{cases} \Rightarrow \varnothing$$

$D=[۲,۴)\cup\varnothing=[۲,۴)$

۳۶ـ گزینه «۲» — آسان

با امتحان کردن چند مقدار نمودار صحیح را انتخاب می‌کنیم.

$x=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=۰$

رد گزینه‌های (۱) و (۳) $\quad x=۰ \Rightarrow y=-۱$

$x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow y=-۲$

پس گزینه ۲ صحیح است.

۳۷ـ گزینه «۴» — آسان

می‌دانیم از داخل براکت اعداد صحیح از جمله $[x]$ را می‌توان بیرون آورد:

$=[x+[x]+[x]]-([x]+۲[x]+۳)$

$=۳[x]-۳[x]-۳=-۳$

۳۸ـ گزینه «۳» — دشوار

در حل این تست از دو خاصیت جزء صحیح استفاده می کنیم:

$۱)\ [x+k]=[x]+k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$۲)\ x=[x]+p \qquad ۰\le p<۱$

$g(x)=۲x-۳-[۲x-۳]-۲(x-[x])$

$=\cancel{۲x}\ \cancel{-۳}-[۲x]\cancel{+۳}\ \cancel{-۲x}+۲[x]=۲[x]-[۲x]$

می‌دانیم که اجازهٔ ورود یا خروج ضریب x رو نداریم:

$x=[x]+p \xrightarrow{\times ۲} ۲x=۲[x]+۲p$

$\Rightarrow g(x)=۲[x]-[\underbrace{۲[x]}_{\in\mathbb{Z}}+۲p]=\cancel{۲[x]}\ \cancel{-۲[x]}-[۲p]$

$=-[۲p] \xrightarrow{۰\le p<۱ \ \Rightarrow\ ۰\le ۲p<۲} [۲p]=۰,۱$

$\Rightarrow -[۲p]=۰,-۱$

$\Rightarrow R_g=\{-۱,۰\}$

۳۹ـ گزینه «۱» — دشوار

ابتدا به دامنه توجه کنیم:

$x-[x]-\frac{۳}{۴}\ge ۰ \Rightarrow x-[x]\ge\frac{۳}{۴}$

از قبل می‌دانیم $۰\le x-[x]<۱$ از اشتراک این دو بازه

$$\frac{۳}{۴}\le x-[x]<۱ \Rightarrow ۰\le x-[x]-\frac{۳}{۴}<\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\sqrt{\ }} ۰\le\sqrt{x-[x]-\frac{۳}{۴}}<\frac{۱}{۲}$$

۴۰ـ گزینه «۲» — آسان

طبق رابطه داده شده داریم:

$[(\sqrt{۲}+۱)^۶]=[۱۹۸-(\sqrt{۲}-۱)^۶]=۱۹۸+[-(\sqrt{۲}-۱)^۶]$

$۰<\sqrt{۲}-۱<۱ \Rightarrow ۰<(\sqrt{۲}-۱)^۶<۱ \Rightarrow -۱<-(\sqrt{۲}-۱)^۲<۰$

$\Rightarrow [-\sqrt{۲}-۱)^۶]=-۱$

$\Rightarrow$ حاصل ع بارت $=۱۹۸+(-۱)=۱۹۷$

۴۱ـ گزینه «۳» — متوسط

$[x^۲-۵x]=۱۰ \Rightarrow ۱۰\le x^۲-۵x<۱۱$

$[x^۲-۷x]=۱۰ \Rightarrow ۱۰\le x^۲-۷x<۱۱$

از جمع کردن سه طرف این نامعادلات با یکدیگر داریم:

$۲۰\le ۲x^۲-۱۲x<۲۲ \Rightarrow ۱۰\le x^۲-۶x<۱۱$

برای رسیدن به مربع کامل $(x-۳)^۲$ لازم است $(\frac{b}{۲})^۲$ رو به طـرفین اضـافه کنیم یعنی عدد ۹ رو:

$۱۹\le x^۲-۶x+۹\le ۲۰ \Rightarrow ۱۹\le(x-۳)^۲<۲۰$

طبق ویژگی براکت داریم:

$[(x-۳)^۲]=۱۹$

۴۲ـ گزینه «۲» — آسان

با تقسیم جملات بر ۳ داریم:

$[۲x]+[۲x+\frac{۱}{۳}]=\frac{۱۴}{۳}$

این معادله هیچ جوابی ندارد زیرا جمع دو جزء صحیح عددی غیر صحیح شـده است.

۴۳- گزینه «۲» — دشوار

$(x-2)$ زیر رادیکال است پس:

$$x-2\ge 0 \Rightarrow x\ge 2 \Rightarrow x-\sqrt{2}\ge 2-\sqrt{2}$$

$$\xrightarrow{\sqrt{2}\cong 1/4} x-\sqrt{2}\ge 0/6 \Rightarrow [x-\sqrt{2}]\ge 0$$

می‌دونیم که حاصل رادیکال همواره نامنفی هست و طبق نتیجه‌ای که گرفتیم براکت نیز نامنفیه. پس این معادله تنها در صورتی جواب دارد که هر دو همزمان صفر شوند:

$$\sqrt{x-2}=0 \Rightarrow x=2$$

$$[2-\sqrt{2}]=[0/6]=0$$

پس $x=2$ تنها جواب معادله است.

۴۴- گزینه «۳» — آسان

$$[x]\ne x \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$$

$$[-x+5]+[x-2]=[-x]+5+[x]-2$$

$$=[x]+[-x]+3$$

و می‌دونیم حاصل $[x]+[-x]$ به ازای $x\notin\mathbb{Z}$ برابر -1 هست پس:

$$=-1+3=2$$

۴۵- گزینه «۴» — دشوار

از اینکه $\frac{x}{7}$ در هر دو براکت وجود داره و با علامت قرینه هستن سعی در ساده کردن داخل براکت‌ها می‌کنیم:

$$\frac{x+9}{7}=\frac{x}{7}+\frac{9}{7}=\frac{x}{7}+\frac{2}{7}+1$$

$$\frac{12-x}{7}=\frac{12}{7}-\frac{x}{7}=\frac{14-2}{7}-\frac{x}{7}=2-\frac{2}{7}-\frac{x}{7}$$

$$[\frac{x+9}{7}]+[\frac{12-x}{7}]=3 \Rightarrow [\frac{x}{7}+\frac{2}{7}]+1+[-\frac{x}{7}-\frac{2}{7}]+2=3$$

$$\Rightarrow [\frac{x}{7}+\frac{2}{7}]+[-(\frac{x}{7}+\frac{2}{7})]=0$$

$$t=\frac{x}{7}+\frac{2}{7} \Rightarrow [t]+[-t]=0 \Rightarrow t\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{7}\in\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{x+2}{7}=k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow x=7k-2, k\in\mathbb{Z}$$

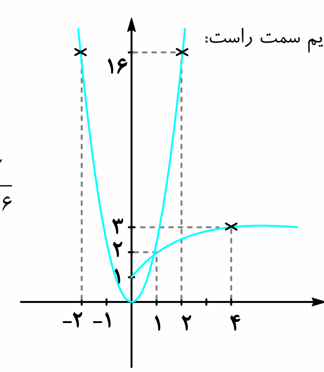
چون بی‌شمار k وجود دارد پس بی‌شمار جواب هم برای x وجود دارد.

۴۶- گزینه «۱» — متوسط

این معادله رو به کمک رسم حل می‌کنیم چون فقط تعداد ریشه خواسته و مقدار دقیق ریشه مدنظر نیست. پس x^4 رو یک طرف نگه داریم و بقیه رو ببریم سمت راست:

$$\underbrace{x^4}_{f(x)}=\underbrace{\sqrt{x}+1}_{g(x)}$$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	16	1	0	1	16



x	0	1	4
f(x)	1	2	3

همان طور که از نمودار پیداست، دوتا تابع f , g تنها در یک نقطه تقاطع دارند پس معادله فقط یک جواب دارد.

۴۷- گزینه «۱» — متوسط

$$x^3=[x]+[26-x]$$

۲۶ عدد صحیح است پس می‌تواند از جزء صحیح خارج شود.

$$x^3=[x]+[-x]+26$$

$$1)\ x\in\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=0 \Rightarrow x^3=26 \Rightarrow x=\sqrt[3]{26}$$

اما $\sqrt[3]{26}\notin\mathbb{Z}$ پس غیرقابل قبول است.

$$2)\ x\notin\mathbb{Z} \Rightarrow [x]+[-x]=-1 \Rightarrow x^3=-1+26=25 \Rightarrow x=\sqrt[3]{25}$$

$\sqrt[3]{25}\notin\mathbb{Z}$ پس در بازه قرار دارد و قابل قبول است.

۴۸- گزینه «۲» — آسان

ضریب x داخل پرانتز $\frac{1}{2}$ است پس بازه‌ها را به فاصلهٔ ۲ واحد در نظر می‌گیریم:

$[-2,0)$

$[0,2)$

$[2,4)$

$[4,6)$

پس نمودار از ۴ پاره‌خط مساوی تشکیل شده.

۴۹- گزینه «۲» — دشوار

x برابر با مجموع سه عدد صحیح شده است پس $x\in\mathbb{Z}$ و بنابراین پس: $2x^2-x\in\mathbb{Z}, 2x^2\in\mathbb{Z}$

$$2x^2-x-x+\underbrace{[\frac{\sqrt{3}}{5}]}_{[0/34]=0}+1=x$$

$$\Rightarrow 2x^2-3x+1=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \\ x=\frac{c}{a}=\frac{1}{2}\ \text{غ ق ق}\ (x\in\mathbb{Z}) \end{cases}$$

پس تنها جواب معادله $x=1$ است.

۵۰- گزینه «۲» متوسط

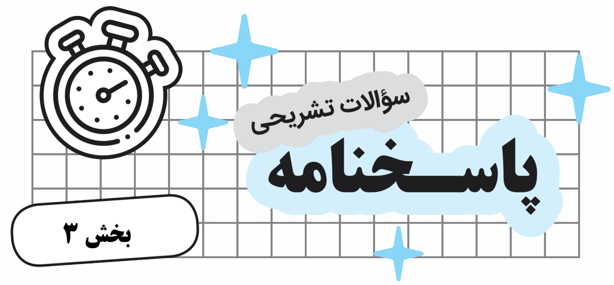
$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$1)\ x\in\mathbb{Z}\Rightarrow \frac{-9+x}{4x^2+4x}=0\Rightarrow -9+x=0\Rightarrow x=9\ \text{ق ق}$$

$$2)\ x\notin\mathbb{Z}\Rightarrow \frac{-9+x}{4x^2+4x}=-1\Rightarrow 4x^2+4x=9-x$$

$$\Rightarrow 4x^2+5x-9=0$$

$$\xrightarrow{a+b+c=0} x=1\,(\text{غ ق ق}),\ -\frac{9}{4}\,(\text{ق ق})\Rightarrow x=-\frac{9}{4}$$



۱- آسان

حواستون باشه‌ها! تعریف یک‌به‌یک بودن از لحاظ زوج مرتب: یا y برابر نداشته باشیم یا اگر y برابر داشتیم xها نیز برابر باشند.

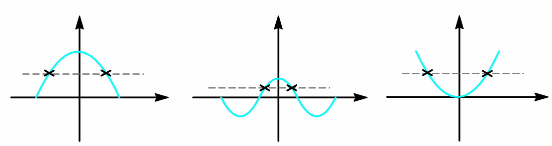
تعریف یک‌به یک از لحاظ شکل: خطوط موازی محور xها شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

تعریف یک‌به یک‌بودن از لحاظ ضابطه:

$$y_1=y_2\Rightarrow x_1=x_2$$

آ) یک‌به‌یک نیست چون $y=4$ دارای دو x متفاوت $x=7, x=3$ است.

«ب، پ و ج» یک به یک نیستند چون



«خ» یک به‌یک است چون کدملی تنها می‌تواند مربوط به یک فرد باشد.

«ت» یک‌به‌یک است چون هر خط موازی محور xها تنها در یک نقطه آن را قطع می‌کند.

$$\text{ج})\ y=x^2-2x+3\Rightarrow y=x^2-2x+1+2\Rightarrow y=(x-1)^2+2$$

$$y_1=y_2\Rightarrow (x_1-1)^2+2=(x_2-1)^2+2\Rightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2$$

$\Rightarrow |x_1-1|=|x_2-1|$ یک‌به‌یک نیست

$$\text{چ})\ y=x-3\rightarrow y_1=y_2\Rightarrow x_1-3=x_2-3\Rightarrow x_1=x_2$$

یک‌به‌یک است

$$\text{ح})\ y=\frac{x-1}{x-2}\Rightarrow y_1=y_2\Rightarrow \frac{x_1-1}{x_1-2}=\frac{x_2-1}{x_2-2}\xrightarrow{\text{طرفین وسطین}}$$

$$\cancel{x_1x_2}-2x_1-x_2+\cancel{2}=\cancel{x_1x_2}-x_1-2x_2+\cancel{2}$$

$$-x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

یک‌به‌یک است.

حواستون باشه‌ها! توابع سهمی و قدرمطلق به طور کلی یک‌به‌یک نیستند.

همچنین توابع خطی و هموگرافیک و رادیکالی به طور کلی یک‌به‌یک هستند.

۲- آسان

حواستون باشه‌ها! رابطه‌ها زمانی تابع یک‌به‌یک هستند که

تعریف تابع: $x_1=x_2\Rightarrow y_1=y_2$

تعریف یک به یک: $y_1=y_2\Rightarrow x_1=x_2$

بنا به تعریف تابع چون مولفه ۳- یکسان است باید مولفه‌های دوم آنها نیز برابر باشند پس

$$m-1=m^2-m\Rightarrow m^2-2m+1=0\Rightarrow (m-1)^2=0\Rightarrow m=1$$

با جایگذاری $m=1$ در رابطه

$$f=\{(-3,0)(2,-3)(-3,0)(4,-3)\}$$

چون $m=1$ باعث می‌شود دو زوج مرتب $(4,-3),(2,-3)$ یک به‌یک بودن را به هم بزند پس $m=1$ قابل قبول نیست.

۳- آسان

طبق تعریف یک به‌یک از لحاظ زوج مرتب داریم:

$$(-2,3),(2a-b,3)\Rightarrow 2a-b=-2$$

$$(-3,7),(a-b,7)\Rightarrow a-b=-3$$

با حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases}2a\cancel{-b}=-2\\ -a\cancel{+b}=3\end{cases}$$

$$a=1,\ b=4$$

$$a+b=1+4=5$$

۴- آسان

طبق تعریف یک‌به‌یک از لحاظ زوج مرتب و تعریف تابع:

$$(2,m^2-m)=(2,m)$$

$$\xrightarrow{\text{طبق تعریف تابع}} m^2-m=m\Rightarrow m^2-2m=0\Rightarrow m(m-2)=0$$

$$\Rightarrow m=0,\ m=2$$

با جای‌گذاری $m=2, m=0$ داریم:

$$m=0\rightarrow(1+k,5),(2,0),(3-2k,5)\xrightarrow[\text{یک به یک}]{\text{طبق تعریف}}$$

$$1+k=3-2k\Rightarrow 3k=2\Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

$$m=2\rightarrow(1+k,5),(2,2),(3-2k,5)\rightarrow k=\frac{2}{3}$$

در حالت اول $m.k=(0)(\frac{2}{3})=0$ و در حالت دوم $m.k=(2)(\frac{2}{3})=\frac{4}{3}$

۵- آسان

چون در $y=۱$، xهای ۴ و ۷ و در $y=۲$، xهای ۲ و ۳ و ۵ و در $y=۳$، xهای ۱ و ۶ در ارتباط هستند پس یک‌به‌یک نیست.

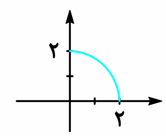
در هر حالت یک x را نگه داشته و باقی xها را حذف می‌کنیم مثلاً

$(۴,۱)(۲,۲)(۱,۳)$

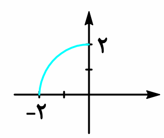
پس xهای ۷ و ۳ و ۵ و ۶ را حذف کردیم تا یک به یک شود. پس حداکثر ۳ نقطه باقی می‌ماند و ۴ نقطه حذف می‌شود.

۶- آسان

هر یک از بازه‌های $[۰,۲]$ و یا $[-۲,۰]$ را درنظر بگیریم یک به‌یک خواهد بود.



در $[۰,۲]$ یک به‌یک است.

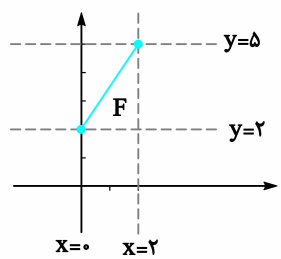


در $[-۲,۰]$ یک‌به‌یک است.

۷- آسان

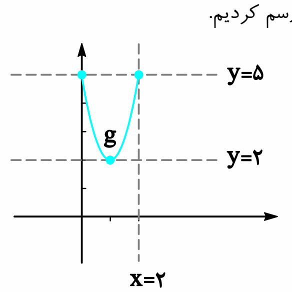
آ) باید شکلی رسم کنید که خطوط موازی محور xها شکل را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

f را تابعی خطی با دامنه $[۰,۲]$ و برد $[۲,۵]$ رسم کردیم.



ب) در بازه‌های داده شده شکل را طوری رسم می‌کنیم که خطوط موازی محور xها شکل را در بیش از یک نقطه قطع کند.

تابع g را سهمی با دامنه و برد موردنظر رسم کردیم.



۸- آسان

حواستون باشه‌ها! $f^{-۱}$ از لحاظ زوج مرتب به معنای جابه‌جایی x و y است.

