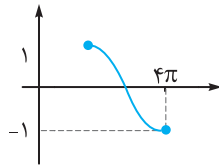


فصل چهارم - بخش ۲ تستی - سوال ۲۷

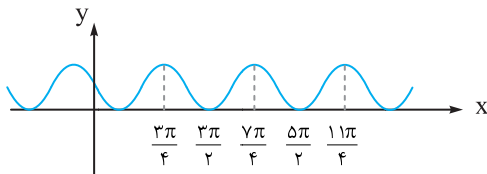
$$\tan ۹۶ + \tan ۱۱ + \tan ۶۹ + \tan ۸۴$$

فصل چهارم - بخش ۳ تستی - سوال ۱ - گزینه «۱» برابر ۱/۵ است.

فصل چهارم - بخش ۳ تستی - سوال ۱۲ - شکل صحیح سؤال



فصل چهارم - بخش آزمون تستی پایانی - سوال ۵ - شکل صحیح صورت سوال:



فصل چهارم - بخش آزمون تستی پلاس - سوال ۹ $y = a \sin bx + c$

آسان

-۴

با در نظر گرفتن $\pi = 3/14$ داریم:

$$\text{آ) } 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57/3^\circ$$

$$\text{ب) } 3 \text{ rad} = 3(57/3^\circ) = 171/9^\circ$$

$$\text{پ) } 5 \text{ rad} = 5(57/3^\circ) = 286/5^\circ$$

آسان

-۵

برای تبدیل درجه به رادیان داریم:

$$\alpha = \frac{\cancel{360}^\circ}{\cancel{360}^\circ} \pi = \frac{\pi}{9} \text{ rad}$$

و برای محاسبه طول کمان فرمول $L = r\theta$ را داریم که r شعاع دایره و θ زاویه مرکزی روبه‌رو به کمان برحسب رادیان هست.

$$L = 2 \times \frac{\pi}{9} = \frac{2\pi}{9} \text{ cm}$$

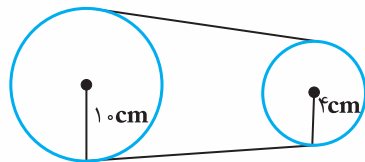
متوسط

-۶

می‌دونیم که قرقه‌ها یا تسمه به هم وصل هستند و بنابراین هرچقدر یکی از قرقه‌ها بچرخد و مسافت L را طی کند، قرقه دوم هم همون مسافت رو با همان طول L طی می‌کنه و فقط زاویه چرخش اون‌ها متفاوت هست (به خاطر تفاوت طول شعاع‌ها) پس:

$$l_1 = l_2 \xrightarrow{l=r\theta} r_1\theta_1 = r_2\theta_2 \Rightarrow \cancel{5}^\circ \times \frac{\pi}{\cancel{4}} = 4\theta_2$$

$$\Rightarrow \theta_2 = \frac{\frac{5}{4}\pi}{4} = \frac{5\pi}{8} \text{ rad}$$



قرقه کوچک‌تر به اندازه $\frac{5\pi}{8}$ رادیان می‌چرخد.



آسان

-۱

در هر دایره، یک رادیان، اندازه زاویه مرکزی روبه‌روی کمانی از دایره است که طول کمان برابر طول شعاع دایره باشد. نماد رادیان rad است. اگر $\pi = 3/14$ در نظر بگیریم، آن‌گاه یک رادیان تقریباً برابر $57/3^\circ$ به دست می‌آید و می‌توان گفت که یک دور دایره مثلثاتی حدوداً ۶ رادیان است. به عبارتی

$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ \Rightarrow 1 \text{ rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57/3^\circ$$

آسان

-۲

برای تبدیل درجه به رادیان از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\pi}{180} = \frac{R}{D}$$

که در آن D نماد درجه و R نماد رادیان است.

$$\text{آ) } D = 45^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{180} = \frac{R}{D} \Rightarrow R = \frac{\cancel{45}^\circ}{\cancel{180}^\circ} \pi = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\text{ب) } D = 120^\circ \Rightarrow \frac{\pi}{180} = \frac{R}{120} \Rightarrow R = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$\text{پ) } D = 315^\circ \Rightarrow R = \frac{\cancel{315}^\circ}{\cancel{180}^\circ} \pi \Rightarrow R = \frac{7\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\text{ت) } D = 1^\circ \Rightarrow R = \frac{1^\circ}{180} \pi = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

آسان

-۳

برای تبدیل رادیان به درجه هم می‌تونیم از فرمول $\frac{\pi}{180} = \frac{R}{D}$ استفاده کنیم.اما به راه آسون‌تر اینه که به جای π قرار بدیم 180° و ساده کنیم

$$\text{آ) } \frac{\pi}{20} = \frac{180^\circ}{20} = 9^\circ$$

$$\text{ب) } \frac{2\pi}{3} = \frac{2 \times \cancel{180}^\circ}{\cancel{3}} = 120^\circ$$

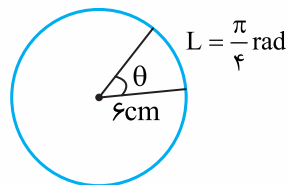
$$\text{پ) } \frac{4\pi}{5} = \frac{4 \times \cancel{180}^\circ}{\cancel{5}} = 144^\circ$$

-۷

متوسط

قطاع هر دایره بخشی از دایره است که توسط دو شعاع و بخشی از محیط دایره (کمان) محدود شده است. فرمول مساحت قطاع به صورت زیر است:

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta$$



با استفاده از فرمول L اندازه زاویه θ را بیابیم و سپس در فرمول S جاگذاری کنیم:

$$L = r\theta \Rightarrow \frac{\pi}{4} = 6\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{24}$$

$$S = \frac{1}{2} (6)^2 \times \frac{\pi}{24} = \frac{36}{2} \times \frac{\pi}{24} = \frac{3\pi}{4}$$

-۸

دشوار

این دو زاویه برحسب درجه رو α, β در نظر می‌گیریم:

$$\alpha - \beta = 36^\circ$$

چون در نهایت، اندازه زاویه‌ها رو برحسب درجه خواسته پس رابطه رو هم به درجه تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{\alpha}{180} \pi + \frac{\beta}{180} \pi = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{180} \pi = \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \alpha + \beta = 72$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 72^\circ \\ \alpha - \beta = 36^\circ \end{cases}$$

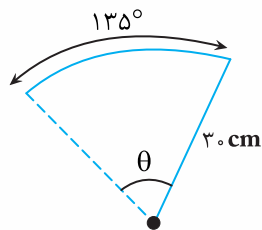
$$2\alpha = 108$$

$$\alpha = 54^\circ \Rightarrow 54 + \beta = 72 \Rightarrow \beta = 72 - 54 = 18^\circ$$

-۹

متوسط

$$\theta = \frac{135}{180} \pi = \frac{3\pi}{4} \text{ rad (آ)}$$



(ب) اندازه کمان برحسب رادیان $\frac{3\pi}{4}$ است برای تبدیل به سانتی‌متر کافیست $\pi = 3/14$ را در نظر بگیریم:

$$L = r\theta = 3 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} = \frac{9 \times 3/14}{4} = 141/3 \text{ cm}$$



(پ) مسافتی که نوک برف پاک‌کن در یک رفت و برگشت طی می‌کند، دو برابر طول کمان یعنی $2L$ است:

$$2L = 2(141/3) = 282/6 \text{ cm}$$

(ت) مساحت پاک شده همان مساحت قطاع دایره‌ای است که برف پاک‌کن شعاع آن است.

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} \times (30)^2 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{900}{2} \times \frac{3 \times 3/14}{4} = 1059/7 \text{ cm}$$

آسان

-۱۰

گفتیم مساحت قطاع از فرمول $S = \frac{1}{2} r^2 \theta$ به دست میاد پس باید اول θ رو پیدا کنیم. به سراغ فرمول L می‌رویم:

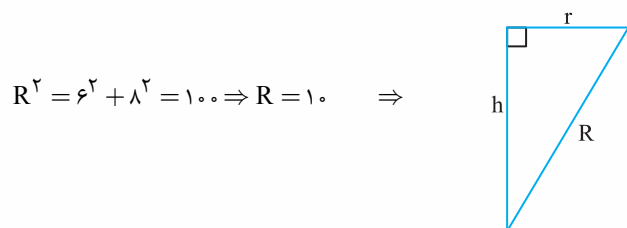
$$L = r\theta \Rightarrow \theta = \frac{L}{r} = \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{1}{2} (3)^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{9}{2} \times \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2}$$

دشوار

-۱۱

در تبدیل مخروط به شکل باز شده، همان‌طوری‌که از شکل زیر پیداست، طول کمان L برابر محیط قاعده مخروط اولیه است. همچنین شعاع این قطاع از رابطه فیثاغورس در مثلث زیر به دست می‌آید:

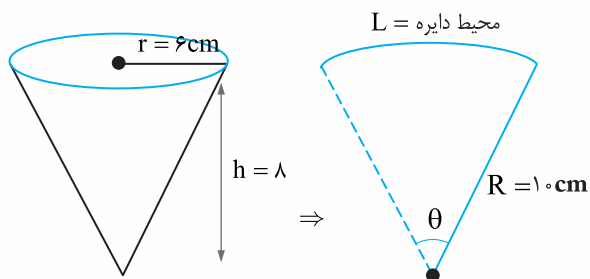


$$R^2 = 6^2 + 8^2 = 100 \Rightarrow R = 10 \Rightarrow$$

(آ)

$$L = 2\pi r = 2\pi(6) = 12\pi$$

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{12\pi}{6} = \frac{6\pi}{5}$$



(ب)

$$S = \frac{1}{2} r^2 \theta = \frac{1}{2} (10)^2 \times \frac{6\pi}{5} = \frac{100}{2} \times \frac{6\pi}{5} = 60\pi$$



متوسط

۵- گزینه «۳»

مسافت طی شده 6π است یعنی $L = 6\pi$

طول عقربه برابر شعاع دایره است پس $r = 15 \text{ cm}$

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{6\pi}{15} = \frac{2\pi}{5}$$

یعنی نوک عقربه، زاویه $\frac{2\pi}{5}$ را طی کرده است. کل دایره 2π است پس $\frac{1}{5}$

کل دایره طی شده است. یک دور کامل 60 دقیقه است پس $\frac{1}{5} \times 60$ یعنی 12

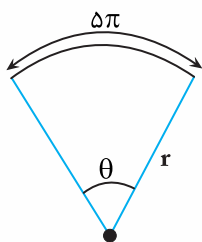
دقیقه زمان گذشته است.

متوسط

۶- گزینه «۲»

اگر مخروطی را گسترده کنیم به قطاعی مانند شکل بالا می‌رسیم که طول کمان آن همان محیط قاعده مخروط اولیه است پس محیط آن برابر طول این کمان و دو شعاع است:

$$\text{محیط} = 2r + 5\pi = 7\pi \Rightarrow 2r = 2\pi \Rightarrow r = \pi$$



از طرفی طبق رابطه طول کمان داریم:

$$\theta = \frac{L}{r} = \frac{5\pi}{\pi} = 5 \text{ rad}$$

متوسط

۷- گزینه «۴»

$$\frac{\pi}{18}\alpha - \frac{\pi}{3} = \beta$$

$$\frac{\pi}{18} \times \frac{180}{\pi} \beta - \frac{\pi}{3} = \beta \Rightarrow 9\beta = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{27} \text{ rad}$$

متوسط

۸- گزینه «۲»

$$r = 35 \text{ cm}$$

$$\theta = 80^\circ$$

$$2L = ?$$

$$L = r\theta$$

$$\theta = \frac{80^\circ}{180^\circ} \pi = \frac{4\pi}{9}$$

$$2L = 2 \times 35 \times \frac{4\pi}{9} = \frac{280\pi}{9}$$

آسان

۲- گزینه «۳»

باید بررسی کنیم با جایگذاری اعداد صحیح به جای k ، چند زاویه درون دایره مثلثاتی در یک دور کامل یعنی بین 0° تا 2π به دست می‌آوریم:

$$k=0 \Rightarrow \frac{\pi}{7} \quad \checkmark$$

$$k=1 \Rightarrow \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{7} \quad \checkmark$$

$$k=2 \Rightarrow \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{7} \quad \checkmark$$

$$k=3 \Rightarrow \pi + \frac{\pi}{7} \quad \checkmark$$

$$k=4 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{7} \quad \checkmark$$

$$k=5 \Rightarrow \frac{5\pi}{3} + \frac{\pi}{7} = \frac{38\pi}{21} \quad \checkmark$$

$$k=6 \Rightarrow 2\pi + \frac{\pi}{7} \quad \times$$

شش زاویه به دست آوردیم، پس این زوایا، یک شش ضلعی را مشخص می‌کنند.

آسان

۳- گزینه «۳»

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(1): \frac{\text{محیط}}{\text{قطر}} = \frac{2\pi r}{2r} = \pi \rightarrow \text{مقدار ثابت}$$

$$(2): \frac{\text{قطر}}{\text{شعاع}} = \frac{2r}{r} = 2 \rightarrow \text{مقدار ثابت}$$

$$(3): \frac{\widehat{AB}}{r} = \frac{r\theta}{r} = \theta \rightarrow \text{در دایره زوایای متفاوتی وجود دارد پس ثابت نیست.}$$

$$(4): \frac{\text{محیط}}{\text{مساحت}} = \frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r} \Rightarrow \text{در دایره شعاع ثابت است پس مقدار ثابت است.}$$

متوسط

۴- گزینه «۱»

مکان‌های توقف دو دوندۀ $\frac{3\pi}{8}$ ، $\frac{5\pi}{4}$ است. پس فاصله زاویه‌های آنها برابر است با:

$$\frac{5\pi}{4} - \frac{3\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$$

شعاع دایره 16 متر است پس

$$l = r\theta = 16 \times \frac{7\pi}{8} = 14\pi$$



(ب) با داشتن $\sin \alpha, \cos \alpha$ می توان نوشت

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} + \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{1} = \frac{1+8}{2\sqrt{2}}$$

آسان

-۲

از اونجایی که می‌دونیم $\tan \alpha, \cot \alpha$ معکوس هم هستند پس:

$$\tan \alpha = -\frac{1}{2}$$

از طرفی طبق اتحاد $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$ داریم:

$$1 + (-2)^2 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 5 \xrightarrow{\text{معکوس}} \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \pm \sqrt{\frac{1}{5}}$$

می‌دونیم که $\cot \alpha < 0, \cos \alpha > 0$ هست پس α در ربع چهارم هست و

$\sin \alpha < 0$ است پس:

$$\sin \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

از طرفی داریم $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ پس:

$$\cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{5} \times (-2)$$

$$\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

آسان

-۳

$$1) \sin \frac{3\pi}{4} = \sin(\pi - \frac{\pi}{4}) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha \Rightarrow \cot(-\frac{\pi}{4}) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

پس داریم:

$$\frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(-1)^2 - (-\frac{1}{2})^2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{10}{9}$$

(ب)

$$\left. \begin{array}{l} \cos(-90^\circ) = \cos 90^\circ = 0 \\ \sin(-180^\circ) = -\sin 180^\circ = 0 \\ \sin(-270^\circ) = -\sin 270^\circ = 1 \\ \cos(-360^\circ) = \cos 360^\circ = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{0+1}{0-1} = -1$$

۹- گزینه «۳»

شعاع چرخها ۱ متر و ۱۵۰ سانتی‌متر است. ابتدا واحدها را یکی کنیم:

$$r_1 = 1 \text{ m}$$

$$r_2 = 1/5 \text{ m}$$

چرخ جلو به اندازه 60° می‌چرخد پس

$$\theta_1 = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi = \frac{\pi}{3}$$

همان‌طور که قبلاً هم اشاره شد، در حرکت چرخها، زاویه‌ها متفاوت است اما

مسافت طی شده یکسان است پس:

$$L_1 = L_2$$

$$r_1 \theta_1 = r_2 \theta_2 \Rightarrow 1 \times \frac{\pi}{3} = 1/5 \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3} \times \frac{5}{1} = \frac{5\pi}{3}$$

متوسط

۱۰- گزینه «۳»

در ساعت $4:40'$ عقربه ساعت‌شمار بین دو عدد ۴ و ۵ و در فاصله $\frac{2}{3}$ از ۴

گذشته یا $\frac{1}{3}$ به ۵ نرسیده است. در ۴۵ ثانیه، عقربه ثانیه‌شمار روی ۹ است و

بنابراین عقربه ثانیه‌شمار و ساعت‌شمار به صورت زیر است:

$$4(\frac{\pi}{6}) + \frac{1}{3}(\frac{\pi}{6}) = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18} = \frac{13\pi}{18}$$

زاویه در فاصله بین هر دو عدد



آسان

-۱

(آ) اولین اتحادی که در مثلثات رابطه بین سینوس و کسینوس رو نشون میده

این هست:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - (-\frac{1}{3})^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}} = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

در ربع سوم علامت کسینوس منفی است پس $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$



آسان

-۶

آ) درست

$$\cos \theta + \cos(\pi - \theta) = \cos \theta - \cos \theta = 0$$

ب) نادرست

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \cos \theta = \cos \theta + \cos \theta = 2 \cos \theta$$

پ) درست

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \Rightarrow \cos(-\gamma) = \cos \gamma$$

ت) درست

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\tan \pi - \tan \alpha = 0 - \tan \alpha$$

ث) نادرست

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cot \theta$$

ج) نادرست

$$\sin(\pi + \alpha) - \cos(\pi + \alpha) = -\sin \alpha + \cos \alpha$$

متوسط

-۷

$$\begin{aligned} \cos\left(-\frac{\gamma\pi}{4}\right) &= -\cos\left(\frac{\gamma\pi}{4}\right) = -\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\tan\left(-\frac{\gamma\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\gamma\pi}{4}\right) = -\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

بنابراین با توجه به عبارت کسینوس و تانژانت مربوط به α ، این زاویه در ربع سوم قرار دارد.

$$\cos\frac{13\pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\frac{13\pi}{4} = \tan\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

با توجه به علامت کسینوس و تانژانت زاویه β این زاویه در ربع سوم قرار دارد.

