



اصلاحیه

✍ فصل پنجم - بخش ۲ تستی - سؤال ۲۱ - پاسخ در گزینه‌ها نمی‌باشد. پاسخ درست: $U(0, 2) \cup (-4, -2)$

آسان

-۴

تابع نمایی $y = a^x$ در صورتی صعودی هست که $a > 1$ پس:

$$2a^2 - a > 1 \Rightarrow 2a^2 - a - 1 > 0$$

$$a+b+c=0 \Rightarrow \begin{cases} a=+1 \\ a=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a < -\frac{1}{2} \cup a > 1$$

یادت باشه:

تابع $y = a^x$ به ازای $0 < a < 1$ نزولی و به ازای $a > 1$ صعودی هست.

دشواری

-۵

فرم کلی تابع نمایی به صورت زیر هست:

$$f(x) = ka^x$$

اما برای درک ضرائب لازم به فرم جوابها در جدول توجه کنیم:

(آ)

x	۰	۱	۲	۳	x
y	۳	۱۵	۷۵	۳۷۵	3×5^x
		↓	↓	↓	
		3×5	3×5^2	3×5^3	

$$\Rightarrow f(x) = 3 \times 5^x$$

(ب) با بررسی و مقایسه هر مقدار با x مربوط به اون داریم:

	۰	۱	۲	۳	۴
	۴	۷	۱۳	۲۵	۴۹
	↓	↓	↓	↓	↓
	$3(2^0)+1$	$3(2^1)+1$	$3(2^2)+1$	$3(2^3)+1$	$3(2^4)+1$

$$\Rightarrow f(x) = 3(2^x) + 1$$

آسان

-۶

(آ) درست. توابع نمایی همواره یک به یک و وارون پذیر هستند.

(ب) نادرست. شرط تعریف شدن توابع نمایی مثبت بودن و مخالف ۱ بودن

عدد پایه هست. همچنین در صورتی که ضریب k وجود دارد برای جلوگیری ازتبدیل شدن به عدد ثابت باید $k \neq 0$ باشد. پس نادرست است.(پ) درست. برد توابع نمایی با k مثبت، $\mathbb{R}^+$ هست پس اگر k منفی شود بردبه $\mathbb{R}^-$ تبدیل می شود.(ت) نادرست. نمودار $y = ka^x$ کنار محور x رسم می شود و با کاهش یاافزایش x در حالت های متفاوت به محور x نزدیکتر می شود اما هیچگاه به آننمی رسد (به اصطلاح محور x مجانب افقی آن است) پس هیچگاه نقطه تماسی

نخواهد داشت و بنابراین مماس نمی شود.



آسان

-۱

تابع رو نمایی می گوئیم که دارای دو شرط $a > 0$ و $a \neq 1$ باشد. همین دوشرط رو برای این تابع f هم در نظر می گیریم:

$$f(x) = (2a-3)^x \Rightarrow (1) \quad 2a-3 > 0 \Rightarrow 2a > 3 \Rightarrow a > \frac{3}{2} \quad (1)$$

$$2a-3 \neq 1 \Rightarrow 2a \neq 4 \Rightarrow a \neq 2 \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} a \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{2\}$$

آسان

-۲

با توجه به نکته سؤال اول:

$$2a-3 > 0 \Rightarrow 2a > 3 \Rightarrow a > \frac{3}{2}$$

$$2a-3 \neq 1 \Rightarrow a \neq 2 \quad y = a^x$$

اما باید دقت کنیم که ضریب $(a^2 - 2a - 3)$ به ازای هیچ مقادیری از این

بازه صفر نشود.

پس ریشه هاشو پیدا می کنیم:

$$a^2 - 2a - 3 = 0 \xrightarrow{a+c=b} \begin{cases} a = -1 \\ a = 3 \end{cases}$$

که $a = 3$ در بازه هست و باید از بازه حذف شود:

$$a \in \left(\frac{3}{2}, +\infty\right) - \{2, 3\}$$

حواست باشه که اگه ضریب صفر بشه تابع دیگه از حالت نمایی به تابع ثابت

صفر تبدیل میشه!

آسان

-۳

برای راحتی کار می تونی با معکوس کردن پایه، توان x رو قرینه کنی تا مثبت بشه.

$$f(x) = \left(\frac{2a-1}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{2a-1}\right)^x$$

با توجه به این که پایه نمی تونه نامثبت و یا برابر ۱ بشه پس:

$$\frac{3}{2a-1} > 0 \xrightarrow{3>0} 2a-1 > 0 \Rightarrow a > \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{2a-1} \neq 1 \Rightarrow 2a-1 \neq 3 \Rightarrow 2a \neq 4 \Rightarrow a \neq 2$$

$$\Rightarrow a \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right) - \{2\}$$

-۷

متوسط

(آ) $\mathbb{R}^+$ یا $(0, +\infty)$ (ب) $\mathbb{R}^+$ ، $\mathbb{R}$

(پ) ۱، مجانب افقی آنهاست یعنی نمودار تا کنار آن پایین می‌آید و خیلی خیلی نزدیک می‌شود اما با آن برخورد نمی‌کند.

(ت) هستند، یک

(ث) ۱

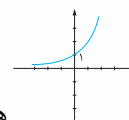
(ج) سه تا، دو برخورد در ناحیه اول و یک برخورد در ناحیه دوم است.

-۸

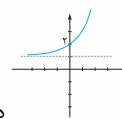
متوسط

برای توابع نمایی، محدودیتی برای جاگذاری x نداریم پس دامنه کل اعداد حقیقی هست. به برد توابع توجه کنیم:

(آ) تابع $y = a^x$ در حالتی که $a > 1$ ، بالای محور x و به صورت صعودی به

فرم کلی هست پس $\mathbb{R} = (0, +\infty)$.

(ب) حالا اگر نمودار $y = 2^x$ رو یک واحد به بالا منتقل کنیم، نمودار به فرم

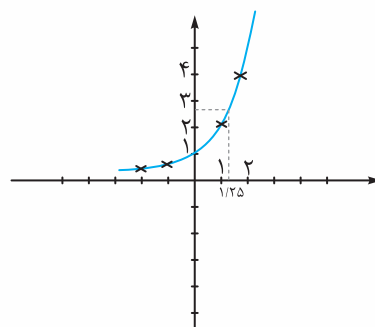
درمیان پس: $\mathbb{R} = (1, +\infty)$ ، $x = 1/25$ (پ) به همین ترتیب $\mathbb{R} = (-1, +\infty)$

-۹

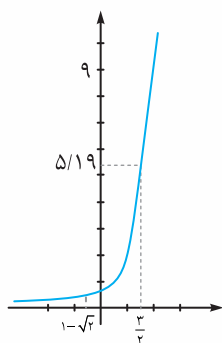
متوسط

برای حل این سؤال به نمودارهای دقیق دو تابع $y = 2^x$ و $y = 3^x$ نیاز داریم.

برای رسم هر تابع نمایی از ۵ نقطه اصلی کمک بگیر:



x	2^x
-۲	$\frac{1}{4}$
-۱	$\frac{1}{2}$
۰	۱
۱	۲
۲	۴

از روی نمودار مشخص هست که مقدار y به ازای تقریباً $2/5$ به دست می‌آید.با ماشین حساب: $2^{1/25} \cong 2/37$.

x	3^x
-۲	$\frac{1}{9}$
-۱	$\frac{1}{3}$
۰	۱
۱	۳
۲	۹

ماشین حساب: $3^{1-\sqrt{2}} = 3^{1-1/4} = 3^{-3/4} = \frac{1}{3^{3/4}} \cong 0/63$

ماشین حساب: $3^{2/5} = 3^{1/5} \cong 5/19$

-۱۰

آسان

مقدار تقریبی $\sqrt{10}$ برابر $3/1$ هست و از آنجایی که تابع نمایی $y = 3^x$ تابعی

ایکداً صعودی هست پس کافیه سه عدد بین $2/5$ تا $3/1$ در نظر بگیریم تا اگر در

توان ۳ هم قرار بگیرند بین $3^{2/5}$ تا $3^{\sqrt{10}}$ باشند؛ مثلاً $3^{2/7}$ و $3^{\sqrt{8}}$ و 3^3 .

-۱۱

متوسط

حواست باشه که تابع $y = a^x$ به ازای $a > 1$ صعودی هست و با افزایش x

مقدارش افزایش پیدا می‌کنه و توی نامعادله، علامت نامعادله تغییر نمی‌کنه.

اما تابع $y = a^x$ به ازای $0 < a < 1$ نزولی هست و با افزایش x مقدارش

کاهش پیدا می‌کنه و توی نامعادله، علامت نامعادله تغییر می‌کنه.

$$(آ) \quad 2^{\sqrt{2}} = 2^{1/4} < 2^{2/5} \quad (1/4 < 2/5)$$

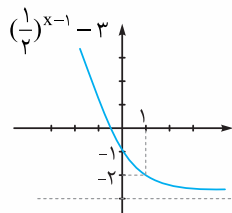
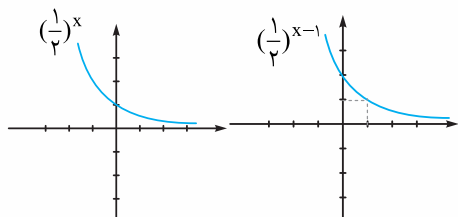
اگر پایه‌ها یکی نباشند ناچار به محاسبه هستیم:

$$(ب) \quad 29/4 = 5^{2/1} < 4^3 = 64$$

$$(پ) \quad 5^3 > 5^1 \quad \text{یا} \quad \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} \xrightarrow{\frac{1}{5} < 1} -3 < -1$$

$$(ت) \quad (1/7)^{9/4} \bigcirc (0/4)^{1/2} \Rightarrow 1/24 > 0/33$$

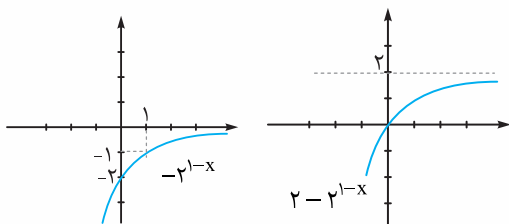
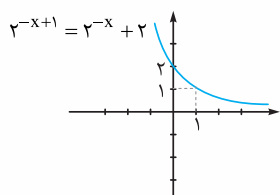
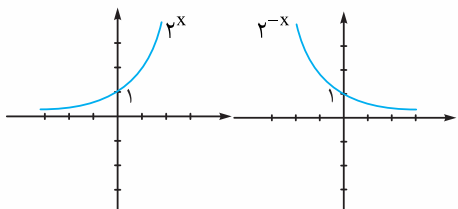
ب) $y = -3 + 2^{1-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 3$



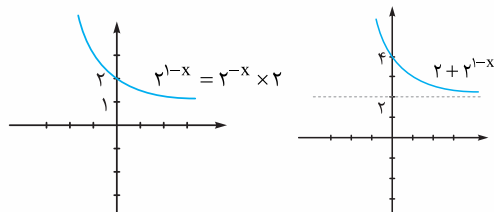
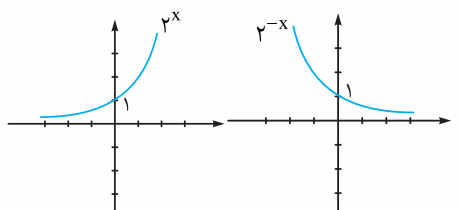
دشوار

-۱۴

ا) $y = 2 - 2^{1-x}$



ب) $y = 2 + 2^{1-x}$



متوسط

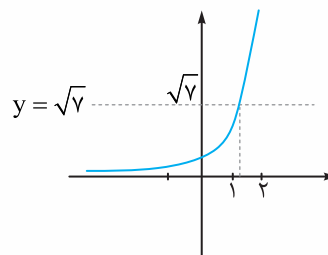
-۱۲

می‌دونیم که $\sqrt{7}$ عددی بین ۲ تا ۳ هست و بنابراین:

$$2 < 2^x < 3 \Rightarrow 2^1 < 2^x < 2^2$$

و با توجه به صعودی بودن تابع $y = 2^x$ پس: $1 < x < 2$.

برای حل این سؤال از نمودار هم می‌تونی استفاده کنی:

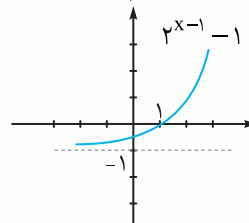
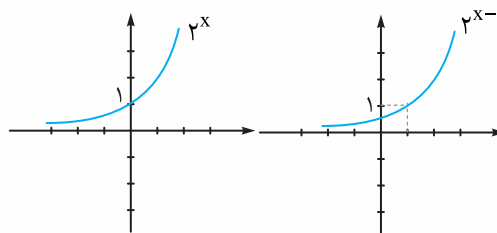


$$\begin{cases} y = 2^x \\ y = \sqrt{7} \approx 2.645 \end{cases}$$

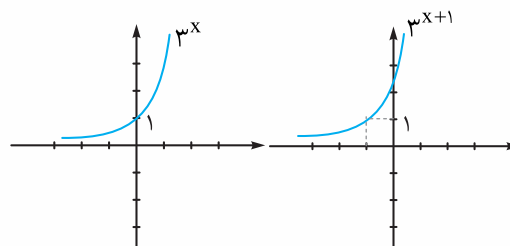
متوسط

-۱۳

ا) $y = 2^{x-1} - 1$
 واحد به پایین واحد به راست



ب) $y = 2^{x+1}$
 واحد به چپ



متوسط

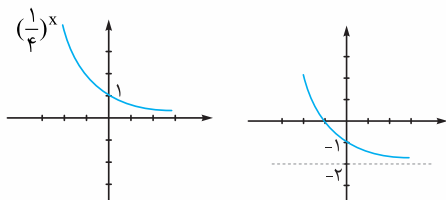
-۱۵

$$y = 4^{-x} - 2$$

محدودیتی برای x نداریم و دامنه برابر کل اعداد حقیقی است:

$$D = \mathbb{R}$$

برای تعیین برد هم می‌تونی نمودار رسم کنی هم به صورت جبری به دستش بیاری:
با رسم:



$$4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

جبری:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^x > 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x - 2 > -2 \Rightarrow y > -2$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} = (-2, +\infty)$$

این تابع نیز همانند بقیه توابع نمایی معکوس‌پذیر است زیرا هر خط افقی موازی محور x نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

متوسط

-۱۶

$$g(0) = -3\left(\frac{2}{5}\right)^0 - 2 = -5$$

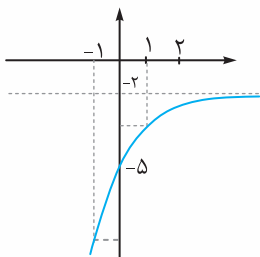
↓
محل برخورد با محور y

x	-1	0	1
$g(x)$	-10	-5	-3/2

$$g(1) = -3\left(\frac{2}{5}\right) - 2 = -\frac{6}{5} - 2 = -\frac{16}{5} \cong -3.2$$

$$g(-1) = -3\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = -\frac{15}{2} - 2 = -\frac{19}{2} \cong -9.5$$

$$g(2) = -3\left(\frac{4}{25}\right) - 2 = -\frac{12}{25} - 2 = -\frac{62}{25}$$



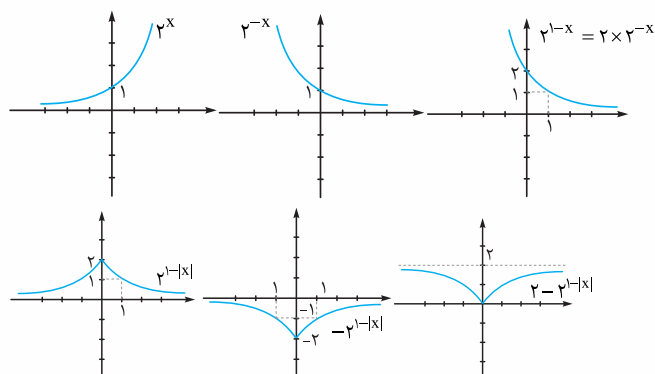
$$D = \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x > 0$$

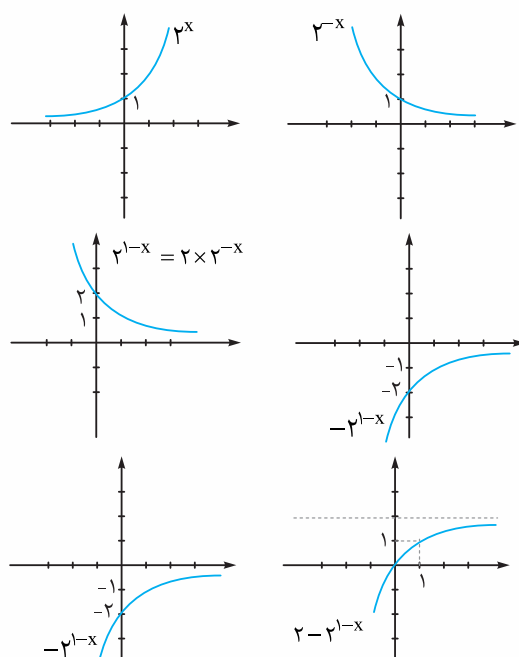
$$\Rightarrow -3\left(\frac{2}{5}\right)^x < 0 \Rightarrow -3\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2 < -2$$

$$\Rightarrow \mathbb{R} = (-\infty, -2)$$

پ) $y = |2 - 2^{1-x}|$



ت) $y = |2 - 2^{1-x}|$



یادآوری: انتقال‌ها: ($k > 0$)

$f(x) + k$: جابه‌جایی به بالا

$f(x) - k$: جابه‌جایی به پایین

$f(x + k)$: انتقال به چپ

$f(x - k)$: انتقال به راست

$f(-x)$: قرینه نسبت به محور y

$-f(x)$: قرینه نسبت به محور x

$f(|x|)$: حذف بخش سمت چپ محور y و قرینه کردن بخش سمت راست با

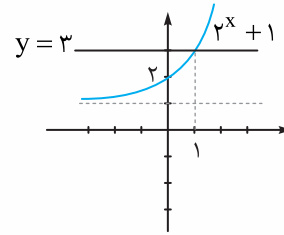
نگه داشتن خود بخش.

$|f(x)|$: حذف بخش زیر محور x و قرینه به بالای محور x

-۱۷

آسان

$$2^x + 1 = 3 \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow x = 1$$



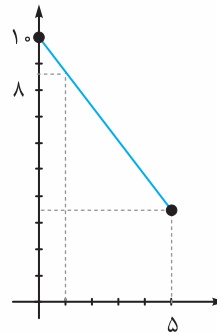
-۱۸

آسان

(آ) پس از ۴ دقیقه مقدار t برابر ۴ به دست می‌آید:

$$q(t) = 10 \left(\frac{4}{5}\right)^t \Rightarrow q(4) = 10 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 10 \left(\frac{256}{625}\right) \cong 4.1$$

ب) $q(t) = 10 \left(\frac{4}{5}\right)^t \quad 0 \leq t \leq 5$



t	۰	۱	...	۵
q(t)	۱۰	۸	...	۳/۳

-۱۹

متوسط

نیم‌عمر یک ماده یعنی مدت زمانی که آن ماده نسبت به مقدار اولیه خود نصف می‌شود.