نکته مهم این که:

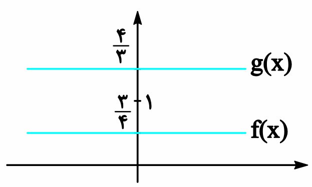
$$f^{-۱}\neq\frac{۱}{f}$$

$$f^{-۱}=\{(۱,۲)(۳,-۱)(۴,۷)\}\Rightarrow f=\{(۲,۱)(-۱,۳)(۷,۴)\}$$

$$f(۲)=۱\Rightarrow f^{-۱}(۱)=۲,\ f(-۱)=۳\xrightarrow{\text{پس}}\frac{۲}{۱-۳}=\frac{۲}{-۲}=-۱$$

۹- آسان

خیر، $f(x)=\frac{۳}{۴}$ خطی است موازی محور xها و همچنین $g(x)=\frac{۴}{۳}$ نیز خطی است موازی محور xها درحالی که دو تابع زمانی وارون یکدیگرند که نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه باشند. درحالی که f و g نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم قرینه نیستند.



۱۰- متوسط

برد وارون f همان دامنه تابع f است:

$$D_f=R_{f^{-۱}}$$

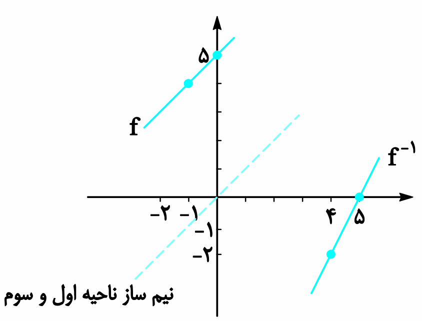
$$\{a^۲,b+۳\}=R_{f^{-۱}}=\{-۵,۹\}$$

اگر این دو مجموعه با هم برابر باشند $a^۲=۹$ پس درنتیجه $a=\pm۳$.

همچنین $b+۳=-۵\Rightarrow b=-۸$

۱۱- متوسط

آ) ابتدا تابع f را رسم می‌کنیم و قرینه آن را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم می‌کنیم.



$f(x)=۲x+۵$

چون خطوط موازی محور xها نمودار f را در یک نقطه قطع می‌کند پس f یک‌به‌یک است.

ب)

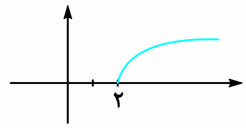
$$y=۲x+۵\Rightarrow y-۵=۲x\Rightarrow\frac{y-۵}{۲}=x\Rightarrow f'(x)=\frac{x-۵}{۲}$$

۱۲- متوسط

ابتدا دامنه و برد f را به دست می‌آوریم

$D_f : x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲ \Rightarrow D_f:[۲,+\infty)$

$R_f : y\geq ۰$



چون f یک‌به‌یک است پس f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$y=\sqrt{x-۲} \xrightarrow[\text{عوض می کنیم}]{\text{جای x, y را}} x=\sqrt{y-۲}$

$\xrightarrow{\text{با شرط } x\geq ۰} x^۲=y-۲ \Rightarrow x^۲+۲=y$

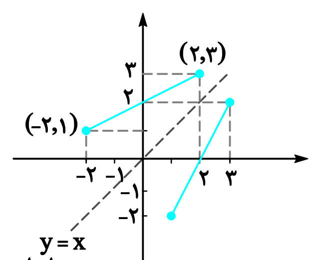
پس $R_{f^{-1}}=[۲,+\infty), D_{f^{-1}}: x\geq ۰$

نتیجه این سوال: $D_{f^{-1}}=R_f , D_f=R_{f^{-1}}$ را به خاطر بسپارید.

۱۳- متوسط

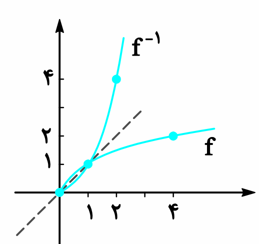
موارد آ و پ و ج یک‌به‌یک نیستند پس طبق خواسته سوال تنها وارون ب و ت و ث را رسم می‌کنیم وارون یک تابع را نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم رسم می‌کنیم.

ب)



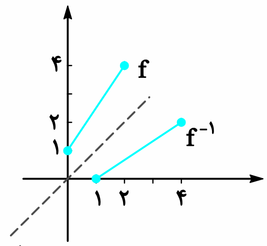
نیم ساز ناحیه اول و سوم

ت)



نیم ساز ناحیه اول و سوم

ث)



نیم ساز ناحیه اول و سوم

۱۴- متوسط

حواستون باشه‌ها! شرط وارون‌پذیری یک تابع، یک‌به‌یک بودن آن است پس

$(۱,۴),(n^۲-۸,۴) \xrightarrow{\text{طبق تعریف یک به یک}} ۱=n^۲-۸$

$\Rightarrow ۹=n^۲ \Rightarrow n=\pm ۳$

$n=+۳ \Rightarrow f=\{(۱,۴)(m+۹,-۱)(۱,۴)(۲,۴)(۳,m+۳)\}$

چون $(۲,۴),(۱,۴)$ یک‌به‌یک بودن را خراب می‌کنند پس $n=۳$ غیرقابل قبول است.

$n=-۳ \Rightarrow f=\{(۱,۴)(m+۹,-۱)(۱,۴)(۲,-۱)(۳,m+۳)\}$

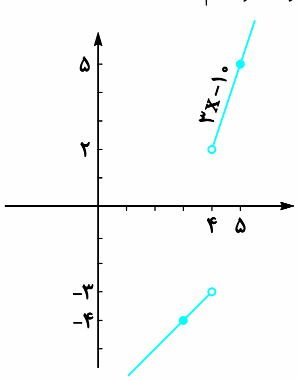
$m+۹=۲ \Rightarrow m=-۷$

پس $n=-۳ , m=-۷$ قابل قبول است.

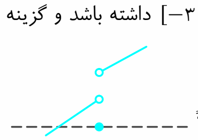
۱۵- دشوار

حواستون باشه‌ها! برای تحلیل یک‌به‌یک بودن توابع چندضابطه‌ای شکل آن‌ها را رسم کنید.

ابتدا $x-۷ , ۳x-۱۰$ را در بازه‌های موردنظر رسم کنید.



با توجه به شکل در $x=۴$ نقطه‌ای که گذاشته می‌شود باید یک y بین $[-۳,۲]$ داشته باشد و گزینه یک‌به‌یک بودن را خراب می‌کند

مثلاً  پس

$-۳\leq k-۵\leq ۲ \Rightarrow ۲\leq k\leq ۷$

$k\in[۲,۷]$

۱۶- متوسط

آ) $f(x)=x^{۲}-۲x+۱+۲ \Rightarrow f(x)=(x-۱)^{۲}+۲ \xrightarrow[\text{یک به یک بودن}]{\text{شرط وارون پذیری}}$

$y_۱=y_۲ \Rightarrow (x_۱-۱)^{۲}+۲=(x_۲-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow (x_۱-۱)^{۲}=(x_۲-۱)^{۲}$

$|x_۱-۱|=|x_۲-۱|$ یک‌به‌یک نیست

محدود کردن دامنه $[x_S,+\infty)$ و یا $(-\infty,x_S]$. پس دامنهٔ محدود باید

$[۱,+\infty)$ و یا $(-\infty,۱]$ با درنظر گرفتن $D_{\text{محدود}}=[۱,+\infty)$

$f(x)=(x-۱)^{۲}+۲$

$D=[۱,+\infty)$

$x=(y-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow x-۲=(y-۱)^{۲} \Rightarrow \sqrt{x-۲}=y-۱$

$\Rightarrow \sqrt{x-۲}+۱=y=f^{-۱}(x)$

ب) $g(x)=(x+۵)^{۲} \rightarrow y_۱=y_۲ \Rightarrow (x_۱+۵)^{۲}=(x_۲+۵)^{۲}$

$\Rightarrow |x_۱+۵|=|x_۲+۵|$

یک‌به‌یک نیست پس دامنه را محدود می‌کنیم پس $[-۵,+\infty)$

$y=(x+۵)^{۲}$

$D_{\text{محدود}}=[-۵,+\infty)$

$x=(y+۵)^{۲} \Rightarrow \sqrt{x}=y+۵ \Rightarrow \sqrt{x}-۵=y \Rightarrow \sqrt{x}-۵=g^{-۱}(x)$

پ) $h(x)=-|x-۱|+۱$

$y_۱=y_۲ \Rightarrow -|x_۱-۱|+۱=-|x_۲-۱|+۱ \Rightarrow |x_۱-۱|=|x_۲-۱|$

یک‌به‌یک نیست پس باید دامنه محدود کنیم.

$y=-|x-۱|+۱$

$D=[۱,+\infty)$

$y=-(x-۱)+۱ \xrightarrow{x\geq ۱} y=-x+۱+۱$

$\Rightarrow y=-x+۲ \Rightarrow x=-y+۲$

$x-۲=-y$

$-x+۲=y=h^{-۱}(x)$

ت) $P(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

$y_۱=y_۲ \Rightarrow \sqrt{x_۱+۲}-۳=\sqrt{x_۲+۲}-۳$

$\Rightarrow \sqrt{x_۱+۲}=\sqrt{x_۲+۲} \Rightarrow x_۱+۲=x_۲+۲$

$\Rightarrow x_۱=x_۲$ یک‌به‌یک است

$y=\sqrt{x+۲}-۳ \Rightarrow x=\sqrt{y+۲}-۳$

$\Rightarrow x+۳=\sqrt{y+۲} \Rightarrow (x+۳)^{۲}=y+۲$

$(x+۳)^{۲}-۲=y=p^{-۱}(x)$

ث) $k(x)=\dfrac{-۷x+۳}{۵}$

$y_۱=y_۲ \Rightarrow \dfrac{-۷x_۱+۳}{۵}=\dfrac{-۷x_۲+۳}{۵}$

$\Rightarrow -۷x_۱+۳=-۷x_۲+۳ \Rightarrow -۷x_۱=-۷x_۲$

$x_۱=x_۲$ یک‌به‌یک است.

$y=\dfrac{-۷x+۳}{۵} \Rightarrow x=\dfrac{-۷y+۳}{۵} \Rightarrow ۵x=-۷y+۳$

$\Rightarrow ۵x-۳=-۷y \Rightarrow y=\dfrac{۵x-۳}{-۷}=k^{-۱}(x)$

ج) $M(x)=\dfrac{۲x-۱}{x-۳}$

$y_۱=y_۲ \Rightarrow \dfrac{۲x_۱-۱}{x_۱-۳}=\dfrac{۲x_۲-۱}{x_۲-۳}$

$\Rightarrow \cancel{۲x_۱x_۲}-۶x_۱-x_۲+\cancel{۳}=\cancel{۲x_۱x_۲}-x_۱-۶x_۲+\cancel{۳}$

$۵x_۲=۵x_۱ \Rightarrow x_۲=x_۱$ یک‌به‌یک است.

$y=\dfrac{۲x-۱}{x-۳} \Rightarrow x=\dfrac{۲y-۱}{y-۳} \Rightarrow xy-۳x=۲y-۱$

$xy-۲y=۳x-۱ \Rightarrow (x-۲)y=۳x-۱$

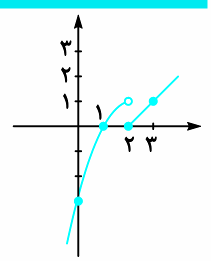
$y=\dfrac{۳x-۱}{x-۲}=M^{-۱}(x)$

۱۷- دشوار

$$f(x)=\begin{cases} ۴x-x^{۲}-۳ & x<۲ \\ x-۲ & x\geq ۲ \end{cases}$$

x	۲	۱	۰
y	۱	۰	−۳

x	۲	۳
y	۰	۱



تابع یک‌به‌یک نیست پس وارون‌پذیر نسیت.

$D_f: x<۲ \Rightarrow R_{f^{-۱}}=(-\infty,۲)$

$R_f: x<۲ \Rightarrow x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)^{۲}>۰ \Rightarrow -(x-۲)^{۲}<۰$

$\Rightarrow -(x-۲)^{۲}+۱<۱$

$\Rightarrow y<۱$

$y=-(x-۲)^{۲}+۱ \Rightarrow x=-(y-۲)^{۲}+۱ \Rightarrow x-۱=-(y-۲)^{۲}$

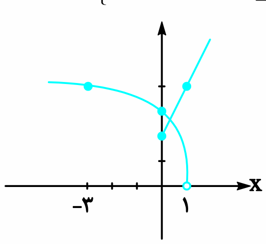
$R_f=D_{f^{-۱}}=(-\infty,۱)$

$-x+۱=(y-۲)^{۲} \Rightarrow \sqrt{-x+۱}=y-۲ \Rightarrow \sqrt{-x+۱}+۲=y=f^{-۱}(x)$

$D_f: x\geq ۲ \Rightarrow R_{f^{-۱}}=[۲,+\infty)$

$R_f: x\geq ۲ \Rightarrow x-۲\geq ۰ \Rightarrow y\geq ۰ \Rightarrow D_{f^{-۱}}=[۰,+\infty)$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} \sqrt{-x+۱}+۲ & x<۱ \\ x+۲ & x\geq ۰ \end{cases}$$

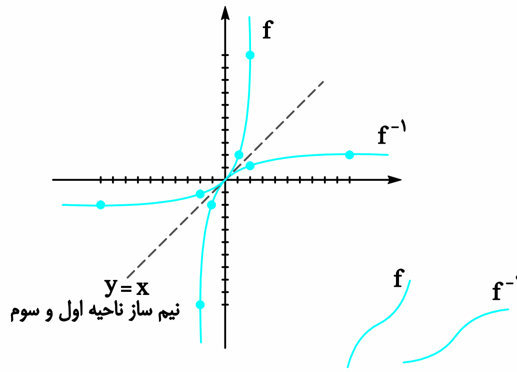


۱۸- دشوار

ابتدا با استفاده از نقطه‌دهی f را رسم کنیم:

$f(x)=x^۳+x$

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۱۰	-۲	۰	۲	۱۰



۱۹- دشوار

حواستون باشه‌ها! تابع $f\,,f^{-۱}$ یکدیگر را روی نیمساز ربع اول و سوم قطع می‌کند پس می‌توان f را با $y=x$ قطع داد پس:

$$f(x)=\begin{cases}x(x) & x\geq ۰\\ x(-x) & x<۰\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\geq ۰\\ -x^۲ & x<۰\end{cases}$$

$$x\geq ۰=x^۲=x \Rightarrow x^۲-x=۰ \Rightarrow x(x-۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰(\text{ق ق})\\ x=۱(\text{ق ق})\end{cases}$$

$$x<۰=-x^۲-x=۰ \Rightarrow -x(x+۱)=۰ \Rightarrow \begin{cases}x=۰(\text{غ ق ق})\\ x=-۱(\text{ق ق})\end{cases}$$

پس $f\,,f^{-۱}$ یکدیگر را در سه نقطه به طول‌های ۱ و ۰ و ۱- قطع می‌کنند.

۲۰- متوسط

با توجه به نکته سوال قبل:

$$f(x)=x^۲-۴x+۶ \Rightarrow x^۲-۴x+۶=x \Rightarrow x^۲-۵x+۶=۰$$

$$(x-۲)(x-۳)=۰$$

$$x=۲(\text{ق ق})\text{ ، }x=۳(\text{ق ق})$$

۲۱- متوسط

با توجه به نکته سوال قبل:

$$x^۳-۵x^۲+۴x=x \Rightarrow x^۳-۵x^۲+۳x=۰$$

$$x(x^۲-۵x+۳)=۰ \Rightarrow x=۰$$

یا $x^۲-۵x+۳=۰ \Rightarrow \Delta=۲۵-۱۲=۱۳\rightarrow$ دو ریشه دارد.

پس جمعاً سه نقطهٔ برخورد خواهد داشت.

۲۲- متوسط

با توجه به سوال قبل

$$\frac{x+۴}{x-۲}=x \Rightarrow x+۴=x^۲-۲x \Rightarrow x^۲-۳x-۴=۰$$

$$x=-۱\,,\,x=۴$$

۲۳- دشوار

آ) $y=۳x^۲-۶ \Rightarrow x=۳y^۲-۶ \Rightarrow x+۶=۳y^۲$

$$\Rightarrow \frac{x+۶}{۳}=y^۲ \Rightarrow \sqrt{\frac{x+۶}{۳}}=y=f^{-۱}(x)$$

ب) $y=\frac{۲x-۱}{x+۴} \Rightarrow x=\frac{۲y-۱}{y+۴} \Rightarrow xy+۴x=۲y-۱$

$$\Rightarrow xy-۲y=-۴x-۱$$

$$y(x-۲)=-۴x-۱ \Rightarrow y=\frac{-۴x-۱}{x-۲}=g^{-۱}(x)$$

پ) $h(x)=|x-۳|+۷$

$$\xrightarrow{x\leq ۳} h(x)=-(x-۳)+۷=-x+۳+۷=-x+۱۰$$

$$y=-x+۱۰ \Rightarrow x=-y+۱۰ \Rightarrow y=-x+۱۰=h^{-۱}(x)$$

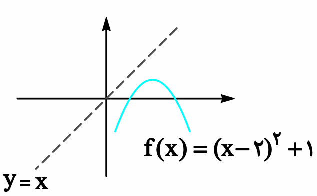
ت) $$k^{-۱}(x)=\begin{cases}x\leq ۰ \Rightarrow y=x^۲ \Rightarrow x=y^۲ \Rightarrow \sqrt{x}=y\\ x>۰ \Rightarrow y=-x^۲ \Rightarrow x=-y^۲ \Rightarrow -x=y^۲\\ \Rightarrow \sqrt{-x}=y\end{cases}$$

$$\Rightarrow K^{-۱}(x)=\begin{cases}\sqrt{x} & x\geq ۰\\ \sqrt{-x} & x<۰\end{cases}$$

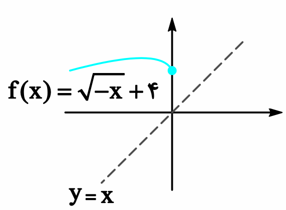
۲۴- متوسط

آ) $y=x$ و یا $y=-x$ را می‌توان درنظر گرفت

ب)



پ)



۲۵ـ آسان

$y=۴x \xrightarrow[\text{یک به یک بودن است}]{\text{شرط وارون پذیری}} y_۱=y_۲$

$\Rightarrow ۴x_۱=۴x_۲ \Rightarrow x_۱=x_۲$

یک‌به‌یک است پس وارون‌پذیر است.