دشواری

-۸

$$\frac{\sin(\pi + \alpha) + \cos(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{-\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$$

در صورت مسأله، $\tan \alpha = \frac{1}{3}$ داده شده است، با تقسیم صورت و مخرج

کسر بر $\cos \alpha$ داریم:

$$\frac{-\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{-\tan \alpha - 1}{\tan \alpha - 1} = \frac{-\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{-\frac{4}{3}}{-\frac{2}{3}} = 2$$

متوسط

-۹

آ) $\cos(-210^\circ) + \cot(240^\circ) = \cos 210^\circ + \cot 240^\circ$

$$= \cos(180^\circ + 30^\circ) + \cot(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 30^\circ + \cot 60^\circ$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{-3\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6}$$

ب) $\sin 630^\circ + \tan(-540^\circ) = \sin(\underbrace{720^\circ}_{2(360^\circ)} - 90^\circ) - \tan(540^\circ)$

$$= -\sin 90^\circ - \tan(360^\circ + 180^\circ) = -1 - 0 = -1$$

پ) $\cos(-720^\circ) + \cot(-600^\circ) + \tan(720^\circ) - \tan(-600^\circ)$

$$= \cos(2 \times 360^\circ) - \cot(720^\circ - 120^\circ) + \tan(2 \times 360^\circ) + \tan(720^\circ - 120^\circ)$$

$$= \cos 360^\circ + \cot(\underbrace{120^\circ}_{180^\circ - 60^\circ}) + \tan 360^\circ - \tan 120^\circ$$

$$= 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} + 0 + \sqrt{3} = \frac{3 - \sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{3}$$

ت) $\sin\frac{25\pi}{3} - \cos\frac{23\pi}{4} = \sin\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ث) $\frac{\sin\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{6}}{\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + \tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)}{-\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)}$

$$= \frac{\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}}{-\sin\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}$$

دشواری

-۵

آ) درست

$$\sin 840^\circ = \sin(\underbrace{720^\circ}_{2 \times 360^\circ} - 120^\circ) = \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ$$

ب) درست

$$\tan(-1000^\circ) = -\tan 1000^\circ = -\tan(\underbrace{1080^\circ}_{3 \times 360^\circ} - 80^\circ)$$

$$= -\tan(-80^\circ) = \tan 80^\circ$$

پ) درست

$$\cos(-324^\circ) = \cos 324^\circ = \cos(360^\circ - 36^\circ)$$

$$= \cos(-36^\circ) = \cos 36^\circ$$

ت) درست

$$\sin 875^\circ = \sin(\underbrace{720^\circ}_{2 \times 360^\circ} + 155^\circ) = \sin 155^\circ$$

حواست باشه که مضارب زوج 360° یعنی 4π یا 720° یا $1080^\circ = 6\pi$ رو نادیده می گیریم.

دشواری

-۱۳

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{1+\tan 1} + \frac{1}{1+\frac{\tan 1}{\cot 1}} + \frac{1}{1+\tan 2} + \frac{1}{1+\frac{\tan 2}{\cot 2}} + \dots \\
 &+ \frac{1}{1+\tan 44} + \frac{1}{1+\frac{\tan 44}{\cot 44}} + \frac{1}{1+\frac{\tan 45}{\cot 1}} \\
 &= \frac{1}{1+\tan 1} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan 1}} + \frac{1}{1+\tan 2} + \frac{1}{1+\frac{1}{\tan 2}} + \dots + \frac{1}{1+\tan 44} \\
 &+ \frac{1}{1+\frac{1}{\tan 44}} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{1+\tan 1} + \frac{\tan 1}{1+\tan 1} + \frac{1}{1+\tan 2} + \frac{\tan 2}{\tan 2+1} + \dots + \frac{1}{1+\tan 44} \\
 &+ \frac{\tan 44}{\tan 44+1} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1+\tan 1}{1+\tan 1} + \frac{1+\tan 2}{1+\tan 2} + \dots + \frac{1+\tan 44}{1+\tan 44} + \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1+1+\dots+1}{\cancel{1}44} + \frac{1}{2} = 44 + \frac{1}{2} = 44\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

آسانی

-۱۴

$$\cos\left(\frac{x-28}{\alpha}\right) = \sin\left(\frac{3x+74}{\beta}\right)$$

می‌دونیم که اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ اون وقت $\sin \beta = \cos \alpha$ و بنابراین:

$$x - 28 + 3x + 74 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow 4x = 90 - 74 + 28 \Rightarrow 4x = 44 \Rightarrow x = 11$$

متوسط

-۱۵

$$\tan^2 135^\circ - \cos^2 120^\circ = x \sin 33^\circ \cos 45^\circ \tan 24^\circ$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tan^2(90^\circ + 45^\circ) - \cos^2(90^\circ + 30^\circ) \\ = x \sin(36^\circ - 30^\circ) \cos 45^\circ \cdot \tan(18^\circ + 6^\circ) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cot^2 45^\circ - \sin^2 30^\circ = -x \sin 30^\circ \cdot \cot 45^\circ \cot 6^\circ$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{4} = -x \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{6}}{4} x \Rightarrow x = \frac{-9}{\sqrt{6}} = \frac{-3\sqrt{6}}{2}$$

آسانی

-۹

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 3\pi = \cos \pi = -1$$

$$\frac{\cos 150^\circ \times \cos 240^\circ - \sin 150^\circ \times \cos(-60^\circ)}{\cos 3\pi + 2 \sin 90^\circ \times \cot 45^\circ} = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}{-1 + 2(1)(1)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}}{1} = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

متوسط

-۱۰

$$\text{آ)} \frac{\tan(90^\circ + 10^\circ) \tan(180^\circ - 10^\circ) + \sin(360^\circ - 20^\circ) \sin(180^\circ - 20^\circ)}{\sin(180^\circ + 20^\circ) \cos(180^\circ + 20^\circ)}$$

$$= \frac{(-\cot 10^\circ)(-\tan 10^\circ) + (-\sin 20^\circ)(\sin 20^\circ)}{(-\sin 20^\circ)(-\cos 20^\circ)} = \frac{+1 - \sin 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$$

$$\frac{1 - \sin^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cos^2 20^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \cot 20^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \frac{1 + \sin^2(180^\circ - 30^\circ) + \cos^2(270^\circ - 30^\circ)}{\sin^2(180^\circ + 80^\circ) + \cos^2(180^\circ - 80^\circ) + \cot(90^\circ + 20^\circ) \tan(360^\circ - 20^\circ)} \\ = \frac{1 + \sin^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ}{\sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ + \tan 20^\circ \times \tan 20^\circ} = \frac{1}{1 + \tan^2 20^\circ} = \cos^2 20^\circ \end{aligned}$$

دشواری

-۱۱

$$\begin{aligned} A &= \tan 1^\circ \tan 2^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ \\ &= \frac{\tan 1^\circ \tan 89^\circ \times \tan 2^\circ \tan 88^\circ \times \dots \times \tan 44^\circ \tan 46^\circ \times \tan 45^\circ}{\tan 1^\circ \cdot \cot 1^\circ} \\ &\Rightarrow A = 1 \end{aligned}$$

دشواری

-۱۲

$$A = \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5}$$

$$+ \sin \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$A = \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5}$$

$$+ \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{7\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5} + \sin \frac{9\pi}{5}$$

$$A = \sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{5}$$

$$+ \sin \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} - \sin \frac{4\pi}{5} \Rightarrow A = 0$$

-۱۶

متوسط

$$\frac{2\sin(3\pi - x) + \cos(\frac{3\pi}{2} + x)}{\sin(\frac{3\pi}{2} - x)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2\sin x + \sin x}{-\cos x} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{x} \sin x}{-\cos x} = \cancel{x} \Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow \tan x = -\tan \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan x = \tan(\pi - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ \text{یا} \\ \tan x = \tan(2\pi - \frac{\pi}{4}) \Rightarrow x = \frac{7\pi}{4} \end{cases}$$

$$\tan(x - \frac{\pi}{12}) = \begin{cases} \tan(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan \frac{5\pi}{6} = \tan(\pi - \frac{\pi}{6}) \\ = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan(\frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan \frac{13\pi}{6} = \tan(2\pi - \frac{\pi}{6}) \\ = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

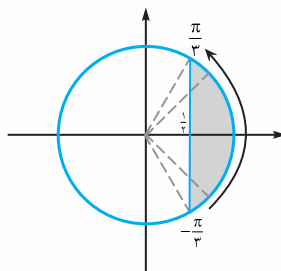
-۱۷

متوسط

$$\frac{-\pi}{18} < x < \frac{\pi}{18} \quad \times 6 \quad \frac{-\pi}{3} < 6x < \frac{\pi}{3}$$

بازه کمان یعنی $6x$ رو پیدا کردیم حالا کافیه ببینیم روی دایره مثلثاتی مقدار

کسینوس در فاصله $-\frac{\pi}{3}$ تا $\frac{\pi}{3}$ چه مقادیری رو می‌گیره:



کم‌ترین مقدار زاویه $-\frac{\pi}{3}$ هست که کسینوس مقدار $\frac{1}{2}$ رو می‌گیره و بعد

خطوط قائم عمود بر محور کسینوس رو رسم می‌کنیم تا ببینیم جاهای محور

کسینوس رو شامل میشه و همون‌طور که از شکل پیداست، بازه $\frac{1}{2}$ تا 1 (به

ازای $\alpha = 0^\circ$) رو شامل میشه پس:

$$\frac{1}{2} < \cos 6x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{3x+1}{2} < 1 \quad \times 2 \quad 1 < 3m+1 < 2$$

$$\Rightarrow 0 < 3m < 1 \Rightarrow 0 < m < \frac{1}{3}$$

-۱۸

متوسط

(آ) همان‌طوری که از شکل پیداست: $\alpha + \theta = 90^\circ$ پس α, θ متمم هم هستند و سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر است و می‌توان نوشت:

$$I = k \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = k \cos \alpha = k \sin \theta$$

(ب)

$$\theta = 0 \Rightarrow I = k \sin 0 = k(0) = 0$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{6} = \frac{k}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3} \Rightarrow I = k \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} k$$

(پ) بیشترین شدت نور وابسته به مقدار $\sin \theta$ هست و می‌دونیم سینوس

زمانی بیشترین مقدار رو داره که $\sin \theta = 1$ و بنابراین $\theta = \frac{\pi}{2}$ باشه.

-۱۹

آسان

$$\begin{aligned} \text{آ)} \cot \frac{\pi}{6} - \tan \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4} &= \sqrt{3} - \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2} \times \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}(2 - \sqrt{2})}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ب)} \frac{\tan^2 \frac{\pi}{6} + \sin^2 \frac{\pi}{4}}{\cot^2 \frac{\pi}{6} - \cos^2 \frac{\pi}{3}} + \frac{\cos^2 75^\circ + \sin^2 75^\circ}{1}$$

$$= \frac{(\frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{(1)^2 - (\frac{1}{2})^2} + 1 = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} + 1 = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{3}{4}} + 1 = \frac{10}{9} + 1 = \frac{19}{9}$$

-۲۰

متوسط

(آ) سینوس یکی با کسینوس دیگری برابر شده یعنی زوایا متمم بوده‌اند پس:

$$\sin x = \cos(x + 20^\circ) \rightarrow x + x + 20^\circ = 90^\circ \Rightarrow 2x = 70^\circ \Rightarrow x = 35^\circ$$

(ب) تانژانت یک زاویه با کتانژانت دیگری برابر شده یعنی زوایا متمم هم

هستند:

$$x + \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{9} + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} - \frac{2\pi}{9} = \frac{9\pi - \pi - 4\pi}{18}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\cancel{4} \pi}{18} \Rightarrow x = \frac{\pi}{9}$$

-۲۱

آسان

$$\alpha + \beta = 90$$

$$\beta = 4\alpha \Rightarrow 5\alpha = 90 \Rightarrow \alpha = 18^\circ$$

$$\beta = 72$$

$$\text{مکمل} = 180 - 18 = 162$$

-۲۲

متوسط

سینوس با کسینوس برابر شده است بنابراین زاویه‌ها متمم هم هستند اما قبل از اون،

$$\frac{17\pi}{3} = 6\pi - \frac{\pi}{3} \text{ بشه: دور کامل از اون خارج بشه:}$$

$$-\frac{\pi}{3} + x + \frac{\pi}{18} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} = \frac{9\pi - \pi + 6\pi}{18}$$

$$\Rightarrow x = \frac{14\pi}{18} = \frac{7\pi}{9}$$

پس قسمت پ می‌تونه درست باشه.