اگر Q با متغیر زمان (t) نشان دهنده جرم این نوع کربن باشد داریم:

$$Q(t) = Q_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = Q_0 \times 2^{-\frac{t}{T}}$$

که در آن T نشان‌دهنده نیم‌عمر و Q_0 مقدار اولیه است پس:

$$Q(t) = 10 \times 2^{-\frac{t}{5730}}$$

حال بعد از گذشت ۳۰۰۰ سال داریم:

$$Q(3000) = 10 \times 2^{-\frac{3000}{5730}} = 10 \times 2^{-0.52} \cong 6.9 \text{ گرم}$$

به طور کلی در مسائل مربوط به نیم‌عمر یک ماده:

$$f(t) = f_0 \times 2^{-\frac{t}{T}}$$

-۲۰

دشواری

(آ) لایه اول باعث از بین رفتن ۳۰ درصد ناخالصی‌ها می‌شه و بنابراین ۷۰ درصد یا ۰/۷۰ باقی می‌مونه. اگر از دو لایه استفاده کنیم $0.7 \times 0.7 = 0.49$ یعنی ۰/۴۹ از ناخالصی باقی می‌مونه. پس اگر به تعداد n لایه استفاده شود، $(0.7)^n$ مقدار از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. حال درصد ناخالصی به صورت زیر است:

$$(0.7)^n \times 100 = \left(\frac{7}{10}\right)^n \times 10^2 = \frac{7^n}{10^n} \times 10^2$$

$$= \frac{7^n}{10^{n-2}} \Rightarrow f(n) = \frac{7^n}{10^{n-2}}$$

ب) این فرمول درصد ناخالصی را می‌دهد اما اگر بخواهیم ۹۶ درصد ناخالصی‌ها از بین برود یعنی درصد ناخالصی باید کمتر از ۰/۰۴ یا ۴٪ باشد پس یعنی

$$f(n) < 4$$

$$\frac{7^n}{10^{n-2}} < 4 \Rightarrow (0.7)^n < 0.04 \Rightarrow \begin{cases} n=9 \Rightarrow (0.7)^9 \cong 0.0403 \\ n=10 \Rightarrow (0.7)^{10} \cong 0.0282 \end{cases}$$

حداقل ۱۰ لایه لازم است

-۲۱

متوسط

t	۰	۱	۲	۳	...	t
m	۲۰	۴۰	۸۰	۱۶۰	...	20×2^t
		↓	↓	↓		
		20×2	20×4	20×8		

پس $m(t)$ یعنی جرم باکتری بعد از گذشت زمان t به صورت زیر است:

که m_0 جرم اولیه است و t زمان برحسب ساعت.

$$m(t) = m_0 \times 2^t$$

پس:

$$m(t) = 20 \times 2^t$$

$$m(3/5) = 20 \times 2^{3/5} \cong 20 \times 1.1/3 \cong 22.6 \text{ گرم}$$

-۲۲

آسان

(آ) اگر مقدار اولیه این توده دارای جرم m_0 باشد، بعد از گذشت ۱ ساعت مقدار آن $2m_0$ و بعد از گذشت ۲ ساعت $4m_0$ می‌شود. یعنی:

$$m(t) = m_0 \times 2^t \xrightarrow{m_0=100} m(t) = 100 \times 2^t$$

که در آن t زمان برحسب ساعت است.

(ب)

$$t = 20$$

$$\Rightarrow m(20) = 100 \times 2^{20} = 104,857,600 \text{ میلی‌گرم}$$

۳۳-

متوسط

(آ) پس از ۸ ساعت یعنی $A(8)$:

$$A(t) = 10 \cdot (0.8)^t \Rightarrow A(8) = 10 \cdot (0.8)^8 \cong 1.7 \text{ میلی گرم}$$

(ب) عددی که در رابطه به توان t رسیده 0.8 است و این یعنی در هر ساعت مقدار داروی باقی مانده 80% درصد مقدار اولیه است و بنابراین در هر ساعت 20% درصد از بین می‌رود.

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{10 \cdot (0.8)}{10} = 0.8 \Rightarrow 80\% \text{ است: } \frac{A_1}{A_0}$$

که مقدار باقی مانده را می‌دهد.

۳۴-

متوسط

جرم باکتری پس از ۳ ساعت 729 برابر جرم اولیه شده

یعنی:

$$A_3 = 729 A_0 \Rightarrow 729 \cancel{A_0} = \cancel{A_0} \times a^3$$

$$\Rightarrow a^3 = 729 \Rightarrow a = 9$$

۳۵-

متوسط

ت	۶	۴	۳	ساعت
$t+2$	?	۶۴	۳۲	تعداد سلول‌ها
		↓	↓	
		۲۶	۲۵	

در مقایسه هر تعداد سلول با ساعت مربوط به خودش می‌بینیم عدد 2 دارای توان $t+2$ (دو تا بیشتر از زمان) هست پس در زمان 6 ساعت $t+2$ یعنی 2^8 سلول داریم پس تعداد سلول‌ها در 6 ساعت برابر 256 است.

۳۶-

دشوار

جدول مربوط به پس‌انداز در چند سال را ببینیم:

سال	۱	۰
پس‌انداز	۴۴۸۰۰۰	۴۰۰۰۰۰

در سال اول مقدار سودی که تعلق می‌گیرد برابر

$$48000 = 400000 \times 0.12 \text{ است و بنابراین مقدار پس‌انداز به صورت}$$

$$448000 = 400000 + 48000 \text{ است به عبارتی } 1/12 \times 400000$$

در سال دوم سود به همان پس‌انداز سال قبل تعلق می‌گیرد پس

$$501760 = 448000 \times 1/12$$

$$\text{و در سال سوم: } 561971/2 = 501760 \times 1/12$$

اما در حالت کلی مبلغ پس‌انداز در سال n م با رابطه

$$p(n) = 400 \cdot (1/12)^n \text{ محاسبه می‌شود. پس:}$$

$$p(3) = 400 \cdot (1/12)^3 = 561971/2$$

۳۷-

متوسط

برای حل معادلات نمایی لازم هست عدد پایه در طرفین مساوی برابر شود تا با مساوی قرار دادن توان‌ها، مجهول پیدا شود.

$$(آ) 3^{2x-3} = 3^4 \Rightarrow 2x-3=4 \Rightarrow 2x=7 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

$$(ب) (2^2)^{2x-1} = (2^3)^{x+1} \Rightarrow 2^{4x-2} = 2^{3x+3}$$

$$\Rightarrow 4x-2=3x+3 \Rightarrow x=5$$

$$(پ) 5^{3n-1} = (5^3)^{2n+1} \Rightarrow 3n-1=6n+3 \Rightarrow -4=3n$$

$$\Rightarrow n = -\frac{4}{3}$$

$$(ت) 2^{3n-2} = (2^{-5})^2 \Rightarrow 3n+2=-10 \Rightarrow 3n=-12$$

$$\Rightarrow n=-4$$

$$(ث) 3^{2x} = 3^{x^2-4x} \Rightarrow x^2-4x=2x \Rightarrow x^2-6x=0$$

$$\Rightarrow x=0 \text{ یا } x=6$$

$$(ج) 2^{6x+4} = 2^{-18} \Rightarrow 6x+4=-18 \Rightarrow 6x=-22 \Rightarrow x=-\frac{11}{3}$$

$$(چ) \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x+1=-2$$

$$\Rightarrow x=-3$$

$$(ح) \frac{4^{32}}{4^8} = 2^A \Rightarrow \frac{(2^2)^{32}}{2^8} = 2^A \Rightarrow 2^{64-8} = 2^A \Rightarrow A=56$$

$$(خ) (3^2)^{x-1} = ((3^{-3})^{x-1})^{2x+2} \Rightarrow (3)^{2(x-1)} = 3^{-3(x-1)(2x+2)}$$

$$\Rightarrow \cancel{X}(\cancel{X-1}) = -3(\cancel{X-1})(X+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X-1=0 \Rightarrow \boxed{X=1} \\ -3X-3=1 \Rightarrow -3X=4 \Rightarrow \boxed{X=-\frac{4}{3}} \end{cases}$$

$$(د) 2^{2x} - 2^x + 3 - 9 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 2^x \times 2^3 - 9 = 0$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 - 8 \times 2^x - 9 = 0 \xrightarrow{a+c=b}$$

$$\begin{cases} 2^x = -1 \text{ غ ق ق} \\ 2^x = 9 \Rightarrow \text{معادله یک جواب دارد} \end{cases}$$

و بعداً از لگاریتم یاد می‌گیریم که: $x = \log_2 9$.

۳۸-

دشوار

(آ)

$$2^{4x-2} > 2^{-10}$$

$$\boxed{2^{10} = 1024} \text{ حفظ کن}$$

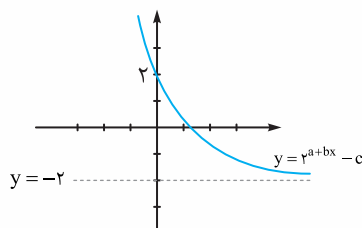
در حل نامعادلات نمایی اگر عدد پایه‌ها مساوی و بزرگتر از ۱ باشد، بدون تغییر علامت نامعادله، توان‌ها را در نامعادله قرار می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$$\xrightarrow{2>1} 4x-2 > -10 \Rightarrow 4x > -8 \Rightarrow \boxed{x > -2}$$

متوسط

۸- گزینه «۳»

اگر نمودار را قبل از اعمال قدرمطلق رسم کنیم با توجه به این که تابع نمایی است و می‌دونیم قدرمطلق بخش‌های زیر محور x رو به بالا قرینه می‌کنه داریم:



از مقایسه با نمودار اصلی $[c=2]$ ، زیرا نمودار ۲ واحد به پایین منتقل شده.

$$y = 2^{a+bx} - 2$$

از طرفی نمودار از $\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ گذشته پس:

$$2^a - 2 = 2 \Rightarrow 2^a = 4 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

$$\Rightarrow y = 2^{bx+2} - 2$$

از طرفی نمودار با خط $y=2$ برخورد دارد یعنی ضریب،

$b=-1$ است (شیب منفی است) پس:

$$\frac{ac}{b} = \frac{2 \times 2}{-1} = -4$$

آسان

۹- گزینه «۳»

دو تابع در نقاط به طول‌های ۲ و ۴ متقاطع هستند پس $x=2$ و $x=4$ در راقبه $f(x)=g(x)$ صدق می‌کند.

$$\xrightarrow{x=2} 3^{2a-b} = 3 \Rightarrow 2a-b=1$$

$$\xrightarrow{x=4} 3^{4a-b} = 9 \Rightarrow 4a-b=2$$

$$\begin{cases} 2a-b=1 \\ 4a-b=2 \end{cases}$$

$$2a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{معادله اول}} 1-b=1 \Rightarrow b=0$$

$$\text{معادله: } \frac{1}{2}x^2 - 5 = 0 \Rightarrow S = -\frac{b}{a} = 0, P = \frac{c}{a} = \frac{-5}{\frac{1}{2}} = -10$$

$$|S-P| = |0 - (-10)| = 10$$

متوسط

۱۴- گزینه «۳»

$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه ۱: } y=2^x \\ \text{گزینه ۲: } y=2^x \\ \text{گزینه ۳: } y=\frac{1}{2} \checkmark \\ \text{گزینه ۴: } y=\frac{1}{2} \checkmark \end{cases}$$

$f(0)=1$ پس حداکثر مقدار تابع ۱ است و گزینه‌های ۱ و ۲ رد می‌شوند.

$$x=-1 \Rightarrow \begin{cases} \text{گزینه ۳: } y=2^{-|-1|} = 2^{-1} = \frac{1}{2} \checkmark \\ \text{گزینه ۴: } y=|2^1| = 2^1 \times \end{cases}$$

پس گزینه ۳ جواب است.

متوسط

۵- گزینه «۳»

با جاگذاری داریم: $f(x) = a^x + bx^2 + c$

$$f(0)=0 \Rightarrow 1+c=0 \Rightarrow c=-1$$

$$f(1)=0 \Rightarrow a+b-1=0 \Rightarrow a+b=1 \quad (1)$$

$$f(-1)=\frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}+b-1=\frac{-3}{2} \Rightarrow \frac{1}{a}+b=\frac{-1}{2} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \text{ و } (2)} a - \frac{1}{a} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2 - 3a = 0 \Rightarrow 2a^2 - 3a - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (2a+1)(a-2) = 0 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}, a=2 \text{ قق} \Rightarrow b=-1$$

$$\Rightarrow a-b+c = 2+1-1 = 2$$

متوسط

۶- گزینه «۱»

$$y(0) = 1 - 2^{1-0} = 1 - 2 = -1 \Rightarrow \text{رد گزینه‌های ۳ و ۴}$$

$$y(1) = 1 - 2^{1-1} = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \text{رد گزینه ۲}$$

گزینه ۱ صحیح است.

آسان

۷- گزینه «۲»

$$5^x + 5 \times 5^x + \underbrace{5^2}_{25} \times 5^x + \underbrace{5^3}_{125} \times 5^x = 3900$$

$$\Rightarrow 156 \times 5^x = 3900 \Rightarrow 5^x = 25 \Rightarrow x=2$$

۱۰- گزینه «۳»

دشوار

$$f(x) = A \times 2^{Bx}, y = \frac{5}{4}x$$

$$x = 2 \Rightarrow A \times 2^{2B} = \frac{5}{4} \times 2 \Rightarrow A \times 2^{2B} = \frac{5}{2}$$

$$x = 4 \Rightarrow A \times 2^{4B} = \frac{5}{4} \times 4 \Rightarrow A \times 2^{4B} = 5$$

از تقسیم دو رابطه داریم:

$$\frac{A \times 2^{4B}}{A \times 2^{2B}} = \frac{5}{\frac{5}{2}}$$

$$\Rightarrow 2^{2B} = 2 \Rightarrow 2B = 1 \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow A \times 2^{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{2} \Rightarrow A \times 2 = \frac{5}{2} \Rightarrow \boxed{A = \frac{5}{4}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{4} \times 2^{\frac{1}{2}x}$$

$$f^{-1}(10) \Rightarrow f(x) = 10 \Rightarrow \frac{5}{4} \times 2^{\frac{1}{2}x} = 10$$

$$\Rightarrow 2^{\frac{1}{2}x} = 8 \Rightarrow \frac{x}{2} = 3 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

۱۱- گزینه «۳»

متوسط

$$f(x) = \left(\frac{a-2}{3}\right)^{-x} = \left(\frac{3}{a-2}\right)^x$$

با توجه به این که نمودار تابع f صعودی هست پس:

$$\frac{3}{a-2} > 1 \Rightarrow a-2 < 3 \Rightarrow \boxed{a < 5}$$

از طرفی شیب نمودار f نسبت به نمودار $y = 3^x$ کمتر است بنابراین:

$$\frac{3}{a-2} < 3 \Rightarrow a-2 > 1 \Rightarrow \boxed{a > 3}$$

با اشتراک این دو شرط داریم: $3 < a < 5$

۱۲- گزینه «۱»

دشوار

$$-3 - a(2^x) - (2^{2x}) \times 4 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه}} 4(2^x)^2 + a(2^x) + 3 = 0$$

این معادله فقط یک جواب دارد پس $\Delta = 0$:

$$a^2 - 4(4)(+3) = 0 \Rightarrow a^2 = +48 \Rightarrow = \pm 4\sqrt{3}$$

۱۳- گزینه «۳»

دشوار

$$f(0) = 3 \Rightarrow a(1-c) = 3 \Rightarrow a - ac = 3 \quad (1)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow a(2^{2b} - c) = 0 \xrightarrow{a \neq 0} 2^{2b} = c \quad (2)$$

از طرفی نمودار به اندازه ۱ واحد به پایین منتقل شده پس $ac = 1$. با جاگذاری

در (۱) داریم:

$$a - 1 = 3 \Rightarrow a = 4 \xrightarrow{ac=1} c = \frac{1}{4}$$

$$\xrightarrow{(2)} 2^{2b} = 2^{-2} \Rightarrow 2b = -2 \Rightarrow b = -1$$

$$\Rightarrow abc = 4 \times (-1) \times \frac{1}{4} = -1$$

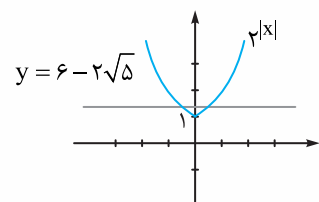
۱۴- گزینه «۲»

متوسط

به روش هندسی حل می‌کنیم زیرا جواب دقیق نخواست و فقط تعداد ریشه‌ها را خواسته.

$$2^{|x|-1} = 3 - \sqrt{5} \Rightarrow \frac{2^{|x|}}{2} = 3 - \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 2^{|x|} = 6 - 2\sqrt{5}$$

حواست باشد که برای رسم $2^{|x|}$ ابتدا نمودار 2^x رو رسم می‌کنیم بعد سمتچپ محور y رو پاک کرده سمت راست رو به چپ هم قرینه می‌کنیم.مقدار حدودی $6 - 2\sqrt{5}$ برابر $1/54$ هست.

که این دو نمودار در دو نقطه متقاطع هستند پس تعداد ریشه‌ها ۲ است.

۱۵- گزینه «۳»

متوسط

$$9^x - 3^{-2x} - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3^{2x} - 3^{-2x} - \frac{1}{3} = 0 \xrightarrow{\times 3^{2x}} 3^{4x} - \frac{1}{3} \times 3^{2x} - 1 = 0$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \times (3^{2x})^2 - 1 \times (3^{2x}) - 3 = 0$$

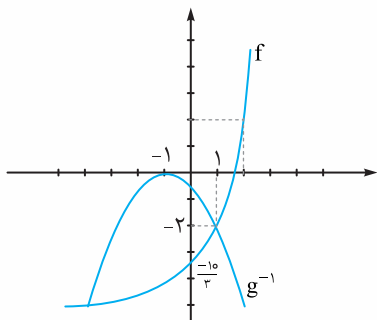
$$\Delta = 64 + 36 = 100 \Rightarrow 3^{2x} = \frac{1 \pm 10}{6} \begin{cases} \text{قق ۳} \\ \text{غقی ۱} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3^{2x} = 3 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$



فقط تعداد برخوردها رو خواسته پس از رسم کمک می گیریم:

x	۰	۱	۲
f :			
y	$-\frac{10}{3}$	-2	2



نمودار f و g^{-1} دو برخورد دارند پس ۲ جواب برای معادله داریم.