۲۶ـ متوسط

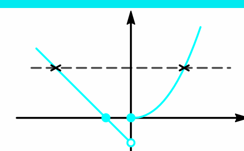
وارون تابع f را میابیم

$$y=\frac{۳}{x-۲} \Rightarrow x=\frac{۳}{y-۲}$$

$$xy-۲x=۳ \Rightarrow xy=۳+۲x \Rightarrow y=\frac{۳+۲x}{x}\neq g(x)$$

۲۷ـ آسان

$$h(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x-۱ & x<۰ \end{cases}$$



خطوط موازی محور xها نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

۲۸ـ دشوار

حواستون باشه‌ها! وارون تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت

$$y^{-۱}=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

پس درنتیجه وارون این تابع $y^{-۱}=\frac{-۲x+۲}{x-a}$ است.

$$\frac{-۲x+۲}{x-a}=\frac{ax+۲}{x+۲}$$

$$ax^۲+۲x-a^۲x-۲a=-۲x^۲-۴x+۲x+۴$$

$$ax^۲+(۲-a^۲)x-۲a=-۲x^۲-۲x+۴$$

از تساوی دو طرف نتیجه می‌شود $a=-۲$ است.

۲۹ـ آسان

اگر $f^{-۱}(x)=x-۱$ است پس $f(x)=x+۱$ است در نتیجه

$$g(x)=x+۱+\sqrt{x+۱} \xrightarrow{x+۱=t} g(t)=t+\sqrt{t} \xrightarrow[(x\,,\,۱۲)\in g]{g^{-۱}(۱۲)}$$

$$۱۲=t+\sqrt{t} \Rightarrow t+\sqrt{t}-۱۲=۰ \Rightarrow (\sqrt{t}+۴)(\sqrt{t}-۳)=۰$$

$$\sqrt{t}=-۴(\text{غ ق ق})\,,\,\sqrt{t}=۳ \Rightarrow t=۹$$

$$x+۱=۹ \Rightarrow x=۸$$

۳۰ـ آسان

چون $f^{-۱}(۹)$ را خواسته است پس یعنی $(x\,,۹)\in f$

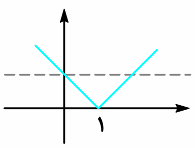
$$۹=۲^{۳x}+x \Rightarrow ۹=۸^x+x \Rightarrow x=۱ \Rightarrow f^{-۱}(۹)=۱$$

پاسخنامه سؤالات تستی

بخش ۳

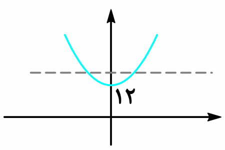
۱ـ گزینه «۲» آسان

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:



۱) یک‌به‌یک نیست

۲) یک‌به‌یک است $g=\{(۱,۲)(۲,۴)(۳,۶)\}$



۳) یک‌به‌یک نیست

۴) دو زوج مرتب با yهای یکسان، xهای متفاوت دارند پس یک‌به‌یک نیست.

$(۱,۵)(۴,۵)$

۲ـ گزینه «۳» آسان

با توجه به خطوط موازی محور xها تنها گزینه ۳ یک‌به‌یک است.

گزینه اول ویژگی تابع بودن را دارا نیست.

۳ـ گزینه «۲» آسان

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

۱) با دامنهٔ محدود $(-\infty\,,x_S]$ و یا $[x_S\,,+\infty)$ یک‌به‌یک است. (غلط)

۲) صحیح

۳) خطی موازی محور xها شرط یک‌به‌یک بودن است. (غلط)

۴) نسبت به نیمساز ناحیه اول و سوم (غلط)

۴- گزینه «۱» — متوسط

با توجه به نکته گفته شده وارون تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $f^{-1}=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است پس:

$$g^{-1}(x)=\frac{-۲x-۱}{x-۲}$$

که اگر از منفی صورت فاکتور گرفته و در مخرج ضرب کنیم به گزینه یک می‌رسیم $\frac{۲x+۱}{۲-x}$

۵- گزینه «۳» — متوسط

دقت کنید $R_f=D_{f^{-1}}\ ,\ D_f=R_{f^{-1}}$ پس

$$D_f: x+۳\geq ۰ \Rightarrow x\geq -۳ : R_{f^{-1}}$$

$$R_f: y\geq -۵ \rightarrow D_{f^{-1}}$$

$$y=\sqrt{x+۳}-۵ \Rightarrow x=\sqrt{y+۳}-۵ \Rightarrow x+۵=\sqrt{y+۳}$$

$$\Rightarrow (x+۵)^۲=y+۳$$

$$x^۲+۱۰x+۲۵=y+۳ \Rightarrow x^۲+۱۰x+۲۲=y=f^{-۱}(x)$$

$$D_{f^{-۱}}: x\geq -۵$$

۶- گزینه «۳» — متوسط

$f^{-۱}(۴)$ یعنی $(x,۴)\in f$ پس

$$۴=-x+\sqrt{-۲x}$$

$$۴+x=\sqrt{-۲x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} (۴+x)^۲=(\sqrt{-۲x})^۲$$

$$\Rightarrow ۱۶+۸x+x^۲=-۲x$$

$$x^۲+۱۰x+۱۶=۰ \Rightarrow (x+۲)(x+۸)=۰$$

$x=-۲$ (ق ق)، $x=-۸$ (غ ق ق)

صدق در معادله: $۴=۸+۴ \Rightarrow ۴=۱۲$ ✗

صدق در معادله: $۴=۲+\sqrt{۴} \Rightarrow ۴=۴$ ✓

۷- گزینه «۲» — دشوار

برای داشتن تابع یک‌به‌یک، هر مولفه از مجموعهٔ A باید تنها با یک مولفه از B در ارتباط باشد پس:

$$A=\{۱,۲,۳,۴\}$$
$$\downarrow$$
$$B=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$$

برای عدد ۱ از مجموعه A تنها یک انتخاب از B وجود دارد.

برای عدد ۲ از مجموعه A، ۴ انتخاب از مجموعه B داریم.

برای عدد ۳ از مجموعه A، ۳ انتخاب از مجموعه B داریم.

برای عدد ۴ از مجموعه A، ۲ انتخاب از مجموعه B داریم

پس در نتیجه:

$$۱\times۴\times۳\times۲=۲۴$$

روش دوم استفاده از فرمول ترتیب است.

۸- گزینه «۳» — متوسط

خروجی به معنای حاصل عبارت $\frac{-x}{۲+\sqrt{x}}$ است پس

$$\frac{-x}{۲+\sqrt{x}}=-۱ \Rightarrow -x=-۲-\sqrt{x} \Rightarrow ۰=x-\sqrt{x}-۲$$

$$۰=(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۱)$$

$$\sqrt{x}=۲\ ,\ \sqrt{x}=-۱$$

$x=۴$ غ ق ق

$x=۴$ به معنای خروجی تابع $۲x-۳$ است پس

$$۲x-۳=۴ \Rightarrow ۲x=۷ \Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$$

۹- گزینه «۴» — آسان

$$(۳,۲)=(b,۲) \xrightarrow{\text{یک به یک}} b=۳$$

$$(۳,۲)=(۳,a^۲-a) \xrightarrow{\text{تابع}} a^۲-a=۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$
$$\Rightarrow (a-۲)(a+۱)=۰$$

$$a=۲\ ,\ a=-۱$$

$a=۲ \Rightarrow \{(۳,۲)(۲,۵)(۳,۲)(۳,۲)(-۱,۴)\} \Rightarrow a=۲$ (ق ق)

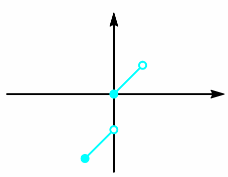
$a=-۱ \Rightarrow \{(۳,۲)(-۱,۵)(۳,۲)(۳,۲)(-۱,۴)\}$

$\xrightarrow{\text{تعریف تابع}} (-۱,۵)(-۱,۴)$ (غ ق ق)

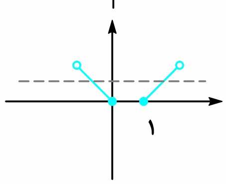
پس $a=۲$ قابل قبول است و $b=۳$

۱۰- گزینه «۱» — دشوار

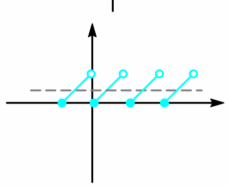
با توجه به رسم هر یک از گزینه‌ها

۱) 

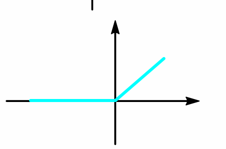
یک‌به‌یک است

۲) 

یک‌به‌یک نیست

۳) 

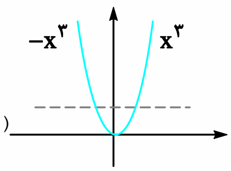
یک‌به‌یک نیست

۴) 

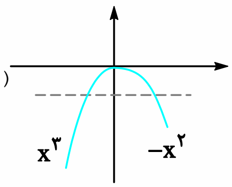
یک‌به‌یک نیست

۱۱- گزینه «۴» دشوار

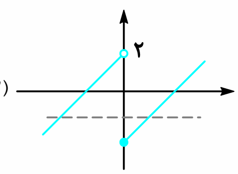
با استفاده از رسم‌ها داریم:

۱) 

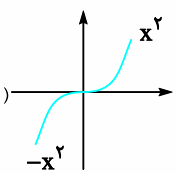
یک‌به‌یک نیست

۲) 

یک‌به‌یک نیست

۳) 

یک‌به‌یک نیست

۴) 

یک‌به‌یک است

۱۲- گزینه «۴» دشوار

علاوه بر رسم توابع می‌توان با یک خروجی تعداد ورودی‌ها را حساب کرد پس:

۱) $y=x^5-x+1 \Rightarrow y=1 \Rightarrow 1=x^5-x+1 \Rightarrow x^5-x=0$

$\Rightarrow x(x^4-1)=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)(x^2+1)=0$

$x=0, x=1, x=-1$ یک خروجی به ازای سه ورودی است پس یک‌به‌یک نیست.

۲) $y=|x|+\sqrt[3]{x} \Rightarrow y=0 \Rightarrow |x|+\sqrt[3]{x}=0$

$\Rightarrow |x|=-\sqrt[3]{x} \Rightarrow x=-1, x=0$

یک‌به‌یک نیست

۳) $y=|x-2|+\sqrt{x} \Rightarrow y=2 \Rightarrow 2=|x-2|+\sqrt{x}$

$$\begin{cases} x\geq 2:\ 2=x-2+\sqrt{x} \Rightarrow x+\sqrt{x}-4=0 \\ x<2:\ 2=-x+2+\sqrt{x} \Rightarrow x-\sqrt{x}=0 \Rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0 \\ \Rightarrow x=0, x=1 \end{cases}$$

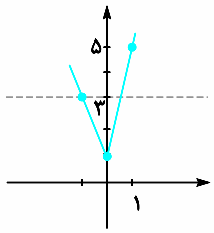
یک‌به‌یک نیست.

۱۳- گزینه «۴» دشوار

با استفاده از نقطه‌دهی و رسم گزینه‌ها به رد گزینه می‌پردازیم:

۱) $y=3|x|+x+1$

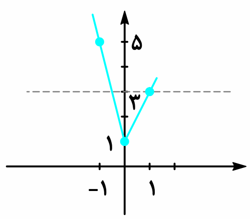
x	−1	0	1
y	3	1	5



یک‌به‌یک نیست پس معکوس‌پذیر نیست.

۲) $y=3|x|-x+1$

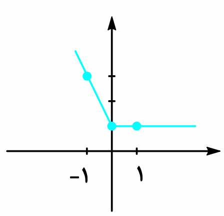
x	−1	0	1
y	5	1	3



یک‌به‌یک نیست معکوس‌پذیر نیست.

۳) $y=|x|-x+1$

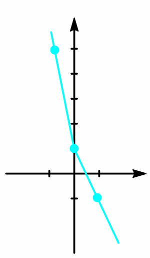
x	−1	0	1
y	3	1	1



یک‌به‌یک نیست

۴) $y=|x|-3x+1$

x	−1	0	1
y	4	1	−1



یک‌به‌یک است و معکوس‌پذیر

۱۴- گزینه «۳» — دشوار

$y=\sqrt{x} \Rightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow x^۲=y \Rightarrow D_{f^{-۱}}=x\ge ۰$

$D_f : x\ge ۰$

$R_f : y\ge ۰$

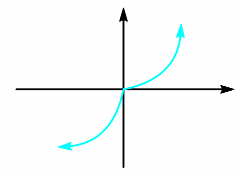
$y=-x^۲ \Rightarrow x=-y^۲ \Rightarrow -x : y^۲$

$\Rightarrow -\sqrt{-x}=y \Rightarrow D_{f^{-۱}}=x<۰$

$D_f : x<۰$

$R_f : y<۰$

$$f^{-۱}(x)=\begin{cases} x^۲ & x\ge ۰ \\ -\sqrt{-x} & x<۰ \end{cases}$$



۱۵- گزینه «۳» — متوسط

اگر $(x,y)\in f$ باشد آنگاه $(y,x)\in f^{-۱}$ پس معکوس گزینه‌ها را صدق می‌دهیم:

۱) $(۶۶,۴) \Rightarrow ۴=۶۶^۳+\sqrt{۶۶}$ ×

۲) $(۱,۳) \Rightarrow ۳=۱^۳+\sqrt{۱}$ ×

۳) $(۴,۶۶) \Rightarrow ۶۶=۴^۳+\sqrt{۴}$ ✓

۴) $(۲,۱) \Rightarrow ۱=۲^۳+۱$ ×

۱۶- گزینه «۴» — متوسط

با توجه به $g^{-۱}(۱۶)$ پس $g(x)=۱۶$ پس

$f(۳x-۴)=۱۶$

$(۳x-۴,۱۶)\in f \Rightarrow (۱۶,۳x-۴)\in f^{-۱}$

$۳x-۴=۱۶+۴ \Rightarrow ۳x=۲۴ \Rightarrow x=۸$

۱۷- گزینه «۲» — دشوار

با توجه به $g^{-۱}(۶)$ پس $(x,۶)\in g$

$۶=f(x)+\sqrt{f(x)} \xrightarrow{f(x)=t} t+\sqrt{t}-۶=۰$

$\Rightarrow (\sqrt{t}+۳)(\sqrt{t}-۲)=۰$

$\sqrt{t}=-۳$ (غ ق ق)، $\sqrt{t}=۲ \Rightarrow t=۴$

$f(x)=۴ \Rightarrow (x,۴)\in f \Rightarrow (۴,x)\in f^{-۱} \Rightarrow f^{-۱}(۴)=\sqrt[۳]{۲(۴)}=۲$

۱۸- گزینه «۳» — دشوار

می‌دانیم $D_{f^{-۱}}=R_f \,,\, D_f=R_{f^{-۱}}$

پس به محاسبه برد تابع می‌پردازیم:

$۰\le\sqrt{x-۱}\Rightarrow ۰\ge-\sqrt{x-۱}\Rightarrow ۳\ge ۳-\sqrt{x-۱}\ge ۰$

$\sqrt{۳}\ge\sqrt{۳-\sqrt{x-۱}}\ge ۰ \Rightarrow [۰,\sqrt{۳}]$

۱۹- گزینه «۴» — دشوار

ریشهٔ داخل پرانتز $x=۲$ است پس

$x\le ۲ : f(x)=۲x-۴+۲x \Rightarrow f(x)=۴x-۴$

$x\le ۲ \Rightarrow ۴x\le ۸ \Rightarrow ۴x-۴\le ۴ \Rightarrow y\le ۴$

$x>۲ : f(x)=۲x+۴-۲x \Rightarrow f(x)=۴$ یک‌به‌یک نیست

پس $f(x)=۴x-۴$ با $D_f=(-\infty,۲] \,,\, R_f=(-\infty,۴]$ داریم:

$y=۴x-۴ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{۱}{۴}x+۱$

$D_{f^{-۱}}=R_f=(-\infty,۴]$

۲۰- گزینه «۴» — دشوار

اگر $f, f^{-۱}$ متقاطع باشند روی نیمساز اول و سوم متقاطع هستند پس می‌توان نوشت:

$x^۲+۲x+۱=x \Rightarrow x^۲+x+۱=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۴=-۳$

ریشه ندارد پس غیرمتقاطع هستند.

۲۱- گزینه «۲» — دشوار

حواستون باشه‌ها! تابع چندضابطه‌ای وقتی یک‌به‌یک است که

۱) اولاً در هر ضابطه یک‌به‌یک باشد.

۲) برد ضابطه‌ها اشتراک نداشته باشند.