-۲۳

متوسط

$$\tan(150) = \tan(180 - 30) = -\tan 30 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cos(420) = \cos(360 + 60) = \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\sin(360 - 30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$$

$$\tan(360 - 60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)(-\sqrt{3}) - \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{6} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

-۲۴

آسان

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

$$-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos \theta$$

پس

$$A = (-\cos \theta)(-\cos \theta) = \cos^2 \theta = \left(\frac{0}{3}\right)^2 = 0/9$$

-۲۵

دشوار

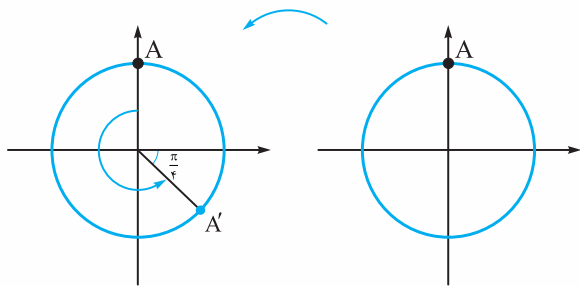
نقطه A اگر به اندازه 2π دوران کند به مکان اولیه خود می‌رسد پس

$$\frac{13\pi}{4} = 2\pi + \frac{5\pi}{4}$$

پس نقطه A به اندازه $\frac{5\pi}{4}$ حرکت کرده است. اما می‌دانیم:

$$\frac{5\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{4}$$

پس از نقطه $A(0, 1)$ به اندازه $\pi + \frac{\pi}{4}$ دوران می‌دهیم



$$x = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = -\sin \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

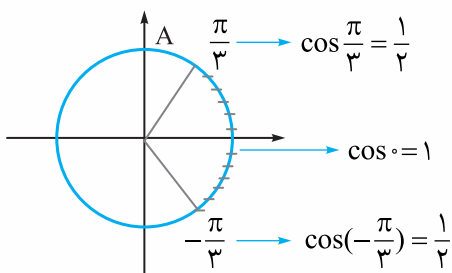
$$\Rightarrow A' \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

-۲۶

متوسط

اگر روی دایره مثلثاتی $-\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{3}$ حرکت داشته باشد مقدار $\cos \alpha$ بین

$\frac{1}{2}$ تا ۱ تغییر می‌کند پس



$$+\frac{1}{2} < \cos \alpha \leq 1$$

$$\frac{1}{2} < 4m + 1 \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} < 4m \leq 0$$

$$-\frac{1}{8} < m \leq 0$$

-۲۷

متوسط

می‌دونیم که اگر نقطه‌ای روی دایره مثلثاتی روبه‌روی زاویه θ داشته باشیم

مختصاتش به صورت $(\cos \theta, \sin \theta)$ است پس:

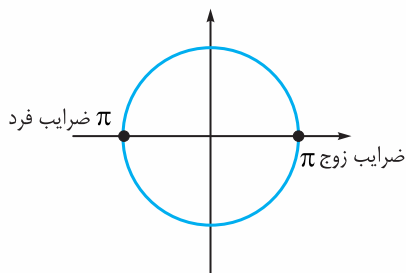
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{-2}{1} = -2 \xrightarrow{\text{معکوس}} \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\tan \theta + \cot \theta}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{-2 - \frac{1}{2}}{-\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{2}{5}} = \frac{25}{4}$$



یادت باشه ضرایب زوج و فرد π در دایره مثلثاتی به صورت روبه رو هستند:



و یادت باشه کسینوس منفی خوره! یعنی $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

متوسط

گزینه «۳»

$$A = \frac{2 \sin \frac{49\pi}{10} - 3 \cos \frac{3\pi}{5}}{\cos(-\frac{7\pi}{5}) + 2 \sin \frac{121\pi}{10}} = \frac{2 \sin(\frac{50\pi - \pi}{10}) - 3 \cos(\frac{5\pi - 2\pi}{5})}{\cos(\frac{7\pi}{5}) + 2 \sin(\frac{120\pi + \pi}{10})}$$

$$= \frac{2 \sin(5\pi - \frac{\pi}{10}) - 3 \cos(\pi - \frac{2\pi}{5})}{\cos(\frac{5\pi + 2\pi}{5}) + 2 \sin(12\pi + \frac{\pi}{10})}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 3 \cos \frac{2\pi}{5}}{\cos(\pi + \frac{2\pi}{5}) + 2 \sin(\frac{\pi}{10})} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 3 \cos \frac{2\pi}{5}}{-\cos \frac{2\pi}{5} + 2 \sin \frac{\pi}{10}}$$

می‌دونیم که $\frac{2\pi}{5} + \frac{\pi}{10} = \frac{4\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2}$ پس $\frac{2\pi}{5}$ و $\frac{\pi}{10}$ متمم هم هستند پس داریم:

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{10} + 3 \sin \frac{\pi}{10}}{-\sin \frac{\pi}{10} + 2 \sin \frac{\pi}{10}} = \frac{5 \sin \frac{\pi}{10}}{\sin \frac{\pi}{10}} = 5$$

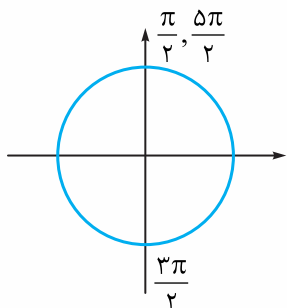
متوسط

گزینه «۴»

$$A = \frac{(a^2 - b^2) \cot(\pi - \alpha)}{\tan(\frac{\Delta\pi}{2} - \alpha)} + \frac{(a^2 + b^2) \tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha)}{\cot(\alpha - \pi)}$$

$$\tan(\frac{\Delta\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(\alpha - \pi) = -\cot(\pi - \alpha) = \cot \alpha$$



$$\Rightarrow A = \frac{(a^2 - b^2) \cot \alpha + (a^2 + b^2)(-\cot \alpha)}{\cot \alpha}$$

$$= \frac{\cot \alpha (a^2 - b^2 - a^2 - b^2)}{\cot \alpha} = -2b^2$$

متوسط

۲۸-

$$\alpha = 3(180 - \alpha)$$

$$\alpha = 540 - 3\alpha$$

$$4\alpha = 540 \Rightarrow \alpha = 135^\circ$$

$$\frac{\alpha}{5} \text{ متمم} = 90 - \frac{135}{5} = 63$$

آسان

۲۹-

$$\cos(180 - 60) = -\cos 60 = -\frac{1}{2}$$

$$-\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$



دشواری

۱- گزینه «۴»

معادله درجه دومی داریم که با روش دلتا حل می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (\tan \alpha + 3 \cot \alpha)^2 - 4(1)(3)$$

$$= \tan^2 \alpha + 9 \cot^2 \alpha + 6 \frac{\tan \alpha \cot \alpha}{1} - 12 = \tan^2 \alpha + 9 \cot^2 \alpha - 6$$

$$= (\tan \alpha - 3 \cot \alpha)^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{\tan \alpha + 3 \cot \alpha \pm (\tan \alpha - 3 \cot \alpha)}{2}$$

$$= + \begin{cases} \frac{2 \tan \alpha}{2} = \tan \alpha \\ - \frac{6 \cot \alpha}{2} = 3 \cot \alpha \end{cases}$$

پس گزینه ۴ درست است.

متوسط

۲- گزینه «۳»

$$A = \tan(\alpha - 5\pi) \cot(\alpha + 9\pi) + \cos(40\pi - \alpha) \cos(\alpha - 3\pi)$$

$$= -\tan(\Delta\pi - \alpha) \cot(9\pi + \alpha) + \cos(40\pi - \alpha) \cos(3\pi - \alpha)$$

$$= + \tan \alpha \cot \alpha + \cos \alpha (-\cos \alpha) = 1 - \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$$



دشوار **گزینه ۸-۱**

برای یک متغیره کردن عبارت، بهتره به جای $\sin x$ ، جایگذاری کنیم:

$$A = 3(1 - \cos^2 x) - 2\cos^2 x + \cos x = 3 - 3\cos^2 x - 2\cos^2 x + \cos x$$

$$\Rightarrow A = -5\cos^2 x + \cos x + 3$$

طبق توضیحی که در تست ۷ داشتیم:

$$1) \cos x = 1 \Rightarrow A = -5 + 1 + 3 = -1$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow A = -5 - 1 + 3 = -3$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow A = 3$$

$$2) \cos x = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-10} = \frac{1}{10} \Rightarrow A = -5\left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} + 3$$

$$= 3 + 0.1 - 0.05 = 3.05$$

متوسط **گزینه ۹-۱**

$$A = (\sin^3 x)^2 - (\sin^2 x) + 1$$

طبق توضیحات تست‌های ۷ و ۸ داریم:

$$1) \sin^3 x = -1 \Rightarrow A = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\sin^3 x = 0 \Rightarrow A = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$\sin^3 x = +1 \Rightarrow A = 1 - 1 + 1 = 1$$

$$2) \sin^3 x = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{4}$$

دشوار **گزینه ۱۰-۱**

از اتحاد کمکی درجه دوم داریم:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

$$\Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x = \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\frac{1}{3}} - 2\sin x \cos x$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{9} - 2\sin x \cos x \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9}$$

حال اتحاد کمکی درجه سوم را به کار می‌بریم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = \frac{(\sin x + \cos x)^3}{\frac{1}{3}} - \frac{3}{9} \sin x \cos x (\sin x + \cos x)$$

$$= \frac{1}{27} + \frac{4}{9} = \frac{13}{27}$$

دشوار **گزینه ۵-۱**

$$A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \dots + \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9}$$

$$\frac{2\pi + 7\pi}{9} = \pi$$

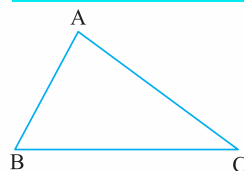
$$\frac{\pi + 8\pi}{9} = \pi$$

می‌دونیم که $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ پس $\cos \frac{8\pi}{9} = -\cos \frac{\pi}{9}$ و به همین ترتیب دوتایی‌های مشخص شده مکمل هم هستند و بنابراین کسینوس یکی قرینه کسینوس دیگری است.

$$A = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{8\pi}{9} + \cos \frac{2\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{6\pi}{9}$$

$$+ \cos \frac{4\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} = 0$$

متوسط **گزینه ۱۱-۱**



می‌دونیم که در هر مثلث دلخواه، مجموع زوایای داخلی برابر 180° هست پس: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$ بنابراین:

$$\hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{C} \Rightarrow \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}\right) = \cot \frac{\hat{C}}{2}$$

یادت باشه:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

دشوار **گزینه ۷-۱۴**

با عبارت درجه دومی سروکار داریم که متغیرش مشخص نیست پس با تبدیل $\cos x$ به $\sin x$ ، عبارت درجه دوم مشخصی رو می‌سازیم که بتونیم ماکزیمم اون رو، مشخص کنیم:

$$A = 3\sin^2 x - 4(1 - \sin^2 x) + 1 = 3\sin^2 x - 4 + 4\sin^2 x + 1$$

$$\Rightarrow A = 7\sin^2 x - 3$$

می‌دونیم که بیشترین مقدار $\sin x$ برابر ۱ هست اما حواست باشه ماکزیمم مقدار یک عبارت درجه دوم ممکنه در $\frac{-b}{2a}$ اتفاق بیفته پس هر دو حالت رو در نظر می‌گیریم:

$$\sin x = 1 \Rightarrow A = 7(1) - 3 = 4$$

$$\sin x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0}{2(7)} = 0 \Rightarrow A = 7(0) - 3 = -3$$

پس ماکزیمم مقدار همون ۴ هست.

متوسط

۱۶- گزینه «۴»

$$A = \sqrt{\sin^3\left(-\frac{5\pi}{6}\right) - \cos^3\left(-\frac{2\pi}{3}\right)} = \sqrt{-\sin^3\frac{5\pi}{6} - \cos^3\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{-\sin^3\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \cos^3\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{-\sin^3\frac{\pi}{6} + \cos^3\frac{\pi}{3}}$$

$$= \sqrt{-\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = 0$$

دشواری

۱۷- گزینه «۲»

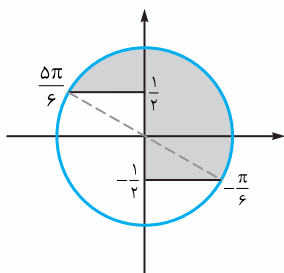
جلوی سینوس عبارت $2x$ قرار گرفته پس اول محدوده $2x$ رو پیدا می‌کنیم:

$$\frac{-\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12} \Rightarrow \frac{-\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6}$$

حالا از روی دایره مثلثاتی، مشخص می‌کنیم در این بازه، سینوس چه مقدارهایی رو می‌گیره:

کم‌ترین مقداری که روی محور سینوس، مشخص شده $-\frac{1}{2}$ است و بیشترین

مقدار برابر ۱ است پس:



حواست باشه که مقدار ۱ دقیقاً گرفته شده و در ۱ بسته است:

$$-\frac{1}{2} < \sin 2x \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \Rightarrow -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$

متوسط

۱۸- گزینه «۳»

$$A = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(\alpha - \pi)}{|\tan^2 \alpha - 1|} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(\pi - \alpha)}{|\tan^2 \alpha - 1|}$$

$$= \frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|}$$

داریم: $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ پس:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\xrightarrow{\text{ربع چهارم}} \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\sqrt{5}}{\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{2}{3} - \frac{\sqrt{5}}{3}}{\left|\frac{5}{4} - 1\right|} = \frac{\frac{2-\sqrt{5}}{3}}{\frac{1}{4}} = \frac{4(2-\sqrt{5})}{3}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۳»

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{19\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{18\pi - \pi}{3}\right)\cos\left(\frac{18\pi - \pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{20\pi - \pi}{4}\right)\left(-\sin\left(\frac{12\pi - \pi}{6}\right)\right)$$

$$= \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \left(-\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right) - \left(-\tan\frac{\pi}{4}\right)\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

متوسط

۱۲- گزینه «۲»

$$\frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{10} = \sin\frac{\pi}{5}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{10} - \sin^2\frac{\pi}{5} = \sin\frac{\pi}{5} \cdot \sin\frac{\pi}{5} - \sin^2\frac{\pi}{5} = 0$$

متوسط

۱۳- گزینه «۲»

$$\tan\frac{11\pi}{4} + \sin\frac{15\pi}{4}\cos\frac{13\pi}{4}$$

$$= \tan\left(\frac{12\pi - \pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{16\pi - \pi}{4}\right)\cos\left(\frac{12\pi + \pi}{4}\right)$$

$$= \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\tan\frac{\pi}{4} + \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) = -1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۲»

$$A = \frac{\sin 145^\circ - \sin 235^\circ}{\cos 325^\circ - 2\sin 215^\circ} = \frac{\sin(180^\circ - 35^\circ) - \sin(270^\circ - 35^\circ)}{\cos(360^\circ - 35^\circ) - 2\sin(180^\circ + 35^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 35^\circ + \cos 35^\circ}{\cos 35^\circ + 2\sin 35^\circ}$$

با تقسیم صورت و مخرج بر $\cos 35^\circ$ داریم:

$$A = \frac{\tan 35^\circ + 1}{1 + 2\tan 35^\circ} = \frac{a - 1 + 1}{1 + 2(a - 1)} = \frac{a}{2a - 1}$$

متوسط

۱۵- گزینه «۴»

$$\frac{2\sin 110^\circ - 2\sin 20^\circ}{2\cos 70^\circ + 3\cos 34^\circ} = \alpha \Rightarrow \frac{2\sin(90^\circ + 20^\circ) - 2\sin(180^\circ + 20^\circ)}{2\cos(90^\circ - 20^\circ) + 3\cos(360^\circ - 20^\circ)} = \alpha$$

$$\frac{2\cos 20^\circ - 2\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ + 3\cos 20^\circ} = \alpha \xrightarrow{\div \cos 20^\circ} \frac{2 + 2\tan 20^\circ}{2\tan 20^\circ + 3} = \alpha$$

$$\Rightarrow 2 + 2\tan 20^\circ = 2\alpha \tan 20^\circ + 3\alpha$$

$$\Rightarrow (2 - 2\alpha)\tan 20^\circ = 3\alpha - 2 \Rightarrow \tan 20^\circ = \frac{3\alpha - 2}{2 - 2\alpha}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{-|\sin \alpha| \cdot \sin\left(\frac{8\pi + \pi}{2} - \alpha\right)} \cdot \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 &= \frac{1}{-|\sin \alpha| \cdot \sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)} \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\
 &= \frac{1}{-|\sin \alpha| \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \\
 &= \frac{1}{\cancel{|\sin \alpha|} \cdot \cancel{\cos \alpha}} \cdot (\cancel{\cos \alpha}) = \frac{1}{|\sin \alpha|} = \frac{\sqrt{29}}{2}
 \end{aligned}$$

آسان

گزینه «۱»

$$\begin{aligned}
 A &= -\sin\left(\frac{179\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{17\pi}{3}\right) - 2 \tan\left(\frac{33\pi}{4}\right) \\
 &= -\sin\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 2 \tan\left(\lambda\pi + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= +\sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{3} - 2 \tan \frac{\pi}{4} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1
 \end{aligned}$$

آسان

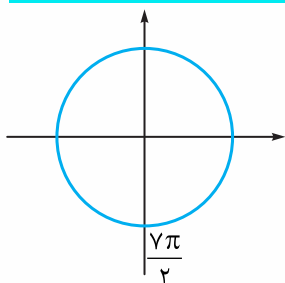
گزینه «۳»

حواست باشه که:

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi}{\delta} + \frac{3\pi}{\delta} &= \pi \\
 \cos \frac{3\pi}{\delta} &= \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{\delta}\right) = -\cos \frac{2\pi}{\delta} \\
 A &= \cos \frac{\pi}{\delta} + \cos \frac{2\pi}{\delta} + \cos \frac{3\pi}{\delta} + \cos \frac{4\pi}{\delta} + \cos \frac{5\pi}{\delta} \\
 &= \cancel{\cos \frac{\pi}{\delta}} + \cancel{\cos \frac{2\pi}{\delta}} - \cancel{\cos \frac{2\pi}{\delta}} - \cancel{\cos \frac{\pi}{\delta}} + \cos \pi = \cos \pi = -1
 \end{aligned}$$

متوسط

گزینه «۴»



$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1}{-\cos a} + \frac{\sin(\delta\pi - a)}{\sin\left(\frac{7\pi}{2} + a\right)} \times \cot a \\
 &= \frac{-1}{\cos a} + \frac{\sin a}{-\cos a} \times \cot a = \frac{-1}{\cos a} - 1
 \end{aligned}$$

دشوار

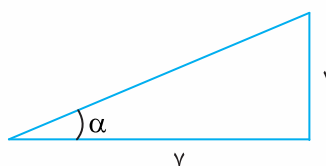
گزینه «۴»

$$\begin{aligned}
 &\tan 285 \tan(-165) - \sin(1095) \cos 255 \\
 &= -\tan(270 + 15) \tan(180 - 15) - \sin(\underbrace{1080}_{2(2\pi)} + 15) \cos(270 - 15) \\
 &= (-\cot 15)(-\tan 15) - (\sin 15)(-\sin 15) \\
 &= -1 + \sin^2 15 = -(1 - \sin^2 15) = -\cos^2 15
 \end{aligned}$$

متوسط

گزینه «۲»

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha$$

و از اونجایی که $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ داریم:

$$\begin{aligned}
 \sqrt{49 + 1} &= \sqrt{50} = 5\sqrt{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{y}{\Delta\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \\
 \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{10}
 \end{aligned}$$

متوسط

گزینه «۱»

$$\begin{aligned}
 \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}} \left(\frac{1}{\cos x} - \cos x\right) &= \frac{\cot x}{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}}} \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x}\right) \\
 &= \frac{\cos x}{\frac{1}{\sin x}} \left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) = \cancel{\cos x} \left(\frac{\sin^2 x}{\cancel{\cos x}}\right) = \sin^2 x
 \end{aligned}$$

حواست باشه موقع خروج $\sin^2 x$ از داخل رادیکال به علامتش دقت کنی که در این تست چون بازه در ربع دوم هست و سینوس در این ربع مثبت هستش، علامت عوض نمی‌شه.