آسان

۱۹- گزینه «۱»

$$f(x) = 2^{x+1}$$

$$2f(x-1) = 2 \times 2^{(x-1)+1} = 2 \times 2^x = 2^{x+1} = f(x)$$

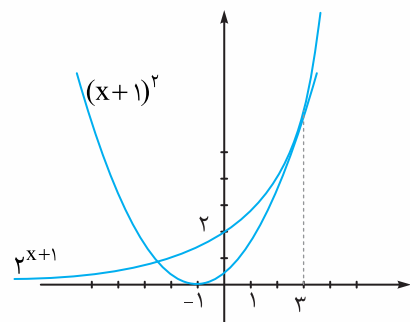
دشوار

۲۰- گزینه «۲»

$$f(x) = \frac{2^{-x} + 8}{2^{-x} + 2} = \frac{2^{-x} + 8}{4 \times 2^{-x}} = \frac{2^{-x}}{4 \times 2^{-x}} + \frac{8}{4 \times 2^{-x}}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{2}{2^{-x}} = \frac{1}{4} + 2^{x+1}$$

$$f(x) = g(x) \Rightarrow (x+1)^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + 2^{x+1} \Rightarrow (x+1)^2 = 2^{x+1}$$



پس با برخورد دادن دو تابع $y = (x+1)^2$ و $y = 2^{x+1}$ مقدار A و B را

می یابیم.

یکی از جوابها در $x = 1$ است و جواب دیگر $x = 3$.

$$AB = 3 - 1 = 2$$

دشوار

۱۶- گزینه «۱»

$$4^x + 2^x - 6 = 0 \Rightarrow (2^x)^2 + 2^x - 6 = 0$$

$$t = 2^x \Rightarrow t^2 + t - 6 = 0 \Rightarrow (t+3)(t-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = -3 & \text{غلق} \\ 2^x = 2 & \text{قق} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow \boxed{\alpha=1}$$

$$2^x - x^2 = 0 \Rightarrow 2^x = x^2$$

می دونیم ریشه های مثبت این معادله $x = 2$ و $x = 4$ هستند پس:

$$\boxed{\beta=2}, \boxed{\gamma=4}$$

$$\alpha \cdot \beta \cdot \gamma = 1 \times 2 \times 4 = 8$$

دشوار

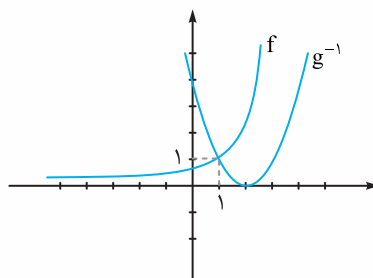
۱۷- گزینه «۳»

$$g(x) = -\sqrt{x} + 2 \Rightarrow y = -\sqrt{x} + 2$$

$$\Rightarrow y - 2 = -\sqrt{x} \xrightarrow{\text{توان } 2} (y-2)^2 = x$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = (x-2)^2 \Rightarrow D_{g^{-1}} = (-\infty, 2]$$

از رسم کمک می گیریم:



برخورد دو تابع در $x = 1$ است.

پس $\alpha = 1$.

با جاگذاری در h داریم:

$$h(x) = 3^{-x+1} - 2\gamma$$

برخورد با محور x یعنی $y = 0$ پس:

$$3^{-x+1} - 2\gamma = 0$$

$$\Rightarrow 3^{-x+1} = 2\gamma \Rightarrow -x+1 = 3 \Rightarrow 1-3 = x \Rightarrow \boxed{x=-2}$$

متوسط

۱۸- گزینه «۲»

ابتدا وارون نمودار g را پیدا می کنیم:

$$y = \sqrt{-x} - 1 \Rightarrow y + 1 = \sqrt{-x} \xrightarrow{\text{توان } 2} (y+1)^2 = -x$$

$$\Rightarrow x = -(y+1)^2 \Rightarrow g^{-1}(x) = -(x+1)^2$$

$$f(x) = g^{-1}(x) \Rightarrow 2 \times 3^{x-1} - 4 = -(x+1)^2$$

۲۱- گزینه «۲»

دشوار

$$\begin{aligned}
 4^x + 16^x + 2^{3x+1} &= 6 \\
 \Rightarrow 2^{2x} + 2^{4x} + 2 \times 2^{3x} &= 6 \\
 \Rightarrow (2^x)^2 + 2 \times 2^x \times 2^x + (2^{3x})^2 &= 6 \\
 \Rightarrow (2^x + 2^{2x})^2 &= 6 \Rightarrow 2^x + 2^{2x} = \sqrt{6} \\
 \xrightarrow{t=2^x} t + t^2 = \sqrt{6} \Rightarrow t^2 + t - \sqrt{6} &= 0 \\
 \Rightarrow \Delta = 1 + 4\sqrt{6} \Rightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{6}}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = \frac{-1 + \sqrt{1+4\sqrt{6}}}{2} & \text{قق} \\ 2^x = \frac{-1 - \sqrt{1+4\sqrt{6}}}{2} & \text{غقق (مقدار } 2^x \text{ منفی نمی شود)} \end{cases} \Rightarrow \text{یک ریشه دارد.}$$

۲۲- گزینه «۳»

دشوار

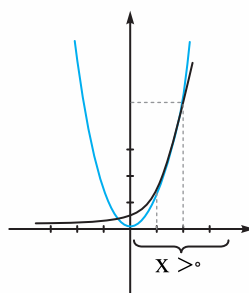
$$\begin{aligned}
 (4 + 2\sqrt{3})^x &< \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^{-x^2} \\
 (4 + 2\sqrt{3}) &= (1 + \sqrt{3})^2 \\
 \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} &= \frac{3-1}{2(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\
 \Rightarrow (1 + \sqrt{3})^{2x} &< (\sqrt{3}+1)^{x^2} \\
 \text{عدد پایه یعنی } \sqrt{3}+1 &\text{ عددی بزرگتر از ۱ است پس بدون تغییر علامت} \\
 \text{نامعادله، پایه ها را حذف می کنیم.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2x < x^2 &\Rightarrow x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0 \\
 \Rightarrow x < 0 &\cup x > 2
 \end{aligned}$$

۲۳- گزینه «۲»

دشوار

	x	-1	0	1	...
f(x) = 2^x	2^x	1/2	1	2	
g(x) = x^2	x	-1	0	1	...
	x^2	-1	0	1	



محل های برخورد در $x=2$ و $x=4$ است: یعنی نقاط $A \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ و $B \begin{bmatrix} 4 \\ 16 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 AB &= \sqrt{(4-2)^2 + (16-4)^2} = \sqrt{4+144} \\
 &= \sqrt{148} = \sqrt{4 \times 37} = 2\sqrt{37}
 \end{aligned}$$

۲۴- گزینه «۲»

متوسط

نمودار $g(x) = a^x$ خط افقی $y=1$ است پس $a^x = 1$ یعنی $a=1$. با جاگذاری در f داریم:

$$f(x) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^x$$

f یک تابع نمایی با پایه بزرگتر از ۱ است پس تابع صعودی است و از طرفی

$$f(0) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^0 = 2$$

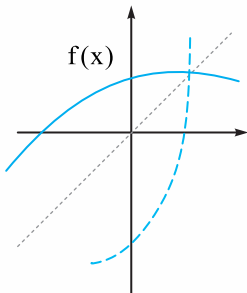
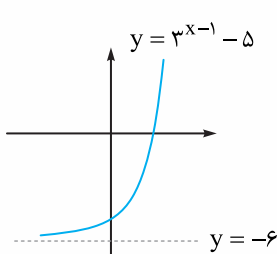
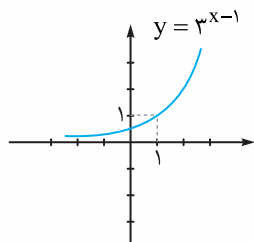
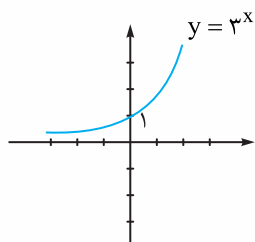
پس محل برخورد با محور y در $y=2$ است. پس گزینه ۲ صحیح است.

۲۵- گزینه «۴»

متوسط

ابتدا نمودار $f(x)$ را به کمک انتقال رسم می کنیم:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{3}{5} (3^{x-1} - 5) \\
 &\quad \downarrow \quad \downarrow \\
 &\quad \text{واحد به راست} \quad \text{واحد به پایین} \\
 &\quad \text{تأثیر روی برد}
 \end{aligned}$$



تأثیر $\frac{3}{5}$ روی شیب است و ناحیه را عوض نمی کند.

نمودار وارون از ناحیه چهارم نمی گذرد.

۲۶- گزینه «۱»

متوسط

نمودار گذرنده از مبدأ یعنی $(0,0)$ است پس:

$$2^a - b = 0 \Rightarrow 2^a = b$$

از طرفی نمودار ۴ واحد به پایین منتقل شده پس $b=4$.

$$2^a = 4 \Rightarrow a = 2$$

$$a - b = 2 - 4 = -2$$

۲۷- گزینه «۳»

دشوار

$$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1} \times a^{x-1} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x}{\frac{2}{3}} \times \frac{a^x}{a} = \frac{2}{3a} \left(\frac{2}{3}a\right)^x$$

تابع نمایی در صورتی نزولی است که عدد پایه بین صفر و یک باشد بنابراین:

$$0 < \frac{2}{3}a < 1 \Rightarrow 0 < a < \frac{3}{2}$$

۲۸- گزینه «۱»

متوسط

$$16^x - 32(4)^x + 32 < 0$$

$$\Rightarrow (4^x)^2 - 32(4)^x + 32 < 0 \Rightarrow \text{بین دو ریشه جواب است}$$

$$a + b + c = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0} \\ 4^x = 32 \Rightarrow 2^x = 5 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < x < \frac{5}{2}$$

۲۹- گزینه «۴»

آسان

برای یافتن محل تلاقی دو نمودار، ضابطه تابع آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$(\sqrt{2})^{x+1} + 4 = 2^x \Rightarrow (\sqrt{2}) \times (\sqrt{2})^x - (\sqrt{2})^{2x} + 4 = 0$$

$$t = (\sqrt{2})^x \Rightarrow -t^2 + \sqrt{2}t + 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 18$$

$$t = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{18}}{+2} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ قق} \\ \frac{\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{2} = \frac{-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} \text{ غق} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{x = 3} \Rightarrow y = 2^3 = 8 \Rightarrow \left[\begin{matrix} 3 \\ 8 \end{matrix} \right] \text{ نقطه تلاقی}$$

$$A \text{ فاصله از } = \sqrt{(3-0)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

۳۰- گزینه «۲»

متوسط

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-x} \geq \left(\frac{27}{64}\right)^{2x-1} \left(\frac{9}{16}\right)^{1-x}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{3(2x-1)} \left(\frac{3}{4}\right)^{2(1-x)} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x \geq \left(\frac{3}{4}\right)^{6x-3+2-2x}$$

$$\frac{3}{4} < 1 \xrightarrow{\text{علامت عوض میشه}} x \leq 4x - 1 \Rightarrow 1 \leq 3x \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$$

۳۱- گزینه «۱»

دشوار

برای یافتن محل تلاقی دو نمودار، ضابطه‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$3^x + \frac{1}{3} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} \Rightarrow 3^x + \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

$$\Rightarrow 3^x + \frac{1}{3} = 3^{-x} \xrightarrow{\times 3^x} 3^{2x} + \frac{1}{3} \times 3^x = 1$$

$$\xrightarrow{\times 3} 3 \times (3^x)^2 + 1 \times (3^x) - 3 = 0 \Rightarrow \Delta = 64 + 36 = 100$$

$$\Rightarrow 3^x = \frac{-1 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{-1+10}{6} = \frac{9}{6} = 3^1 \text{ قق} \\ \frac{-1-10}{6} = \frac{-11}{6} = 3^{-1} \text{ قق} \end{cases}$$

$$3^x = 3^{-1} \Rightarrow \boxed{x = -1} \Rightarrow y = 3^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{matrix} -1 \\ \frac{2}{3} \end{matrix} \right] \text{ تقاطع}$$

$$A \text{ طول دو نقطه برابر است پس داریم: } |3-1| = 2$$

۳۲- گزینه «۴»

متوسط

دو نمودار در نقطه‌ای به طول ۲ متقاطع‌اند یعنی اگر $x = 2$ را در دو تابع

جاگذاری کنیم مقدار y آنها برابر می‌شود. پس:

$$f(2) = g(2)$$

$$2^{2a+b} = \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \left(\frac{1}{2^3}\right)^2 = 2^{-6}$$

$$\Rightarrow 2a + b = -6$$

$$f(3) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{3a+b} = 2^{-1} \Rightarrow 3a + b = -1$$

$$\begin{cases} 2a + b = -6 \\ 3a + b = -1 \end{cases}$$

$$\boxed{a = 5} \xrightarrow{\text{معادله دوم}} 15 + b = -1 \Rightarrow \boxed{b = -16}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2^{5x-16}$$

$f^{-1}(16)$ یعنی عددی که مقدار f برای آن مساوی ۱۶ شده:

$$2^{5x-16} = 16 = 2^4$$

$$\Rightarrow 5x - 16 = 4 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow f^{-1}(16) = 4$$

۳۳- گزینه «۳»

آسان

نمودار 3^{-2x} بالاتر از نمودار 2^{-4x} قرار بگیرد یعنی

$$3^{-2x} > 2^{-4x} \xrightarrow{\text{معکوس}} 3^{2x} < 2^{4x} \Rightarrow 9^x < 16^x$$

اگر $x = -1$ ، نامعادله برقرار نیست پس هر بازه شامل ۱- حذف است.

یعنی رد گزینه‌های ۲ و ۴.

اگر $x = 0$ آن‌گاه نامعادله برقرار نیست پس گزینه ۱ هم رد می‌شود.

پس تنها گزینه ۳ باقی می‌ماند.

دشوار

۳۷- گزینه «ب»

$$5 \times (5^x)^2 - 24(5^x) - 5 < 0$$

$$t = 5^x \Rightarrow 5t^2 - 24t - 5 < 0$$

$$\Rightarrow (5t+1)(t-5) < 0 \Rightarrow \frac{-1}{5} < t < 5$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{-1}{5} < 5^x < 5}_{\text{بدیهی}} \Rightarrow 5^x < 5^1 \Rightarrow x < 1$$

آسان

۳۸- گزینه «ب»

$$p(n) = p_0(1/2)^n \Rightarrow p(3) = 1000000(1/2)^3 = 125000 \text{ تومان}$$

حواست باشد اگه سود سالانه یک بانک برابر r باشد، مقدار پس‌انداز بعد از

سال برابر ضرب مقدار اولیه در $(1+r)$ هستش.

آسان

۳۹- گزینه «ب»

تابع مربوط به نیم‌عمر:

$$f(t) = f_0 \times 2^{\frac{-t}{T}}$$

$$f(258) = 240 \times 2^{\frac{-258}{43}}$$

$$= 240 \times 2^{-6} = \frac{240}{64} = 3/75 \text{ میلی گرم}$$

متوسط

۴۰- گزینه «ب»

تعداد باکتری‌ها در شروع کشت 800 است یعنی $A = 800$. پس:

$$f(t) = 800e^{kt}$$

$$f(20) = 3200 \Rightarrow 800e^{20k} = 3200$$

$$\Rightarrow e^{20k} = 4 \Rightarrow e^{10k} = 2$$

$$f(30) = 800e^{30k} = 800e^{20k} \times e^{10k}$$

$$= 800 \times 4 \times 2 = 6400$$

آسان

۴۱- گزینه «ا»

$$f(x) = 2^{ax-1}$$

$$f(4) = 2\sqrt{2} \Rightarrow 2^{4a-1} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow 4a-1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4a = \frac{5}{2} \Rightarrow a = \frac{5}{8}$$

$$\Rightarrow f(x) = 2^{\frac{5}{8}x-1}$$

برای یافتن محل تقاطع، ضابطه‌ها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$2^{\frac{5}{8}x-1} = 2^{\frac{4}{2}\sqrt{2}} = 2^{\frac{4}{2}\sqrt{2}}$$

$$\frac{5}{8}x-1 = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{5}{8}x = \frac{13}{4} \Rightarrow x = \frac{26}{5}$$

آسان

۴۲- گزینه «ب»

$$6^{x-1} = \frac{6^x}{6} = \frac{(2 \times 3)^x}{6} = \frac{2^x \times 3^x}{6}$$

$$= \frac{5 \times 4}{6} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$$

دشوار

۴۳- گزینه «ب»

$$f(x) = (2^{-x+3} - 1)^3$$

به مدل تابع f نگاه کنید؛ $y = 2^{-x+3} - 1$ یک تابع نمایی نزولی هست و وقتی به توان ۳ می‌رسد باز هم نزولی باقی می‌مونه (تابع درجه ۳ علامت را حفظ می‌کنه).

در تابع نزولی داریم:

$$f(\bigcirc) < f(\Delta) \Leftrightarrow \bigcirc > \Delta$$

پس اگر طبق اطلاعات مسأله داریم:

$$f(f(x)) < f(2^{-3x})$$

آن‌گاه داریم:

$$f(x) > 2^{-3x}$$

با جاگذاری f داریم:

$$(2^{-x+3} - 1)^3 > 2^{-3x} \xrightarrow{\text{رادیکال با فرجه سوم بگیریم}} 2^{-x+3} - 1 > 2^{-x}$$

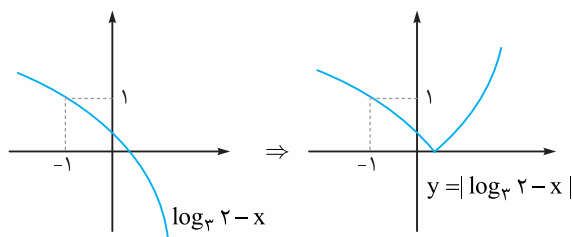
$$\Rightarrow 8 \times 2^{-x} - 2^{-x} > 1 \Rightarrow 7 \times 2^{-x} > 1$$

$$\Rightarrow 2^{-x} > \frac{1}{7} \xrightarrow{\text{معکوس}} 2^x < 7$$

که با توجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد.