$x>۳ \Rightarrow ۲x>۶ \Rightarrow ۲x+a>۶+a \Rightarrow y>۶+a$

$x\le ۳ \Rightarrow x-۳a\le ۳-۳a \Rightarrow y\le ۳-۳a$

کافی است بنویسیم:

$۳-۳a\le ۶+a \Rightarrow ۴a\ge -۳ \Rightarrow a\ge -\frac{۳}{۴}$

۲۲- گزینه «۴» — دشوار

حواستون باشه‌ها! تابع هموگرافیک زمانی وارون‌پذیر نیست که یک‌به‌یک نباشد و زمانی یک‌به‌یک نیست که $ad-bc=۰$ باشد پس

$۵-(-۸m)=۰ \Rightarrow ۵=-۸m \Rightarrow m=-\frac{۵}{۸}$

۲۳- گزینه «۴» — آسان

اگر $(x,y)\in f$ پس $(y,x)\in f^{-۱}$

اگر $(۴,۱)$ از وارون f می‌گذرد پس $(۱,۴)\in f$ پس

$۴=a+۱ \Rightarrow a=۳$

$f(x)=۳x+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۳} \xrightarrow{(۱۰,۳)} \frac{۱۰-۱}{۳}=۳$

۲۴- گزینه «۲» — متوسط

تقارن نسبت به نیمساز ربع اول یعنی دو تابع وارون یکدیگرند پس

$۲x-۳y=b \Rightarrow \frac{۲}{۳}x-\frac{b}{۳}=y$

$f(x)=\frac{۲}{۳}x-\frac{b}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+\frac{b}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲}$

پس $f^{-۱}(x)$ با $ax+by=۸$ باید برابر باشد پس

$ax-۸=-by$

$-\frac{ax}{b}+\frac{۸}{b}=y=f^{-۱}(x)$

$-\frac{a}{b}x+\frac{۸}{b}=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲} \Rightarrow \begin{cases}\frac{۸}{b}=\frac{b}{۲} \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴ \\ -\frac{a}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-۶\end{cases}$

$\frac{-a}{-۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=+۶$

$a+b \xrightarrow[b=۴]{a=-۶} a+b=-۲\,,\ a+b \xrightarrow[b=-۴]{a=+۶} a+b=+۲$

۲۵- گزینه «۴» — متوسط

$y=x^۲-۴x+۴-۴ \Rightarrow y=(x-۲)^۲-۴$

$f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۴}+۲$

$D_{f^{-۱}}=[-۴,+\infty)$

$D_f: x<۲$

$x-۲<۰ \Rightarrow (x-۲)^۲>۰ \Rightarrow (x-۲)^۲-۴>۴$

$y>-۴$

$y>-۴: R_f=D_{f^{-۱}}$

۲۶- گزینه «۱» — متوسط

$\begin{matrix} x>۰ \\ y>۰ \end{matrix} \Rightarrow f(x)=\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-x^۲}$

$\begin{matrix} x<۰ \\ y<۰ \end{matrix} \Rightarrow f(x)=-\sqrt{۱-x^۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{۱-x^۲}$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=f(x)$

۲۷- گزینه «۲» — دشوار

$x\le ۱ \Rightarrow -۲x\ge -۲ \Rightarrow -۲x+۳\ge ۱ \Rightarrow R_f=D_{f^{-۱}} \Rightarrow x\ge ۱$

$y=-۲x+۳ \Rightarrow x=-۲y+۳ \Rightarrow x-۳=-۲y$

$\Rightarrow \frac{x-۳}{-۲}=y=f^{-۱}(x)$

$x>۱ \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x<-\frac{۱}{۲} \Rightarrow -\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}<۱ \Rightarrow R_f=D_{f^{-۱}} \Rightarrow x<۱$

$y=-\frac{۱}{۲}x+\frac{۳}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=-۲x+۳$

۲۸- گزینه «۳» — متوسط

$x\ge ۰ \Rightarrow f(x)=x^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x}$

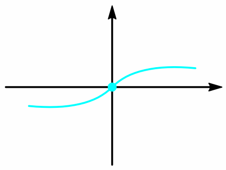
$D_f=R_{f^{-۱}}=y\ge ۰$

$R_f=D_{f^{-۱}}=x\ge ۰$

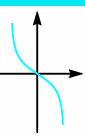
$x<۰ \Rightarrow f(x)=-x^۲ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{-x}$

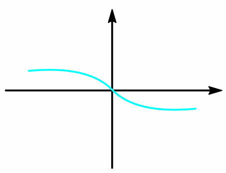
$D_f=R_{f^{-۱}}=y<۰$

$R_f=D_{f^{-۱}}=x<۰$



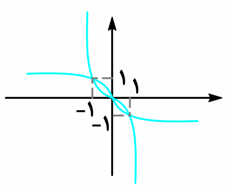
۲۹- گزینه «۳» — متوسط

نمودار تابع $y=-x^۳$  است که وارون آن به شکل



است.

بنابراین همدیگر را در ۲ نقطه قطع می‌کنند.



۳۰- گزینه «۱» — دشوار

چون در وارون یک تابع جای دامنه و برد جابه‌جا است پس

$f:$

$x\ge ۰ \Rightarrow x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲+۱\ge ۱ \Rightarrow y\ge ۱$

$x<۰ \Rightarrow x+\frac{۱}{۲}<\frac{۱}{۲} \Rightarrow y<\frac{۱}{۲}$

حالا برای یافتن ضابطه‌ها

$y=x^۲+۱ \Rightarrow y-۱=x^۲ \Rightarrow \sqrt{y-۱}=x$

$\sqrt{x-۱}=f^{-۱}(x) \Rightarrow x\ge ۱$

$y=x+\frac{۱}{۲} \Rightarrow y-\frac{۱}{۲}=x \Rightarrow x-\frac{۱}{۲}=f^{-۱}(x) \Rightarrow x<\frac{۱}{۲}$

۳۱ـ گزینه «۱» آسان

$f(۲)=a$

$f^{-۱}(۶)=a$

$f^{-۱}(f(۵))=f^{-۱}(۳)=۵$

پس:

$a+a=۵ \Rightarrow ۲a=۵ \Rightarrow a=\frac{۵}{۲}$

۳۲ـ گزینه «۴» آسان

با توجه به زوج مرتب‌های داده شده

$f^{-۱}(۵)=۱$

$f^{-۱}(۴)=-۲$

$۱+(-۲)=۳k \Rightarrow -۱=۳k \Rightarrow k=-\frac{۱}{۳}$

۳۳ـ گزینه «۱» آسان

$f=\{\underbrace{(۲,۱)(۱,a-b)}_{a-b=۲}\underbrace{(۱,۲)(a+b,۱)}_{a+b=۲}\} \Rightarrow a+b=۲$

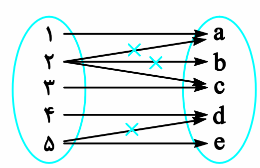
۳۴ـ گزینه «۴» آسان

$y=\sqrt{x}-۱ \Rightarrow y+۱=\sqrt{x} \Rightarrow (y+۱)^۲=x$

$\Rightarrow f^{-۱}(x)=(x+۱)^۲ \Rightarrow$ گزینه ۴ صحیح است

۳۵ـ گزینه «۳» آسان

تابعی یک‌به‌یک است که هر عضو از دامنه تنها به یک عضو از برد مرتبط شده باشد درنتیجه



پس حداقل با حذف ۳ پیکان به منظور موردنظر خواهیم رسید.

۳۶ـ گزینه «۲» آسان

تعریف یک‌به‌یک $\Rightarrow a^۲-۱=۳ \Rightarrow a^۲=۴ \Rightarrow a=\pm ۲$

$a=۲$ (غ ق ق): $f=\{(۳,۱)(۲,۳)(۴,-۱)(۲,۵)(۳,۱)\}$ تعریف تابع بودن بهم خورد

$a=-۲$ (ق ق): $f=\{(۳,۱)(-۲,۳)(۴,-۱)(۲,۵)(۳,۱)\}$

۳۷ـ گزینه «۲» آسان

ابتدا ضابطه را مربع کامل و با توجه به دامنه داده شده آن را وارون می‌کنیم.

$f(x)=(x-۱)^۲+۱ \Rightarrow y=(x-۱)^۲+۱ \Rightarrow y-۱=(x-۱)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}}$

$\sqrt{y-۱}=|x-۱| \xrightarrow{x<۱} \sqrt{y-۱}=-x+۱ \Rightarrow \sqrt{y-۱}-۱=-x$

$-\sqrt{y-۱}+۱=x \Rightarrow f(x)=-\sqrt{x-۱}+۱$

۳۸ـ گزینه «۴» متوسط

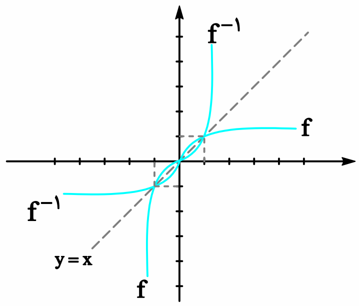
دامنهٔ محدود وارون‌پذیر درجه ۲ از رابطه $(-\infty,x_S],[x_S,+\infty)$ به دست می‌آید پس:

$y=x^۲+۲x+۱-۱ \Rightarrow y=(x+۱)^۲-۱ \Rightarrow D_{\text{محدود}}=(-\infty,-۱]$

یا $D_{\text{محدود}}=[-۱,+\infty)$

درنتیجه رأس ۱- نمی‌تواند درون دامنه باشد و $(۱-)$ تنها در گزینه ۴ درون بازه است.

۳۹ـ گزینه «۳» متوسط



با توجه به نمودار تابع f و وارون آن (قرینه نسبت به خط $y=x$) می‌بینیم که دو تابع در دو نقطه برخورد دارند.

۴۰ـ گزینه «۱» متوسط

وارون تابع هموگرافیک $y=\frac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $y^{-۱}=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است و درصورتی f و $f^{-۱}$ برابرند که $a=-d$ باشد.

$f(x)=\frac{۳m^۲x-۱}{(۶m+۳)x-۳} \Rightarrow ۳m^۲=۳ \Rightarrow m^۲=۱ \Rightarrow m=\pm ۱$

پس به ازای دو مقدار m، دو تابع برهم منطبق هستند.

۴۱ـ گزینه «۴» متوسط

$f=\{(-۲,b+۱)(a,۱-b)(-۲,۴)(۰,c)\}$

$f^{-۱}=\{(b+۱,۲)(۱-b,a)(۴,-۲)(c,۰)\}$

اول از همه این که با توجه به تابع بودن f داریم: $b+۱=۴$ و بنابراین $b=۳$.

$f=\{(-۲,۴)(a,-۲)(۰,c)\}$

$f^{-۱}=\{(۴,-۲)(-۲,a)(c,۰)\}$

$\Rightarrow a=۴ \Rightarrow \begin{cases} f=\{(-۲,۴)(۴,-۲)(۰,c)\} \\ f^{-۱}=\{(۴,-۲)(-۲,۴)(c,۰)\} \end{cases}$

$\Rightarrow c=۰ \Rightarrow a+b+c=۷$

۴۲- گزینه «۲» آسان

وقتی دو تابع به صورت زوج مرتب وارون هم باشند یعنی جای مولفه‌های اول و دوم عوض میشه پس:

$$\begin{cases}(۲\,,۲b+۳)\in f\\(b+۴\,,۲)\in g\end{cases}\Rightarrow ۲b+۳=b+۴\Rightarrow b=۱$$

$$\begin{cases}(a-۱\,,۶)\in f\\(۳c\,,۱)\in g\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۳c=۶\Rightarrow c=۲\\a-۱=۱\Rightarrow a=۲\end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b-c=۲+۱-۲=۱$$

۴۳- گزینه «۳» آسان

$$f^{-۱}(۷)=\alpha\Rightarrow(۷\,,\alpha)\in f^{-۱}\Rightarrow(\alpha\,,۷)\in f$$

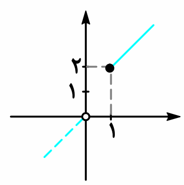
$$\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha=۷\Rightarrow\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha-۷=۰$$

$$\alpha^۳+۳\alpha^۲+۳\alpha+۱-۸=۰\Rightarrow(\alpha+۱)^۳-۸=۰$$

$$(\alpha+۱)^۳=۸\Rightarrow\alpha+۱=۲\Rightarrow\alpha=۱$$

۴۴- گزینه «۳» متوسط

با رسم شکل خواهیم داشت:



پس ax باید به گونه‌ای باشد که در نقطه صفر، y آن از یک کم‌تر باشد و همچنین باید شیب مثبت داشته باشد پس تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد.

۴۵- گزینه «۳» آسان

برای یافتن وارون تابع f باید جای دامنه و برد آن نیز تغییر کند پس

$$f:\begin{cases}x>۱\xrightarrow{\times ۲}۲x>۲\xrightarrow{\text{پس}}y>۲\\x\le ۱\xrightarrow{-۳}x-۳\le ۲\Rightarrow y\le -۲\end{cases}$$

درنتیجه دامنه‌های تابع g، $x>۲\,,x\le -۲$ است. درنتیجه گزینه ۳ پاسخ است.

۴۶- گزینه «۳» متوسط

تابع یک‌به‌یک بودن ← شرط وارون‌پذیری

$$n^۲-۸=۱\Rightarrow n^۲=۹\Rightarrow n=\pm ۳$$

$n=۳\Rightarrow\{(۱,۴)(m+۹\,,-۲)(۱,۴)(۲,۴)(۳\,,m+۳)\}$ غ‌ق‌ق

یک به یک نیست.

$$n=-۳\Rightarrow\{(۱,۴)(m+۹\,,-۲)(۱,۴)(۲\,,-۲)(۳\,,m-۳)\}$$

درنتیجه

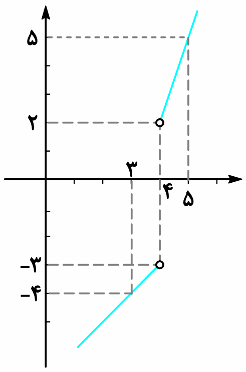
$$m+۹=۲\Rightarrow m=-۷$$

۴۷- گزینه «۴» متوسط

با رسم تابع f، حدود m رو پیدا می‌کنیم:

$$x<۴\Rightarrow\begin{array}{c|cc}x&۳&۴\\\hline x-۷&-۴&-۳\end{array}$$

$$x>۴\Rightarrow\begin{array}{c|cc}x&۴&۵\\\hline ۳x-۱۰&۲&۵\end{array}$$



با توجه به نمودار، در $x=۴$، مقدار y باید مقداری بین خود ۳- تا خود ۲ شود تا تابع یک‌به‌یک بماند پس:

$$-۳\le m-۵\le ۲\Rightarrow ۲\le m\le ۷$$

۴۸- گزینه «۴» آسان

در تابع هموگرافیک $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ درصورتی تابع با وارون خودش برابر است که $a=-d$ پس:

$$m=-۲$$

۴۹- گزینه «۳» دشوار

با توجه به این که در تابع $f(x)=\dfrac{۳x-۱}{۴x-۳}$، داریم: $a=-d$ بنابراین $f^{-۱}(x)=f(x)$ و اگر به تعداد زوج تابع $f^{-۱}$ (یا همان f) روی یک نقطه اثر کند، مقدار برابر همان نقطه (عدد) هست و اگر به تعداد فرد روی آن اثر کند، برابر مقدار تابع به ازای آن نقطه است.

در اینجا چون ۱۳۵۳ بار اثر کرده و ۱۳۵۳ عددی فرد است باید $f^{-۱}(۵)$ رو به دست بیاریم که همان $f(۵)$ است و داریم:

$$f(۵)=\frac{۱۵-۱}{۲۰-۳}=\frac{۱۴}{۱۷}$$

۵۰- گزینه «۱» دشوار

تابع خطی درصورتی بر وارون خود منطبق است که یا نیمساز اول و سوم باشد یا خطی موازی (یا خود) نیمساز دوم و چهارم.

و از اونجایی که عرض از مبدأ داریم پس شیب باید ۱- باشد.

$$۲m-۳=-۱\Rightarrow ۲m=۲\Rightarrow m=۱$$

سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۴

۱- آسان

آ) $D_{\frac{f}{g}}=\{D_f \cap D_g\}-\{g(x)=۰\}$

$D_f=\{۱,-۲,۰\}\ D_g=\{۱,۲,۰\} \Rightarrow D_f \cap D_g=\{۱,۰\}$

یعنی در تابع g، y برابر صفر داشته باشیم که نداریم $\Rightarrow g(x)=۰$

$D_{\frac{f}{g}}=\{۱,۰\}-\{\}=\{۱,۰\}$

$\frac{f}{g}(۱)=\frac{f(۱)}{g(۱)}=\frac{۲}{۵} \Rightarrow (۱,\frac{۲}{۵})$

$\frac{f}{g}(۰)=\frac{f(۰)}{g(۰)}=\frac{۷}{-۱}=-۷ \Rightarrow (۰,-۷)$

$\frac{f}{g}=\{(۱,\frac{۲}{۵}),(۰,-۷)\}$

ب) $D_{f-g}=\{D_f \cap D_g\}=\{۱,۰\}$

$(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۲-۵=-۳$

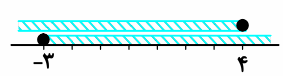
$(f-g)(۰)=f(۰)-g(۰)=۷-(-۱)=۸$

۲- دشوار

$f+g=\{D_f \cap D_g\}$

$D_f: x+۳ \geq ۰ \Rightarrow x \geq -۳$

$D_g: ۴-x \geq ۰ \Rightarrow ۴ \geq x$



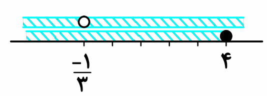
$[-۳,۴]$

$f+g=\sqrt{x+۳}+\sqrt{۴-x}$

$D_{f+g}=[-۳,۴]$

$D_g: ۴-x \geq ۰ \Rightarrow ۴ \geq x$

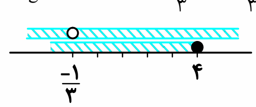
$D_h: x \neq -\frac{۱}{۳}$



$(-\infty,-\frac{۱}{۳}) \cup (-\frac{۱}{۳},۴]$

$g-h=\sqrt{۴-x}-\frac{x+۳}{۳x+۱}$

$D_{g-h}=(-\infty,-\frac{۱}{۳}) \cup (-\frac{۱}{۳},۴]$



$(-\infty,-\frac{۱}{۳}) \cup (-\frac{۱}{۳},۴]$

$gh \Rightarrow \{D_g \cap D_h\}$

$gh=(\sqrt{۴-x})(\frac{x+۳}{۳x+۱})$

$D_{\frac{f}{g}} \Rightarrow \{D_f \cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=[-۳,۴]-\{۴\}=[-۳,۴)$

$g(x)=۰ \Rightarrow \sqrt{۴-x}=۰ \Rightarrow ۴-x=۰ \Rightarrow ۴=x$

$\frac{f}{g}=\frac{\sqrt{x+۳}}{\sqrt{۴-x}}$

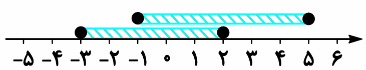
$(f+g)(۲)=f(۲)+g(۲)=\sqrt{۵}+\sqrt{۲}$

$(f+h)(۱)=f(۱).h(۱)=(۲)(\frac{۴}{۴})=۲$

۳- دشوار

طبق تعریف کتاب می‌دانیم که شرط تشکیل $f+g$ داشتن اشتراک دامنه‌هاست پس

$D_f=[-۳,۲], D_g=[-۱,۵]$



$\xrightarrow{\cap}[-۱,۲]$

شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع g می‌کنیم.

$$g(x)=\begin{cases} ۱x+۱ & -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۲ & ۱ \leq x \leq ۵ \end{cases}$$

شروع به نوشتن ضابطه‌های موجود در تابع f می‌کنیم.

$$f(x)=\begin{cases} \frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲} & -۳ \leq x \leq -۱ \\ -۱ & -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۲x-۳ & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

حاصل اشتراک دامنه‌های f و g را به دست آورده و در اشتراک، yهای موجود را جمع می‌کنیم.

$$f+g=\begin{cases} \frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۲}+x+۱ & -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۲x-۳+۲ & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

$$f+g=\begin{cases} \frac{۳}{۲}x+\frac{۱}{۲} & -۱ \leq x \leq ۱ \\ ۲x-۱ & ۱ \leq x \leq ۲ \end{cases}$$

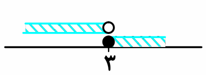
۴- آسان

برای آنکه $f \times g$ موجود باشد باید دامنه‌ی آنها اشتراک داشته باشد.