دشوار

گزینه «۱»

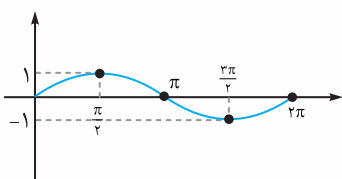
$$\begin{aligned}
 \cot \alpha = \frac{\delta}{2} \Rightarrow 1 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 &= \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{25}{4} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \\
 \Rightarrow \left|\frac{1}{\sin \alpha}\right| &= \frac{\sqrt{29}}{2} \\
 \frac{\sqrt{\frac{1}{\sin^2 \alpha}} \cdot \cos\left(\frac{11\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin\left(\alpha - \frac{9\pi}{2}\right)} &= \frac{\left|\frac{1}{\sin \alpha}\right| \cdot \cos\left(\frac{12\pi - \pi}{2} - \alpha\right)}{-\sin\left(\frac{9\pi}{2} - \alpha\right)}
 \end{aligned}$$



متوسط

-۱

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0

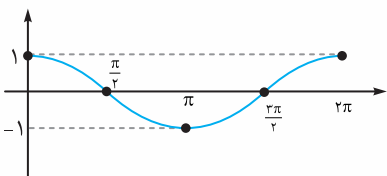


این بخش از نمودار سینوس‌ها، یک نوسان سینوسی نام دارد و در ادامه رسم، همین نمودار تکرار می‌شود. این نوسان در یک دوره تناوب که 2π هست بین دو عدد -1 و $+1$ رسم می‌شود.

متوسط

-۲

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



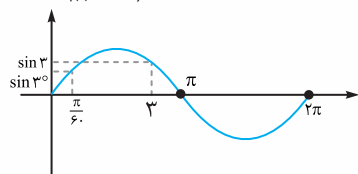
این نمودار، یک نوسان کسینوسی هست که بخشی از نمودار تابع کسینوس هست و در یک دوره تناوب که $[0, 2\pi]$ تناوب اصلی اون هست، دوره تناوب 2π و نمودار بین -1 تا $+1$ رسم می‌شود.

دشوار

-۳

$\sin 3^\circ$ یعنی زاویه جلوی سینوس 3 درجه هست اما $\sin 3$ یعنی زاویه جلوی سینوس، 3 رادیان هست و ما می‌دونیم که این‌ها متفاوت هستند و بنابراین این تساوی نادرست است.

$$3^\circ = \frac{3 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{60} \text{ rad}$$



دشوار

گزینه «۴»

$$\frac{2 \sin(3\pi - x) + \cos(\frac{3\pi}{2} + x)}{\sin(\frac{3\pi}{2} - x)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{2 \sin x + \sin x}{-\cos x} = 3 \Rightarrow \frac{3 \sin x}{-\cos x} = 3$$

$$\Rightarrow \tan x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

$$\tan(x - \frac{\pi}{12}) = \tan(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) = \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$$

دشوار

گزینه «۲»

$$69 + 111 = 180 \Rightarrow \tan 111 = \tan(180 - 69) = -\tan 69$$

$$96 + 84 = 180 \Rightarrow \tan 84 = \tan(180 - 96) = -\tan 96$$

$$\tan 96 + \tan 11 + \tan 69 + \tan 84 \\ = \tan 96 - \tan 69 + \tan 69 - \tan 96 = 0$$

متوسط

گزینه «۴»

$$\sin(\frac{3\pi}{2} + x) + \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\cos x - \sin x = \frac{1}{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}{1} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{3}{4} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{3}{8}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1} - \sin x \cos x)$$

$$= (-\frac{1}{2})(1 + \frac{3}{8}) = \frac{-11}{16}$$

متوسط

گزینه «۳»

$$\frac{\sin 160^\circ - \cos 200^\circ}{\cos 110^\circ + \sin 70^\circ} = \frac{\sin(180 - 20) - \cos(180 + 20)}{\cos(90 + 20) + \sin(90 - 20)}$$

$$= \frac{\sin 20 + \cos 20}{-\sin 20 + \cos 20} = \frac{\frac{\sin 20}{\cos 20} + \frac{\cos 20}{\cos 20}}{-\frac{\sin 20}{\cos 20} + \frac{\cos 20}{\cos 20}} = \frac{\tan 20 + 1}{-\tan 20 + 1}$$

$$= \frac{0.36 + 1}{-0.36 + 1} = \frac{1.36}{0.64} = \frac{17}{8}$$

دشوار

گزینه «۱»

$$\tan(\hat{B} + 30^\circ) \tan(c + 30^\circ) = 1$$

$$\Rightarrow \tan(\hat{B} + 30^\circ) = \frac{1}{\tan(c + 30^\circ)}$$

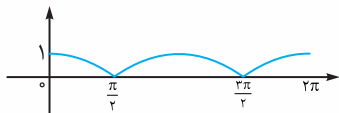
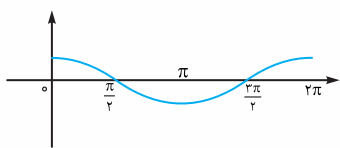
$$\Rightarrow \tan(\hat{B} + 30^\circ) = \cot(c + 30^\circ) \Rightarrow \text{زاویه‌ها متمم هم هستند.}$$

$$\Rightarrow \hat{B} + 30^\circ + \hat{C} + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow \hat{B} + \hat{C} = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{A} = 180 - (\hat{B} + \hat{C}) = 30^\circ \Rightarrow \hat{A} = 180 - 30^\circ = 150^\circ$$

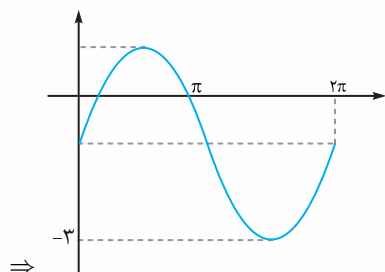
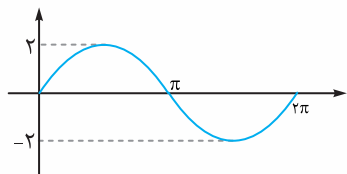


ب) $y = |\cos x|$



⇒

ت) $y = 2 \sin x - 1$

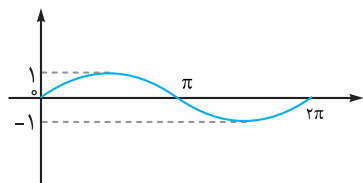


⇒

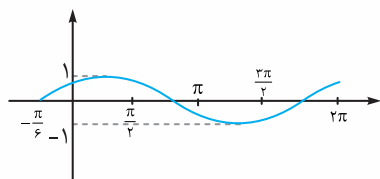
متوسط

-۷

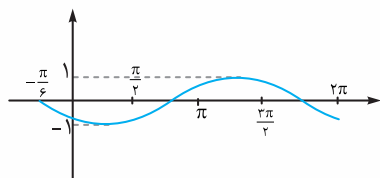
آ) $y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$



$y = \sin x$



$y = \sin(x + \frac{\pi}{6})$



$y = -\sin(x + \frac{\pi}{6})$

در نمودار، π را تقریباً ۳ در نظر می‌گیریم پس برای $\sin 3^\circ$ ، نمودار تقریباً نزدیک π قرار می‌گیرد و مقدار آن تقریباً $0/141$ است.
اما در درجه π برابر 18° است و 3° روی نمودار نزدیک به $x = 0$ است و $\sin 3^\circ$ تقریباً برابر $0/052$ است بنابراین $\sin 3^\circ$ بزرگ‌تر از درمی‌آید.

متوسط

-۴

$[-1, 1], \mathbb{R}$ (آ)

(ب) صفر

(ب) $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{-7\pi}{2}, x = \frac{-3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}, +1$

(ت) $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, x = \frac{-5\pi}{2}, x = \frac{-\pi}{2}, x = \frac{7\pi}{2}, -1$

آسان

-۵

$[-1, 1], \mathbb{R}$ (آ)

(ب) $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

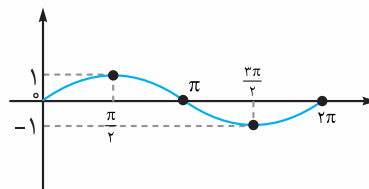
(ب) $2\pi, 0, 1$

(ت) $k \in \mathbb{Z} \quad x = (2k+1)\pi, -1$

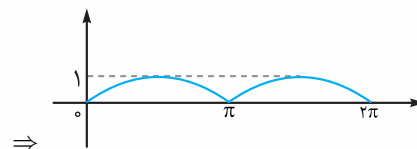
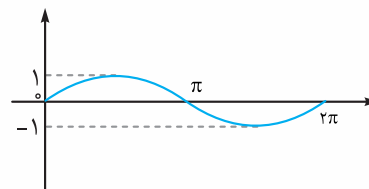
متوسط

-۶

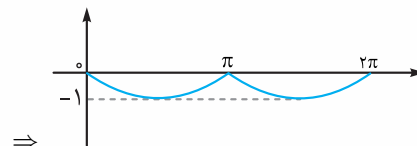
آ) $y = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -(-\sin x) = \sin x$



ب) $y = -|\sin x|$



⇒



⇒

آسان

-۹

دوره تناوب هر تابع، بازه‌ای هست که یک نوسان نمودار در اون بازه رسم شده و بعد و قبل از اون، نمودار به صورت همون نوسان تکرار شده.

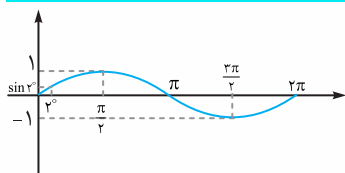
(آ) دوره تناوب ۴ است زیرا نوسان () در فاصله‌های ۴ واحدی تکرار میشه.

(ب) دوره تناوب ۶ است زیرا () در فاصله‌های ۶ واحدی تکرار میشه.

(پ) دوره تناوب ۲ است زیرا () در فاصله ۲ به طول تکرار میشه.

آسان

-۱۰



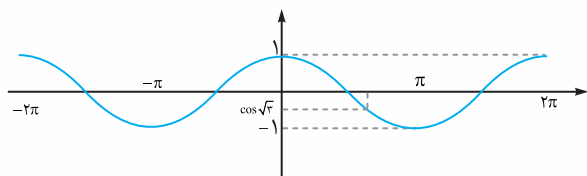
(آ) 2° در ربع اول بین 0 تا $\frac{\pi}{4}$ قرار می‌گیرد بنابراین $\sin 2^\circ$ بین 0 تا 1 روی محور y ها و نزدیک‌تر به صفر قرار می‌گیرد.

(ب) عددی وجود ندارد که $\sin x_0 = 2$ زیرا سینوس هر زاویه‌ای بین -1 تا 1 قرار می‌گیرد و هیچ‌گاه کمتر از -1 یا بیشتر از 1 نمی‌شود.

آسان

-۱۱

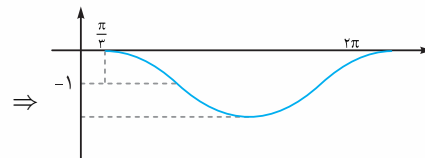
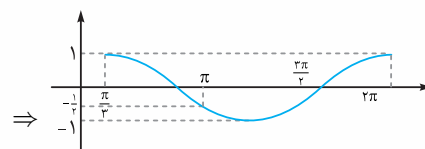
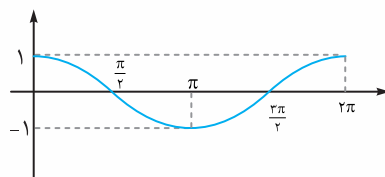
نمودار $y = \cos x$ در این بازه به صورت زیر است:



(آ) مقدار $\sqrt{3}$ تقریباً $1/7$ است و با در نظر گرفتن π به صورت تقریبی 3 ، روی نمودار $\sqrt{3}$ را مشخص کرده‌ایم. عرض نظیر این نقطه، $\cos \sqrt{3}$ را نشان می‌دهد که مقدار تقریبی آن (-0.16) است.

(ب) همان‌طور که از نمودار پیداست، کسینوس بین -1 تا 1 تغییر می‌کند، و هیچ‌وقت نمی‌تواند با $-\frac{3}{4}$ برابر شود. بنابراین نقطه x_0 وجود ندارد.

$$\text{ب) } y = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$



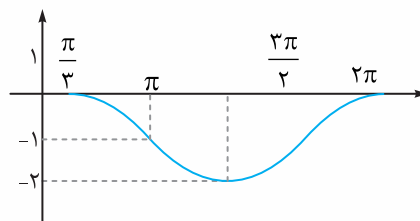
متوسط

-۸

نمودار اول مربوط به قسمت ب هست زیرا نمودار به اندازه $\frac{\pi}{3}$ به سمت

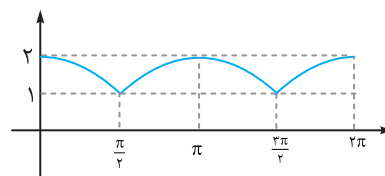
راست منتقل شده و در شروع نمودار رو به پایین حرکت کرده بنابراین نمودار

کسینوسی با انتقال $\frac{\pi}{3}$ به سمت راست است:

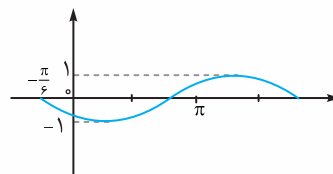


نمودار دوم مربوط به قسمت پ است زیرا نمودار بالای محور x هاست و به

اندازه یک واحد به بالا منتقل شده و داریم:



نمودار سوم مربوط به قسمت آ است و داریم:



-۱۲

دشوار

الف) صفرهای تابع $y = \sin x$ به صورت $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ هست و بنابراین صفرهای تابع $y = \sin 2x$ به صورت $2x = k\pi$ و در نتیجه $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ هست. $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

ب) صفرهای تابع $y = \cos x$ به صورت $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ است و بنابراین داریم:

$$y = 3 \cos\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\xrightarrow{\times 2} x = (2k+1)\pi + \frac{\pi}{2}$$

که در بازه $[0, 2\pi]$ به صورت زیر است:

$$x = \frac{3\pi}{2}$$

-۱۳

متوسط

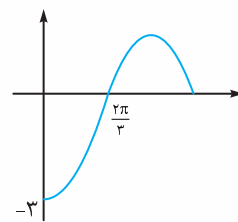
الف) می‌دونیم که $-1 \leq \sin x \leq 1$ پس $-2 \leq 2\sin x \leq 2$ بنابراین کمترین مقدار -2 و بیشترین مقدار $+2$ است.