ب) ابتدا نمودار $y = \log_3 2 - x$ را رسم می‌کنیم سپس قدر مطلق را روی نمودار اعمال می‌کنیم:

از سومین نمودار بالا داریم:



آسان

-۳

$$f(42) = 3 - 2 \log_2 \left(\frac{42}{2} - 5 \right) = 3 - 2 \log_2 16 \\ = 3 - 2(2) = 3 - 4 = -1$$

آسان

-۴

$$f(x) = \log_a x$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -4 \Rightarrow \log_a \frac{1}{2} = -4$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به فرم نمایی}} a^{-4} = \frac{1}{2} \Rightarrow (a^4)^{-1} = 2^{-1}$$

$$\Rightarrow a^4 = 2 \Rightarrow a = \sqrt[4]{2}$$

غریب (مبنای لگاریتم منفی نمی‌شود)

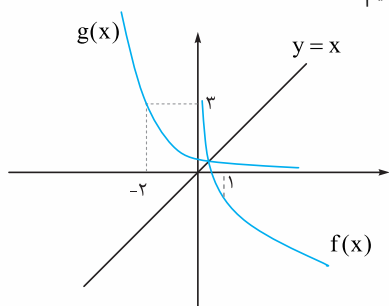
متوسط

-۵

$$g \Rightarrow y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} \Rightarrow x+1 = \log_{\frac{1}{3}} y \Rightarrow x = \log_{\frac{1}{3}} y - 1$$

$$\Rightarrow g^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}}(x) - 1$$

پس نمودار f همان نمودار وارون g است پس کافیست g را رسم کنیم و سپس نسبت به خط $y = x$ قرینه کنیم.



x	-2	-1	0	1
g	3	1	1/3	1/9

$\log_{\frac{1}{3}}(3) - 1$ همان $f(3)$ و به عبارتی $g^{-1}(3)$ هست یعنی $g(x) = 3$

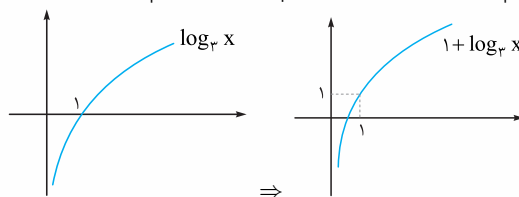
از روی نمودار واضح هست که به ازای $x = -2$ داریم $g(-2) = 3$ یعنی $g^{-1}(3) = -2$



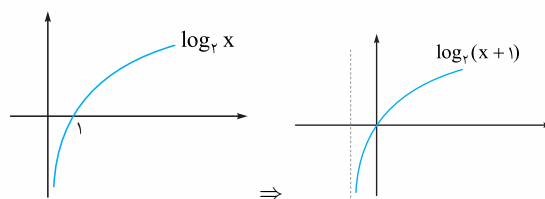
متوسط

-۱

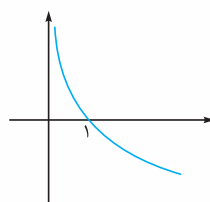
آ) مبنای لگاریتم بزرگتر از ۱ هست پس فرم صعودی لگاریتم رو داریم:



ب)



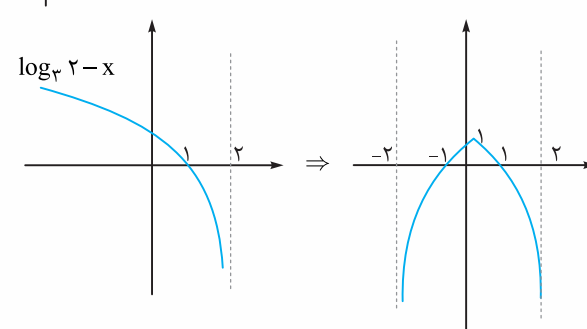
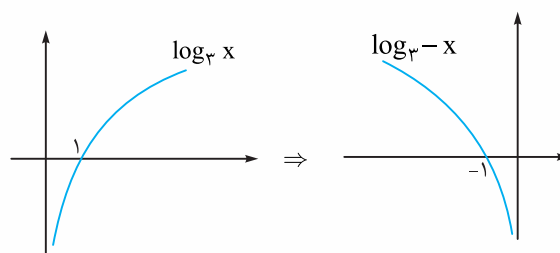
پ) مبنای لگاریتم کمتر از ۱ هست پس فرم نزولی دارد:



دشواری

-۲

آ) نمودار $y = \log_3 2 - x$ را رسم می‌کنیم سپس تغییرات $|x|$ را اعمال می‌کنیم:



-۶

آسان

$$\text{آ)} \log_2 \sqrt[5]{2^4} = \log_2 2^{\frac{4}{5}} = \frac{4}{5} \log_2 2 = \frac{4}{5}$$

$$\text{ب)} \log_3 \frac{1}{81} = \log_3 3^{-4} = -4 \log_3 3 = -4$$

$$\text{پ)} \log_{17} 289 = \log_{17} 17^2 = 2 \log_{17} 17 = 2$$

یادت باشه: $\log_a a^n = n \log_a a$

-۷

متوسط

دامنهٔ توابع لگاریتمی با اشتراک بین این سه شرط تعیین می‌شود:

$$y = \log_{\Delta} \bigcirc \Rightarrow \begin{cases} \bigcirc > 0 \\ \Delta > 0 \\ \Delta \neq 1 \end{cases}$$

$$\text{آ)} x + 2 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -2}$$

$$5 - x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 5}$$

$$5 - x \neq 1 \Rightarrow \boxed{x \neq 4}$$

$$\Rightarrow D_f = (-2, 5) - \{4\}$$

$$\text{ب)} x - 1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > 1}$$

$$4 - x > 0 \Rightarrow \boxed{x < 4}$$

$$4 - x \neq 1 \Rightarrow \boxed{x \neq 3}$$

$$\Rightarrow D_f = (1, 4) - \{3\}$$

$$\text{پ)} x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 1) > 0$$

$$\Rightarrow x < 1 \cup x > 2$$

$$x + 1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -1}$$

$$x + 1 \neq 1 \Rightarrow \boxed{x \neq 0}$$

$$\xrightarrow{\cap} D_h = (-1, 0) \cup (0, 1) \cup (2, +\infty)$$

-۸

آسان

$$\text{آ)} \log_{10} \frac{1}{256} = \log_{10} 2^{-8} = -\frac{8}{10} \log_{10} 2 = -\frac{4}{5}$$

$$\text{ب)} 3^{\log 1000} = 3^{\log 10^3} = 3^3 \log 10 = 3^3 = 27$$

یادت باشه:

$$\log_b m a^n = \frac{n}{m} \log_b a$$

-۹

متوسط

$$\text{آ)} \log_4 25 \times \log_{\sqrt{5}} 128 = \log_{2^2} 5^2 \times \log_{5^{\frac{1}{2}}} 2^7$$

$$= \frac{2}{2} \log_2 5 \times \frac{7}{\frac{1}{2}} \log_2 2 = \log_2 5 \times 2 \times \log_2 2$$

$$= 2 \times \log_2 5 \times \log_2 2 = 2 \times 1 = 2$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \text{ : یادت باشه}$$

$$\text{ب)} \log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \dots + \log \frac{n}{n+1}$$

$$= \log 1 - \log 2 + \log 2 - \log 3 + \dots + \log n - \log(n+1)$$

$$= -\log(n+1)$$

یادت باشه:

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

-۱۰

دشوار

برای تعیین تعداد ارقام یک عدد کافی است لگاریتم عدد در مبنای ۱۰ را حساب کنیم و در فرمول زیر قرار دهیم:

$$a \text{ عدد رقم‌های } a = [\log_{10} a] + 1$$

$$\text{آ)} \log_{10} 2^{400} = 400 \log_{10} 2 = 400 \times (0.3010) = 120.4$$

$$2^{400} \text{ عدد رقم‌های } = [120.4] + 1 = 120 + 1 = 121$$

$$\text{ب)} \log_{10} 2^{22} = 22 \log_{10} 2 = 22(1 - \log_{10} 5) = 22(1 - 0.7) = 6.6$$

$$2^{22} \text{ عدد رقم‌های } = [6.6] + 1 = 6 + 1 = 7$$

این به رابطهٔ کاربردی، یادش بگیر:

$$\log 10 = \log 2 \times 5 = \log 2 + \log 5$$

$$\Rightarrow 1 = \log 2 + \log 5 \Rightarrow \log 2 = 1 - \log 5, \log 5 = 1 - \log 2$$

-۱۱

آسان

تو مبحث تابع نمایی گفتیم که مسأله نیم‌عمر با فرمول زیر حل میشه:

$$m(t) = m_0 \times 2^{-\frac{t}{T}}$$

با توجه به اطلاعات مسأله:

$$m(t) = 2 \times 2^{-\frac{t}{T}}$$

$$\text{آ)} t = 2 \Rightarrow m(t) = 2 \times 2^{-\frac{2}{10}} = 2 \times 2^{-\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}} \approx 1.74$$

$$\text{ب)} m(t) = 2 \times 2^{-\frac{t}{10}}$$

متوسط

-۱۶

$$f) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 1 \Rightarrow y+1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \Rightarrow y+1 = 2^{-x-1}$$

$$\Rightarrow -x-1 = \log_2(y+1) \Rightarrow -x = \log_2(y+1) + 1$$

$$\Rightarrow x = -\log_2(y+1) + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = -\log_2(x+1) + 1$$

$$b) y = 24 \times 5^{x-1} - 1 \Rightarrow y+1 = 24 \times 5^{x-1}$$

$$\Rightarrow 5^{x-1} = \frac{y+1}{24} \Rightarrow x-1 = \log_5 \frac{y+1}{24}$$

$$\Rightarrow x = \log_5 \frac{y+1}{24} + 1 \Rightarrow g^{-1}(x) = 1 + \log_5 \frac{x+1}{24}$$

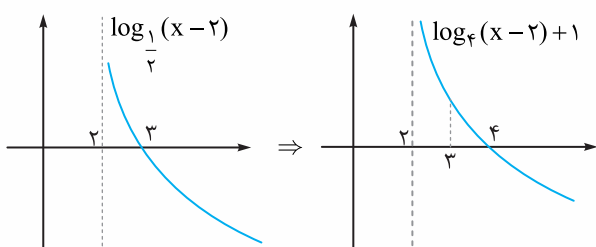
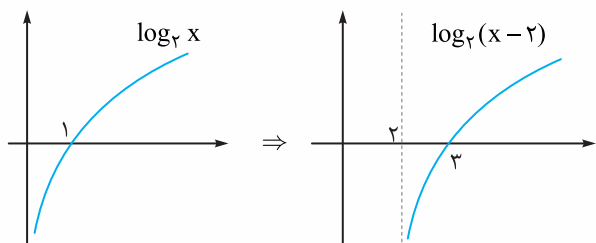
متوسط

-۱۷

$$f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + 1 = \log_{\frac{1}{2}}(x-2) + \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$= -\log_2(x-2) + 1$$

پس به کمک نمودار $y = \log x$ نمودار f رو رسم می‌کنیم:



آسان

-۱۸

محل برخورد نمودار تابع با محور طول‌ها نقطه‌ای با عرض صفر است پس:

$$y=0 \Rightarrow 1 + \log_5(x-2) = 0 \Rightarrow \log_5(x-2) = -1$$

$$\Rightarrow x-2 = 5^{-1} \Rightarrow x-2 = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 2 + \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{5}$$

پس نمودار تابع، محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول $\frac{11}{5}$ و با مختصات

$\left(\frac{11}{5}, 0\right)$ قطع می‌کند.

$$b) m(t) = 0.5 \Rightarrow 2 \times 2^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^{-\frac{t}{10}} = 2^{-2}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{10} = 2 \Rightarrow \boxed{t=20}$$

یادت باشه هر زمانی که مجهول در توان باشه می‌شه از لگاریتم برای حل استفاده کرد. مثلاً نوی همین مسأله:

$$2^{-\frac{t}{10}} = \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{t}{10} = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{10} = -1 \Rightarrow t = 10$$

آسان

-۱۹

$$\log_{\sqrt{b}} a^r b^r = \log_{\sqrt{b}} a^r + \log_{\sqrt{b}} b^r = \frac{r}{\frac{1}{2}} \log_b a + \frac{r}{\frac{1}{2}} \log_b b$$

$$= 4\left(\frac{1}{4}\right) + 6(1) = 1 + 6 = 7$$

متوسط

-۱۳

کافیه تشخیص بدم مقدار هر لگاریتم بین کدام دو عدد صحیح قرار می‌گیره.

$$\log_3 3 < \log_3 5 < \log_3 9 \Rightarrow 1 < \log_3 5 < 2 \Rightarrow [\log_3 5] = 1$$

$$\log_5 1 < \log_5 3 < \log_5 5 \Rightarrow 0 < \log_5 3 < 1 \Rightarrow [\log_5 3] = 0$$

$$[\log_3 5] + [\log_5 3] = 1 + 0 = 1$$

آسان

-۱۴

$$\log 196 - \log 175 = \log 14^2 - \log 7 \times 25$$

$$= 2[\log 7 + \log 2] - [\log 7 + \log 5^2]$$

$$= 2[0.8451 + 0.3010] - [0.8451 + 2(0.6990)]$$

$$= 2/292 - 2/243 = 0.049$$

دشوار

-۱۵

$$m(t) = 20 \times 2^{-\frac{t}{100}}$$

$$0.005 = 20 \times 2^{-\frac{t}{100}} \Rightarrow 0.00025 = 2^{-\frac{t}{100}}$$

$$\Rightarrow -\frac{t}{100} = \log_2 0.00025$$

حواست باشه که:

$$\frac{25}{100000} = \frac{1}{4000}$$

پس:

$$-\frac{t}{100} = \log_2 \frac{1}{4 \times 1000} = -(\log_2 4 + \log_2 1000)$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100} = 2 + \log_2 10^3 = 2 + 3 \log_2 10 = 2 + \frac{3}{\log_{10} 2} = 2 + \frac{3}{0.3}$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100} = 2 + 10 = 12 \Rightarrow \boxed{t=1200}$$

۳۳- متوسط

در حل معادلات ابتدا دامنهٔ لگاریتم‌ها رو مشخص می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + x > 0 \Rightarrow (x < -1) \cup (x > 0) \\ x > 0 \\ \text{I) } x \neq 1 \\ 7x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{7} \end{array} \right\} \rightarrow x > \frac{5}{7}, x \neq 1$$

با داشتن این بازه معادله رو حل می‌کنیم:

$$\log_x(x^2 + x) = \log_x(7x - 5)$$

$$\Rightarrow x^2 + x = 7x - 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Rightarrow x=1 \text{ غلط}, \boxed{x=5} \text{ قق}$$

$$\text{ب) } (x > 0) \cap (x > 4) \Rightarrow (x > 4)$$

$$\log x = \log \frac{5}{x-4} \Rightarrow x = \frac{5}{x-4}$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 5 \Rightarrow \boxed{x=5} \text{ قق}$$

$$\text{پ) } x+1 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -1}$$

$$x^2 - x + 1 > 0 \Rightarrow \Delta < 0, a > 0 \Rightarrow \text{همواره مثبت}$$

$$(x+1)(x^2 - x + 1) = 9 \xrightarrow{\text{اتحاد جاقی ولاغر}} x^3 + 1 = 9 \Rightarrow$$

$$x^3 = 8 \Rightarrow \boxed{x=2} \text{ قق}$$

دشوار

۳۴- آسان

آ) طبق قانونی از لگاریتم داریم:

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a}$$

پس داریم:

$$x^{\log_3 2} + x^{\log_2 3} = 162$$

$$\Rightarrow 2 \times x^{\log_3 2} = 162 \Rightarrow x^{\log_3 2} = 81$$

$$\Rightarrow \log_{10} 3 = \log_x 81 = \log_x 3^4 = 4 \log_x 3$$

حالا ضرب ۴ رو در توان مبنا به صورت معکوس می‌بریم:

$$\Rightarrow \log_{10} 3 = \log \frac{1}{x^4} 3$$

$$\frac{1}{x^4} = 10 \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{4}} = 10000$$

$$\text{ب) } 5^{2+\log_2 3} = x \Rightarrow 5^2 \times 5^{\log_2 3} = x$$

$$\Rightarrow x = 25 \times 5^{\frac{1}{2} \log_2 3} = 25 \times 5^{\log_2 \sqrt{3}} = 25 \times \sqrt{3} \Rightarrow x = 25\sqrt{3}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

یادت باشه كه:

آسان

۳۵- متوسط

$$A = \log_3 9 + \log_3 \sqrt[4]{3^5} - (\log_2 4 - \log_2 \sqrt[3]{2})$$

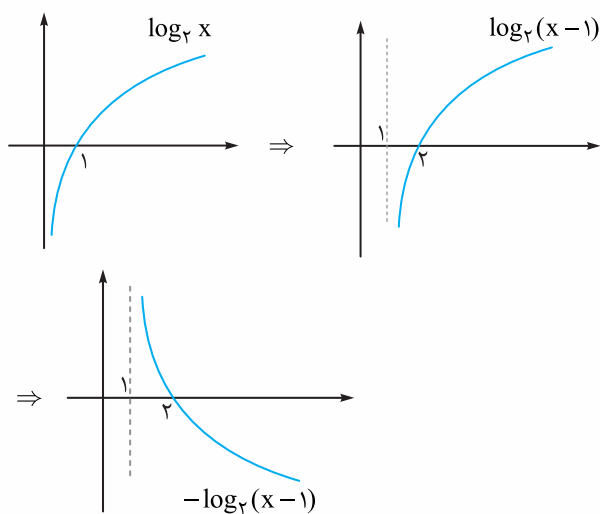
$$= \log_3 3^2 + \log_3 3^{\frac{5}{4}} - \log_2 2^2 + \log_2 2^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2 + \frac{5}{4} - 2 + \frac{1}{3} = \frac{23}{12}$$

متوسط

۳۶- آسان

$$y = \log_2 \frac{1}{x-1} = -\log_2(x-1)$$



آسان

۳۷- آسان

$$\text{I) } \log_{10} 6 \dots = \log 6 \times 10^{-4} = \log 2 \times 3 \times 10^{-4}$$

$$= \log 2 + \log 3 + \log 10^{-4} = a + b - 4$$

$$\boxed{\log 10^n = n} \text{ یادت باشه:}$$

$$\log 60 = \log 2 \times 3 \times 10 = \log 2 + \log 3 + \log 10$$

$$= a + b + 1$$

$$\boxed{\log 10 = 1} \text{ یادت باشه:}$$

آسان

۳۸- آسان

$$\log_{25} 45 = \log_{5^2} 5 \times 9 = \log_{5^2} 5 + \log_{5^2} 3^2$$

$$= \frac{1}{2} \log_5 5 + \frac{2}{2} \log_5 3 = \frac{1}{2} + \log_5 3$$

در مسأله تعداد $\log_5 3$ برابر a داده شده است پس:

$$\log_{25} 45 = \frac{1}{2} + a$$

آسان

-۲۹

اگر عدد را x فرض کنیم داریم:

$$\log_9 x - \log_9 \frac{1}{x^2} = 4/5$$

$$\Rightarrow \log_9 x + 2\log_9 x = 4/5 \Rightarrow 3\log_9 x = 4/5 \Rightarrow \log_9 x = 4/15$$

$$\Rightarrow x = 9^{4/15} = 27$$

دشوار

-۳۰

 $x = 5$ جواب معادله است پس در معادله صدق می‌کند:

$$\log 10 - \frac{1}{2} \log(\Delta - a) = \log \Delta \Rightarrow \log 10 - \log \Delta = \frac{1}{2} \log(\Delta - a)$$

$$\Rightarrow \log \frac{10}{\Delta} = \log(\Delta - a)^{1/2} \Rightarrow 2 = \sqrt{\Delta - a}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} 4 = \Delta - a \Rightarrow a = \Delta - 4 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله}} \log(x + \Delta) - \frac{1}{2} \log(x - 1) = \log \Delta$$

$$\Rightarrow \log \frac{x + \Delta}{\sqrt{x - 1}} = \log \Delta$$

$$\Rightarrow \frac{x + \Delta}{\sqrt{x - 1}} = \Delta \Rightarrow x + \Delta = \Delta \sqrt{x - 1}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} x^2 + 10x + 25 = 25x - 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow (x - 10)(x - 5) = 0$$

$$\Rightarrow x = 10 \text{ جواب دیگر}$$

$$\Rightarrow b = 10 \Rightarrow \log b \sqrt{b} = \log 10 \sqrt{10} = \log 10^{3/2} = \frac{3}{2}$$