$D_f: x-۳ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۳ \Rightarrow [۳+\infty)$

$D_g: ۳-x > ۰ \Rightarrow ۳ > x \Rightarrow (-\infty,۳)$

اشتراک $D_f \cap D_g$ به صورت



است و چون اشتراک تهی است پس $f \times g$ موجود نمی‌باشد.

۵- دشوار

ابتدا اشتراک دامنه‌ها را بین f و g می‌یابیم.

$D_f : x \geq ۰$

$D_g : \{۰,-۲,۴,۵,۹\} \Rightarrow D_f \cap D_g = \{۰,۴,۵,۹\}$

حال ابتدا ۲g را به دست می‌آوریم که به معنای ۲ برابر کردن yهای g است

$۲g = \{(۰,-۶)(-۲,۲)(۴,۶)(۵,۰)(۹,۲۲)\}$

دامنه قابل قبول برای $\frac{f-g}{۲g}$ را به دست می‌آوریم:

$D_{f-g} = \{۰,۴,۵,۹\}$

$D_{۲g} = \{۰,-۲,۴,۵,۹\}$

$\{D_{f-g} \cap D_{۲g}\} - \{۲g(x)=۰\} = \{۰,۴,۵,۹\} - \{۵\} = \{۰,۴,۹\}$

$(\frac{f-g}{۲g})(۰) = -\frac{۱}{۲}$

$(\frac{f-g}{۲g})(۴) = \frac{۵}{۶}$

$(\frac{f-g}{۲g})(۹) = \frac{۸}{۱۱}$

کم‌ترین مقدار به معنای کم‌ترین y است که $\frac{۸}{۱۱}$ کم‌ترین مقدار خواهد بود.

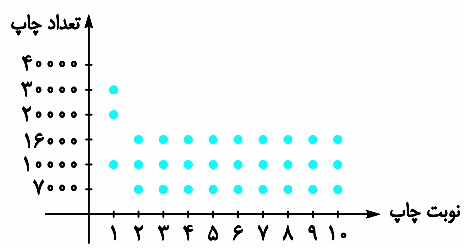
۶- متوسط

آ) $f(n) = \begin{cases} ۱۰۰۰ & n=۱ \\ ۷۰۰۰ & n>۱ \end{cases}$

$g(n) = \begin{cases} ۲۰۰۰ & n=۱ \\ ۹۰۰۰ & n>۱ \end{cases}$

ب) $h(n) = f(n)+g(n) = \begin{cases} ۳۰۰۰ & n=۱ \\ ۱۹۰۰۰ & n>۱ \end{cases}$

پ)



۷- دشوار

ابتدا به دامنهٔ $\sqrt{\frac{f}{g}}$ توجه می‌کنیم

$\frac{f}{g} \geq ۰$

با توجه به شکل ریشه‌های تابع f ← $x = ۰,۱,۳$

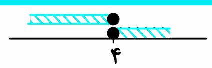
و همچنین ریشه‌های تابع g ← $x = -۱$

x	$-\infty$	-۱	۰	۱	۳	$+\infty$
f			۰ +	۰ −	۰	
g	+	۰ +	+	+	+	
$\frac{f}{g}$			۰ + ج	۰ −	۰	

چون در دامنه نیستند.

$\frac{f}{g}$ دامنه : $[۰,۱] \cup \{۳\}$

۸- دشوار

آ) $D_f \cap D_g$  $\xrightarrow{\cap} \{۴\}$

$D_f : ۴-x \geq ۰ \Rightarrow ۴ \geq x$

$D_g : x-۴ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۴$

چون فقط یک نقطه مشترک است.

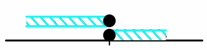
$(f \times g)(۴) = f(۴) \times g(۴) = ۰ \times ۰ = ۰$

۹- متوسط

$D_f : x \geq ۰$

$D_g : -x \geq ۰ \Rightarrow x \leq ۰$

$D_f \cap D_g$

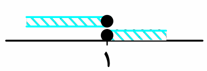


$D_f \cap D_g = \{۰\}$

۱۰- متوسط

$\sqrt{x-۱} \Rightarrow x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱$

$\sqrt{۱-x} \Rightarrow ۱-x \geq ۰ \Rightarrow ۱ \geq x$

اشتراک دامنه‌ها ←  $\Rightarrow \{۱\}$

۱۱- آسان

$D_f = \mathbb{R} - \{۲\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{-۳\}$

$D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{۲,-۳\}$

۱۲- متوسط

$D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x)=۰\}$

$D_f = \mathbb{R} - \{-۳\} \quad D_g = \mathbb{R} - \{۴\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x \neq \{-۳,۴\}$

$D_{\frac{f}{g}} = \{x \neq -۳,۴\} - \{\frac{x+۲}{x-۴} = ۰\}$

$\{x \neq -۳,۴\} - \{x = -۲\} = \{x \neq -۳,۴,-۲\}$

۱۳- آسان

$D_f = x-۱\ge ۰ \quad D_g=\mathbb{R}$

اشتراک دامنه‌ها $x\ge ۱$ است.

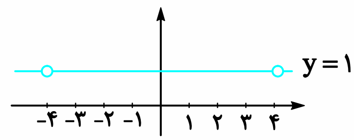
$۲f(x)-g(x)=۲\sqrt{x-۱}-(x+۱)^۲$

۱۴- متوسط

شرط استفاده از ضرب دو تابع اشتراک دامنه‌هاست پس

$f(x)\times g(x)=\dfrac{x+۴}{x-۴}\times\dfrac{x-۴}{x+۴}=۱$

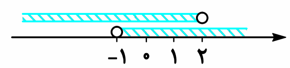
$D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\{x\ne ۴\}\cap\{x\ne -۴\}\Rightarrow \mathbb{R}-\{۴,-۴\}$



۱۵- دشوار

$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}$

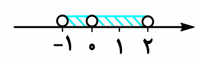
$D_f: x+۱>۰\Rightarrow x>-۱$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}}$
$D_g: -x+۲>۰\Rightarrow ۲>x$



$\Rightarrow (-۱,۲)$

$g(x)=۰\Rightarrow \dfrac{۲x}{\sqrt{-x+۲}}=۰\Rightarrow ۲x=۰\Rightarrow x=۰$

$D_{\frac{f}{g}}=(-۱,۲)-\{۰\}\Rightarrow$



تنها عدد صحیح موجود در این بازه $\{۱\}$ است.

۱۶- متوسط

$D_f=\mathbb{R}, D_g: x\ne \pm ۳$

$D_f\cap D_g=\{x\ne\pm ۳\}$

$(f\cdot g)(x)=f(x)\times g(x)=(x^۳-۹x)(\dfrac{۲}{x^۲-۹})$

$=(x(x^۲-۹))(\dfrac{۲}{x^۲-۹})=۲x$

$(f\cdot g)(x)=۲x$

۱۷- آسان

$D_f=x^۲-۱۶\ne ۰\Rightarrow x\ne\pm ۴$

$D_g=x^۲-x\ne ۰\Rightarrow x\ne ۰,۱ \quad g(x)=۰\Rightarrow x=-۳$

$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=\{x\ne\pm۴,۰,۱\}-\{-۳\}$

$=\mathbb{R}-\{\pm۴,-۳,۰,۱\}$

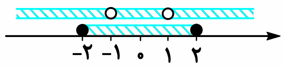
$\mathbb{R}=\{-۴,-۳,۰,۱,۴\}$

۱۸- دشوار

$D_f: ۴-x^۲\ge ۰\Rightarrow ۴\ge x^۲\Rightarrow -۲\le x\le ۲$

$D_g: x\ge ۰, x=\pm ۱$

$D_{f-g}=D_f\cap D_g\Rightarrow$



$[-۲,۲]-\{\pm۱\}$

$D_{\frac{f-g}{f}}=\{D_{f-g}\cap D_f\}-\{f(x)=۰\}$

$\{[-۲,۲]-\{\pm۱\}-\{x\ne\pm۲\}=(-۲,۲)-\{\pm۱\}$

۱۹- متوسط

$D_f=[-۴,۴] \quad D_g=[-۲,۲]$

$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=\{[-۲,۲]\}-\{\pm۲\}=(-۲,۲)$

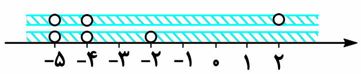
۲۰- دشوار

$D_f: x\ne -۴, D_g: x\ne -۵$

$D_{\frac{f}{g}}: \{x\ne -۴,-۵\}-\{۴x-۸=۰\}=\mathbb{R}-\{-۴,-۵,۲\}$

$D_{\frac{g}{f}}=\{x\ne -۴,-۵\}-\{x+۲=۰\}=\mathbb{R}-\{-۴,-۵-۲\}$

$D_{\frac{f}{g}-\frac{g}{f}}=D_{\frac{f}{g}}\cap D_{\frac{g}{f}}\}$



$=\mathbb{R}-\{-۵,-۴,۲,-۲\}$

۲۱- دشوار

$D_{\sqrt{\frac{-۳}{x^۲+۳x}}}\Rightarrow \dfrac{-۳}{x^۲+۳x}\ge ۰\Rightarrow x^۲+۳x<۰$

$\Rightarrow x(x+۳)<۰\Rightarrow -۳<x<۰$

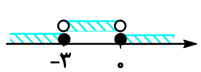
	-۳		۰	
+		− ج		+

جواب : $(-۳,۰)$

$D_{\sqrt{x^۲+۳x}}\Rightarrow x^۲+۳\ge ۰\Rightarrow x(x+۳)\ge ۰\Rightarrow x\in(-\infty,-۳]\cup[۰,+\infty)$

	-۳		۰	
+		−		+

$D_{\text{حاصل جمع}}$ = اشتراک دامنه‌ها



= تهی

۲۲- متوسط

$f(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{۲+x}}\Rightarrow D_f: ۲+x>۰\Rightarrow x>-۲$

$g(x)=x\sqrt{۲+x}\Rightarrow ۲+x\ge ۰\Rightarrow x\ge -۲$

$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=\{x>-۲\}-\{۰,-۲\}$

$=\{x>-۲\}-\{۰\}$

۲۳- متوسط

$(۲f-g)(۳)=۲f(۳)-g(۳)=۲\sqrt{۴}-(\frac{۳+۲}{۳-۴})=۴-(-۵)=۹$

۲۴- آسان

$D_f: ۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow ۴\geq x^۲ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$D_g: \{-۲,۰,۲\}$

$g(x)=۰ \Rightarrow \varnothing$

$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=(-۲,۲)-\{۰\}$

۲۵- آسان

$D_f\cap D_g=\{۰,۱\}$

$\frac{f(۰)+۳}{-g(۰)}=\frac{۳+۳}{-۲}=-۳$

$\frac{f(۱)+۳}{-g(۱)}=\frac{۲+۳}{-(-۱)}=۵$

۲۶- آسان

$f^۲=f\times f=\{(۱,۴)(۰,۹)\}$

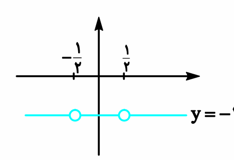
$f^۲(x)+۳f(x)\Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{x=۱} f^۲(۱)+۳f(۱)=۴+۳(۲)=۱۰ \\ \xrightarrow{x=۰} f^۲(۰)+۳f(۰)=۹+۳(۳)=۱۸ \end{cases}$

۲۷- متوسط

$D_f=\{x\neq -\frac{۱}{۲}\}, D_g=\{x\neq \frac{۱}{۲}\}$

$D_{f\times g}=\{x\neq \pm\frac{۱}{۲}\}$

$(f\times g)(x)=\frac{۲x-۱}{۲x+۱}\times\frac{-۲x-۱}{۲x-۱}=-۱$



۲۸- آسان

$D_f\cap D_g=\{-۱,۰,۱\}$

$(f-g)(-۱)=f(-۱)-g(-۱)=-۱-۴=-۵$

$(f-g)(۰)=f(۰)-g(۰)=۱-۲=-۱$

$(f-g)(۱)=f(۱)-g(۱)=۳-۱=۲$

۲۹- دشوار

$D_f: x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲$
$D_g: ۲-x\geq ۰ \Rightarrow ۲\geq x$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}} \{۲\}$

$g(x)=۰ \Rightarrow \sqrt{۲-x}=۰ \Rightarrow ۲-x=۰ \Rightarrow x=۲$

$\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=\{۲\}-\{۲\}=\varnothing$

۳۰- متوسط

$D_f=x-۲\geq ۰ \Rightarrow x\geq ۲$ $\xrightarrow{\text{اشتراک}} \{۲,۶\}$
$D_g=\{۰,۱,۲,۶\}$

$\frac{f}{g}(۲)=\frac{۰}{۵}=۰ \Rightarrow (۲,۰)$

$\frac{f}{g}(۶)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow (۶,\frac{۱}{۴})$

سؤالات تستی
پاسخنامه
بخش ۴

۱- گزینه «۱» متوسط

ابتدا در دامنه‌های مشترک، $f-g , f+g$ را حساب می‌کنیم

$f+g=\{(۱,۴)(۲,۸)(۴,۸)\} , f-g=\{(۱,۰)(۲,-۲)(۴,۲)\}$

$(f+g)o(f-g)=(f+g)(f-g)$

$۱ \xrightarrow{f-g} ۰ \Rightarrow \times$

$۲ \xrightarrow{f-g} -۲ \Rightarrow \times$

$۴ \xrightarrow{f-g} ۲ \xrightarrow{f+g} ۸$

$\Rightarrow \{(۴,۸)\}$

۲- گزینه «۲» متوسط

حواستون باشه‌ها! $g^{-۱}of^{-۱}=(fog)^{-۱}$

$(fog)^{-۱}(a)=۸ \Rightarrow (a,۸)\in(fog)^{-۱} \Rightarrow (۸,a)\in fog$

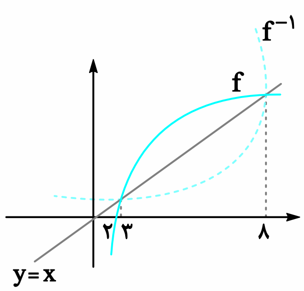
$f(g(x))=f(g(۸))=a$

$f(۷)=a$

پس $a=۳$ است.

۳- گزینه «۴» متوسط

با توجه به نمودار می‌توان به راحتی $f^{-۱}$ را رسم کرد پس



دامنه رادیکال: $x-f^{-۱}(x)\geq ۰$

$x\geq f^{-۱}(x)$

بازه‌ای که وارون تابع f از $y=x$ پائین‌تر است دقیقاً $[۳,۸]$ است.

۴- گزینه «۴» متوسط

بسیار مراقب باشید که $D_{f^{-1}of}$ با $D_{fof^{-1}}$ برابر نخواهد بود.

$$D_{f^{-1}of}: f^{-1}(f(x))$$

$$D_f: x^3-8\ge 0 \Rightarrow x^3\ge 8 \Rightarrow x\ge 2$$

پس باید دامنهٔ رسم تابع موردنظر $x\ge 2$ باشد پس گزینه ۴ صحیح است.