ب) همان‌طور که برای سینوس داشتیم، برای کسینوس نیز: $-1 \leq \cos x \leq 1$ بنابراین $-3 \leq 3\cos x \leq 3$ و می‌دانیم تغییرات مربوط به x تاثیر در دامنه دارند و تأثیری در برد با ماکزیمم و مینیمم تابع ندارند بنابراین کمترین مقدار -3 و بیشترین مقدار $+3$ است.

-۱۴

متوسط

از روی نمودار می‌بینیم که در مقایسه با نمودار کسینوس، ضریب a منفی است و داریم:



$$\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right) \xrightarrow{\text{چایگذاری}} a \cos \frac{2\pi}{3} + b = 0 \Rightarrow a \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + b = 0$$

$$\Rightarrow -a \cos \frac{\pi}{3} + b = 0 \Rightarrow -\frac{a}{2} + b = 0 \quad (1)$$

$$(0, -3) \xrightarrow{\text{چایگذاری}} a \cos 0 + b = -3 \Rightarrow a + b = -3 \quad (2)$$

$$\begin{cases} -\frac{a}{2} + b = 0 \\ a + b = -3 \end{cases} \text{ منهای}$$

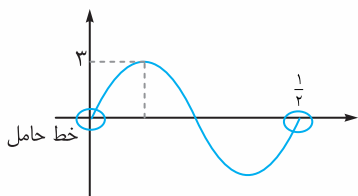
$$a + \frac{a}{2} = -3 \Rightarrow \frac{3}{2}a = -3 \Rightarrow a = -2 \Rightarrow -2 + b = -3 \Rightarrow b = -1$$

-۱۵

دشوار

از فرمولنامه فصل می‌دونیم که

$$T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = \frac{2}{|b|}$$



و از روی نمودار مقدار T برابر $\frac{1}{2}$ است (یک نوسان کامل) بنابراین داریم:

$$\frac{2}{|b|} = \frac{1}{2} \Rightarrow b = 4 \Rightarrow (b > 0)$$

از طرفی خط حامل محور x هاست و بنابراین $m = -3, M = 3$ و باز از فرمولهای فرمولنامه داریم:

$$a = \frac{M-m}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$$

$$c = \frac{M+m}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \sin 4\pi x$$

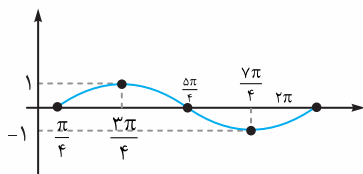
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{12}\right) = 3 \sin\left(4\pi \times \frac{1}{12}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

-۱۶

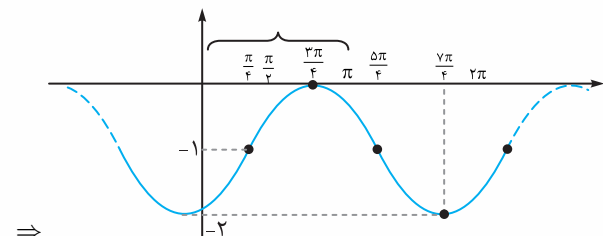
متوسط

الف) برای رسم نمودار این تابع کافیست نمودار $y = \sin x$ رو رسم کنیم، سپس

به اندازه $\frac{\pi}{4}$ به سمت راست منتقل کرده و یک واحد به پایین ببریم:

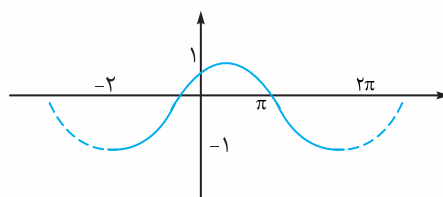


$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$$



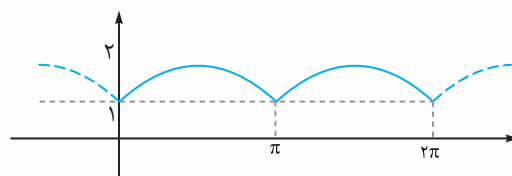
این نمودار در بازه $[0, \pi]$ یک‌به‌یک نیست زیرا خطی موازی محور x ها وجود دارد که نمودار را در بیش از یک نقطه قطع می‌کند.

(ب)



در بازه $[0, \pi]$ یک‌به‌یک نیست.

(پ)

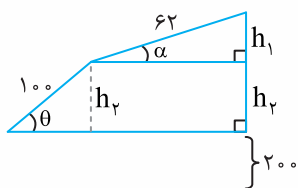


در بازه $[0, \pi]$ یک‌به‌یک نیست.

آسان

-۱۹

(آ) شبیه راه‌حل سوال ۱۸ داریم:



ارتفاع نوک گیره $h = 62 \sin \alpha + 100 \sin \theta + 200$

(ب) $219 = 62 \sin(-30^\circ) + 100 \sin \theta + 200$
 $-\frac{1}{2}$

$219 - 200 + 31 = 100 \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ$

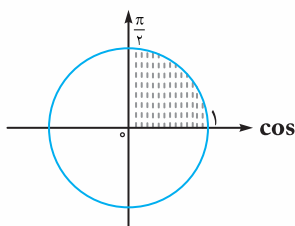
آسان

-۲۰

(آ) نادرست (ب) درست

(پ) نادرست

(ت) نادرست: $0 < \cos x < 1$

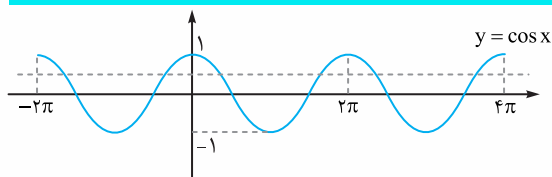


(ث) نادرست: $-1 \leq \sin x \leq 1$

(ج) نادرست: $\cos(\pi) = -1$

آسان

-۲۱



(آ) بله، اگر خط $y = \frac{1}{3}$ را رسم کنیم می‌بینیم که نقاط زیادی وجود دارند که

$\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد.

(ب) خیر، زیرا حداکثر مقداری که کسینوس می‌تواند بگیرد برابر ۱ است و هیچ‌گاه مساوی ۲ نمیشه.

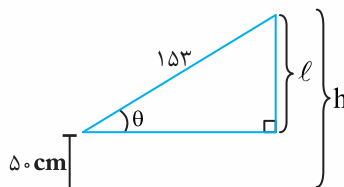
(پ) کم‌ترین مقدار تابع $y = \cos x$ همواره برابر -۱ و حداکثر مقدار آن برابر

± 1 است. داریم: $-1 \leq \cos x \leq 1$

آسان

-۱۷

در روپات طراحی شده مثلثی قائم‌الزاویه به صورت زیر وجود دارد:



$\sin \theta = \frac{l}{153} \Rightarrow l = 153 \sin \theta$

ارتفاع نوک گیره روپات:

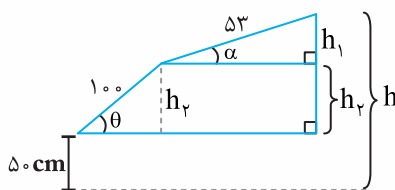
$h = 50 + l$

$\Rightarrow h = 50 + 153 \sin \theta \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

آسان

-۱۸

(آ) با رسم مربعات به صورت ساده داریم:



$\sin \theta = \frac{h_2}{100} \Rightarrow h_2 = 100 \sin \theta$

$\sin \alpha = \frac{h_1}{53} \Rightarrow h_1 = 53 \sin \alpha$

ارتفاع نوک گیره $h = h_1 + h_2 + 50 = 100 \sin \theta + 53 \sin \alpha + 50$

(ب) $23/5 = 100 \sin \theta + 53 \sin(-30^\circ) + 50$

$\Rightarrow 23/5 = 100 \sin \theta - \frac{53}{2} + 50 \Rightarrow 100 \sin \theta = 23/5 - 23/5 = 0$

$\Rightarrow \sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$

۲۲-

آسان

(آ)

$$D_{\sin x} = \mathbb{R}, D_{\cos x} = \mathbb{R} \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

(ب)

$$D_{\cos x} = D_{\cos(\pi - x)} = \mathbb{R} \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

$$\cos(\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$$

(پ)

$$D_{\cos x} = D_{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = \mathbb{R} \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$$

(ت)

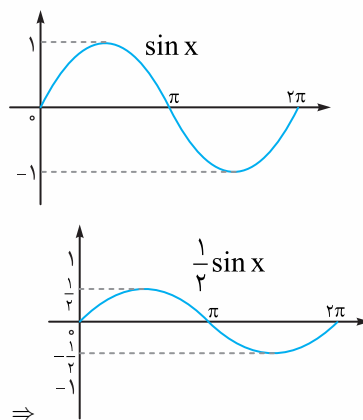
$$D_{\sin x} = D_{\sin(\pi - x)} = \mathbb{R} \Rightarrow \text{برهم منطبق هستند}$$

$$\sin(\pi - x) = \sin(x) = \sin x$$

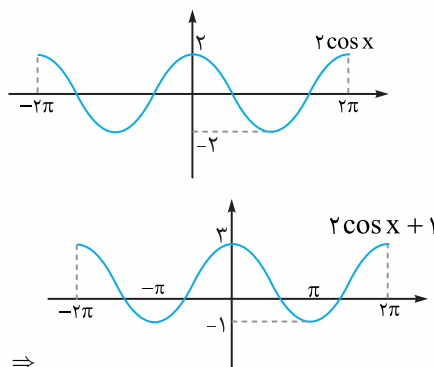
۲۳-

متوسط

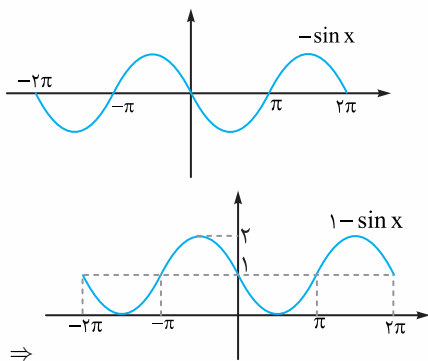
(آ) تأثیر ضریب $\frac{1}{2}$ در برد سینوس است و باعث نصف شدن ماکزیمم و مینیمم می‌شود.



(ب)



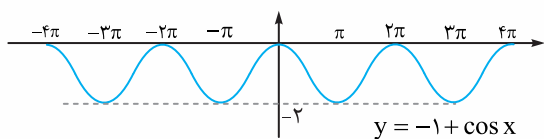
(پ)



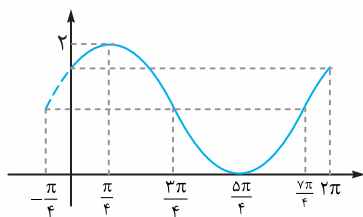
دشواری

۲۴-

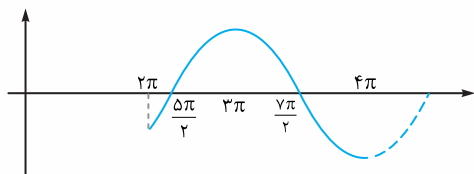
(آ)



(ب)



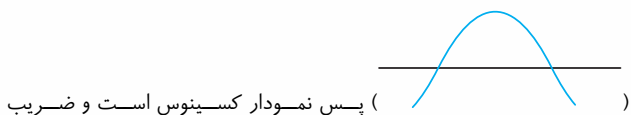
(پ)



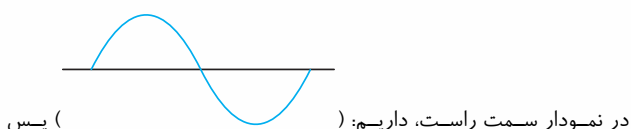
دشواری

۲۵-

در نمودار سمت چپ، اگر خط حامل را در نظر بگیریم داریم



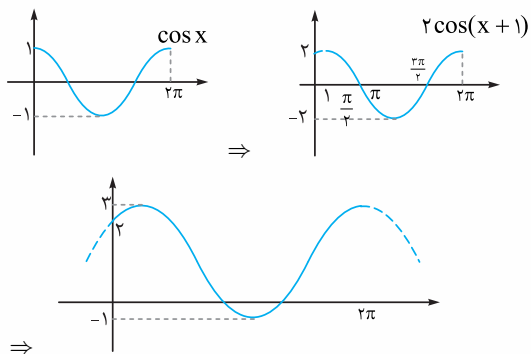
کسینوس منفی است پس ضابطه آن در (پ) آمده است.



نمودار سینوسی، با ضریب مثبت است و از آنجا که خط حامل روی $y = -1$ است پس ۱ واحد به پایین منتقل شده و بنابراین ضابطه آن در «ب» آمده است.

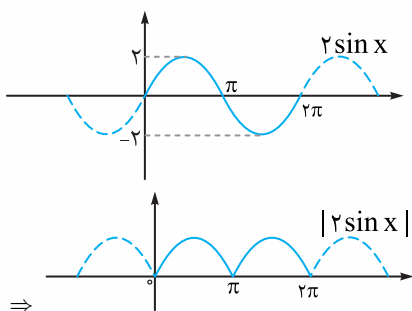


ب) $y = 2 \cos(x+1) + 1$

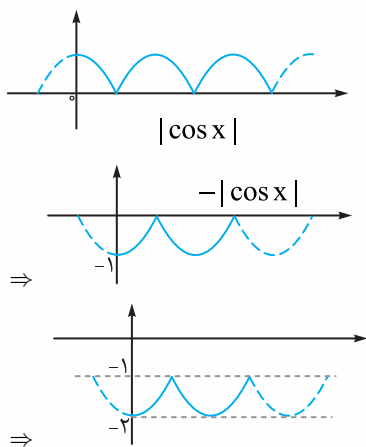


دشوار -۲۸

آ) $y = |2 \sin x|$



ب) $y = -|\cos x| - 1$



دشوار -۲۹

خط حامل این نمودار $y = 2$ است و فاصله حداقل مقدار و حداکثر مقدار تابع تا خط حامل یک واحد است بنابراین $a = \pm 1$ از طرفی نمودار از زیر خط حامل شروع به رسم کرده پس $a = -1$

فاصله صفر تا $\frac{\pi}{3}$ به اندازه $\frac{1}{3}$ کل دور متناوب است پس: $T = 4(\frac{\pi}{3}) = \frac{4\pi}{3}$

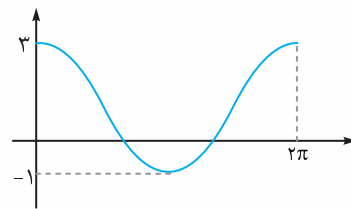
$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{|b|} \Rightarrow |b| = \frac{3}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} M = 3 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1+3}{2} = 2$$

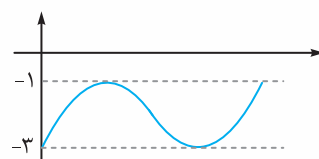
$$\Rightarrow \frac{bc}{a} = \frac{\frac{3}{2} \times 2}{-1} = -3$$

حال نمودارهای مربوط به قسمت‌های آ و ت را رسم می‌کنیم:

آ) $y = 2 \cos x + 1$



ت) $y = \sin x - 2$



آسان -۲۶

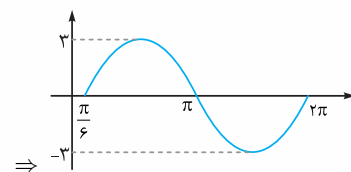
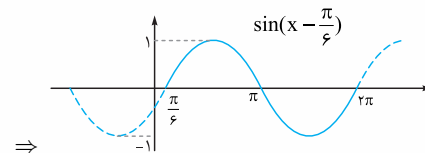
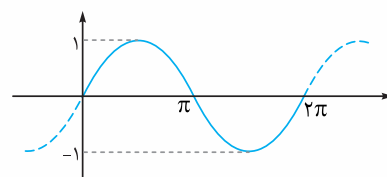
آ) درست، زیرا سینوس ضریب $\frac{1}{3}$ گرفته و برد باید $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ باشد و تناوب 2π باشد که در نمودار نیز همین‌طور آمده است.