آسان

-۲۵

$$\log_x \sqrt{y} = \frac{-1}{2} \Rightarrow x^{-1/2} = \sqrt{y} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{y}$$

$$\log_2(1 + \frac{1}{x}) = \log_2(1 + y) = \log_2 8 = 3$$

دشوار

-۲۶

$$f(x) = \sqrt{\log \frac{\Delta x - x^2}{4}} \text{ حواست هم به رادیکال باشه هم به لگاریتم:}$$

$$(1) \frac{\Delta x - x^2}{4} > 0 \Rightarrow \Delta x - x^2 > 0 \Rightarrow x(\Delta - x) > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{0 < x < \Delta} \quad (1)$$

$$(2) \log \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 0$$

$$\Rightarrow \log \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq \log 1 \xrightarrow{\text{مینا بزرگتر از ۱}} \frac{\Delta x - x^2}{4} \geq 1$$

$$\Rightarrow \Delta x - x^2 \geq 4 \Rightarrow x^2 - \Delta x + 4 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 1)(x - 4) \leq 0 \Rightarrow \boxed{1 \leq x \leq 4} \quad (2)$$

$$\xrightarrow{(1) \cap (2)} 1 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_f = [1, 4]$$

آسان

-۲۷

$$625 < 626 < 3125$$

$$5^4 < 626 < 5^5$$

مینا بزرگتر از ۱ هست پس علامت تغییر نمی‌کنه

$$\log_5 5^4 < \log_5 626 < \log_5 5^5$$

$$4 < \log_5 626 < 5$$

پس بین ۴ و ۵ قرار دارد.

متوسط

-۲۸

رابطه رشد جمعیت رو به کمک فرمول $f(t) = f_0(1+r)^t$ به دست می‌آییم.

ضریب رشد = ۲٪ یا ۰/۰۲

$$f(t) = f_0(1 + 0/02)^t$$

جمعیت دو برابر می‌شود یعنی $f(t) = 2f_0$ پس:

$$2f_0 = f_0(1/02)^t \Rightarrow (1/02)^t = 2 \Rightarrow t = \log_{1/02} 2$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} 1/02} = \frac{0/301}{0/079} = 3/81$$

یعنی حدود ۳ سال و ۲۹۱ روز زمان لازم هست یا به طور تقریبی ۴ سال.



متوسط

۴- گزینه «۳»

$$\log \frac{49}{9} + \log 20\sqrt{21} = \log 49 - \log 9 + \log 20 + \log \sqrt{21}$$

$$= \log 7^2 - \log 3^2 + \log 2 \times 10 + \frac{1}{2} \log 21$$

$$= 2\log 7 - 2\log 3 + \log 2 + \underbrace{\log 10}_{=1} + \frac{1}{2}[\log 3 + \log 7]$$

طبق اطلاعات مسأله:

$$\log 14 = b \Rightarrow \log 2 + \log 7 = b \Rightarrow \log 7 = b - \log 2$$

$$\log 6 = a \Rightarrow \log 2 + \log 3 = a \Rightarrow \log 3 = a - \log 2$$

$$= 2b - \cancel{2\log 2} - \cancel{2a} + \cancel{2\log 2} + \log 2 + 1 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\log 2 + \frac{b}{2} - \frac{1}{2}\log 2$$

$$= \frac{5}{2}b - \frac{3}{2}a + 1$$

آسان

۵- گزینه «۲»

$$\frac{\log a}{\delta} = \log x \Rightarrow \log a = \delta \log x = \log x^\delta \Rightarrow a = x^\delta$$

$$\frac{\log b}{\epsilon} = \log x \Rightarrow \log b = \epsilon \log x = \log x^\epsilon \Rightarrow b = x^\epsilon$$

$$\frac{b^2}{a^3} = \frac{x^\delta}{x^{1\delta}} = x^{-\gamma} \Rightarrow y = -\gamma$$

متوسط

۶- گزینه «۲»

$$[\log 2^2] + 1$$

تعداد رقم‌های عدد برابر است با:

$$= [22 \log 2] + 1 = [22(1 - \log 5)] + 1$$

$$= [22(\underbrace{1 - 0.7}_{0.3})] + 1 = [6.6] + 1 = 6 + 1 = 7$$

آسان

۷- گزینه «۳»

$$x = 8 \log_4 2\sqrt{2} = 8 \log_{2^2} 2^{\frac{3}{2}} = 8(\frac{3}{2}) \log_2 2$$

$$= 8(\frac{3}{2}) \times 1 = 6 \Rightarrow \boxed{x = 6}$$

$$\log_x 4(x+3) = \log_6 4(9) = \log_6 36 = 2$$

متوسط

۸- گزینه «۴»

$$\log_8 2\sqrt[3]{5/25} = A \Rightarrow A = \log_{2^3} 2 \times (5/25)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{می‌دونیم: } 5/25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 2^{-2}$$

$$A = \log_{2^3} 2 + \frac{1}{3} \log_{2^3} 2^{-2}$$

$$= \frac{1}{3} \log_2 2 + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{3} \log_2 2 = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$$

$$\log_4 (\frac{1}{A} - 1) = \log_4 (9 - 1) = \log_4 8 = \log_{2^2} 2^3 = \frac{3}{2}$$



سؤالات تستی

پاسخنامه

بخش ۲

آسان

۱- گزینه «۳»

$$\log a^2 b^2 c = \log a^2 b^2 \cdot ac = \log a^2 b^2 + \log ac$$

$$= 2 \log ab + \log ac = 2k_1 + k_2$$

آسان

۲- گزینه «۲»

$$\frac{3 \log 6 + 2 \log 8}{\log 2400} = \frac{3 \log 2 \times 3 + 2 \log 2^3}{\log 8 \times 3 \times 100}$$

$$= \frac{3(\log 2 + \log 3) + 6 \log 2}{3 \log 2 + \log 3 + \log 10^2} = \frac{9 \log 2 + 3 \log 3}{3 \log 2 + \log 3 + 2}$$

طبق اطلاعات مسأله داریم:

$$\log 2 + \log 3 + \log 2^2 = a$$

$$\Rightarrow 3 \log 2 + \log 3 = a$$

با جاگذاری در کسر داریم:

$$\frac{2(3 \log 2 + \log 3)}{3 \log 2 + \log 3 + 2} = \frac{2a}{a + 2}$$

پس گزینه ۲ صحیح است.

دشوار

۳- گزینه «۲»

$$\log xy^2 = 2 \Rightarrow \log xy^2 + \log x^2 y = 6$$

$$\log x^2 y = 4$$

$$\Rightarrow \log(xy^2)(x^2 y) = 6 \Rightarrow \log x^3 y^3 = 6 \Rightarrow 3 \log xy = 6$$

$$\Rightarrow \boxed{\log xy = 2}$$

$$\begin{cases} \log xy^2 = 2 \\ \log xy = 2 \end{cases} \Rightarrow \log xy^2 - \log xy = 0 \Rightarrow \log y = 0$$

$$\log xy^3 = \log(xy)(y^3) = \log xy + 3 \log y = 2 + 3(0) = 2$$

یادت باشه:

$$\log ab = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

متوسط

۱۲- گزینه «۳»

$$A = \log_3 \frac{1}{500} = \log_3 (500)^{-1} = -\log_3 500$$

می‌دونیم که: $3^6 = 729 < 500 < 243 = 3^5$ پس:

مبنا یعنی ۳ بزرگتر از ۱ هست پس جهت نامساوی تغییر نمی‌کند

$$\log_3 3^5 < \log_3 500 < \log_3 3^6 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 5 < \log_3 500 < 6$$

$$\Rightarrow -6 < -\log_3 500 < -5$$

حواست باشه وقتی طرفین یک نامساوی رو در منفی ضرب می‌کنی جهت نامساوی عوض میشه.

آسان

۱۳- گزینه «۱»

$$A = \log_{\frac{1}{x-1}} x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = \log_{(x-1)^{-1}} (x-1)^3$$

$$= \frac{3}{-1} \log_{x-1} (x-1) = -3$$

حواست باشه:

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

متوسط

۱۴- گزینه «۱»

$$[\log_{\sqrt{r}} \sqrt{\delta}] = [\log_{\frac{1}{\sqrt{r}}} \delta^{\frac{1}{2}}] = [\frac{1}{\sqrt{r}} \log_r \delta] = [\log_r \delta]$$

$$2^2 = 4 < \delta < 8 = 2^3 \Rightarrow \log_2 2^2 < \log_2 \delta < \log_2 2^3$$

$$\Rightarrow 2 < \log_2 \delta < 3 \Rightarrow [\log_2 \delta] = 2$$

آسان

۱۵- گزینه «۲»

$$\frac{\log 2 + \log 5 + \log 36}{\log 6 + \frac{1}{2}} = \frac{\log 2 \times 5 + \log 36}{\log 6 + \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1 + 2 \log 6}{\log 6 + \frac{1}{2}} = \frac{2(\frac{1}{2} + \log 6)}{\frac{1}{2} + \log 6} = 2$$

دشوار

۱۶- گزینه «۳»

$$5^{2+\log_5 3} = 5^2 \times 5^{\log_5 3} = 25 \times 5^{\log_5 3}$$

$$= 25 \times 5^{\frac{1}{2} \log_5 3} = 25 \times 5^{\log_5 3^{\frac{1}{2}}} = 25 \times \textcircled{5}^{\log \textcircled{5} \sqrt{3}} = 25 \times \sqrt{3}$$

$$a^{\log_a x} = x$$

یادت باشه:

متوسط

۹- گزینه «۳»

$$\log_{\sqrt{9}} 27 \sqrt[3]{81} + \log_{\sqrt[4]{9}} \frac{1}{49} + \log_{\sqrt[3]{9}} 2 \sqrt{2}$$

$$= \log_3 27 + \log_3 \sqrt[3]{81} + \log_{\sqrt[4]{9}} \frac{1}{49} + \log_{\sqrt[3]{9}} 2 \sqrt{2}$$

$$= \log_3 3^3 + \log_3 3^{\frac{4}{3}} + \log_{\sqrt[4]{9}} 9^{-2} + \log_{\sqrt[3]{9}} 2^{\frac{3}{2}}$$

$$= 3 + \frac{4}{3} - 2 + \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{4}{3} + 6 = 7 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$$

دشوار

۱۰- گزینه «۴»

می‌دونیم دامنه تابع لگاریتمی $y = \log[x]$ مقادیری از x هست که عبارت

$[x]$ مثبت بشه پس:

$$[x] > 0 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow D = [1, +\infty)$$

یادآوری:

$$[x] > n \Rightarrow x \geq n+1$$

دشوار

۱۱- گزینه «۱»

تو حل نامعادلات لگاریتمی اول هر دو طرف رو به فرم لگاریتم بنویسیم:

$$\log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x+3}{12} \right) > 1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{2x+3}{12} \right) > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

چون مبنا عددی بین ۰ و ۱ هستش پس تابع نزولی هست و با حذف لگاریتم.

جهت نامعادله عوض میشه:

$$\frac{2x+3}{6} < \frac{1}{1} \Rightarrow 2x+3 < 6$$

$$\Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow \boxed{x < \frac{3}{2}}$$

از طرفی طبق شرط دامنه داریم:

$$\frac{2x+3}{12} > 0 \Rightarrow 2x+3 > 0 \Rightarrow \boxed{x > -\frac{3}{2}}$$

پس جواب نامعادله $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ هست.

$$b-a = \frac{3}{2} - (-\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

متوسط

۲۲- گزینه «۱»

محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۱- قطع کرده پس $y = 0$.

$$\log_{\frac{1}{2}}(-a+b) = 0 \Rightarrow -a+b=1$$

نیمساز ناحیه چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۱- قطع کرده پس:

$$y = -x \Rightarrow -1 = -x \Rightarrow x=1$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(a+b) = -1 \Rightarrow a+b=2$$

$$\begin{cases} a+b=2 \\ -a+b=1 \end{cases}$$

$$2b=3 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

دشوار

۲۳- گزینه «۱»

$$ax+b>0 \Rightarrow x>-\frac{b}{a} \xrightarrow{x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)} -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a=2b$$

$$f(4) = 2 \Rightarrow \log_3(4a+b) = 2 \Rightarrow 4a+b=9$$

$$\Rightarrow 4(2b)+b=9 \Rightarrow 9b=9 \Rightarrow b=1 \Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow f(x) = \log_3(2x+1)$$

$$f(-\frac{4}{9}) = \log_3(2(-\frac{4}{9})+1) = \log_3(-\frac{8}{9}+1) = \log_3\frac{1}{9} = -2$$

دشوار

۲۴- گزینه «۲»

ابتدا دامنه دو تابع f و g رو بررسی می‌کنیم:

$$f(x) = \log x^2 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$g(x) = 2 \log x \Rightarrow x > 0 \Rightarrow D_g = (0, +\infty)$$

دامنه‌ها مساوی نیستند پس گزینه ۳ رد می‌شه!

$$f(x) = \log x^2 = 2 \log x = g(x), \quad x > 0$$

یعنی به ازای $x > 0$ یعنی همون دامنه g ، ضابطه‌ها مساوی هستند.

پس g بخشی از f هست.

متوسط

۲۵- گزینه «۱»

$$(\log_{12} 6)^2 + \log_{12} 2 \log_{12} 72$$

$$= (\log_{12} 6)^2 + (1 - \log_{12} 6)(\log_{12} 12 + \log_{12} 6)$$

$$= (\log_{12} 6)^2 + 1 - (\log_{12} 6)^2 = 1$$

متوسط

۱۷- گزینه «۱»

یکی از قوانین لگاریتم‌ها این هست:

$$a^{\log_x b} = b^{\log_x a} \Rightarrow a^{\log_x b} - b^{\log_x a} = 0$$

متوسط

۱۸- گزینه «۱»

معنی ریاضی جمله این هست: $\log_3 x - \log_{27} (\frac{1}{x})^2 = \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \log_3 x - \log_{3^3} x^{-2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_3 x + \frac{2}{3} \log_3 x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{3} \log_3 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \log_3 x = \frac{1}{5} \Rightarrow x = 3^{\frac{1}{5}} = 9$$

$$\Rightarrow \log_9 x^2 = \log_9 9^2 = 2$$

متوسط

۱۹- گزینه «۳»

$$\log_5(2x-1) + \log_5(3x-5) = 1$$

$$\Rightarrow \log_5(2x-1)(3x-5) = 1 \Rightarrow (2x-1)(3x-5) = 5^1$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 13x + 5 = 5 \Rightarrow 6x^2 - 13x = 0$$

$$\Rightarrow x(6x-13) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = \frac{13}{6}$$

(غ ق) (ق ق)

$$\log_2(6x+3) = \log_2 \left(\frac{13}{6} \right) + 3 = \log_2 16 = 4$$

دشوار

۲۰- گزینه «۲»

$$\log_9 x + \log_{x^2} 3 = 1 \Rightarrow \log_{3^2} x + \frac{1}{\log_3 x^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \log_3 x + \frac{1}{2 \log_3 x} = 1 \xrightarrow{\times 2} \log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 2$$

می‌دانیم که $0 + \frac{1}{0} \geq 2$ و مساوی زمانی اتفاق می‌افته که $0 = 1$ پس:

$$\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3 \text{ قق}$$

پس معادله یک ریشه حقیقی دارد.