۵- گزینه «۳» متوسط

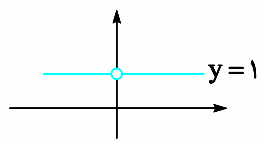
ابتدا دامنه $f.g$ را به دست می‌آوریم.

$$D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{0\}\,,\ D_g=\mathbb{R}$$

$$fg=(x+\frac{1}{x})(\frac{x}{x^2+1})=(\frac{\cancel{x^2+1}}{\cancel{x}})(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x^2+1}})=1$$

$$D=\mathbb{R}-\{0\}$$



۶- گزینه «۴» آسان

با توجه به مقدار توابع از روی شکل

$$f(2)=2$$

$$g(4)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

$$f(1)=1 \Rightarrow g(1)=-2$$

$$\text{حاصل}=\frac{2+0}{-2}=-1$$

۷- گزینه «۱» متوسط

ابتدا g^{-1} را به دست آورید:

$$g^{-1}=\{(-1,2)(4,-1)(-2,3)(-3,-4)\}$$

$$g^{-1}(f(a))=3 \Rightarrow (f(a),3)\in g^{-1} \Rightarrow f(a)=-2 \Rightarrow (a,-2)\in f$$

چون خروجی تابع f، ۲- است پس باید در ضابطه $-\sqrt{-x}$ صدق کند پس

$$-\sqrt{-a}=-2 \Rightarrow \sqrt{-a}=2 \Rightarrow -a=4 \Rightarrow a=-4$$

۸- گزینه «۲» آسان

$$D_{\frac{f}{g}}=\{1,2,3\}-\{3\}=\{1,2\}$$

$$\frac{2f}{g}(1)=\frac{2f(1)}{g(1)}=\frac{2(2)}{5}=\frac{4}{5} \Rightarrow (1,\frac{4}{5})$$

$$\frac{2f}{g}(2)=\frac{2f(2)}{g(2)}=\frac{2(3)}{6}=1 \Rightarrow (2,1)$$

۹- گزینه «۲» متوسط

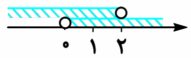
$$f(\sqrt{3}) \Rightarrow f(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^2-2[\sqrt{3}]=3-2=1$$

$$f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2-2[-\frac{1}{2}]=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}=2/25$$

۱۰- گزینه «۳» آسان

$$D_f=(0,+\infty)\,,\ D_g=(-\infty,2)$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=0\}$$



$$\Rightarrow (0,2)$$

۱۱- گزینه «۱» متوسط

$$D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{2\} \Rightarrow \{x\neq 2\}\cap D_g=\mathbb{R}-\{2\}$$

پس D_g نیز $\mathbb{R}-\{2\}$ بوده است در نتیجه در مخرج مربع کامل با ریشه $\{2\}$ داریم

$$(x-2)^2=x^2-4x+4 \Rightarrow a=-4\,,\ b=4$$

۱۲- گزینه «۴» آسان

$$2f(-2)-f(4)=5 \xrightarrow[f(4)=8+a]{f(-2)=4} 2(4)-8-a=5 \Rightarrow a=-5$$

۱۳- گزینه «۳» متوسط

$$f(x) \xrightarrow{\text{تبدیل به مکعب}} x^3+3x^2+3x+1-1=(x+1)^3-1$$

$$g(x) \xrightarrow{\text{تبدیل به مکعب}} x^3-3x^2+3x-1+1=(x-1)^3+1$$

$$f(\sqrt[3]{2}-1)=(\sqrt[3]{2}-1+1)^3-1=2-1=1$$

$$g(\sqrt[3]{2}+1)=(\sqrt[3]{2}+1-1)^3+1=3$$

$$\text{حاصل}=1+3=4$$

۱۴- گزینه «۱» متوسط

$$D_f=\{x+5>0\} \Rightarrow x>-5$$

$$D_g=\{x+5>0\} \Rightarrow x>-5$$

$$\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=0\}=\{x>-5\}-\{1\}=(-5,+\infty)-\{1\}$$

۱۵- گزینه «۲» متوسط

$$D_f=\{x^2-1\ge 0\} \Rightarrow x^2\ge 1 \Rightarrow x\ge 1 \text{ یا } x\le -1$$

$$D_g=\{4-x^2\ge 0\} \Rightarrow 4\ge x^2 \Rightarrow -2\le x\le 2$$

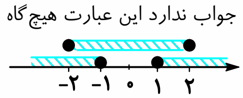
$$f(x)=0 \Rightarrow x+\sqrt{x^2-1}=0 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}=-x$$

$$\xrightarrow{x<0} x^2-1=x^2$$

$$-1\neq 0$$

جواب ندارد این عبارت هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

$$D_{\frac{g}{f}}=\{D_f\cap D_g\}=[-2,-1]\cup[1,2]$$



۱۶- گزینه «۱» — متوسط

$$f(-\frac{۱}{x})=\frac{-\frac{۱}{x}+۱}{-\frac{۱}{x}+a}=\frac{\frac{-۱+x}{x}}{\frac{-۱+ax}{x}}=\frac{-۱+x}{-۱+ax}$$

$$\frac{x+۱}{x+a}\times\frac{-۱+x}{-۱+ax}=-۱ \Rightarrow \frac{x^۲-۱}{-x+ax^۲-a+a^۲x}=-۱$$

$$x^۲-۱=ax^۲+(a^۲-۱)x-a$$

$$\Rightarrow a=۱$$

۱۷- گزینه «۴» — آسان

در تعیین دامنه‌ها اجازهٔ ساده کردن عبارت را نداریم.

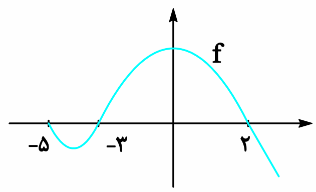
۱۸- گزینه «۳» — متوسط

$$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=\{-۲,۰,۲\}-\varnothing=\{-۲,۰,۲\}$$

$$۴-x^۲>۰ \Rightarrow ۴\ge x^۲ \Rightarrow -۲\le x\le ۲$$

۱۹- گزینه «۴» — دشوار

ابتدا از روی $f(x-۲)$ نمودار $f(x)$ را می‌یابیم و از روی نمودار آن دامنهٔ $x\cdot f(x)\ge ۰$ را می‌یابیم.

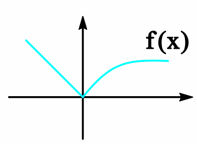


x		-۵		-۳		۰		۲	
x	−		−		−	۰	+		+
f(x)	+	۰	−	۰	+		+	۰	−
xf(x)	−	۰	+ ج	۰	−	۰	+ ج	۰	−

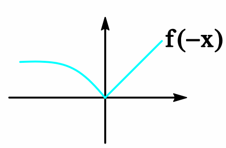
$[-۵,-۳]\cup[۰,۲]$

۲۰- گزینه «۱» — دشوار

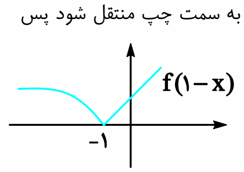
ابتدا از روی $f(x-۱)$ به نمودار $f(x)$ می‌رسیم



ابتدا $f(-x)$ یعنی قرینه نمودار نسبت به محور yها پس



حال $f(۱-x)$ یعنی روی محور xها یک واحد به سمت چپ منتقل شود پس



۲۱- گزینه «۲» — آسان

$$f^{-۱}(g(۲a))=۶ \Rightarrow (g(۲a),۶)\in f^{-۱} \Rightarrow (۶,g(۲a))\in f$$

پس $g(۲a)=۳$ است پس

$$(۲a,۳)\in g \Rightarrow ۳=\frac{۲a}{۲a-۱} \Rightarrow ۶a-۳=۲a \Rightarrow ۴a=۳ \Rightarrow a=\frac{۳}{۴}$$

۲۲- گزینه «۱» — آسان

$$f(x-[x])=[x-[x]] \xrightarrow[\text{عدد صحیح است خارج می‌شود}]{\text{چون } [x]} [x]-[x]=۰$$

$$f(۰)=[۰]=۰$$

۲۳- گزینه «۴» — متوسط

با استفاده از تعریف معکوس تابع

$$f^{-۱}(g(a))=۵ \Rightarrow (g(a),۵)\in f^{-۱}$$

$$(۵,g(a))\in f$$

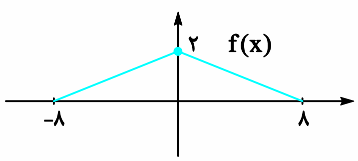
$$f(۵)=g(a) \xrightarrow{f(۵)=۲(۵)-۳} ۷=g(a)$$

$$(a,۷)\in g$$

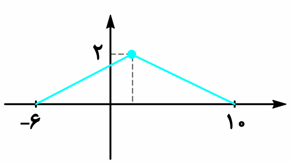
پس a باید صفر باشد که $(۰,۷)\in g$

۲۴- گزینه «» — دشوار

حواستون باشه‌ها! ابتدا نمودار $f(x)$ را می‌خواهیم بـه دسـت بیـاوریم کـه بـه معنای آن است که هر x باید دو برابر شود تا به $f(x)$ برگردد پس

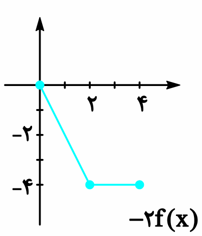


حال هر نقطه به اندازهٔ ۲ واحد به سمت راست منتقل می‌شود پس



۲۵- گزینه «۳» — متوسط

حواستون باشه‌ها $y=kf(x)$ به معنای آن است که yهای تـابع f در (-۲) ضرب شود چون ضریب منفی است به معنای قرینه شـدن تمـام yهـای شکل است و در نتیجه شکل نسبت به محور xها قرینه می‌شود. پس



۲۶ـ گزینه «۳» متوسط

با توجه به دامنه تابع g می‌توانیم آن را به صورت زوج مرتب بنویسیم:

$g=\{(۱,۲)(۲,۴)(۳,۶)(۴,۸)...\}$

$f=\{(۱,۲)(۲,۳)(۳,۵)(۴,۷)\}$

$D_{f+g}=D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳,۴\}$

$f+g=\{۹۱,۴)(۲,۷)(۳,۱۱)(۴,۱۵)\}$

۲۷ـ گزینه «۳» متوسط

$D_f=\{x\neq ۲\}$

$g(x)=۰ \Rightarrow x=\pm ۱ \Rightarrow D_g: x\neq \frac{۱}{۲}$

$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}$

$\{x\neq \frac{۱}{۲},-۲\}-\{x=\pm ۱\}=\mathbb{R}-\{-۱,-۲,\frac{۱}{۲},۱\}$

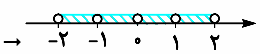
۲۸ـ گزینه «۲» دشوار

$۴-x^۲\geq ۰ \Rightarrow ۴\geq x^۲ \Rightarrow -۲\leq x\leq ۲$

$[x]+[-x]\neq ۰ \xrightarrow[\begin{cases}[x]+[-x]=۰ & x\in\mathbb{Z}\\ [x]+[-x]=-۱ & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}]{} [x]+[-x]=-۱$

$\Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$

اشتراک دامنه‌ها ←



۲۹ـ گزینه «۴» متوسط

$f+g=\{(۱,۷)(-۱,۵)\}$

$f\times g=\{(۱,۱۰)(-۱,۰)\}$

$\frac{f}{g}=\{(۱,\frac{۲}{۵})\}$

$\frac{g}{f}=\{(۱,\frac{۵}{۲})(-۱,۰)\}$

۳۰ـ گزینه «۱» آسان

$f(\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-[\sqrt{۲}]=\sqrt{۲}-۱$

$f(-\sqrt{۲})=-\sqrt{۲}-[-\sqrt{۲}]=-\sqrt{۲}+۲$

$f(\sqrt{۲})+f(-\sqrt{۲})=\sqrt{۲}-۱-\sqrt{۲}+۲=۱$

پاسخنامه سؤالات تشریحی

آزمون تشریحی ۱

۱ـ متوسط

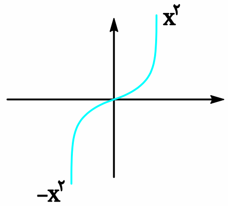
آ) نادرست ـ برد باید زیرمجموعه هم دامنه باشد اما $[-۲,۴]\not\subset[-۱,۵]$

ب) درست ـ چون یک به یک است.

پ) نادرست ـ تابع معروف $y=x-[x]$ دارای برد $[۰,۱)$ است پس $y=۲x-۲[x]$ دارای برد $[۰,۲)$ است.

۲ـ متوسط

آ)

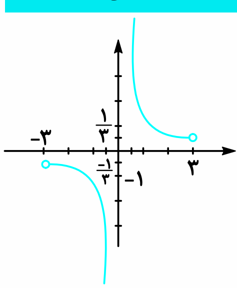


ب) دارای دامنه‌های برابر و به ازای xهای برابر $f(x)=g(x)$ باشد.

پ) $R: y\leq ۱, D: ۲\geq x$

ت) $\mathbb{R}-\{۳\}$

۳ـ آسان



۴ـ متوسط

ابتدا دامنه توابع را بررسی می‌کنیم

$D_f=\mathbb{R}$

$D_g=\mathbb{R} \Rightarrow D_f=D_g$

حال باید به ازای xهای یکسان y برابر تولید کنند.

$g(۱)=۴$

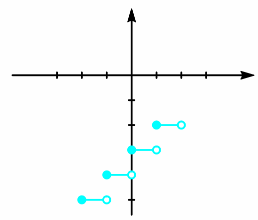
$f(۱)=\frac{۴-۱}{۱+۱}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow g(۱)\neq f(۱)$

پس دو تابع برابر نیستند.

۵- متوسط

نمودار $y=[x]-۳$ را بررسی می‌کنیم:

x	$[x]$	$[x]-۳$	
$-۲\le x<-۱$	-۲	-۵	x: -۲, -۱ ؛ y: -۵, -۵
$-۱\le x<۰$	-۱	-۴	x: -۱, ۰ ؛ y: -۴, -۴
$۰\le x<۱$	۰	-۳	x: ۰, ۱ ؛ y: -۳, -۳
$۱\le x<۲$	۱	-۲	x: ۱, ۲ ؛ y: -۲, -۲



۶- آسان

$[۲x]-۳=۵\Rightarrow[۲x]=۸$

اگر براکت ۸ شود یعنی داخل براکت بین ۸ و ۹ بوده است.

$$۸\le ۲x<۹\ \Rightarrow\ ۴\le x<\frac{۹}{۲}$$

۷- دشوار

$$[۲x]=۱\ \Rightarrow\ ۱\le ۲x<۲\ \Rightarrow\ \frac{۱}{۲}\le x<۱$$

$$[۲x]=۲\ \Rightarrow\ ۲\le ۲x<۳\ \Rightarrow\ ۱\le x<\frac{۳}{۲}$$

$$[۲x]=۳\ \Rightarrow\ ۳\le ۲x<۴\ \Rightarrow\ \frac{۳}{۲}\le x<۲$$

از اجتماع بازه‌های x خواهیم داشت:

$$x\in[\frac{۱}{۲},۲)$$

۸- دشوار

تابعی وارون‌پذیر است که یک‌به‌یک باشد پس

$$y_۱=y_۲$$

$$\frac{۲x_۱-۱}{x_۱+۳}=\frac{۲x_۲-۱}{x_۲+۳}$$

$$\cancel{۲x_۱x_۲}+۶x_۱-x_۲\cancel{-۳}=\cancel{۲x_۱x_۲}+۶x_۲-x_۱\cancel{-۳}\Rightarrow ۷x_۱=۷x_۲$$

$\Rightarrow x_۱=x_۲$ یک‌به‌یک است

$$y=\frac{۲x-۱}{x+۳}$$

$$xy+۳y=۲x-۱\Rightarrow xy-۲x=-۳y-۱\Rightarrow x(y-۲)=-۳y-۱$$

$$x=\frac{-۳y-۱}{y-۲}\ \Rightarrow\ f^{-۱}(x)=\frac{-۳x-۱}{x-۲}$$

۹- دشوار

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & -۲\le x<۰\\ ۲ & ۰\le x<۳\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}-۲ & -۳\le x<۰\\ ۲x-۲ & ۰\le x<۱\end{cases}$$

$$f-g=\begin{cases}(x+۲)-(-۲) & -۲\le x<۰\\ ۲-(۲x-۲) & ۰\le x<۱\end{cases}$$

$$f-g=\begin{cases}x+۴ & -۲\le x<۰\\ -۲x+۴ & ۰\le x<۱\end{cases}$$

۱۰- متوسط

آ) $D_f:۴-x\ge۰\ \Rightarrow\ ۴\ge x\qquad D_g:x\ne۲$

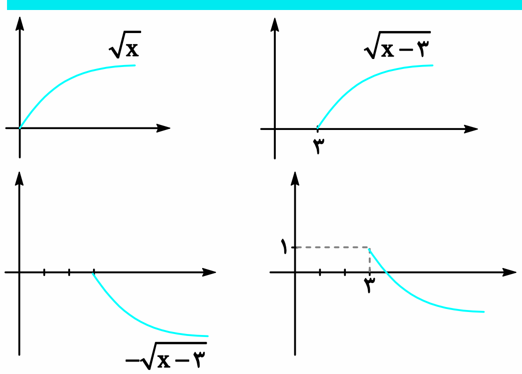
$$D_{\frac{f}{g}}=\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}$$

$$=\{(-\infty,۲)\cup(۲,۴]\}-\{x=۱\}=(-\infty,۱)\cup(۱,۲)\cup(۲,۴]$$

ب)

$$(f-۳g)(-۵)=f(-۵)-۳g(-۵)=۳-۳(\frac{-۶}{-۷})=۳-\frac{۱۸}{۷}=\frac{۳}{۷}$$

۱۱- متوسط



$D:[۳,+\infty)$

$R:(-\infty,۱]$

پاسخنامه
سؤالات تشریحی
آزمون تشریحی ۲

۱- متوسط

آ) نادرست ـ چون اگر برد دو تابع یکسان باشد الزاما دو تابع با یکدیگر برابر نخواهند بود.

ب) درست

پ) نادرست ـ چون $D_g=\mathbb{R}\,,\,D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$

۲- دشوار

آ) ابتدا $x^۲-۶x$ را به مربع کامل تبدیل کنید:

$$x^۲-۶x+۹-۹=(x-۳)^۲-۹$$

$$۶x-x^۲=-(x^۲-۶x+۹-۹)=-(x-۳)^۲+۹$$

پس:

$$f(x)=[(x-۳)^۲-۹]-[-(x-۳)^۲+۹]$$

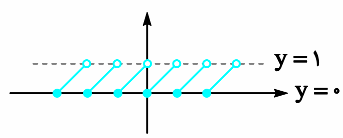
$$f(۳-\sqrt{۵})==[(۳-\sqrt{۵}-۳)^۲-۹]-[-(۳-\sqrt{۵}-۳)^۲+۹]$$

$$=[-۴]-[۴]=-۸$$

ب) ضابطه‌های آنها برابر نیستند.