ب) نادرست، زیرا نمودار $y = \cos x - \frac{1}{3}$ همان نمودار $y = \cos x$ است که

به اندازه $\frac{1}{3}$ به پایین منتقل می‌شود و بنابراین برد تابع $[-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}]$ است که نمودار درست رسم نشده است.

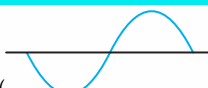
دشوار -۲۷

آ) $y = -3 \sin(x - \frac{\pi}{6})$



۳۰-

دشوار

نمودار نسبت به خط حامل این گونه است: () پس نمودار مربوط به سینوس اما با $ab < 0$ است.

از روی نمودار متوجه می شویم که $\frac{3}{4}T = \frac{\pi}{4}$ بنابراین: $T = \frac{\pi}{3}$

$$|b| = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

$$|a| = \frac{M-m}{2} = \frac{1+3}{2} = 2, \quad c = \frac{M+m}{2} = \frac{1-3}{2} = -1$$

$$\Rightarrow a+b+c = \begin{cases} 2-6-1=-5 \\ -2+6-1=3 \end{cases}$$



۱- گزینه «ا»

دشوار

$f(x) = f(T+x)$ طبق تعریف تابع متناوب

$$f(-1/75) = f(4-1/75) = f(2/25) = \sqrt{2/25} = 1/5$$

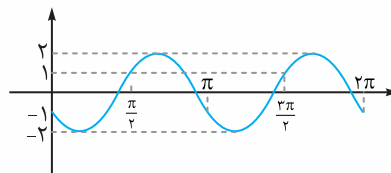
پاسخ در گزینه‌ها نمی‌باشد.

۲- گزینه «ب»

دشوار

$$y = -2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	-2	0	1	-1	1	-1



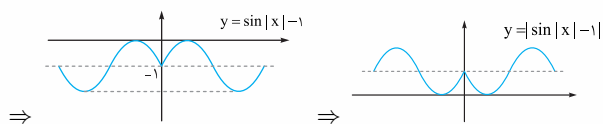
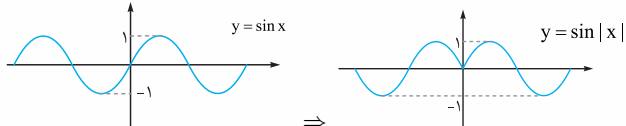
از روی نمودار هم مشخص است که تابع در دو نقطه به بیشترین مقدار خود می‌رسد. در واقع زمانی این ماکزیمم رخ می‌دهد که $\sin x = -1$ یعنی مقدار

جلوی سینوس یا $\frac{3\pi}{2}$ شود یا $\frac{7\pi}{2}$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{+} \frac{7\pi}{3}$$

دشوار

۳- گزینه «ب»



دشوار

۴- گزینه «ا»

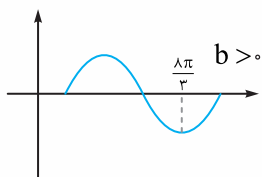
$$y = \sin(x - b)$$

می‌دونیم که تابع سینوس اولین مینیمم خود در سمت راست محور y رو به

ازای $x = \frac{3\pi}{2}$ می‌گیره اما این تابع در $x = \frac{8\pi}{3}$ گرفته که بزرگ‌تر از $\frac{3\pi}{2}$

است یعنی نمودار به سمت راست منتقل شده و بنابراین b مقداری مثبت است

پس

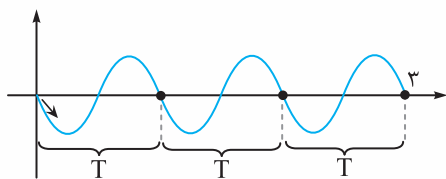


$$\Rightarrow \frac{3\pi}{2} + b = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow b = \frac{7\pi}{6}$$

دشوار

۵- گزینه «ا»

$$\begin{cases} m = -3 \\ M = 3 \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{3+3}{2} = 3, c = \frac{3-3}{2} = 0$$



$$3T = 3 \Rightarrow T = 1$$

$$\frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \Rightarrow |b| = 2$$

نمودار از خط حامل (محور x) رو به پایین رسم شده بنابراین ab منفی است.

$$|ab| = 6 \xrightarrow{ab < 0} ab = -6$$

۶- گزینه ۱»

متوسط

از فاصله $۲/۵ - ۳/۵$ تا $۳/۵$ به اندازه سه دوره تناوب داریم پس:

$$۳T = ۳/۵ - (-۲/۵) = ۶ \Rightarrow T = ۲ \Rightarrow \frac{۲\pi}{|b\pi|} = ۲ \Rightarrow |b| = ۱ \Rightarrow b = ۱$$

$$y = a \sin\left(\frac{\pi}{۲} + b\pi x\right) = a \cos b\pi x$$

$$\begin{cases} m = -۲ \\ M = ۲ \end{cases} \Rightarrow |a| = \frac{۲+۲}{۲} = ۲$$

و از اونجایی که نمودار کسینوس نسبت به خط حامل در حالت a مثبت (شروع رو به پایین) است پس: $a = ۲$ و بنابراین:

$$ab = ۲$$

۷- گزینه ۱۴»

آسان

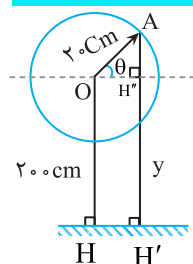
$$\begin{cases} m = -۴ \\ M = ۵ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۵ - (-۴)}{۲} = \frac{۹}{۲}$$

$$\Rightarrow (a, c) = \left(\frac{۹}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$$

$$c = \frac{-۴ + ۵}{۲} = \frac{۱}{۲}$$

۸- گزینه ۱۳»

آسان



$$OAH'': \sin \theta = \frac{AH''}{۲۰} \Rightarrow AH'' = ۲۰ \sin \theta$$

$$y = AH'' + H''H' \Rightarrow y = ۲۰ \sin \theta + ۲۰$$

$$\Rightarrow y = ۲۰(\sin \theta + ۱)$$

۹- گزینه ۱۳»

آسان

$$T = ۱/۲ \Rightarrow \frac{X\pi}{\cancel{Y} \cancel{Z}} = |B| \xrightarrow{B > 0} \frac{\pi}{0.6} = \frac{۱۰\pi}{۶} = \frac{۵\pi}{۳}$$

$$A = \frac{۵ - (-۵)}{۲} = ۵$$

$$\Rightarrow A \times B = ۵ \times \frac{۵\pi}{۳} = \frac{۲۵\pi}{۳}$$

۱۰- گزینه ۱۳»

آسان

$$T = ۶ \Rightarrow \frac{X\pi}{\cancel{Y} \cancel{Z}} = |b\pi| \xrightarrow{b > 0} b = \frac{۱}{۳}$$

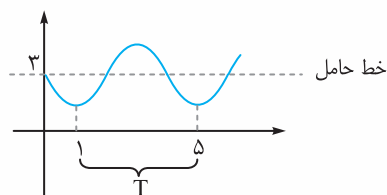
$$a = ۲ \Rightarrow a + b = ۲ + \frac{۱}{۳} = \frac{۷}{۳}$$

۱۱- گزینه ۱۲»

دشواری

باتوجه به فرم نمودار و نسبت به خط حامل، ab منفی است و دوره تناوب برابر ۴ است.

$$\frac{X\pi}{|b\pi|} = X^2 \Rightarrow |b| = \frac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{ضرب بنویس مثبت}} b = -\frac{۱}{۲}$$



ضریب سینوس ۱ است یعنی فاصله ماکزیمم (یا مینیمم) تا خط حامل ۱ واحد است پس:

$$\begin{cases} m = ۲ \\ M = ۴ \end{cases} \Rightarrow a = \frac{۴+۲}{۲} = ۳ \Rightarrow f(x) = ۳ + \sin\left(-\frac{\pi}{۲}x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = ۳ - \sin\frac{\pi}{۲}x \Rightarrow f\left(\frac{۲۵}{۳}\right) = ۳ - \sin\left(\frac{\pi}{۲} \times \frac{۲۵}{۳}\right)$$

$$= ۳ - \sin\left(\frac{۲۵\pi}{۶}\right) = ۳ - \sin\left(۴\pi + \frac{\pi}{۶}\right) = ۳ - \sin\left(\frac{\pi}{۶}\right) = ۳ - \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

۱۲- گزینه ۱۲»

دشواری

اول تابع f رو کمی مرتب‌تر و ساده‌تر کنیم:

$$f(x) = \sqrt{\frac{۱}{1 + \tan^2(x+b)}} = \sqrt{\frac{۱}{\cos^2(x+b)}}$$

$$= |\cos(x+b)| = -\cos(x+b)$$

حاصل قدرمطلق قرینه عبارت است به این دلیل که اگر نمودار را به طول کامل رسم کنیم در شروع نمودار کسینوسی رو به بالا حرکت کرده است.

$$f(۴\pi) = -۱ \Rightarrow -\cos(۴\pi + b) = -۱ \Rightarrow \cos(b) = ۱ \Rightarrow b = ۲k\pi$$

$$\Rightarrow f(x) = -\cos(x + ۲k\pi) \Rightarrow f(x) = -\cos x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{۷\pi}{۴}\right) = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۳- گزینه ۱۴»

متوسط

با توجه به نمودار $T = ۶\pi$ است و داریم:

$$|b| = \frac{۲\pi}{T} = \frac{۲\pi}{۶\pi} = \frac{۱}{۳}$$

$$\begin{aligned} \text{Min} &= -۲ \Rightarrow |a| = \frac{۴ - (-۲)}{۲} = ۳, \quad C = \frac{۴ + (-۲)}{۲} = ۱ \\ \text{Max} &= ۴ \end{aligned}$$

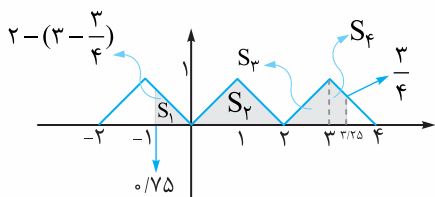
نمودار در نقطه شروع نوسان رو به بالا حرکت کرده پس $ab > 0$.

$$abc = ۳ \times \frac{۱}{۳} \times ۱ = ۱$$

۱۸- گزینه «۱»

متوسط

نمودار رو در بازه داده شده رسم کردیم و چون متناوب است به همان صورت در راستای محور X تعمیم دادیم



$$S = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times (1 + \frac{3}{4})$$

\$S_1\$ \$S_2\$ \$S_3\$ \$S_4\$ نوزنقه

$$= \frac{9}{32} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{7}{32} = 2$$

۱۹- گزینه «۱»

متوسط

$$\min = \sqrt{3} \Rightarrow ra - b = \sqrt{3}$$

$$f(\frac{\pi}{3}) = 0 \Rightarrow ra + b \sin(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}) = 0 \Rightarrow ra + b = 0$$

$$\begin{cases} ra - b = \sqrt{3} \\ ra + b = 0 \end{cases}$$

$$ra = \sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{r} \Rightarrow b = -\frac{\sqrt{3}}{r}$$

۲۰- گزینه «۱»

متوسط

$$T = \frac{9\pi}{20} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{20} = \frac{\pi}{5}$$

$$|b| = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$$

$$y = a \sin^2(bx - \frac{\pi}{4}) + c = a \left(\frac{1 - \cos(2bx - \frac{\pi}{2})}{2} \right) + c$$

$$= \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \sin 2bx + c = \frac{a}{2} + c - \frac{a}{2} \sin 2bx$$

$$f(\frac{\pi}{4}) = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + c = 1$$

$$\text{Max} = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} + c - \frac{a}{2} = 2 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = -2$$

یادت باشه:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

آسان

۱۴- گزینه «۱»

بیشترین (ماکزیمم) مقدار تابع $y = \cos x$ در نقاط $k\pi$ و مقادیر مینیمم آن در نقاط $(2k\pi - \pi)$ و محل برخورد آن با محور Xها در نقاط $k\pi + \frac{\pi}{2}$ اتفاق می افتد.

متوسط

۱۵- گزینه «۳»

اول خود تابع f روی کمی ساده کنیم:

$$y = a \cos(\frac{\pi}{2} - x) + b \Rightarrow y = a \sin x + b$$

$$\min = -4 \Rightarrow |a| = \frac{3 - (-4)}{2} = \frac{7}{4}$$

$$\text{Max} = 3$$

$$\xrightarrow{a > 0} y = \frac{7}{4} \sin x - \frac{1}{4} \Rightarrow y(\frac{5\pi}{6}) = \frac{7}{4} \sin \frac{5\pi}{6} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{4} \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} \sin(\frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4} = \frac{7}{4} (\frac{1}{2}) - \frac{1}{4} = \frac{7}{8} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

متوسط

۱۶- گزینه «۲»

$$y = a + b \cos(\frac{\pi}{2} - x) = a + b \sin x$$

$$M = 3 \Rightarrow a + |b| = 3$$

با توجه به موقعیت نمودار و خط حامل، b مثبت است. پس:

$$a + b = 3$$

$$f(-\frac{5\pi}{6}) = 0 \Rightarrow a + b \sin(-\frac{5\pi}{6}) = 0 \Rightarrow a - b \sin(\pi - \frac{\pi}{6}) = 0$$

$$\sin \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow a - \frac{b}{2} = 0 \Rightarrow ra - b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 3 \\ ra - b = 0 \end{cases}$$

$$ra = 3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow f(\frac{\pi}{6}) = 1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1 + 1 = 2$$

دشوار

۱۷- گزینه «۱»

نمودار نسبت به خط $x = 1$ متقارن است پس $f(2-x) = f(x)$

نمودار نسبت به خط $x = 3$ نیز متقارن است پس $f(6-x) = f(x)$

در رابطه دوم به جای X قرار می دهیم $(x+4)$

$$f(6 - (x+4)) = f(x) \Rightarrow f(2-x) = f(x+4)$$

با مقایسه رابطه اول داریم:

$$f(x+4) = f(x)$$

بنابراین دوره تناوب f برابر 4 است. برای بررسی این که ممکن است دوره

تناوب 2 باشد (کوچکتر شود) به جای X قرار می دهیم $x+2$:

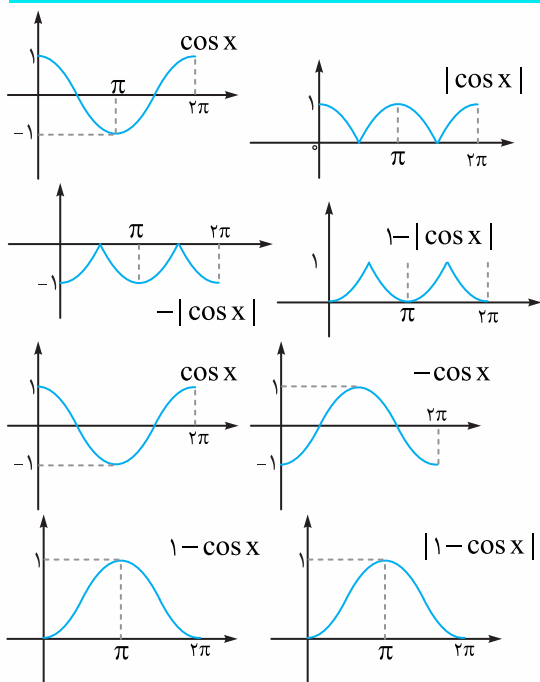
$$f(2 - (x+2)) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x)$$

که این رابطه را برای f نداریم پس $T = 4$ است.