دشوار

۲۱- گزینه «۶»

$$D_f: 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow D_f = (-\infty, 3]$$

$$D_g: x^2 - 2x > 0 \Rightarrow x(x-2) > 0 \Rightarrow x < -2 \cup x > 2$$

$$\Rightarrow D_g = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \underbrace{\{x \in (-x, -2) \cup (2, +\infty) \mid \log_2(x^2 + 2x) \in (-\infty, 3]\}}_{(I)}$$

$$\log_2(x^2 + 2x) \leq 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x \leq 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2 \text{ (II)}$$

$$\xrightarrow{(I), (II)} [-4, -2) \cup (2, 2]$$

۲۶- گزینه «۴»

متوسط

ابتدا دامنهٔ لگاریتم‌ها رو مشخص می‌کنیم:

$$\log_x(x^2 + 4) \Rightarrow x^2 + 4 > 0 \text{ و همواره برقرار } \boxed{x > 0, x \neq 1}$$

$$\log_x(x^2 + 4) = 1 + \log_x 4 \Rightarrow \log_x(x^2 + 4) - \log_x 4 = 1$$

$$\Rightarrow \log_x \frac{x^2 + 4}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 4}{4} = x \Rightarrow x^2 + 4 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ یا } x = 4 \Rightarrow \begin{matrix} \text{غلقق} & \text{قق} \end{matrix}$$

$$\log_4 x = \log_4 4 = 2$$

۲۷- گزینه «۱»

دشوار

$$x^{\log(x)-1} = 100 \Rightarrow x^{\log x} \times x^{-1} = 100$$

برای پایین آوردن توان از هر دو طرف لگاریتم می‌گیریم (با فرض اینکه می‌دانیم $x > 0$ دامنه لگاریتم):

$$\log(x^{\log x} \times x^{-1}) = \log 100$$

$$\Rightarrow \log x^{\log x} + \log x^{-1} = 2 \Rightarrow \log x \cdot \log x - \log x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 - \log x - 2 = 0 \Rightarrow (\log x - 2)(\log x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log x = 2 \Rightarrow x = 10^2 = 100 \\ \log x = -1 \Rightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{ضرب ریشه‌ها} \\ 100 \times \frac{1}{10} = 10 \end{matrix}$$

۲۸- گزینه «۴»

دشوار

$$x^{\log x} = 1000x^2$$

مشابه حل تست ۲۷ عمل می‌کنیم و از هر دو طرف لگاریتم می‌گیریم:

$$\log x^{\log x} = \log 1000x^2$$

$$\Rightarrow \log x \cdot \log x = \underbrace{\log 1000}_3 + \log x^2$$

$$\Rightarrow (\log x)^2 - 2(\log x) - 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\log x - 3)(\log x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \log x = 3 \Rightarrow x = 1000 \\ \log x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{10} \end{cases}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با:

$$1000 \times \frac{1}{10} = 100$$

۲۹- گزینه «۱»

آسان

$$6^3 = 216 < 723 < 1296 = 6^4$$

$$\Rightarrow \log_6 6^3 < \log_6 723 < \log_6 6^4$$

$$\Rightarrow 3 < \log_6 723 < 4$$

$$\Rightarrow [\log_6 723] = 3$$

۳۰- گزینه «۲»

دشوار

$$\log(x^2 - x - 6) - \log(x - 3) = \log(2x - 5)$$

مطابق معمول اول دامنه معادله رو مشخص می‌کنیم:

$$x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) > 0$$

$$\Rightarrow x < -2 \cup x > 3$$

$$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3 \quad \cap \rightarrow D = (3, +\infty)$$

$$2x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$

حال با توجه به دامنه معادله رو حل می‌کنیم:

$$\log \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = \log(2x - 5) \Rightarrow \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 2x - 5$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = (x - 3)(2x - 5) \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = (x - 3)(2x - 5)$$

$$\Rightarrow (x - 3) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3} \text{ (در دامنه نیست) غلقق}$$

$$\text{یا } (x + 2) = (2x - 5) \Rightarrow \boxed{x = 7} \text{ قق}$$

$$\log_6 \sqrt[3]{x+1} = \log_6 \sqrt[3]{7+1} = \log_6 \sqrt[3]{8} = \log_6 2 = \log_{6^{\frac{1}{3}}} 2 = \frac{1}{2}$$

۳۱- گزینه «۱»

دشوار

$$f(x) = \sqrt{1 - \log(x^2 - 3x)}$$

حواست باشه هم دامنهٔ لگاریتم و هم دامنهٔ رادیکال رو در نظر بگیریم:

$$x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow \boxed{x < 0 \cup x > 3} \quad (1)$$

$$1 - \log(x^2 - 3x) \geq 0 \Rightarrow \log(x^2 - 3x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x \leq 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 2) \leq 0 \Rightarrow \boxed{-2 \leq x \leq 5} \quad (2)$$

بین شرط‌های (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم:

$$D = [-2, 0) \cup (3, 5]$$

۳۲- گزینه «۳»

دشوار

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^{2x} = 3^x + \frac{1}{3} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^x = 3^x + \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3^x + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^x} = 0 \xrightarrow{\times 3^x} (3^x)^2 + \frac{1}{3} 3^x - 1 = 0$$

$$t = 3^x \Rightarrow t^2 + \frac{1}{3}t - 1 = 0 \xrightarrow{\times 3} 3t^2 + t - 3 = 0$$

$$\Delta = 100 \Rightarrow t = \frac{-1 \pm 10}{6} = \begin{cases} \frac{1}{3} \\ -3 \end{cases}$$

$$3^x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -1 \Rightarrow y = 3^{-1} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow A(-1, \frac{2}{3})$$

$$3^x = -3 \text{ غلقق}$$

فاصلهٔ A از $(-1, 1)$ با توجه به مساوی بودن x برابر تفاضل عرض‌هاست:

$$3 - 1 = 2$$

دشوار

۳۷- گزینه «ب»

توابع $\log_{\frac{1}{2}} x$ و $(\frac{1}{2})^x$ نزولی هستند و توان ۳ تأثیری در صعودی و نزولی

ندارد پس تابع f تابع نزولی است پس با حذف f علامت نامعادله عوض می‌شه!

$$f(x) = ((\frac{1}{2})^x + \log_{\frac{1}{2}} x)^3$$

$$f(f(x)) < f(2^{-3x}) \Rightarrow f(x) > 2^{-3x}$$

$$\Rightarrow ((\frac{1}{2})^x + \log_{\frac{1}{2}} x)^3 < 2^{-3x} \xrightarrow{\text{رادیكال با فرجه ۳}} (\frac{1}{2})^x + \log_{\frac{1}{2}} x < 2^{-x}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x < 0 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} 1 \xrightarrow{0 < \frac{1}{2} < 1} x > 1$$

یادت باشه اگه f نزولی باشه: $f(\circ) < f(\Delta) \Leftrightarrow \circ > \Delta$

اما اگه f صعودی باشه: $f(\circ) < f(\Delta) \Leftrightarrow \circ < \Delta$

آسان

۳۸- گزینه «ب»

$$\log_{\frac{5}{3}} \delta = \log \delta - \log 3 = 1 - \log 2 - \log 3 \cong 1 - 0.3 - 0.4 = 0.3$$

$$\log 9 = 2 \log 3 = 2(0.4) = 0.8$$

$$\log 15 = \log 3 \times 5 = \log 3 + \log 5 = \log 3 + 1 - \log 2$$

$$= 0.4 + 1 - 0.3 = 1.1$$

با جاگذاری لگاریتم‌ها در معادله داریم:

$$\xrightarrow{\times 10} 3x^2 + 8x - 11 = 0 \xrightarrow{= \text{جمع ضرایب}} \begin{cases} x = 1 \\ x = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = |1 - (-\frac{11}{3})| = |\frac{14}{3}| = \frac{14}{3}$$

دشوار

۳۹- گزینه «ب»

$$\log_x 9 + 3 \log_3 x = \log_x 3^2 + 3 \log_3 x = 2 \log_x 3 + \frac{3}{\log_x 3}$$

می‌دانیم که $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$ پس:

$$2 \log_x 3 + \frac{3}{\log_x 3} \geq 2\sqrt{2 \times 3} = 2\sqrt{6}$$

پس کم‌ترین مقدار عبارت برابر $2\sqrt{6}$ است.

آسان

۴۰- گزینه «ب»

$$\left. \begin{aligned} \log_2 3 &= a \\ \log_8 b &= \frac{2}{3}(1+a) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \log_8 b = \frac{2}{3}(1 + \log_2 3)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \log_2 b = \frac{2}{3}(1 + \log_2 3)$$

$$\Rightarrow \log_2 b = 2 + 2 \log_2 3 \Rightarrow \log_2 b - \log_2 9 = 2$$

$$\Rightarrow \log_2 \frac{b}{9} = 2 \Rightarrow \frac{b}{9} = 4 \Rightarrow \boxed{b = 36}$$

$$\log_3 b - 8 = \log_3 (36) - 8 = \log 100 = 2$$

دشوار

۳۳- گزینه «۴»

$$\log(2x+1) + \log(y-2) - \log y = \log 3 \Rightarrow \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = 3 \quad (1)$$

$$\log_8 (2y+4x) + \log_8 2 = 1 \Rightarrow \log_8 2(2y+4x) = 1$$

$$\Rightarrow 4(y+2x) = 8 \Rightarrow y+2x = 2 \quad (2)$$

از این رابطه در معادله اول جاگذاری می‌کنیم:

$$\log(2x+1) - \log(y-2) - \log y = \log 3 \Rightarrow \frac{(2x+1)(y-2)}{y} = 3 \quad (1)$$

$$(2x+1)(y-2) = 3y \Rightarrow 2xy - 4x + y - 2 - 3y = 0$$

$$\Rightarrow 2xy - 4x - 2y - 2 = 0 \xrightarrow{\div 2} xy - 2x - y - 1 = 0$$

$$\Rightarrow xy = 2x + y + 1 \xrightarrow{(1)} xy = 2 + 1 = 3$$

متوسط

۳۴- گزینه «۳»

از طرفین معادله، لگاریتم در مبنای ۳ می‌گیریم.

$$\log_3 x^{\log_2 x} = \log_3 243 \Rightarrow \log_3 x \cdot \log_2 x = \log_3 3^5$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 = 5 \Rightarrow \log_3 x = \sqrt{5} \Rightarrow x = 3^{\sqrt{5}}$$

آسان

۳۵- گزینه «۴»

$$f(x) = \log_2 \frac{2x-1}{2x+1}$$

$$f(1) + f(2) + \dots + f(40) = \log_2 \frac{1}{3} + \log_2 \frac{3}{5} + \log_2 \frac{5}{7} + \dots + \log_2 \frac{79}{81}$$

$$= \log_2 1 - \log_2 3 + \log_2 3 - \log_2 5 + \log_2 5 - \log_2 7 + \dots + \log_2 79 - \log_2 81$$

$$= \log_2 1 - \log_2 81 = 0 - 4 = -4$$

دشوار

۳۶- گزینه «۳»

$$\log_2 (2b-3) - \log_2 (2b-1) = 2 \Rightarrow \log_2 \frac{2b-3}{2b-1} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{2b-3}{2b-1} = 4 \Rightarrow 2b-3 = 4(2b-1) \Rightarrow 2b-3 = 8b-4 \Rightarrow 10b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{10}$$

$$(\log b)x^3 + (\log b^2)x^2 = 0 \Rightarrow (\log \frac{1}{10})x^3 + (\log \frac{1}{100})x^2 = 0$$

$$\Rightarrow -x^3 - 2x^2 = 0 \Rightarrow -x^2(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=-2 \end{matrix}$$

مجموع ریشه‌ها $= 0 - 2 = -2$

۱۴- گزینه «۱»

آسان

$$f(x) = \sqrt[3]{ax+b}$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{a}{2} + b} = 1 \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{2} + b = 0}$$

$$f^{-1}(8) = 5 \Rightarrow f(5) = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{5a+b} = 8 \Rightarrow 5a+b = 8^3 = 512$$

$$\Rightarrow \boxed{5a+b=9}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{2} + b = 0 \\ 5a + b = 9 \end{cases} \Rightarrow \frac{9}{2}a = 9 \Rightarrow \boxed{a=2} \Rightarrow \frac{2}{2} + b = 0 \Rightarrow \boxed{b=-1}$$

$$a-b = 2 - (-1) = 3$$

۱۴- گزینه «۲»

دشوار

$$a^2 + 9b^2 = 10ab \Rightarrow \underbrace{a^2}_{(a)^2} + \underbrace{9b^2}_{(3b)^2} + 2a(3b) - 2a(3b) = 10ab$$

$$\Rightarrow (a+3b)^2 = 16ab \Rightarrow a+3b = 4\sqrt{ab}$$

حواست باشه چون $(a+3b)$ جلوی لگاریتم هست پس مقدارش مثبت هست.

$$\Rightarrow \log\left(\frac{a+3b}{4}\right) = \log\frac{4\sqrt{ab}}{4} = \log\sqrt{ab} = \frac{1}{2}\log ab$$

$$= \frac{1}{2}(\log a + \log b) = \frac{\log a + \log b}{2} =$$

رابطه حساسی بین دو عبارت $\log a$ و $\log b$

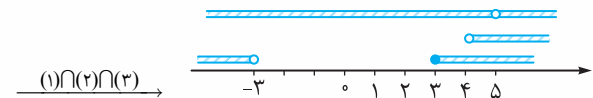
۱۴- گزینه «۴»

متوسط

$$1) |x| - 3 > 0 \Rightarrow |x| > 3 \Rightarrow x < -3 \cup x > 3$$

$$2) x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$3) x - 4 \neq 1 \Rightarrow x \neq 5$$



$$\Rightarrow D = (4, +\infty) - \{5\}$$

۱۴- گزینه «۳»

آسان

$$2\log_x a + \log_a \sqrt{x} = 2 \xrightarrow{x=9} 2\log_9 a + \log_a 3 = 2$$

$$\Rightarrow \log_3 a + \log_a 3 = 2 \Rightarrow \log_3 a + \frac{1}{\log_3 a} = 2$$

همانطوری که قبلاً هم دیدیم مقدار $\bigcirc + \frac{1}{\bigcirc}$ وقتی برابر ۲ می‌شود که $\bigcirc = 1$.

پس:

$$\log_3 a = 1 \Rightarrow a = 3$$

۱۴۵- گزینه «۱»

متوسط

$$\log_b(a+2b)^2 - 3b^2 = \log_{b^2} a^2 + 4ab + 4b^2 - 3b^2$$

$$= \log_{b^2} a^2 + 4ab + b^2 \xrightarrow{a^2+4ab+b^2} \log_{b^2} b^2 = 1$$

۱۴۶- گزینه «۳»

دشوار

$$\log_7 4^x + 15 = x + 3 \Rightarrow 4^x + 15 = 7^{x+3}$$

$$\Rightarrow (7^x)^2 - 8(7^x) + 15 = 0$$

$$\Rightarrow (7^x - 5)(7^x - 3) = 0$$

$$\begin{cases} 7^x = 5 \Rightarrow x_1 = \log_7 5 \\ 7^x = 3 \Rightarrow x_2 = \log_7 3 \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = \log_7 5 + \log_7 3 = \log_7 15$$

۱۴۷

دشوار

سؤال کنکور ایراد دارد. راه‌حل صحیح به شکل زیر است:

$$\log_7 3 < \log_7 \frac{1}{\frac{1}{12} + \sqrt{[x]} - [x]} - 1 < \log_7 5$$

$$\Rightarrow \log_7 3 < \log_7 12 + \sqrt{[x]} - [x] - \log_7 2 < \log_7 5$$

$$\Rightarrow \log_7 3 < \log_7 \frac{12\sqrt{[x]} - [x]}{2} < \log_7 5$$

$$\xrightarrow{2>1} 3 < \frac{12 + \sqrt{[x]} - [x]}{2} < 5$$

$$\Rightarrow 6 < 12 + \sqrt{[x]} - [x] < 10 \Rightarrow -6 < \sqrt{[x]} - [x] < -2$$

$$\Rightarrow 2 < [x] - \sqrt{[x]} < 6$$

$$t = \sqrt{[x]} \Rightarrow 2 < t^2 - t < 6$$

(۱) (۲)

$$1) t^2 - t - 2 > 0 \Rightarrow (t-2)(t+1) > 0 \Rightarrow t < -1 \cup t > 2$$

$$2) t^2 - t - 6 < 0 \Rightarrow (t-3)(t+2) < 0 \Rightarrow -2 < t < 3$$

$$\xrightarrow{(1),(2)} -2 < t < -1 \cup 2 < t < 3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 < \sqrt{[x]} < -1 \xrightarrow{\text{غیرممکن}} (t \geq 0) \\ 2 < \sqrt{[x]} < 3 \Rightarrow 4 < [x] < 9 \Rightarrow 5 \leq x < 9 \end{cases}$$

که گزینه ۳ گزینه نزدیک به این بازه است.

جواب آخر: $[5, 9)$



متوسط

-۱

$$\log E = 11/8 + 1/5 \times 7/5 = 11/8 + 7/25 = 23/20$$

$$\Rightarrow E = 10^{23/20} \text{ Erg}$$

متوسط

-۲

$$\text{I)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{10}} \times 2 = 2^{-2/10} \times 2^1 = 2^{8/10} \approx 1/74 \text{ گرم}$$

$$\text{ب)} m(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{10}} \times 2 = 2^{-\frac{t}{10}} \times 2^1 = 2^{1-\frac{t}{10}} = 2^{\frac{10-t}{10}}$$

$$\text{پ)} 2^{\frac{10-t}{10}} = 0.5 \Rightarrow \log_{2^0.5} = \frac{10-t}{10}$$

$$\Rightarrow \log_2^{-1} = \frac{10-t}{10} \Rightarrow -1 = \frac{10-t}{10} \Rightarrow t = 20$$

متوسط

-۳

حواستون باشه! مسأله‌های رشد و زوال از رابطه زیر حساب می‌شود.

$$f(t) = f(0)(1-r)^t$$

$$f(10) = 4 \times 10^7 \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{10} = 4 \times 10^7 \left(\frac{99}{100}\right)^{10}$$

$$= 4 \times 10^7 \times \frac{99^{10}}{100^{10}} = 4 \times 99^{10} \times 10^{-3}$$

متوسط

-۴

$$\frac{1}{10} A_0 = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{12/6} \Rightarrow \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{12/6} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10} = \frac{t}{12/6}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{t}{12/6} \Rightarrow 3t = 126 \Rightarrow t = 42 \text{ سال}$$

متوسط

-۵

$$2A_0 = A_0 \left(1 + \frac{2}{100}\right)^t \Rightarrow 2 = \left(\frac{102}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{102}{100}} 2 = t \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 1.02} = t \Rightarrow \frac{0.301}{0.0086} = t \Rightarrow t = 35$$

آسان

۴۸- گزینه «۱»

$$\log_3 2 = \frac{5}{8} \xrightarrow{\text{معکوس}} \log_2 3 = \frac{8}{5}$$

$$\log_{18} 8 = \log_{2 \times 3^2} 2^3 = \frac{3}{\log_2 2 \times 3^2} = \frac{3}{\log_2 2 + \log_2 3^2}$$

$$= \frac{3}{1 + 2 \times \frac{8}{5}} = \frac{3}{1 + \frac{16}{5}} = \frac{3}{\frac{21}{5}} = \frac{15}{21}$$

متوسط

۴۹- گزینه «۳»

$f^{-1}(2)$ یعنی مقداری برای x که $f(x) = 2$ شده است. پس:

$$\frac{2^x - 1}{2^x} = 2 \Rightarrow 2^x - \frac{1}{2^x} = 4 \xrightarrow{\times 2^x} (2^x)^2 - 4(2^x) - 1 = 0$$

$$\Delta = 20 \Rightarrow 2^x = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{5}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow x = \log_2 2 + \sqrt{5} \\ 2^x = 2 - \sqrt{5} \text{ غلط} \end{cases}$$

متوسط

۵۰- گزینه «۲»

هر روز ۴ لیتر از ۱۰۰ لیتر برداشته می‌شه به عبارتی $\frac{4}{100}$ یا $\frac{1}{25}$ محلول

برداشته می‌شه پس $1 - \frac{1}{25} = \frac{24}{25}$ از محلول باقی می‌مونه.

$$f(t) = f_0 \left(\frac{24}{25}\right)^t \Rightarrow \frac{1}{3} f_0 = f_0 \left(\frac{24}{25}\right)^t$$

$$\Rightarrow t = \frac{\log \frac{1}{3}}{\log \frac{24}{25}} = \frac{-\log 3}{\log 24 - \log 25} = \frac{-0.477}{\log(2^3 \times 3) - 2 \log 5}$$

$$= \frac{-0.477}{3(0.3) + 0.477 - 2(1-0.3)} = \frac{-0.477}{0.9 + 0.477 - 2 + 0.6}$$

$$= \frac{-0.477}{-0.023} = 24$$



دشوار

۱- گزینه «ب»

$$40 = 60 - 50e^{-\frac{1}{4}t} \Rightarrow 50e^{-\frac{1}{4}t} = 20$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{1}{4}t} = \frac{2}{5} \Rightarrow \log_e \frac{2}{5} = -\frac{t}{4}$$