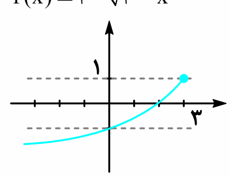
$$g(x)=\sqrt{x^۲}=|x|\neq x=f(x)$$

پ) $[۰\,,۱)$ با توجه به شکل معروف آن



۳- متوسط

$$f(x)=۱-\sqrt{۳-x}$$



چون هر خط موازی محور xها شکل را در یک نقطه قطع می‌کند پس یک به یک است.

$$y=۱-\sqrt{۳-x}$$

$$x=۱-\sqrt{۳-y}$$

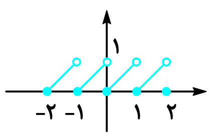
$$\sqrt{۳-y}=۱-x$$

$$۳-y=(۱-x)^۲$$

$$۳-(۱-x)^۲=y\ \Rightarrow\ f^{-۱}(x)=۳-(۱-x)^۲$$

۴- دشوار

x	[x]	x−[x]	
$-۲\le x<-۱$	-۲	$x+۲$	x: −۲, −۱ ; y: ۰, ۱
$-۱\le x<۰$	-۱	$x+۱$	x: −۱, ۰ ; y: ۰, ۱
$۰\le x<۱$	۰	x	x: ۰, ۱ ; y: ۰, ۱
$۱\le x<۲$	۱	$x-۱$	x: ۱, ۲ ; y: ۰, ۱
$x=۲$	۲	$x-۲$	x: ۲ ; y: ۰



۵- دشوار

$$D_f:\begin{cases}۴+x\ge ۰\ \Rightarrow\ x\ge -۴\\ ۲+x>۰\ \Rightarrow\ x>-۲\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}} x>-۲=(-۲\,,+\infty)=D_f$$

$$D_g:\frac{۴+x}{۲+x}\ge ۰$$

x		−۴		−۲	
	+	۰	−	ت ن	+

$$(-\infty\,,-۴)\cup(-۲\,,+\infty)=D_g$$

چون دامنه دو تابع برابر نیست پس تابع ها برابر نیستند.

۶- دشوار

$$f(x)=x^۲-۶x+۹-۹=(x-۳)^۲-۹$$

$$D_{\text{محدود}}=[۳\,,+\infty)$$

$$D=[۳\,,+\infty)$$

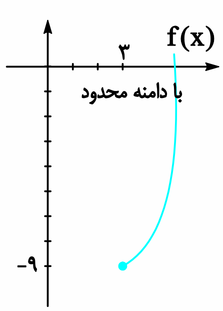
$$y=(x-۳)^۲-۹$$

$$y+۹=(x-۳)^۲$$

$$\sqrt{y+۹}=x-۳$$

$$\sqrt{y+۹}+۳=x$$

$$\sqrt{x+۹}+۳=f^{-۱}(x)$$



۷- دشوار

ابتدا با توجه به تعیین علامت محدوده‌ء x را مشخص می‌کنیم:

x		$-\frac{1}{3}$		۲	
	−	ت ن	+	۰	−

$-\frac{1}{3} < x \le 2 \xrightarrow{\times 3} -1 < 3x \le 6$

[۳x] به معنای اعداد صحیح در این بازه است

$-1 < 3x < 0 \Rightarrow [3x] = -1$

$0 \le 3x < 1 \Rightarrow [3x] = 0$

$1 \le 3x < 2 \Rightarrow [3x] = 1$

$2 \le 3x < 3 \Rightarrow [3x] = 2$

$3 \le 3x < 4 \Rightarrow [3x] = 3$

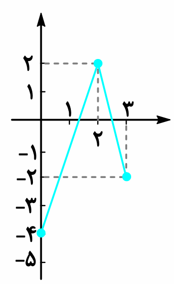
$4 \le 3x < 5 \Rightarrow [3x] = 4$

$5 \le 3x < 6 \Rightarrow [3x] = 5$

$3x = 6 \Rightarrow [3x] = 6$

۸- متوسط

$-2f(x)$ به معنای ۲ برابر کردن عرض نقاط و قرینه کردن شکل نسبت به محور xهاست پس



۹- متوسط

$D_f = x \neq -5\ ,\ D_g = 3 - x \ge 0 \Rightarrow 3 \ge x$

آ) $\{D_f \cap D_g\} = \{x \le 3\} - \{-5\} = (-\infty, +3] - \{-5\}$

$f + g = \frac{x-2}{x+5} + \sqrt{3-x}$

ب) $D_{\frac{f}{g}} = \{D_f \cap D_g\} - \{g(x) = 0\} = \{(-\infty, +3] - \{-5\}\} - \{3\}$

$= (-\infty, 3) - \{5\}$

۱۰- متوسط

$f(x) = |x-2| + 1$

ریشه داخل قدرمطلق $x = 2$ است و با محدود کردن دامنه به صورت $[2, +\infty)$ تابع یک‌به‌یک می‌شود:

$y = |x-2| + 1 \xrightarrow{x \ge 2} y = x - 2 + 1 \Rightarrow y = x - 1$

$\Rightarrow y + 1 = x \Rightarrow x + 1 = f^{-1}(x)$

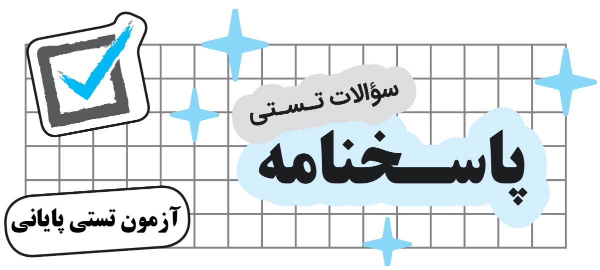
۱۱- متوسط

$f(x) = \frac{3x}{[x] + [-x]}$

$[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

همونطوری که از تعریف عبارت مخرج مشخصه، اگر $x \in \mathbb{Z}$، اونوقت مخرج صفر می‌شه پس دامنه تابع f به‌صورت $x \notin \mathbb{Z}$ است یا:

$D_f = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$



۱- گزینه «۲» دشوار

حواستون باشه‌ها! وارون کردن بعضی از توابع کار ساده‌ای نیست پس بهتر آن است که f را با نیمساز ناحیه اول و سوم قطع دهیم. بجای آنکه f و f^{-1} را قطع دهیم چون اگر تابع f، f^{-1} را قطع کرده باشد این تقاطع روی نیمساز ناحیه اول و سوم اتفاق افتاده است.

حالا چون f, f^{-1} نسبت به $y = x$ قرینه‌اند، خود f نیز $y = -x$ را قطع می‌کند.

$x - \frac{2}{x} = -x \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \Rightarrow f(x) = 1$

چون حالا که نمودار f خط $y = x$ را در نقطهٔ $(-1, 1)$ قطع می‌کند پس f^{-1} را در نقطه $(1, -1)$ قطع می‌کند پس $x = 1$

۲- گزینه «۳» متوسط

چون $g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است پس $g(12)$ یعنی در تابع f بجای y از ۱۲ استفاده کنیم و $g(6)$ یعنی در تابع $f(x)$ بجای y از ۶ استفاده کنیم:

$x + \sqrt{x} = 12 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 12 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 4)(\sqrt{x} - 3) = 0$

غ ق ق $\sqrt{x} = -4\ ,\ \sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9 \Rightarrow g(12) = 9$

$x + \sqrt{x} = 6 \Rightarrow x + \sqrt{x} - 6 = 0 \Rightarrow (\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 2) = 0$

غ ق ق $\sqrt{x} = -3\ ,\ \sqrt{x} = 2 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow g(6) = 4$

پس: $13 = 9 + 4 = g(4) + g(12)$

۳- گزینه «۴» — متوسط

در ابتدا برای به دست آوردن f^{-1} باید تابع یک به یک باشد چون $f(x)$ در بازهٔ $x \ge 1$ هست پس $f(x)$ یک به یک است. $f(x)$ را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x)=x^2-2x+1-4$$

$$f(x)=(x-1)^2-4 \Rightarrow y=(x-1)^2-4$$

$$\Rightarrow y+4=(x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{y+4}=x-1$$

$$\sqrt{y+4}+1=x \Rightarrow \sqrt{x+4}+1=f^{-1}(x)$$

چون درباره نقطهٔ تقاطع f^{-1} و g صحبت شده است پس باید $y_1=y_2$

$$\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2}$$

$$2\sqrt{x+4}+2=x-9 \Rightarrow 2\sqrt{x+4}=x-11$$

$$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} 4(x+4)=x^2-22x+121$$

$$4x+16=x^2-22x+121 \Rightarrow x^2-26x+105=0$$

$$\Rightarrow (x-21)(x-5)=0$$

$$x_1=21,\ x_2=5 \xrightarrow{\text{صدق در معادله}}$$

$$\begin{cases} x_1=21 \Rightarrow 2\sqrt{21+4}=21-11 \Rightarrow 10=10 \ (\text{ق ق}) \\ x_2=5 \Rightarrow 2\sqrt{5+4}=5-11 \Rightarrow 6=-6 \ (\text{غ ق ق}) \end{cases}$$

۴- گزینه «۳» — متوسط

با جایگذاری $\Rightarrow x=3 \Rightarrow y=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4} \Rightarrow (3,\frac{1}{4})\in f$

$$(\frac{1}{4},3)\in f^{-1} \Rightarrow 3=\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}a \Rightarrow 3=\frac{3a}{4} \Rightarrow a=4$$

۵- گزینه «۱» — متوسط

$$x^2+x<0 \Rightarrow x(x+1)<0$$

x		-1		0	
	+		− (ج)		+

$(-1,0)$

$$\left.\begin{array}{ll} -1<x<0 & \Rightarrow [x]=-1 \\ 0<x^2<1 & \Rightarrow [x^2]=0 \\ -1<x^3<0 & \Rightarrow [x^3]=-1 \\ 0<x^4<1 & \Rightarrow [x^4]=0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{مجموع}} -2$$

۶- گزینه «۲» — متوسط

$$f(1)=2+2a=a+5 \Rightarrow a=3 \Rightarrow f(3)=3(3)^2+5=32$$

۷- گزینه «۴» — آسان

شرط متقاطع بودن

$$y_1=y_2 \Rightarrow 2x+b=ax^2+bx-3 \xrightarrow[\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}]{b=2} -2+2=a-2-3$$

$$0=a-5 \Rightarrow 5=a$$

$$\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix} \Rightarrow 0=-2+b \Rightarrow b=2$$

۸- گزینه «۲» — متوسط

$$\frac{ax-1}{3x+1}=\frac{5+x}{7} \Rightarrow 7ax-7=16x+3x^2+5$$

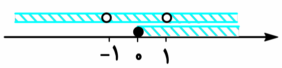
$$3x^2+x(16-7a)+12=0$$

$$(16-7a)^2-144=0 \Rightarrow \begin{cases} a=4 \Rightarrow \text{ناحیه اول} \ ✓ \\ a=\frac{4}{7} \end{cases}$$

۹- گزینه «۲» — متوسط

رادیکال $D: x \ge 0$

کسر $D: |x|-1 \ne 0 \Rightarrow |x| \ne 1 \Rightarrow x \ne \pm 1$



اشتراک دو جواب

$$[0,+\infty)-\{1\}$$

۱۰- گزینه «۲» — متوسط

$$y=1 \Rightarrow 10-x=-10 \Rightarrow x=20 \Rightarrow (20,1)\in f$$

$$(1,20)\in f^{-1} \Rightarrow 1+6+a+1=20 \Rightarrow a=12$$

۱۱- گزینه «۱» — دشوار

$$|x|-x^2 \ge 0 \Rightarrow |x| \ge x^2 \xrightarrow{x\ge 0} x \ge x^2 \Rightarrow 0 \ge x^2-x$$

$$\Rightarrow 0 \ge x(x-1)$$

x		0		1	
	+		− (ج)		+

$\Rightarrow [0,1]$

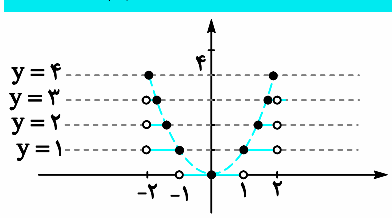
$$\xrightarrow{x<0} -x \ge x^2 \Rightarrow 0 \ge x^2+x \Rightarrow 0 \ge x(x+1) \Rightarrow$$

x		-1		0	
	+		−		+

$\Rightarrow [-1,0]$

از اجتماع دو جواب $-1 \le x \le 1$ حاصل می‌شود.

۱۲- گزینه «۴» — دشوار



۱۳- گزینه «۲» آسان

$[x^۲+x]=-۱ \Rightarrow \underbrace{-۱\le x^۲+x}_{\text{همواره برقرار}}<۰ \Rightarrow x^۲+x<۰$

$x(x+۱)<۰$

x		-۱		۰	
	$+$		$-$ ج		$+$

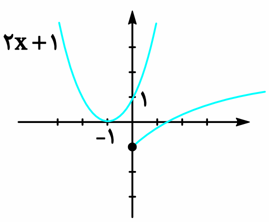
$-۱<x<۰ \Rightarrow [x^{۲۰}]=۰$

۱۴- گزینه «۴» متوسط

$f(x)=(x+۱)^۲ \Rightarrow y=(x+۱)^۲ \Rightarrow x=(y+۱)^۲ \Rightarrow \sqrt{x}=y+۱$

$\sqrt{x}-۱=y=f^{-۱}(x)$

$\mathbf{\sqrt{x}-۱=x^۲+۲x+۱}$



روش دوم استفاده از محل تقاطع با نیمساز ربع اول و سوم و Δ است.

۱۵- گزینه «۱» متوسط

$D_f=\{x-۱\ge ۰\} \Rightarrow x\ge ۱$

$R_f=\{\sqrt{x-۱}\ge ۰\} \Rightarrow -\sqrt{x-۱}<۰ \Rightarrow ۲-\sqrt{x-۱}<۲ \Rightarrow y\le ۲$

$f(x)=y=۲-\sqrt{x-۱} \Rightarrow x=۲-\sqrt{y-۱}$

$\Rightarrow x-۲=-\sqrt{y-۱} \Rightarrow x^۲-۴x+۴=y-۱$

$x^۲-۴x+۵=y=f^{-۱}(x) \Rightarrow D_{f^{-۱}}=R_f=\{x\le ۲\}$

۱۶- گزینه «۲» متوسط

$f^{-۱}(x)=\frac{۲x+۴}{x-۱}$

$\frac{۲x+۴}{x-۱}=\frac{x+۴}{x-۲}$ بدون حل معادله و با رد می‌توان به گزینه ۲ رسید از حل محل برخورد به‌دست می‌آید.

۱۷- گزینه «۲» متوسط

نسبت به نیمسازهای اول و سوم متقارن‌اند یعنی معکوس یکدیگرند پس:

$\frac{۲x}{۳}-\frac{b}{۳}=y \Rightarrow \frac{۲}{۳}y-\frac{b}{۳}=x \Rightarrow \frac{۲}{۳}y=x+\frac{b}{۳} \Rightarrow y=\frac{۳}{۲}x+\frac{b}{۲}$

چون این معادله با خط $y=-\frac{a}{b}x+\frac{۸}{b}$ باید برابر باشد پس:

$-\frac{a}{b}=\frac{۳}{۲}, \frac{b}{۲}=\frac{۸}{b} \Rightarrow b^۲=۱۶ \Rightarrow b=\pm ۴$

$b=۴ \Rightarrow -\frac{a}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=-۶ \Rightarrow a+b=-۲$

$b=-۴ \Rightarrow \frac{a}{۴}=\frac{۳}{۲} \Rightarrow a=۶ \Rightarrow a+b=۲$

۱۸- گزینه «۴» آسان

$D_f\cap D_g=\{۱,۲,۳\}-\{۳\}=\{۱,۲\}$

$\frac{۲f(۱)}{g(۱)}=\frac{۴}{۵} \Rightarrow (۱,\frac{۴}{۵})$

$\frac{۲f(۲)}{g(۲)}=\frac{۶}{۶}=۱ \Rightarrow (۲,۱)$

۱۹- گزینه «۳» متوسط

$\{D_f\cap D_g\}-\{g(x)=۰\}=\{۲,۶\}-\{\}=\{۲,۶\}$

$\left.\begin{array}{l} D_f: x\ge ۲ \\ D_g=\{۰,۱,۲,۶\}\end{array}\right. \Rightarrow D_f\cap D_g=\{۲,۶\}$

$\frac{f}{g}(۲)=۰$

$\frac{f}{g}(۶)=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}$

۲۰- گزینه «۴» متوسط

$D_f: ۴-x^۲\ge ۰ \Rightarrow ۴\ge x^۲ \Rightarrow -۲\le x\le ۲$

$D_g: x^۲-۱\ne ۰ \Rightarrow x^۲=\pm ۱, x\ge ۰ \Rightarrow [۰,+\infty)-\{۱\}$

$D_{f-g}=D_f\cap D_g=[۰,۲]-\{۱\}$

$D_{\frac{f-g}{f}}=\{D_{f-g}\cap D_f\}-\{f(x)=۰\} \Rightarrow \{[۰,۲]-\{۱\}\}-\{\pm ۲\}$

$=[۰,۲)-\{۱\}$

پاسخنامه سؤالات تستی
آزمون پلاس

۱- گزینه «۲»

چون دامنه f به صورت $\mathbb{R}-\{۲\}$ است و در مخرج عبارت درجه دو نوشته شده است پس حتماً عبارت مخرج مربع کاملی با ریشه ۲ بوده است پس

$$(x-۲)^۲ = x^۲ - ۴x + ۴ \xrightarrow{\times ۲} ۲x^۲ - ۸x + ۸$$

با مقایسه عبارت به دست آمده با عبارت موجود در مخرج کسر متوجه می‌شویم که $b=-۸, c=۸$ است.