دشواری

-۶



آسانی

-۷

می‌دانیم اگر $\alpha + \beta = 90^\circ$ آنگاه $\sin \alpha = \cos \beta$ پس در نتیجه

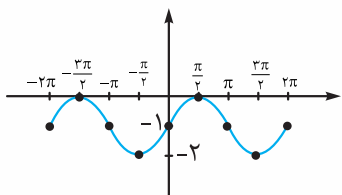
$$x - 70 + x - 10 = 90 \Rightarrow 2x - 80 = 90 \Rightarrow 2x = 170 \Rightarrow x = 85$$

متوسط

-۸

$$y = \cos(x - \frac{\pi}{2}) - 1 \Rightarrow y = \sin x - 1$$

x	-2π	$-\frac{3\pi}{2}$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y	-1	۰	-1	-2	-1	۰	-1	-2	-1

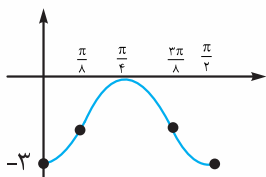


متوسط

-۹

شکل مربوط به آ است

ب) $y = -2 - \cos 4x$



متوسط

-۱

ا) $\frac{7\pi}{9}$ ب) $[-1, 1], \mathbb{R}$

ب) $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ت) $x = (2k+1)\pi, -1$

متوسط

-۲

ا) نادرست - در ربع دوم است.

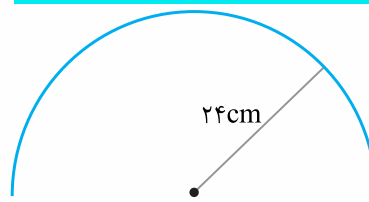
ب) درست - در هر مثلث ضلع روبه‌رو به زاویه کوچک‌تر، کوچک‌تر است از

ضلع روبه‌رو به زاویه بزرگ‌تر

پ) درست، $\cos \theta - \cos \theta = 0$

آسانی

-۳



$$L = r\theta$$

$$\theta = 120^\circ \Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$

$$L = 24 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{24 \times 2 \times 3.14}{3} = 50.24 \text{ cm}$$

آسانی

-۴

ا) $\sin(180 + 30) = -\sin 30 = -\frac{1}{2}$

ب) $\tan(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}) = \tan(3\pi + \frac{\pi}{3}) = +\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

متوسط

-۵

ا) $\sin(\frac{5\pi}{2} + 30^\circ) = +\cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ب) $\cos(480^\circ) = \cos(360 + 120) = \cos 120 = \cos(180 + 60)$

$$= +\cos 60 = \frac{1}{2}$$

ب) $\tan(\frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6}) = \tan(\pi + \frac{\pi}{6}) = +\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

ت) $\frac{\sin 37^\circ}{\cos 53^\circ} \xrightarrow{\text{متمم}} \frac{\cos 53^\circ}{\cos 53^\circ} = 1$



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

متوسط

-۱

آ) ۳۰۰ (ب) $[-1, 1], -\mathbb{R}$

ت) یک، $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ (ب) $x = k\pi$

آسان

-۲

آ) درست

ب) نادرست

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{36} = \frac{24\pi + 4\pi + 7\pi}{36} = \frac{35\pi}{36} \neq \pi$$

پ) درست

آسان

-۳

دایره کوچکتر $r = 6$ $\Rightarrow 2r = r \times \frac{\pi}{3} \Rightarrow r = 6$

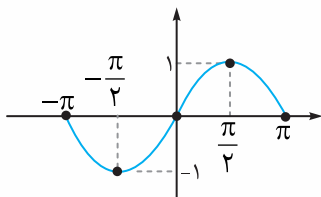
$8 = 2 + 6$ شعاع دایره بزرگ

کمان MN $L = 8 \times \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$

دشوار

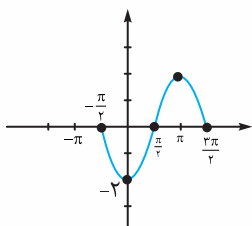
-۴

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y	0	-1	0	1	0



$\frac{\pi}{2}$ واحد به سمت راست و در راستای محور لها ۲ برابر

$$g(x) = 2 \sin(x - \frac{\pi}{2})$$



متوسط

-۱۰

$$\frac{\sin(90 + 20) + \cos(270 - 20) - \sin(270 + 20)}{\sin(180 + 20) + \sin(360 + 90 - 20)} =$$

$$\frac{\cos 20 - \sin 20 + \sin 20}{-\sin 20 + \cos 20} = \frac{\cos 20}{-\sin 20 + \cos 20}$$

$$\xrightarrow{\div \cos 20} \frac{1}{-\tan 20 + 1} = \frac{1}{-\frac{4}{15} + 1} = \frac{15}{11}$$

دشوار

۱۱- گزینه «۴»

$$\tan(285) = \tan(270 + 15) = -\cot 15$$

$$-\tan(165) = -\tan(180 - 15) = +\tan 15$$

$$\sin(1095) = \sin(15)$$

$$\cos(255) = \cos(270 - 15) = -\sin 15$$

$$\frac{(-\cot 15)(\tan 15) - (\sin 15)(-\sin 15)}{-1}$$

$$-1 + \sin^2 15 = -\cos^2 15$$

آسان

-۱۲

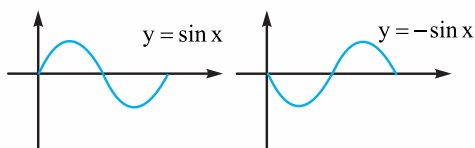
$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \theta = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-2/\sqrt{5}}{1/\sqrt{5}} = -2, \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\tan \theta \times \cot \theta}{\sin \theta \times \cos \theta} = \frac{-2 \times -\frac{1}{2}}{-\frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{-\frac{2}{5}} = -\frac{5}{2}$$

آسان

-۱۳



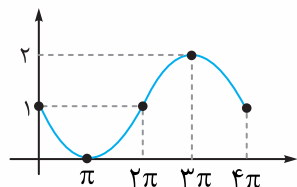


متوسط -۹

شکل مربوط به قسمت ب است.

آ) $y = 1 - \sin \frac{x}{2}$

ب)



متوسط -۱۰

$\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30} \Rightarrow$ زاویه بین هر دو کابین

حال می‌خواهیم بدانیم در $\frac{52\pi}{6}$ چند تا $\frac{\pi}{30}$ قرار دارد پس

$$\frac{52\pi}{6} \div \frac{\pi}{30} = \frac{52 \times 30 \times \pi}{6 \times \pi} = 260$$

پس ۲۶۵ کابین جابه‌جا شده‌ایم چون که ۶۰ کابین داشته‌ایم پس این چرخ و

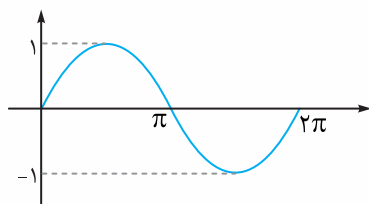
فلک ۴ دور کامل زده است و در چرخ آخر ۲۵ کابین جابه‌جا شده است پس

$$\begin{array}{r} 265 \\ 60 \\ \hline 240 \\ \hline 25 \end{array}$$

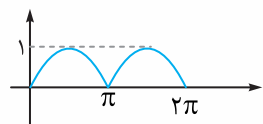
الآن در کابین ۳۵ نشسته‌ایم $10 + 25 = 35$

متوسط -۱۱

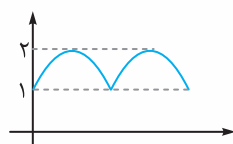
$y = \sin x$



$y = |\sin x|$



$y = |\sin x| + 1$



متوسط -۵

آ) $\cos(\frac{7\pi}{2} - 60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\tan(84^\circ) = -\tan(72^\circ + 12^\circ) = -\tan 12^\circ = -\tan(180^\circ - 6^\circ) = +\tan 6^\circ$

ب)

پ) $\sin(6\pi) = 0$

ت) $\frac{\tan 17^\circ}{\tan 1^\circ} = \frac{-\tan 1^\circ}{\tan 1^\circ} = -1$

آسان -۶

$L_1 = L_2$

$r_1\theta_1 = r_2\theta_2$

$15\theta_1 = 60 \times \frac{5\pi}{4}$

$\theta_1 = 5\pi$

متوسط -۷

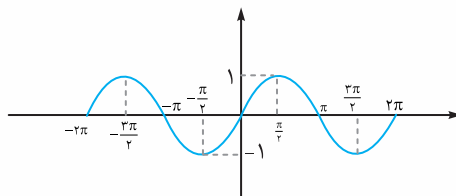
$\frac{\pi}{9} + x + \frac{2\pi}{3} + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2x + \frac{7\pi}{9} = \frac{\pi}{2}$

$2x = \frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{9} \Rightarrow 2x = \frac{9\pi - 14\pi}{18}$

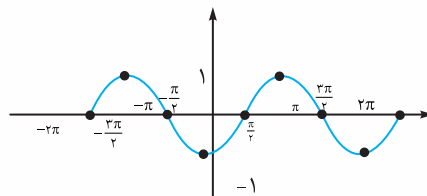
$2x = -\frac{5\pi}{18} \Rightarrow x = -\frac{5\pi}{36}$

دشوار -۸

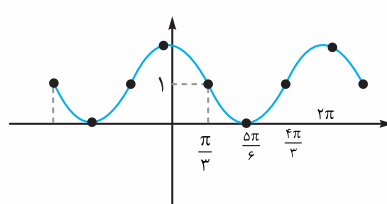
$y = \sin x$



$y = \sin(x - \frac{\pi}{3})$



$y = 1 - \sin(x - \frac{\pi}{3})$





متوسط

۱- گزینه «ب»

حواستون باشه! دوره‌ی تناوب توابع $\sin bx$, $\cos bx$ از رابطه

$$\max, \min, T = \frac{2\pi}{|b|}$$

و $\min = -|a| + c$ از رابطه $\max = |a| + c$ به دست می‌آید.

فاصله بین $-\frac{\pi}{4}$ تا $\frac{3\pi}{4}$ یک دوره تناوب شکل را تشکیل داده است یعنی

$$y = 1 + \frac{1}{2} \sin 2bx \Rightarrow \pi = \frac{2\pi}{|2b|} \Rightarrow |2b| = 2 \Rightarrow b = \pm 1$$

همچنین $\min = \frac{1}{2}$, $\max = \frac{3}{2}$ پس

$$\frac{3}{2} = \left| \frac{1}{2}a \right| + 1 \Rightarrow \left| \frac{a}{2} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |a| = 1 \Rightarrow a = \pm 1$$

در نتیجه $b = 1$, $a = 1$ قابل قبول است

$$y = 1 + \frac{1}{2} \sin 2x, \quad a + b = 2$$

متوسط

۲- گزینه «ب»

عبارات را با استفاده از اتحادها ساده کنید:

$$\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} \left(2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - \sin^2 x \right)}$$

$$= \left| \frac{1}{\cos x} \right| (1 - \sin^2 x) \xrightarrow{\pi < x < \frac{3\pi}{2}} \xrightarrow{\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}} -\frac{1}{\cos x} (\cos^2 x) = -\cos x$$

متوسط

۳- گزینه «ب»

$$\sin\left(\frac{17\pi}{3}\right) = \sin\left(6\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{17\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{19\pi}{4}\right) = \tan\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

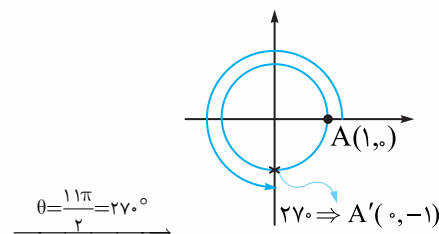
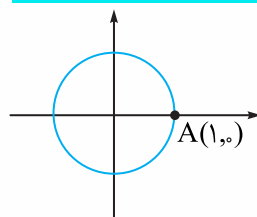
$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = +\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه:

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-1)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

آسان

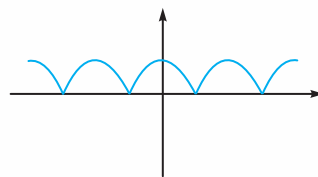
-۱۲



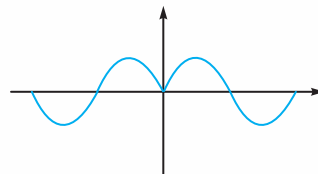
دشوار

-۱۳

آ) $y = |\cos x|$



ب) $y = \sin |x|$





دشواری

۸- گزینه «۴»

اگر عبارات را ساده کنیم داریم:

$$y = a + b \sin\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$$

$$y = a + b \cos x$$

نقطه $(\frac{7\pi}{3}, 0)$ در تابع صدق می‌کند max تابع برابر ۳ است پس

$$a + b \cos \frac{7\pi}{3} = 0 \Rightarrow a + b \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow a + b \cos \frac{\pi}{3} = 0$$

$$a + \frac{1}{2}b = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b$$

$$\max = |b| + a = 3 \Rightarrow -b + a = 3 \xrightarrow{a = -\frac{1}{2}b} -b - \frac{1}{2}b = 3$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2}b = 3 \Rightarrow b = -2$$

متوسط

۹- گزینه «۴»

با توجه به فرمول‌های توابع مثلثاتی تناوب از روی شکل فاصله $\frac{9\pi}{2}$ تا $\frac{-3\pi}{2}$

است

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow 6\pi = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{3}$$

$$\max = |a| + c = 1$$

$$\min = -|a| + c = -3$$

$$2c = -2 \Rightarrow c = -1$$

$$|a| - 1 = 1 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2$$

$$\frac{a}{b} = \frac{-2}{\frac{1}{3}} = -6 \quad \text{در نتیجه}$$

آسان

۱۰- گزینه «۴»

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cot \alpha$$

$$\tan \alpha = \frac{-1/5}{2} = -\frac{3}{4} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{4}{3}$$

متوسط

۱۱- گزینه «۱»

ابتدا عبارات داده شده را ساده می‌کنیم:

$$f(\alpha) = 4 \sin \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha) + 2 \sin \alpha$$

$$= 4 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha = 6 \sin \alpha - 8 \sin^3 \alpha = 2(3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha)$$

با توجه به اتحادها که در ذهن داریم $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$ پس

$$= 2 \sin 3\alpha$$

$$f\left(\frac{41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{3 \times 41\pi}{9}\right) = 2 \sin\left(\frac{41\pi}{3}\right) = 2 \sin\left(14\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -2 \sin \frac{\pi}{3}$$

$$= -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

متوسط

۱۳- گزینه «۳»

در شکل داده شده $\max = \sqrt{3}$ است پس $|b| + a = \sqrt{3}$

همچنین نقطه $(\pi, -\frac{3}{2})$ در تابع صدق می‌کند پس:

$$-\frac{3}{2} = a + b \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow -\frac{3}{2}a = a - b \sin \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow -\frac{3}{2} = a - \frac{\sqrt{3}}{2}b \xrightarrow{\times 2} -3 = 2a - \sqrt{3}b$$

با اطلاعات داده شده و حل دستگاه داریم:

$$\begin{cases} 2a - \sqrt{3}b = -3 \\ a + b = \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{\times + \sqrt{3}} \begin{cases} 2a - \sqrt{3}b = -3 \\ \sqrt{3}a + \sqrt{3}b = 3 \end{cases}$$

$$(\sqrt{3} + 2)a = 0 \Rightarrow a = 0$$

$$b = \sqrt{3}$$

آسان

۵- گزینه «۱»

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|a|} = \pi \Rightarrow a = 2$$

$$T = \frac{2\pi}{\frac{1}{a}} = 4\pi$$

آسان

۶- گزینه «۴»

$$\frac{3 \cos(270 - 22) - 2 \sin(180 - 22)}{\sin(180 + 22) - \cos(270 + 22)} = \frac{-3 \sin 22 - 2 \sin 22}{-\sin 22 - \sin 22} = \frac{5}{2} = 2.5$$