حواستون باشه! لگاریتم در پایه e یا عدد نپر را لگاریتم طبیعی می‌نامند و آن را $\log x$ یا $\ln x$ می‌نویسند.

$$\log_e \frac{2}{5} = \log_e 2 - \log_e 5 = 0.693$$

پس:

$$\log_e 2 - \log_e 5 = -\frac{t}{4} \Rightarrow -\frac{91}{100} = -\frac{t}{4} \Rightarrow t = 3.64$$

از نصفه ماه بیشتر است پس ۳ ماه و ۱۹ روز

متوسط

۲- گزینه «ب»

$$\frac{1}{2}A_0 = A_0 \left(1 - \frac{5}{100}\right)^t \Rightarrow \frac{1}{2} = \left(\frac{95}{100}\right)^t$$

$$\log \frac{1}{2} = \log \left(\frac{95}{100}\right)^t$$

$$\frac{\log \frac{1}{2}}{\log \frac{95}{100}} = \frac{-\log 2}{\log 5 + \log 19 - 2 \log 10}$$

$$= \frac{-0.301}{0.699 + 1.287 - 2} = \frac{0.301}{-0.014} = 21.5$$

دشوار

۳- گزینه «ا»

$$f(t) = m_0(a)^{\frac{t}{T}}$$

$$12 = m_0(a)^{\frac{2}{T}} \Rightarrow \frac{48}{12} = \frac{m_0(a)^{\frac{2}{T}}}{m_0(a)^{\frac{2}{T}}}$$

$$48 = m_0(a)^{\frac{4}{T}} \quad m_0(a)^{\frac{2}{T}}$$

$$\Rightarrow 4 = (a)^{\frac{2}{T}} \xrightarrow{\text{جذر}} 2 = a^{\frac{1}{T}}$$

$$12 = m_0(4) \Rightarrow m_0 = 3$$

با جایگذاری در اطلاعات اولیه $\Leftarrow$

$$f(t) = 3(a)^{\frac{1}{T}} = 3 \times 2 = 6$$

متوسط

۶-

حواستون باشه که در سؤال گفته شده قدرت زلزله

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0} \Rightarrow M = \frac{2}{3} \log \frac{10^{13/4}}{10^{4/4}}$$

$$\Rightarrow M = \frac{2}{3} [\log 10^{13/4} - \log 10^{4/4}]$$

$$\Rightarrow M = \frac{2}{3} [13/4 - 4/4] = \frac{2}{3} \times 9 = 6 \text{ ریشتر}$$

متوسط

۷-

$$2A_0 = A_0 \left(1 + \frac{1}{100}\right)^t \Rightarrow 2 = \left(\frac{101}{100}\right)^t$$

$$\Rightarrow \log_{101/100} 2 = t \Rightarrow \frac{\log 2}{\log 101/100} = t$$

$$\Rightarrow \frac{0.301}{0.0086} = t \Rightarrow t = 34 \text{ سال}$$

آسان

۸-

$$\text{آ)} m(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$$

$$\text{ب)} 0.01 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \Rightarrow \log_{1/2} 10^{-2} = \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow 2 \log_{1/2} 10 = \frac{t}{4} \Rightarrow 2 \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{t}{4} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{t}{4} \Rightarrow 3t = 8 \Rightarrow t = \frac{8}{3}$$

متوسط

۹-

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0} \Rightarrow M = \frac{2}{3} [\log E - \log E_0]$$

$$\Rightarrow M = \frac{2}{3} [\log E - \log 10^{4/4}] \Rightarrow M = \frac{2}{3} [\log E - 4/4]$$

$$\Rightarrow M = \frac{2}{3} [10/4 - 4/4] = \frac{2}{3} (6) = 4 \text{ ریشتر}$$

آسان

۱۰-

$$f(t) = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow f(300) = 128 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{300}{30}} = 2^7 \times \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$$

۱۰- گزینه «پ»

متوسط

$$f(t) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} \Rightarrow f(40) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{40}{25}}$$

$$\Rightarrow f(40) = 24\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{5}} = 24 \times \sqrt[5]{\left(\frac{1}{2}\right)^8} = 12\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{8}{5}}$$



۱-

متوسط

(آ) درست

(ب) نادرست

$$\text{مثال: } \log_{10} 1/a = a \Rightarrow 10^a = \frac{1}{10} \Rightarrow 10^a = 10^{-1} \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

(پ) نادرست - اگر $a > b > 0$ آن گاه $\log_{10} a > \log_{10} b$

(ت) نادرست - می تواند بین صفر و یک باشد.

۲-

آسان

$$x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^3 \quad (\text{آ})$$

(ب) صفر

(پ) $a > 0$ و $b > 0$ و $b \neq 1$

۳-

آسان

این تابع نمایی است که یک واحد به سمت بالا رفته است پس $a = 1$.همچنین محل برخورد با محور y ها در تابع نقطه ۲ است پس:

$$2 = 1 + 2^{0-b} \Rightarrow 1 = 2^{-b} \Rightarrow 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^b \Rightarrow b = 0$$

۴-

متوسط

$$\left(\frac{4}{100}\right)^{x^2-3x} < 5^4 \Rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^{x^2-3x} < 5^4$$

$$\Rightarrow (5^{-2})^{x^2-3x} < 5^4 \Rightarrow 5^{-2x^2+6x} < 5^4$$

$$-2x^2 + 6x < 4 \Rightarrow -2x^2 + 6x - 4 < 0$$

چون جمع ضرایب صفر است $x_2 = 2$, $x_1 = +1$

$$\begin{array}{c|c|c} 1 & 2 & \\ \hline - & + & - \\ \hline 2 & 1 & 2 \end{array} \quad (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

۴- گزینه «پ»

متوسط

$$\log E_1 = 11/8 + 1/5(8) = 23/8 \Rightarrow \log E_1 = 23/8$$

$$\Rightarrow 10^{23/8} = E_1$$

$$\log E_2 = 11/8 + 1/5(6) = 20/8 \Rightarrow \log E_2 = 20/8$$

$$\Rightarrow 10^{20/8} = E_2$$

$$\log E_1 E_2 = \log E_1 + \log E_2 = 23/8 + 20/8 = 44/8$$

۵- گزینه «پ»

آسان

$$3 = 48\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} \Rightarrow \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{16} = \frac{t}{25} \Rightarrow 4 = \frac{t}{25} \Rightarrow t = 100$$

۶- گزینه «پ»

متوسط

$$\frac{1}{100} = (1)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}} \Rightarrow 10^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{4}}$$

$$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} 10^{-2} = \frac{t}{4} \Rightarrow 2 \log_2 10 = \frac{t}{4}$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{10}{2}\right) = \frac{t}{4} \Rightarrow \frac{20}{4} = \frac{t}{4} \Rightarrow t = \frac{20}{1} \approx 26/6$$

۷- گزینه «پ»

متوسط

$$2^{100} = A \xrightarrow{\text{از طرفین لگاریتم می گیریم}} \log 2^{100} = \log A$$

$$\Rightarrow 100 \log 2 = \log A \Rightarrow 100(0.301) = 30.1 \Rightarrow 31 \text{ رقمی است.}$$

۸- گزینه «ا»

متوسط

$$\frac{20}{100} A_0 = A_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} \Rightarrow \frac{20}{100} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700}} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} = \frac{t}{5700}$$

$$\Rightarrow \frac{\log 5}{\log 2} = \frac{t}{5700} \Rightarrow \frac{0.69}{0.3} = \frac{t}{5700} \Rightarrow t = 13110$$

۹- گزینه «پ»

متوسط

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0} \Rightarrow 6/8 = \frac{2}{3} [\log E - \log 10^{4/4}]$$

$$\Rightarrow 6/8 = \frac{2}{3} \log E - \frac{2}{3} \times 4/4 \Rightarrow \frac{2}{3}(9/2) = \log E$$

$$\Rightarrow 14/6 = \log_{10} E \Rightarrow E = 10^{14/6}$$

$$\text{پ) } \log_2 \frac{\lambda}{x+1} = \log_2 (x-1) - 1 \Rightarrow \log_2 \frac{x+1}{x-1} = -1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{x^2-1} \Rightarrow x^2-1=16 \Rightarrow x=\pm\sqrt{17} \Rightarrow x=\sqrt{17} \text{ قق}$$

آسان

-۹

$$\log_2 \frac{2x+1}{x-2} = 2 \Rightarrow 2^2 = \frac{2x+1}{x-2} \Rightarrow 4 = \frac{2x+1}{x-2}$$

$$\Rightarrow 4x-8=2x+1 \Rightarrow 2x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{2} \text{ قق}$$

متوسط

-۱۰

$$\log E_1 = 11/8 + 1/5 M$$

$$\log E_2 = 11/8 + 1/5 (M+2)$$

$$\log E_2 = \frac{11/8 + 1/5 M}{\log E_1} + 2$$

$$\log E_2 - \log E_1 = 2$$

$$\log \frac{E_2}{E_1} = 2 \Rightarrow 10^2 = \frac{E_2}{E_1}$$

انرژی آزاد شده ۱۰۰۰ برابر می‌شود.

متوسط

-۱۱

حواستون باشه! ۲۰ دقیقه $\frac{1}{3}$ ساعت است.

$$f(t) = 64(2)^{\frac{t}{10}}$$

$$f(t) = 64(2)^{3t}$$

$$\text{آ) } f(4) = 64(2)^{12} = 2^6 \times 2^{12} = 2^{18}$$

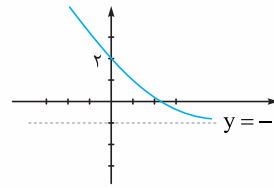
$$\text{ب) } 1024 = 64(2)^{3t} \Rightarrow 2^{10} = 2^6 \times 2^{3t}$$

$$\Rightarrow 3t+6=10 \Rightarrow 3t=4 \Rightarrow t=\frac{4}{3} \text{ ساعت}$$

متوسط

-۵

آ)



$$\text{ب) } f^{-1}(\lambda) = \alpha \Rightarrow (\lambda, \alpha) \in f^{-1} \Rightarrow (\alpha, \lambda) \in f \Rightarrow \lambda = 3^{-\alpha+1} - 1$$

$$\Rightarrow 9 = 3^{-\alpha+1} \Rightarrow 3^2 = 3^{-\alpha+1} \Rightarrow 2 = -\alpha + 1 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

$$\text{پ) } \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x-2} - 1 = 3^{-x+1} - 1 \Rightarrow 3^{3x+2} = 3^{-x+1}$$

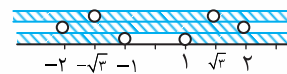
$$\Rightarrow 3x+2 = -x+1 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{1}{4}}$$

دشوار

-۶

$$\log_b a \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases} \text{ می‌دانیم که تابع نمایی دارای دامنه } a > 0 \text{ است.}$$

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x > 1 \text{ یا } x < -1 \\ 4 - x^2 > 0 \Rightarrow 4 > x^2 \Rightarrow -2 < x < 2 \\ 4 - x^2 \neq 1 \Rightarrow 3 \neq x^2 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3} \end{cases}$$



$$\text{مجموعه جواب: } (-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, 2)$$

دشوار

-۷

$$\log(\circ / \vee \Delta)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} [\log \vee \Delta - \log 10 \circ] = \frac{1}{2} [\log (3 \times 5^2) - 2]$$

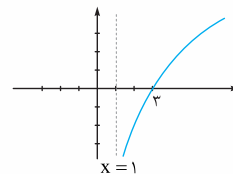
$$= \frac{1}{2} [\log 3 + 2 \log 5 - 2] = \frac{1}{2} [0 / 4771 + 2(1 - 0 / 301) - 2]$$

$$= \frac{1}{2} [0 / 4771 + 2 - 0 / 602 - 2] = \frac{1}{2} [-0 / 1249] = -0 / 62$$

دشوار

-۸

آ)



$$\text{ب) } f^{-1}(3) = \alpha \Rightarrow (3, \alpha) \in f^{-1} \Rightarrow (\alpha, 3) \in f$$

$$\Rightarrow 3 = \log_2 (\alpha - 1) - 1$$

$$\Rightarrow 4 = \log_2 (\alpha - 1) \Rightarrow 2^4 = \alpha - 1 \Rightarrow \boxed{17 = \alpha}$$

متوسط

-۵

$$\bar{A}) \quad 2x - 3 = x + 1 \Rightarrow x = 4$$

$$\text{ب)} \quad \left(\frac{9}{10}\right)^{x^2-3x} = \left(\frac{10}{3}\right)^{-4} \Rightarrow \left(\frac{3}{10}\right)^{2x^2-6x} = \left(\frac{3}{10}\right)^4$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 6x = 4 \Rightarrow 2x^2 - 6x - 4 = 0 \Rightarrow 2(x^2 - 3x - 2) = 0$$

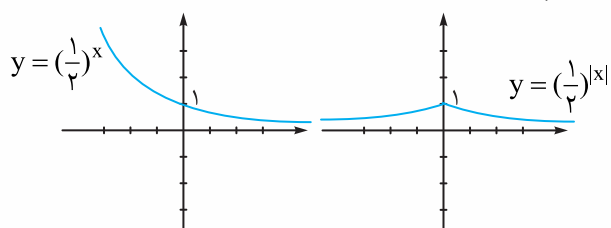
$$\Delta = 9 - 4(-2) \Rightarrow \Delta = 9 + 8 = 17$$

$$\Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$$

متوسط

-۶

ابتدا $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم می‌کنیم سپس $f(|x|)$ به معنای حذف قسمت چپ شکل و قرینه کشیدن قسمت سمت راست شکل است.



آسان

-۷

$$\log_7 9 = \alpha \Rightarrow 7^\alpha = 9$$

$$4^{\alpha+1} = 4^\alpha \times 4 = (7^\alpha)^\alpha \times 4 = (7^\alpha)^2 \times 4 = 9^2 \times 4 = 324 \quad \text{پس:}$$

متوسط

-۸

$$\log_2 \sqrt{3} - \log_5 = \log_2 + \log \sqrt{3} - \log 5$$

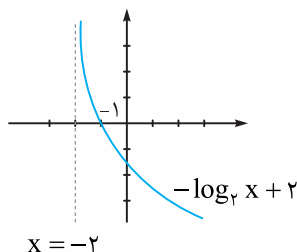
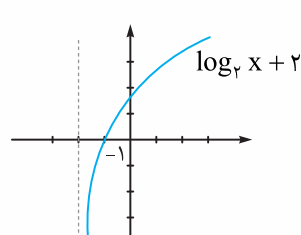
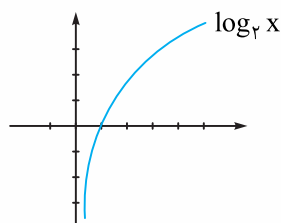
$$= 0/3 + \frac{1}{2} \log 3 - \log 5$$

$$= 0/3 + \frac{1}{2} (0/48) - (1 - 0/3) = 0/3 - 0/24 - 0/7 = -0/64$$

متوسط

-۹

ابتدا $y = \log_2 x$ را رسم می‌کنیم سپس ۲ واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم سپس برای $-f(x)$ نسبت به محور x ها شکل را قرینه می‌کنیم.



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

آسان

-۱

درست (آ) درست

پ (ب) درست

ت (نادرست)

متوسط

-۲

(آ) $\frac{1}{2}$

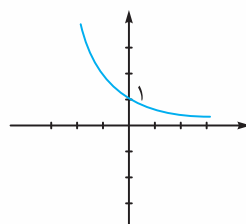
$$\text{ب)} \quad x = -\frac{1}{2} \Leftarrow -2x = 1 \Leftarrow 10 = 10^{-2x}$$

پ) $k \neq 0, a \neq 1, a \neq 0$

متوسط

-۳

آ)



$$\text{ب)} \quad f^{-1}(\sqrt{3}) = \alpha \Rightarrow (\sqrt{3}, \alpha) \in f^{-1} \Rightarrow (\alpha, \sqrt{3}) \in f$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^\alpha$$

$$\Rightarrow 3^{\frac{1}{2}} = 3^{-\alpha} \Rightarrow \frac{1}{2} = -\alpha \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} = \alpha}$$

$$\text{پ)} \quad 3^{2x+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow 3^{2x+1} = 3^{-x} \Rightarrow 2x+1 = -x$$

$$\Rightarrow 3x = -1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-1}{3}}$$

آسان

-۴

$$\bar{A}) \quad g(-1) = 4^{-1} + 2 = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}$$

$$\text{ب)} \quad 66 = 4^x + 2 \Rightarrow 64 = 4^x \Rightarrow 4^2 = 4^x \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

متوسط

۲- گزینه «۱»

ابتدا معادله نمایی را حل می‌کنیم پس:

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}$$

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{-2x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}$$

$$\Rightarrow 3x^2 = -2x + 1 \Rightarrow 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$\frac{1}{3} = x_2 = \frac{-c}{a} \text{ و } x_1 = -1 \text{ پس } a+c=b$$

ریشه ۱- در لگاریتم آرگومان را منفی می‌کند پس قابل قبول نیست در نتیجه با

$$x = \frac{1}{3} \text{ داریم}$$

$$\log_8 4 = \log_3 2^2 = \frac{2}{3}$$

متوسط

۳- گزینه «۲»

مجانِب ریشه آرگومان است پس $U(x) = x+1$ خواهد بود اما با توجه به

شکل که نزولی است و با توجه به مبنای بزرگتر از یک $\log$ متوجه می‌شویم که

شکل نسبت به محور x قرینه شده است پس $-\log_2 x + 1$ در شکل داده

شده است و در نتیجه خواهیم داشت:

$$y = \log_2(x+1)^{-1}$$

دشوار

۴- گزینه «۱»

اگر در هر ۳۰ روز $\frac{1}{10}$ جرم باقی‌مانده را از دست بدهد پس $\frac{9}{10}$ جرم باقی

می‌ماند پس با توجه به فرمول:

$$f(t) = m_0(a)^{\frac{t}{T}} \Rightarrow 8 = 24\left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{t}{30}} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{9}{10}\right)^{\frac{t}{30}}$$

$$\Rightarrow \log_{9/10} \frac{1}{3} = \frac{t}{30} *$$

ابتدا حاصل لگاریتم $\log_{9/10} \frac{1}{3}$ را به دست می‌آوریم:

$$\log_{9/10} \frac{1}{3} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{10}} \frac{9}{3}} = \frac{1}{\log_{\frac{1}{10}} 3^2 - \log_{\frac{1}{10}} 10}$$

$$= \frac{1}{-2 + \frac{100}{48}} \xrightarrow{\text{جایگذاری در } *} 12 = \frac{t}{30} \Rightarrow t = 360$$

متوسط

۱۰-

$$\log_3(x-1)\left(\frac{x}{2}+1\right) = 2$$

$$3^2 = (x-1)\left(\frac{x}{2}+1\right) \Rightarrow 9 = \frac{x^2}{2} + x - \frac{x}{2} - 1$$

$$\xrightarrow{\times 2} 18 = x^2 + 2x - x - 2 \Rightarrow 0 = x^2 + x - 20$$

$$\Rightarrow 0 = (x+5)(x-4)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \downarrow \\ x = -5 \quad \boxed{x = 4} \\ \downarrow \end{array}$$

چون در دامنه صدق نمی‌کند $x = -5$ غرض

آسان

۱۱-

$$\log E = 11/8 + 1/5 M$$

$$\Rightarrow \log E = 11/8 + 1/5 (7/4)$$

$$\Rightarrow \log E = 11/8 + 11/1$$

$$\Rightarrow \log E = 22/9 \Rightarrow E = 10^{22/9}$$



متوسط

۱- گزینه «۴»

نقاط برخورد در هر دو معادله صدق می‌کند پس طول‌های داده شده را در

$$y = x^2 - x \text{ جایگذاری می‌کنیم تا } y \text{ آنها بدست آید پس:}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1 - 1 = 0 \Rightarrow (1, 0) \in f$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2 \Rightarrow (2, 2) \in f$$

$$\begin{array}{l} (1, 0) \in f \Rightarrow 0 = -2 + 2^{-A-B} \Rightarrow 2 = 2^{-A-B} \Rightarrow \begin{cases} -A-B=1 \\ -2A-B=2 \end{cases} \\ (2, 2) \in f \Rightarrow 2 = -2 + 2^{-2A-B} \Rightarrow 2^2 = 2^{-2A-B} \Rightarrow \end{array}$$

با حل دستگاه دو معادله بدست آمده $A = -1$ و $B = 0$ خواهد بود. پس:

$$f(3) = -2 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1(3)} = -2 + 8 = 6$$

آسان

۹- گزینه «پ»

ابتدا ضابطه را ساده کنید:

$$f(x) = 3^2 \log_3 x = 3 \log_3 x^2 = x^2$$

با توجه به دامنه $\log_3 x$ خواهیم داشت $x > 0 \Leftrightarrow$ پس گزینه ۲ پاسخ است.