همچنین با توجه به نمودار f می‌توان متوجه شد که عبارت صورت مضربی از عبارت مخرج بوده است و دارای ریشه ۲ است پس

$$۲a - ۶ = ۰ \Rightarrow a = ۳$$

$$a^۲ - b^۲ + ۲c = ۳ - ۶۴ + ۱۶ = -۵۱$$

۲- گزینه «۴»

با توجه به تابع f که رادیکال فرجه زوج در مخرج دارد دامنه آن باید $۰ <$ زیررادیکال باشد پس:

$$۳x^۲ - bx + c > ۰$$

با توجه به دامنهٔ داده شده حتماً عبارت $۳x^۲ - bx + c$ همواره مثبت بوده است و به ازای ۱ فقط صفر می‌شده است که دامنهٔ آن را $\mathbb{R}-\{۱\}$ اعلام کرده است پس:

$$(x-۱)^۲ = x^۲ - ۲x + ۱ \xrightarrow{\times ۳} ۳x^۲ - ۶x + ۳ \Rightarrow b = ۶, c = ۳$$

درنتیجه $|c-b| = |۳-۶| = ۳$

۳- گزینه «۲»

با توجه به دامنهٔ رادیکال فرجه زوج در صورت:

$$(۳-[x])([x]-۱) \geq ۰$$

$$\begin{cases} ۳-[x] \geq ۰ \Rightarrow ۳ \geq [x] \Rightarrow [x] = ۳, ۲, ۱, ۰, -۱, \ldots \\ [x]-۱ \geq ۰ \Rightarrow [x] \geq ۱ \Rightarrow [x] = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, \ldots \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} [x] = ۱, ۲, ۳$$

$$[x] = ۱ \Rightarrow ۱ \leq x < ۲$$

$$[x] = ۲ \Rightarrow ۲ \leq x < ۳$$

$$[x] = ۳ \Rightarrow ۳ \leq x < ۴$$

$$\begin{cases} ۳-[x] \leq ۰ \Rightarrow ۳ \leq [x] \Rightarrow [x] = ۳, ۴, ۵, \ldots \\ [x]-۱ \leq ۰ \Rightarrow [x] \leq ۱ \Rightarrow [x] = ۱, ۰, -۱, \ldots \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} \text{تهی}$$

اجتماع بازه جواب‌ها $[۱, ۴)$

از اجتماع دو مجموعه جواب به دست آمده $[۱, ۴)$ جواب نهایی است.

۴- گزینه «۱»

$$xf^{-۱}(x) \geq ۰$$

$$D_f = [-۲, ۲] \ , \ R_f = [-۱, ۴]$$

ریشه‌های عبارت $xf^{-۱}(x)$ را می‌یابیم.

$$D_{f^{-۱}} = [-۱, ۴], R_f = [-۲, ۲]$$

$$f^{-۱}(x) = ۰ \Rightarrow (x, ۰) \in f^{-۱}$$

$$x = ۰ \Rightarrow$$

$$(۰, x) \in f$$

درنتیجه $f(۰) = ۲$ است پس ریشهٔ $f^{-۱}$ عدد ۲ است.

x	−۱	۰	۲	۴
x	−	+	+	
f^{-}	−	−	+	
$xf^{-}(x)$	+	−	+	
	ج ج		ج ج	

جواب کل: $[-۱, ۰] \cup [۲, ۴]$

۵- گزینه «۳»

ابتدا به جای xها مقدار ۱ را جایگذاری می‌کنیم تا $f(۱)$ را به دست آوریم

$$x = ۱ \Rightarrow f(۱f(۱)) = ۳f(۱) \xrightarrow{f(۱)=۲} f(۲) = ۳(۲)$$

$$f(۲) = ۶$$

حالا به جای xها مقدار ۲ را جایگذاری می‌کنیم:

$$x = ۲ \Rightarrow f(۲f(۲)) = ۳f(۲) \xrightarrow[f(۲)=۶]{} f(۱۲) = ۳(۶) = ۱۸$$

$$f(۱۲) = ۱۸$$

۶- گزینه «۲»

اگر f تابعی خطی باشد

$$f(x) = ax + b$$

$$f(۲-x) = a(۲-x) + b = ۲a - ax + b = -ax + ۲a + b$$

$$f(x-۱) = a(x-۱) + b = ax - a + b = ax - a + b$$

پس

$$-ax + ۲a + b - ax + a - b = ۳x - m$$

$$-۲ax + ۳a = ۳x - m$$

$$-۲a = ۳ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

$$۳a = -m \Rightarrow ۳(-\frac{۳}{۲}) = -m \Rightarrow m = \frac{۹}{۲}$$

$$f(۲m-۱) = f(۲(\frac{۹}{۲}) - ۱) = f(۸) = -\frac{۳}{۲}(۸) + b = -۱۲ + b$$

$$f(۴m) = f(۴(\frac{۹}{۲})) = f(۱۸) = -\frac{۳}{۲}(۱۸) + b = -۲۷ + b$$

$$-۱۲ + b + ۲۷ - b = ۱۵$$

۷- گزینه «۱»

ابتدا f را به صورت مربع کامل می‌نویسیم:

$$f(x)=x^{۲}-x+\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}$$

$$f(x)=(x-\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}\xrightarrow[R:[-\frac{۱}{۴},+\infty)]{D:[\frac{۱}{۲},+\infty)} f^{-۱}(x)=\sqrt{x+\frac{۱}{۴}}+\frac{۱}{۲}$$

$$D_{f^{-۱}}=[-\frac{۱}{۴},+\infty)$$

۸- گزینه «۲»

$$f(x)=۳-\sqrt{۱-x}\ \Rightarrow\ f^{-۱}(x)=-(-x+۳)^{۲}+۱$$

$$D_f:۱-x\geq ۰\ \Rightarrow\ ۱\geq x \qquad f^{-۱}(x)=-(x^{۲}-۶x+۹)+۱$$

$$R_f:(-\infty,۳] \qquad f^{-۱}(x)=-x^{۲}+۶x-۹+۱$$

$$f^{-۱}(x)=-x^{۲}+۶x-۸ \quad D_{f^{-۱}}:x\leq ۳$$

۹- گزینه «۳»

قرینهٔ تابع f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم به معنای یافتن وارون تابع f است.

$$f^{-۱}(x)=\frac{۳x-۶}{۴x-۱}=g(x)$$

$$g(x-۱)=\frac{۳(x-۱)-۶}{۴(x-۱)-۱}=\frac{۳x-۳-۶}{۴x-۴-۱}=\frac{۳x-۹}{۴x-۵}$$

محل برخورد با محور xها به معنای $y=۰$ است پس:

$$\frac{۳x-۹}{۴x-۵}=۰$$

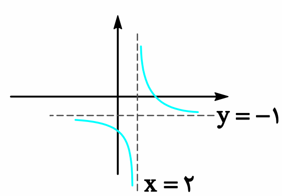
$$۳x-۹=۰\ \Rightarrow\ ۳x=۹\ \Rightarrow\ x=۳$$

۱۰- گزینه «۱»

ابتدا ضابطه‌های $f(x)$ و $g(x)$ را با توجه به معادله خط‌ها می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+b\ \Rightarrow\ f(x)=x-۲ \\ g(x)=ax+b\ \Rightarrow\ g(x)=-x \end{array}\right. \xrightarrow{\text{پس}} \frac{g}{f}=\frac{-x}{x-۲} \quad D:x\neq ۲$$

این تابعی هموگرافیک است پس



۱۱- گزینه «۳»

حاصل جمع دو براکت که عدد صحیح است عددی صحیح باید باشد پس x عددی صحیح است. همچنین چون می‌دانیم عدد صحیح از داخل براکت خارج می‌شود پس

$$x+[\frac{۳}{۷}]+۲x+[-\frac{۲۴}{۷}]=x+۶$$

$$۳x-۴=x+۶\ \Rightarrow\ ۲x=۱۰\ \Rightarrow\ x=۵$$

درنتیجه $[\frac{-۵+۲}{۲}]=[-\frac{۳}{۲}]=[-۱/۵]=-۲$

۱۲- گزینه «۲»

$$۶\leq ۲x^{۲}-۳<۷$$

$$۶\leq x^{۲}+۱<۷$$

طرفین را با هم جمع کنیم:

$$۱۲\leq ۳x^{۲}-۲<۱۴$$

پس $[۳x^{۲}-۲]$ شامل اعداد صحیح ۱۲ و ۱۳ خواهد بود.

۱۳- گزینه «۲»

چون خط $۵y-۱۰x=۱۲$ را در نقطه‌ای به عرض ۷/۲ قطع می‌کند پس نقطه $(x,۷/۲)$ در خط صدق می‌کند:

$$۵(۷/۲)-۱۰x=۱۲$$

$$۳۶-۱۲=۱۰x\ \Rightarrow\ x=۲/۴$$

اگر $(۲/۴,۷/۲)\in f^{-۱}$ باشد پس $(۷/۲,۲/۴)\in f$

$$۲/۴=\sqrt{۷/۲}\sqrt{۷/۲m-۱}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{طرفین}}۲/۴\times ۲/۴=۷/۲(۷/۲m-۱)$$

$$۰/۸=۷/۲m-۱\ \Rightarrow\ ۱/۸=۷/۲m\ \Rightarrow\ m=\frac{۱}{۴}$$

$$f(\frac{۴}{m})=f(۱۶)=\sqrt{۱۶}\sqrt{۱۶(\frac{۱}{۴})-۱}=(۴)(\sqrt{۳})=۴\sqrt{۳}$$

۱۴- گزینه «۲»

چون x باید عدد صحیح باشد پس $(y^{۲}-۱)$ باید شمارنده ۷۲ باشد پس

$$y^{۲}-۱=۱\ \Rightarrow\ y^{۲}=۰\ \Rightarrow\ y=۰$$

$$\left.\begin{array}{l} y^{۲}-۱=۳\ \Rightarrow\ y^{۲}=۴\ \Rightarrow\ y=\pm ۲ \\ y^{۲}-۱=۸\ \Rightarrow\ y^{۲}=۹\ \Rightarrow\ y=\pm ۳ \\ y^{۲}-۱=۲۴\ \Rightarrow\ y^{۲}=۲۵\ \Rightarrow\ y=\pm ۵ \end{array}\right\}\Rightarrow$$

xهای یکسان و y متفاوت ایجاد می‌کنند.

پس با حذف حداقل ۳ عضو f تابع می‌شود.

۱۵- گزینه «۱»

ضابطه $f(x)$ را مرتب می‌نویسیم پس:

$$f(x)=\begin{cases}2-3x & x\le -\frac{3}{2}\\ 2+2mx-x^2 & x>-\frac{3}{2}\end{cases}$$

در ضابطه اول با توجه به $x\le-\frac{3}{2}$ برد ضابطه اول را به دست می‌آوریم:

$$R_f=[\frac{13}{2},+\infty)$$

پس به ازای $x=-\frac{3}{2}$، ضابطه دوم باید کم‌تر از $\frac{13}{2}$ یا در نهایت مساوی $\frac{13}{2}$ باشد پس

$$2+2m(-\frac{3}{2})-(-\frac{3}{2})^2\le\frac{13}{2}\Rightarrow 2-\frac{9}{4}-3m\le\frac{13}{2}\Rightarrow -3m\le\frac{13}{2}+\frac{1}{4}$$

$$m\ge-\frac{9}{4}\quad (1)$$

همچنین چون شرط وارون‌پذیری یک‌به‌یک بودن تابع است و سهمی به طور کلی یک به‌یک نیست پس با توجه به رأس سهمی

$$x_S=m\Rightarrow 2+2m^2-m^2<\frac{13}{2}\Rightarrow m^2+2<\frac{13}{2}\Rightarrow m^2<\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{-3}{\sqrt{2}}<m<\frac{3}{\sqrt{2}}\quad(2)$$

از اشتراک دو شرط (۱) و (۲) داریم: $m=-2$

$$f^{-1}(19)=\alpha\Rightarrow f(\alpha)=-19\Rightarrow 2-4\alpha-\alpha^2=-19\Rightarrow$$

$$\alpha^2+4\alpha-21=0\Rightarrow(\alpha-3)(\alpha+7)=0\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-7 & \text{غ ق ق}\\ \alpha=3 & \text{قق}\end{cases}$$

۱۶- گزینه «۳»

فرض کنید ریشه‌های $2x^2-ax+b=0$، α,β باشند پس ریشه‌های $2ax^2+ax-6=0$ به‌صورت $\alpha-\frac{1}{2},\beta-\frac{1}{2}$ خواهد بود. در هر دو معادله s و p معادله را به دست می‌آوریم:

$$2x^2-ax+b=0\Rightarrow s=\alpha+\beta=\frac{a}{2}\quad,\quad p=\alpha\beta=\frac{b}{2}$$

$$2ax^2+ax-6=0\Rightarrow s=\alpha-\frac{1}{2}+\beta-\frac{1}{2}=-\frac{a}{2a}\Rightarrow\alpha+\beta-1=-\frac{1}{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha+\beta=\frac{a}{2}\ \text{جایگذاری}}\frac{a}{2}-1=-\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=1$$

همچنین برای p در این معادله داریم:

$$p=(\alpha-\frac{1}{2})(\beta-\frac{1}{2})=\alpha\beta-\frac{1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{4}=\frac{b}{2}-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)+\frac{1}{4}=$$

$$\frac{b}{2}-\frac{1}{2}(\frac{1}{2})+\frac{1}{4}=-\frac{3}{a}$$

$$\frac{b}{2}=\frac{-3}{1}\Rightarrow b=-6$$

$$[\frac{ab}{4}]=[-\frac{6}{4}]=[-1.5]=-2$$

۱۷- گزینه «۴»

محل برخورد f^{-1} با $y=12-x$ نقطه‌ای است به عرض ۱۰

با جایگذاری $y=10$ در $y=12-x$ محل برخورد f^{-1} با y نقطهٔ $(2,10)$ به دست می‌آید پس $(10,2)$ در تابع f صدق می‌کند.

$$2=\sqrt{10-2\sqrt{10m-1}}\Rightarrow 4=10-2\sqrt{10m-1}$$

$$2\sqrt{10m-1}=6\Rightarrow\sqrt{10m-1}=3\Rightarrow 10m-1=9$$

$$\Rightarrow 10m=10\Rightarrow m=1$$

سوال $f(1+4)$ را می‌خواهد درنتیجه:

$$f(5)=\sqrt{5-2\sqrt{5-1}}=\sqrt{5-4}=1$$

۱۸- گزینه «۲»

اگر (x,y) عبور کند پس خود تابع f از (y,x) عبور می‌کند پس می‌توان وارون گزینه‌ها را در صورت سوال امتحان کرد و با رد گزینه به جواب درست رسید.

$$1)\ (-1,-2)\xrightarrow{f^{-1}}(-2,-1)\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{}-1=(-2)^3-(-2)+1$$

$$\Rightarrow -1\ne-8+2+1$$

$$2)\ (\frac{5}{8},\frac{1}{2})\xrightarrow{f^{-1}}(\frac{1}{2},\frac{5}{8})\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{}\frac{5}{8}=(\frac{1}{2})^3-(\frac{1}{2})+1$$

$$\Rightarrow\frac{5}{8}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+1\quad\checkmark$$

$$3)\ (1,2)\xrightarrow{f^{-1}}(2,1)\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{}1=2^3-2+1\Rightarrow 1\ne 8-2+1$$

$$4)\ (-\frac{1}{2},-\frac{11}{8})\xrightarrow{f^{-1}}(-\frac{11}{8},-\frac{1}{2})\xrightarrow[\text{جایگذاری}]{}-\frac{1}{2}\ne(-\frac{11}{8})^3-(-\frac{11}{8})+1$$

۱۹-گزینه «۴»

ابتدا عبارت داده شده را تعیین علامت کنید:

$$۴-۲x=۰ \Rightarrow ۴=۲x \Rightarrow x=۲$$

$$۳x+۱=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

x		$-\frac{۱}{۳}$		۲	
$۴-۲x$	+		+	۰	+
$۳x+۱$	−	۰	+		+
y	−	ت ن	+ ج	۰	−

$$\Rightarrow (-\frac{۱}{۳}, ۲]$$

پس $-\frac{۱}{۳} < x \leq ۲$ است حاصل طرفین در عدد ۳ ضرب شود تا $۳x$ ساخته شود:

$$-۱ < ۳x \leq ۶$$

$[۳x]$ به معنای اعداد صحیح بین ۱- تا ۶ است پس

$$[۳x] = -۱, ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶$$

۲۰- گزینه «۴»

حواستون باشه‌ها! نقطهٔ تلاقی دو نمودار یعنی دو نمودار y, x یکسانی دارند پس

$$۲y = x^۲ \Rightarrow y = \frac{x^۲}{۲} \xrightarrow[\text{جایگذاری}]{} x = \sqrt{\frac{x^۲}{۲}+۳} - \sqrt{\frac{x^۲}{۲}-۳}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \cancel{x^۲} = \frac{x^۲}{۲} + \cancel{۳} + \frac{x^۲}{۲} - \cancel{۳} - ۲\sqrt{\frac{x^۴}{۴}-۹}$$

$$\cancel{x^۲} = \cancel{x^۲} - ۲\sqrt{\frac{x^۴}{۴}-۹} \Rightarrow \frac{x^۴}{۴} - ۹ = ۰ \Rightarrow \frac{x^۴}{۴} = ۹$$

$$\Rightarrow x^۴ = ۳۶ \Rightarrow x = \sqrt{۶}$$

با جایگذاری x در عبارت $y = \frac{x^۲}{۲} \leftarrow y = \frac{۶}{۲} = ۳$

بنابراین نقطه تلاقی دو شکل $(\sqrt{۶}, ۳)$ است پس فاصلهٔ آن تا مبدا مختصات:

$$\sqrt{(\sqrt{۶})^۲ + ۳^۲} = \sqrt{۶+۹} = \sqrt{۱۵}$$