آسان

۷- گزینه «۲»

$$\tan(300) = \tan(270 + 30) = -\cot 30 = -\sqrt{3}$$

$$\cos(210) = \cos(180 + 30) = -\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan(480) = \tan(120) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$$

$$\sin 840 = \sin 120 = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

در نتیجه:

$$(-\sqrt{3})\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (-\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$



$$\begin{aligned} &= \frac{\sqrt{r}}{r} \sin 2\beta - \sqrt{r} \sin^2 \beta - \frac{\sqrt{r}}{r} \cos 2\beta - \frac{\sqrt{r}}{r} \sin 2\beta \\ &= -\sqrt{r} \sin^2 \beta - \frac{\sqrt{r}}{r} (r \cos^2 \beta - 1) \\ &= -\sqrt{r} \sin^2 \beta - \sqrt{r} \cos^2 \beta + \frac{\sqrt{r}}{r} \\ &= -\sqrt{r} (\underbrace{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}_1) + \frac{\sqrt{r}}{r} = -\frac{\sqrt{r}}{r} \end{aligned}$$

۱۶- گزینه «۱» متوسط

$$T = r \left(\frac{\Delta}{r} - \frac{1}{r} \right) = r \Rightarrow \frac{r\pi}{|b|} = r \Rightarrow |b| = \pi \xrightarrow{b > 0} b = \pi$$

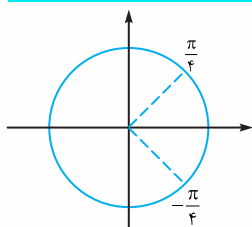
$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Max} = \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{\frac{1}{4} - (-\frac{1}{4})}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$a = \frac{1}{4}$ با توجه به نمودار a مثبت است پس:

$$\frac{ac}{a} = \frac{\frac{1}{4} \times \pi}{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{16}$$

۱۷- گزینه «۱» دشوار



$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

$$\tan x = \frac{1-m}{2+m}$$

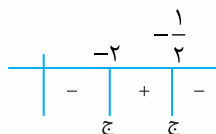
$$-1 < \tan x < 1$$

$$-1 < \frac{1-m}{2+m} < 1$$

$$0 < \frac{1-m+2+m}{2+m} \Rightarrow 0 < \frac{3}{2+m} \Rightarrow 2+m > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$\frac{1-m-2-m}{2+m} < 0 \Rightarrow \frac{-2m-1}{2+m} < 0$$

اشتراک جوابها $(-\frac{1}{2}, +\infty)$



۱۲- گزینه «۱۴» دشوار

ابتدا به توانها دقت کنید:

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 9 \cos^2 x \leq 9$$

$$-1 \leq 9 \cos^2 x - 1 \leq 8 \Rightarrow -1 \leq \sqrt{9 \cos^2 x - 1} \leq 2$$

$$\sqrt{9 \cos^2 x - 1} = t \Rightarrow -1 \leq t \leq 2 \Rightarrow f(t) = t^2 - t^2 \quad -1 \leq t \leq 2$$

تابع $f(t)$ تابعی است صعودی پس سر و ته بازه مقادیر برد را به می‌دهد

در نتیجه:

$$f(-1) = 2^{-1} - 2^1 = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}, f(2) = 2^2 - 2^{-2} = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$$

$$\text{برد آن } \left[-\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right] = [a, b]$$

$$b - a = \frac{15}{4} + \frac{3}{2} = \frac{15}{4} + \frac{6}{4} = \frac{21}{4}$$

۱۳- گزینه «۱۴» متوسط

$$\sqrt{1 + 2\sqrt{\cos^2 x (\sin^2 x)}} = \sqrt{1 + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x}$$

$$= \sqrt{(\sin x + \cos x)^2} = |\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x$$

۱۴- گزینه «۲» آسان

$$\cos \frac{3\pi}{14} = -\cos \frac{11\pi}{14}$$

با توجه به مکمل بودن دو زاویه داریم:

$$\cos \frac{5\pi}{14} = -\cos \frac{9\pi}{14}$$

در نتیجه مجموع صفر خواهد بود.

۱۵- گزینه «۲» دشوار

$$\begin{cases} A = \beta + 45 \\ A + \beta + C = 180 \end{cases}$$

$$\Rightarrow C = 180 - A - \beta \Rightarrow C = 180 - (\beta + 45) - \beta$$

$$C = 180 - \beta - 45 - \beta \Rightarrow C = 135 - 2\beta$$

در نتیجه:

$$r \cos(\beta + 45) \sin \beta - \sin(135 - 2\beta)$$

$$r [\cos \beta \cos 45 - \sin \beta \sin 45] \sin \beta - [\sin 135 \cos 2\beta - \cos 135 \sin 2\beta]$$

بنا به قوانین مکمل دو زاویه:

$$\sqrt{r} \cos \beta \sin \beta - \sqrt{r} \sin^2 \beta - \frac{\sqrt{r}}{2} \cos^2 \beta - \frac{\sqrt{r}}{2} \sin 2\beta$$



سؤالات تستی

پاسخنامه

آزمون پلاس

۱- گزینه «ا»

$$T = \frac{9\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{5}$$

چون در یک دوره تناوب رسم شده است پس

دوره تناوب $y = \cos^2 bx$ برابر با $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

$$\frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 5 \Rightarrow b = 5$$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = a \cos^2\left(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) + c \Rightarrow y = a + c = 1 \Rightarrow a + c = 1$$

(۲-) که مینیمم تابع \cos است در میانگین بین $\frac{\pi}{4}$ و $\frac{9\pi}{2}$ اتفاق افتاده

است:

$$x = \frac{7\pi}{2} \Rightarrow y = a \cos^2\left(\frac{35\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow y = a \cos^2\left(\frac{3\pi}{4}\right) + c \Rightarrow c = -2$$

پس $a = 3$

$$ab = (3)(5) = 15$$

۲- گزینه «ب»

با استفاده از اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ داریم

$$f(x) = \frac{2}{a} - b \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)$$

حالا با استفاده از $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x$ داریم:

$$f(x) = \frac{2}{a} - b\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos^2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right)\right) = \frac{2}{a} - \frac{b}{2} - \frac{b}{2}(-\sin 2cx)$$

$$f(x) = \frac{b}{2} \sin(2cx) + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|2c|} \Rightarrow 9\pi = \frac{2\pi}{|2c|} \Rightarrow c = \frac{1}{9}$$

$$\max = \left|\frac{b}{2}\right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 6 \xrightarrow{b > 0} \frac{2}{a} = 6 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$\min = -\left|\frac{b}{2}\right| + \frac{2}{a} - \frac{b}{2} = 0 \xrightarrow{b > 0} b = 6$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3 + 3 \sin\left(\frac{2}{9}x\right) = 3 + 3 \sin\left(\frac{2}{9} \times \frac{3\pi}{4}\right) = 4/5$$

دشوار

۱۸- گزینه «ب»

با استفاده از فرمول مثلثاتی

$$2(1 - \cos^2 x) + \cos^2 x = \frac{4}{3} \Rightarrow 2 - 2\cos^2 x + \cos^2 x = \frac{4}{3}$$

$$2 - \frac{4}{3} = \cos^2 x \Rightarrow \frac{2}{3} = \cos^2 x$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{2}$$

متوسط

۱۹- گزینه «ب»

با توجه به فرمول دوره تناوب $|b| = \frac{1}{2\pi}$ $\Rightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{|b|}$ با توجه به فرمول \min, \max

$$\begin{aligned} 5 &= |a| + c \Rightarrow 6 = 2c \Rightarrow c = 3 \\ 1 &= -|a| + c \end{aligned}$$

$$|a| + 3 = 5 \Rightarrow |a| = 2 \Rightarrow a = -2$$

متوسط

۲۰- گزینه «ب»

$$T = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|c|} \Rightarrow |c| = 1 \Rightarrow c = 1$$

$$\max = |b| + a = 1 \Rightarrow b + a = 1$$

(۰, ۰) در معادله صدق می کند پس:

$$0 = a + b \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow a = -1, b = 2$$

$$b(c - a) = 2(1 + 1) = 4$$



۶- گزینه «۲»

$$y = a + b \sin x$$

$$\left(-\frac{5\pi}{6}, 0\right) \in f \Rightarrow 0 = a + b \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) \Rightarrow 0 = a - b \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$0 = a - b \sin \frac{\pi}{6}$$

$$0 = a - \frac{1}{2}b \Rightarrow a = \frac{1}{2}b \quad (1)$$

$$\max = 3$$

$$|b| + a = 3 \Rightarrow b + a = 3 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} b + \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow \frac{3b}{2} = 3 \Rightarrow b = 2$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$y = 1 + 2 \sin x \Rightarrow y = 1 + 2 \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = 2$$

۷- گزینه «۳»

$$(\cos \alpha)(-\sin \alpha) + \tan\left(\frac{3\pi}{4} - \alpha\right) = -\sin \alpha \cos \alpha + \cot \alpha$$

اگر $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ باشد با توجه به اتحاد $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ داریم:

$$1 + \frac{16}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$-\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{3}{4} = -\frac{12}{25} + \frac{3}{4} = \frac{-48 + 75}{100} = \frac{27}{100}$$

۸- گزینه «۱»

با استفاده از اتحاد $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\frac{\tan x}{1} \cdot \frac{(1 - \sin^2 x)}{\sin x} = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x}$$

چون $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ است پس $\cos x$ مقدار منفی دارد پس

$$-\cancel{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cancel{\cos x}} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin x} = -\cos^2 x$$

۹- گزینه «۱»

چون در یک بازه متناوب است پس:

$$T = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{|b|} \Rightarrow |b| = 3 \Rightarrow b = 3$$

$$\begin{cases} \max = |a| + c = 1 \Rightarrow a + c = 1 \\ \min = -|a| + c = -3 \Rightarrow -a + c = -3 \end{cases} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1, a = 2$$

۱۳- گزینه «۲»

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$$

۱۴- گزینه «۴»

ابتدا با استفاده از اتحاد $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ داریم

$$f(x) = a + \frac{1}{2}b \sin 2\left(cx - \frac{3\pi}{4}\right) \Rightarrow f(x) = a + \frac{1}{2}b \sin(2cx - \frac{3\pi}{2})$$

$$f(x) = a - \frac{1}{2}b \sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2cx\right)$$

$$f(x) = a + \frac{b}{2} \cos 2cx$$

با توجه به \min, \max تابع کسینوس داریم

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = 3 \\ a - \frac{b}{2} = -1 \end{cases} \Rightarrow 2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

$$\left|\frac{b}{2}\right| = 2 \Rightarrow b = \pm 4 \Rightarrow b = -4$$

همچنین دوره تناوب تابع $y = \cos 2cx$ از رابطه $T = \frac{2\pi}{|2c|}$ که در شکل

برابر π است پس

$$\frac{2\pi}{|2c|} = \pi \Rightarrow |2c| = 2 \Rightarrow c = 1$$

$$f(x) = 1 - 2 \cos 2x \xrightarrow[\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها}]{\text{صفه‌های تابع}} \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \\ 2x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

۱۵- گزینه «۲»

$$\tan \frac{17\pi}{6} = \tan\left(\frac{18\pi - \pi}{6}\right) = \tan\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\tan \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin \frac{11\pi}{3} = \sin\left(\frac{12\pi - \pi}{3}\right) = \sin\left(4\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos \frac{10\pi}{3} = \cos\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{3}{6} - \frac{1}{2} = 0$$

گزینه ۱۴ «ا»

$$T = 2\left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4}\right) = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = \pi \Rightarrow b = \pi$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow a \cos\left(\frac{\pi}{4} + c\right) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{4} + c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4}$$

$$\max = \frac{1}{4} \Rightarrow |a| = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \pm \frac{1}{4}$$

$$\frac{ac}{b} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4}}{\pi} = \frac{1}{16}$$

گزینه ۱۵ «ا»

$$\max : |a| + b = 3$$

$$\Rightarrow 2b = -4 \Rightarrow b = -2, |a| = 5 \Rightarrow a = 5$$

$$\min : -|a| + b = -7$$

$$f(x) = 5 \cos x - 2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5 \cos \frac{\pi}{3} - 2 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱۶ «ا»

$$\max : |a| + c = \frac{5}{2} \Rightarrow 2c = 2 \Rightarrow c = 1, |a| = \frac{3}{2} \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\min : -|a| + c = -\frac{1}{2}$$

$$T = \pi \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = \pi \Rightarrow b = 2$$

گزینه ۱۷ «ب»

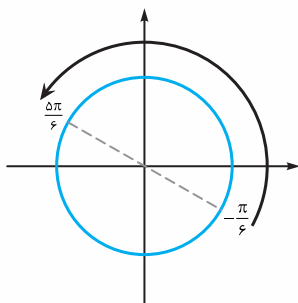
$$\sin x + \cos x = 3\sqrt{5} \xrightarrow{\text{به توان ۲}} 1 + \sin 2x = \frac{9}{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2x = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} \Rightarrow \sin 2x = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{4}{5} = \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}$$

$$2 \tan^2 x - 5 \tan x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

گزینه ۱۸ «ب»

$$-\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{5\pi}{6} \quad \text{اگر } -\frac{\pi}{12} < x < \frac{5\pi}{12}$$



در این مسیر بیشترین مقدار $\sin 2x$ یک و کمترین مقدار آن $-\frac{1}{2}$ است پس

$$-\frac{1}{2} < \frac{m-1}{4} \leq 1 \xrightarrow{\times 4} -2 < m-1 \leq 4 \Rightarrow -1 < m \leq 5$$

گزینه ۱۰ «ب»

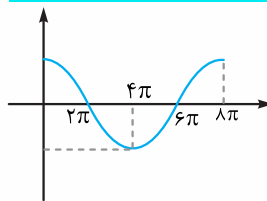
$$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \rightarrow 0 = a + b \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow 0 = a + b \cos \frac{\pi}{3}$$

$$0 = a + \frac{b}{2} \Rightarrow a = -\frac{b}{2}$$

$$\max = |b| + a = \frac{3}{2} \Rightarrow |b| - \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow -b - \frac{b}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3b}{2} = \frac{3}{2}$$

$$b = -1, a = \frac{1}{2}$$

گزینه ۱۱ «ا»

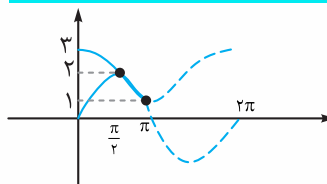


$$y = \cos \frac{x}{4} \Rightarrow \max = 1$$

$$\min = -1$$

$$T = 8\pi$$

گزینه ۱۲ «ب»



گزینه ۱۳ «ب»

$$\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{|\tan^2 \alpha - 1|}$$

با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\frac{4}{9}} \Rightarrow 1 + \tan^2 \alpha = \frac{9}{4}$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{9}{4} - 1$$

$$\tan^2 \alpha = \frac{5}{4}$$

پس:

$$= \frac{2 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} = \frac{2 - \sqrt{5}}{3} = \frac{4(2 - \sqrt{5})}{3}$$



۱۹- گزینه «۳»

ابتدا با استفاده از اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\begin{aligned}\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - bx\right) &= \frac{1}{2}(1 - \cos(2(\frac{\pi}{4} - bx))) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2bx\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin 2bx\end{aligned}$$

$$y = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sin 2bx + c \Rightarrow \begin{cases} \max = |-\frac{a}{2}| + \frac{a}{2} + c = 1 \\ \min = -|-\frac{a}{2}| + \frac{a}{2} + c = -2 \end{cases} \Rightarrow 2\left|\frac{a}{2}\right| = 3$$

$$\Rightarrow a = \pm 3$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{b} = \frac{\pi}{b} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow b = \pm \frac{1}{5}$$

$$ab = \pm \frac{3}{5} \xrightarrow{ab < 0} ab = -\frac{3}{5} = -0.6$$

۲۰- گزینه «۱»

$$\tan x + \cot x = \frac{2}{\sin 2x} = 4 \Rightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$5\pi < 4x < 6\pi \xrightarrow{\div 4} \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin x < \cos x < 0$$

حواستون باشه که وقتی کماتی از ۲۲۵ تا ۲۷۰ باشد $\sin x < \cos x$ است پس

$$\sin x - \cos x < 0 \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}$$

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x \Rightarrow \sin x - \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \sin x \cos x + \cos^2 x) =$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right) = \frac{-5}{4\sqrt{2}}$$

$$\text{معکوس: } -\frac{5}{8\sqrt{2}}$$