متوسط

۱۰- گزینه «پ»

از صورت 3^x و از مخرج 2^x را فاکتور می‌گیریم:

$$\frac{3^x(1+3+9+27+81+243)}{2^x(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+1+2+4+8)} = 52 \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x \left(\frac{364}{4}\right) = 52$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{52 \times 4}{364 \times 4} \Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow x = 2$$

متوسط

۱۱- گزینه «ا»

اگر $\log_x y = t$ در نظر بگیریم:

$$t - \frac{2}{t} = 1 \Rightarrow t^2 - 2 = t \Rightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (t-2)(t+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t=2 \Rightarrow \log_x y = 2 \Rightarrow x^2 = y \\ t=-1 \Rightarrow \log_x y = -1 \Rightarrow y = x^{-1} \Rightarrow y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 1 \end{cases}$$

دشوار

۱۲- گزینه «ب»

اگر $5^x = 10$ را لگاریتم‌دار بنویسیم خواهیم داشت:

$$f(x) = \log_5 20 = \log_5 2^2 + \log_5 5$$

همچنین $2^0 = f(x)$ را اگر لگاریتم‌دار بنویسیم:

$$f(x) = 2 + \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = 2 + \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} = 2 + \frac{x}{x-1}$$

$$= 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{2x-1}{x-1}$$

متوسط

۱۳- گزینه «ا»

ابتدا $\log_8 18 = m$ را ساده کنیم:

$$\log_8 18 = \log_{2^3} 2 \times 3^2 = \log_{2^3} 2 + \log_{2^3} 3^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \log_2 3 = m$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \log_2 3 = m - \frac{1}{3} \Rightarrow \log_2 3 = \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}$$

$$\log_4 2^2 \times 3 = \log_4 2^2 + \log_{2^2} 3 = 1 + \frac{1}{2} \log_2 3$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2}m - \frac{1}{2} \right) = 1 + \frac{3}{4}m - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}(m+1)$$

آسان

۵- گزینه «ا»

با استفاده از تغییر مبنا داریم:

$$\frac{\log_4 6}{\log_4 12} = \frac{\log_4 2 + \log_4 3}{\log_4 4 + \log_4 3} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{10}}{1 + \frac{1}{10}} = \frac{13}{18}$$

متوسط

۶- گزینه «پ»

با توجه به تحلیل تابع $f(x)$

$$f(x) = -4 + 2^{ax} \times 2^b$$

مجاانب نمودار -۴، محل برخورد با محور x ها، و محل برخورد با محور y ها.

۲- است پس:

$$x=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow -2=-4+2^b \Rightarrow 2=2^b \Rightarrow \boxed{b=1}$$

$$y=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{3} \Rightarrow 0=-4+2^{-\frac{1}{3}a+1} \Rightarrow 2^2=2^{-\frac{1}{3}a+1}$$

$$\Rightarrow 2=-\frac{1}{3}a+1 \Rightarrow 1=-\frac{1}{3}a \Rightarrow \boxed{a=-3}$$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -4 + 2^{-3\left(-\frac{5}{3}\right)+1} = -4 + 2^6 = -4 + 64 = 60$$

دشوار

۷- گزینه «ب»

$f^{-1}(2)$ به معنای آن است که در تابع $f(x)$ خروجی را ۲ قرار می‌دهیم

پس:

$$2 = \frac{2^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \xrightarrow{2^x=t} 4 = t + \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16 - 4 = 12 \Rightarrow t = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

حواستون باشد که $2 - \sqrt{3}$ حدود $0/3$ هست پس $\log_2 2 - \sqrt{3}$ عددی منفی خواهد بود پس:

$$x = \log_2 2 + \sqrt{3}$$

دشوار

۸- گزینه «ب»

ابتدا تجزیه اعداد $147 = 7 \times 21$ و $1323 = 21^2 \times 3$ را جایگزین می‌کنیم:

$$(\log_{21} 3)^2 + (\log_{21} 7 \times 21)(\log_{21} 21^2 \times 3)$$

$$= (\log_{21} 3)^2 + (\log_{21} 7 + 1)(\log_{21} 3 + 2)$$

$$\xrightarrow{\log_{21} 3 = 1 - \log_{21} 7} (\log_{21} 3)^2 + (1 - \log_{21} 3 + 1)(\log_{21} 3 + 2)$$

$$\xrightarrow{\log_{21} 3 = t} t^2 + (2 - t)(2 + t) = t^2 + 4 - t^2 = 4$$

متوسط

۱۷- گزینه «۴»

در معادله‌های داده شده S و p جدید و S و p قدیمی با یکدیگر برابرند پس:

$$S = \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta = \alpha\beta(\alpha + \beta) = S_{\text{قدیمی}} p_{\text{قدیمی}} = \frac{4}{a} \cdot \frac{8}{a} = \frac{32}{a^2}$$

$$S_{\text{جدید}} = S_{\text{قدیمی}} \Rightarrow \frac{32}{a^2} = \frac{8}{a} \Rightarrow \boxed{a = 4}$$

$$\log \sqrt[3]{4} = \log \frac{1}{2^{\frac{2}{3}}} = 4$$

متوسط

۱۸- گزینه «۱»

ابتدا با استفاده از تغییر مبنا داریم:

$$\frac{\log_n m^2 n}{\log_n mn} = b \Rightarrow \frac{\log_n m^2 + \log_n n}{\log_n m + \log_n n} = \frac{2a+1}{a+1} = \frac{a}{a+1} + \frac{a+1}{a+1}$$

$$= \frac{a}{a+1} + 1$$

این عبارت چون $a > 0$ است؛ عددی بین ۱ تا ۲ به ما می‌دهد پس $1 < b < 2$

در نتیجه برکت عددی $[b] = 1 \Leftarrow 1 < b < 2$

دشوار

۱۹- گزینه «۱»

$$\frac{1}{6}A = A\left(\frac{1}{9}\right)^t \Rightarrow 6 = \left(\frac{9}{1}\right)^t \Rightarrow \log_9 6 = t \log_9 \frac{9}{1}$$

$$\Rightarrow \log_9 2 + \log_9 3 = t(\log_9 9 - \log_9 1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2/4} + \frac{1}{1/4} = t(2\log_9 3 - 3\log_9 2)$$

$$\Rightarrow \frac{5}{12} + \frac{5}{4} = t\left(\frac{10}{9} - \frac{15}{12}\right) \Rightarrow \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = t\left(\frac{2}{9} - \frac{3}{12}\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{19}{3} \text{ دقیقه} = 3\text{ساعت} 80$$

دشوار

۲۰- گزینه «۴»

$$\log 30 = \log 3 \times 2 \times 5 = \log 3 + \log 2 + 1 - \log 2$$

$$= 0/4 + 0/3 + 0/7 = 1/4$$

$$\log 6 = \log 2 \times 3 = \log 2 + \log 3 = 0/3 + 0/4 = 0/7$$

$$\log 5 - \log 6 = 1 - \log 2 - \log 6 = 1 - 0/3 - 0/7 = 0$$

$$\frac{14}{10}x^2 + \frac{14}{10}x = 0 \Rightarrow \frac{14}{10}x(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

اختلاف ریشه‌ها ۱ واحد است.

آسان

۱۴- گزینه «۳»

$$f(0,0) \Rightarrow 0 = a + b\left(\frac{1}{2}\right)^0 \Rightarrow \boxed{0 = a + b}$$

$$f(-1,-1) \Rightarrow -1 = a + 2b \Rightarrow -1 = a + 2b$$

با حل دستگاه $a = 1$ و $b = -1$ است پس:

$$a - b = 1 - (-1) = 2$$

دشوار

۱۵- گزینه «۲»

محل برخورد با محور y ها به معنای $x = 0$ است پس: $g^{-1}(f^{-1}(0)) = \alpha$

$$\text{پس } (0, f^{-1}(0)) \in f^{-1} \Rightarrow (f^{-1}(0), 0) \in f$$

$$\Rightarrow \log_{10}(2x-5) = 0 \Rightarrow 2x-5 = 10^0 \Rightarrow x = 3$$

$$(3,0) \in f \Rightarrow (0,3) \in f^{-1}$$

$$g^{-1}(3) = \alpha \Rightarrow (3,\alpha) \in f^{-1} \Rightarrow (\alpha,3) \in f$$

$$\Rightarrow 3 = \alpha + \sqrt{2\alpha-4} \Rightarrow 3-\alpha = \sqrt{2\alpha-4}$$

$$\frac{2\alpha-4 > 0 \Rightarrow \alpha > 2 \text{ دامنه رادیکال}}{3-\alpha > 0 \Rightarrow 3 > \alpha} \rightarrow 9 + \alpha^2 - 6\alpha = 2\alpha - 4$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - 8\alpha + 13 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = 64 - 4(13) = 12$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{8 \pm \sqrt{12}}{2} \begin{cases} \nearrow 4 + \sqrt{3} \text{ غق} \\ \searrow 4 - \sqrt{3} \text{ قق} \end{cases}$$

متوسط

۱۶- گزینه «۱»

چون نقطه‌ای به طول ۱ محل برخورد دو نمودار است پس در هر دو ضابطه

صدق می‌کند پس:

$$y = -x^2 - 3x + 8 \xrightarrow{x=1} y = -1 - 3 + 8 = +4$$

$$(1,4) \in g \Rightarrow (1,4) \in f$$

$$4 = 2 + 2^{b-a} \Rightarrow 2^1 = 2^{b-a} \Rightarrow \boxed{b-a=1}$$

$$(10,-1) \in f^{-1} \Rightarrow (-1,10) \in f \Rightarrow 10 = 2 + 2^{b+a}$$

$$\Rightarrow 2^3 = 2^{b+a} \Rightarrow \boxed{b+a=3}$$

با حل دستگاه دو جواب خواهیم داشت $a = 1$ و $b = 2$ پس:

$$2b - a = 2(2) - 1 = 3$$

۴- گزینه «۲»

اگر غلظت اولیه را A_0 در نظر بگیریم. غلظت پس از گذشت مدتی به $\frac{1}{3}A_0$ می‌رسد، پس همچنین در هر مرحله غلظت محلول ۹۶٪ غلظت محلول قبلی است پس بعد از n مرحله غلظت محلول برابر $(0.96)^n$ محلول اولیه است پس:

$$\begin{aligned} (0.96)^n A_0 &= \frac{1}{3} A_0 \Rightarrow (0.96)^n = \frac{1}{3} \Rightarrow \log(0.96)^n = \log \frac{1}{3} \\ \Rightarrow n \log 0.96 &= -\log 3 \Rightarrow n = \frac{-\log 3}{\log 0.96 - \log 1.00} \\ \Rightarrow n &= \frac{-\log 3}{-2 + 5 \log 2 - \log 3} = \frac{-0.477}{-2 + 5(0.3) - (0.477)} = 24 \end{aligned}$$

۵- گزینه «۱»

در شکل محل برخورد با محور x و y را داده است پس:

$$\text{محل برخورد با محور } x \Rightarrow y=0 \Rightarrow 0 = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 a + b$$

$$\Rightarrow 3^2 = 3^{-\frac{1}{2}a-b} \Rightarrow \boxed{2 = -\frac{1}{2}a - b}$$

$$\text{محل برخورد با محور } y \Rightarrow x=0 \Rightarrow -6 = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^b \Rightarrow 3^1 = 3^{-b}$$

$$\Rightarrow \boxed{b = -1}$$

$$2 = -\frac{1}{2}a + 1 \Rightarrow a = \frac{-a}{2} \Rightarrow \boxed{a = -2}$$

$$f(2) = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-2(2)-1} = -9 + \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = -9 + 243 = 234$$

۶- گزینه «۲»

با تغییر مبنا شروع می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \log_{18} 8 &= \frac{\log_3 8}{\log_3 18} = \frac{\log_3 2^3}{\log_3 2 + \log_3 9} \\ &= \frac{3 \log_3 2}{\log_3 2 + 2} = \frac{3 \left(\frac{5}{8}\right)}{\frac{5}{8} + 2} = \frac{\frac{15}{8}}{\frac{21}{8}} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7} \end{aligned}$$

۷- گزینه «۳»

$$2 = \frac{3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x}{2} \Rightarrow 2^2 = 3^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x \xrightarrow{2^x=t} 4 = t - \frac{1}{t}$$

$$4t = t^2 - 1 \Rightarrow 0 = t^2 - 4t - 1 \Rightarrow \Delta = 16 - 4(-1) = 20$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

$$3^x = 2 + \sqrt{5} \Rightarrow \log_3 2 + \sqrt{5} = x$$



۱- گزینه «۳»

$$3^{x^2-2} = 3^{4x} \Rightarrow x^2 - 2 = 4x \Rightarrow x^2 - 4x - 2 = 0$$

$$\xrightarrow{\text{تبدیل به مربع کامل}} x^2 - 4x + 4 - 6 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-2) = \sqrt{6}$$

$$\log_6 \sqrt{6} = \frac{1}{2} \log_6 6 = \frac{1}{2}$$

۲- گزینه «۲»

ابتدا سعی در پیدا کردن a و b داریم:

محل برخورد با محور x ها: $y=0$, $x=2$

$$0 = -1 + \log_b 4 + a \Rightarrow \log_b 4 + a = 1 \Rightarrow b = 4 + a$$

مجاذب برابر آرگمان 0 است پس:

$$2x + a = 0 \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} 2\left(\frac{1}{2}\right) + a = 0 \Rightarrow a = -1$$

با این دو اطلاعات $a = -1$ و $b = 3$ پس:

$$y = -1 + \log_3 2x - 1 \xrightarrow{y=1} 1 = -1 + \log_3 2x - 1$$

$$\Rightarrow \log_3 2x - 1 = 2$$

$$\Rightarrow 9 = 2x - 1 \Rightarrow 10 = 2x \Rightarrow x = 5$$

۳- گزینه «۳»

محل برخورد دو تابع $x=1$ و $x=3$ است پس این دو مقدار در هر دو تابع

صدق می‌کنند.

$$\left. \begin{aligned} 3^{Ax+B} &= x^2 \Rightarrow 3^{Ax+B} = 3^2 \Rightarrow Ax+B=2 \\ 3^{Ax+B} &= 1 = 3^0 \Rightarrow A+B=0 \Rightarrow A=-B \end{aligned} \right\} \Rightarrow -2B+B=2$$

$$\Rightarrow -2B=2 \Rightarrow B=-1, A=1$$

$$f(x) = 3^{x-1} \xrightarrow{\text{محل برخورد با محور } y} f(0) = 3^{0-1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

۱۱- گزینه «۳»

$$2^{x+3} = 4^x + 15 \Rightarrow 2^x \times 2^3 = 4^x + 15$$

$$\xrightarrow{2^x=t} 8t = t^2 + 15 \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-5) = 0$$

$$t=3, t=5 \Rightarrow 2^x=3, 2^x=5 \Rightarrow \log_2 3 = x_1, \log_2 5 = x_2$$

$$x_1 + x_2 = \log_2 3 + \log_2 5 = \log_2 15$$

۱۲- گزینه «۱»

$$\frac{1}{\log_c a} + \frac{1}{\log_c b} = 1 \Rightarrow \frac{\log_c b + \log_c a}{\log_c a \cdot \log_c b} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\log_c ab}{\log_c a \cdot \log_c b} = 1 \Rightarrow \log_c ab = \log_c a \cdot \log_c b$$

۱۳- گزینه «۲»

ابتدا سعی می‌کنیم عبارت $a^2 + 9b^2 = 10ab$ را ساده کنیم:

$$a^2 + 6ab + 9b^2 = 10ab + 6ab \Rightarrow (a+3b)^2 = 10ab + 6ab$$

$$\Rightarrow a+3b = \sqrt{10ab+6ab}$$

پس:

$$\frac{a+3b}{4} = \frac{\sqrt{16ab}}{4} = ab$$

پس:

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b$$

۱۴- گزینه «۴»

این سؤال در ۱۴۰۰ سؤالی بود که گزینه‌های اشتباه نوشته شده بود:

$$\log_2 3 < \log_1 \left(\frac{1}{\frac{1}{2} \cdot 12 + \sqrt{[x]} - [x]} \right) - 1 < \log_2 5$$

$$\Rightarrow \log_2 3 + 1 < \log_2 12 + \sqrt{[x]} - [x] < \log_2 5 + 1$$

$$\Rightarrow \log_2 6 < \log_2 \frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{2} \right)^2 < \log_2 10$$

$$\Rightarrow 6 < \frac{49}{4} - \left(\sqrt{[x]} - \frac{1}{2} \right)^2 < 10 \Rightarrow \frac{3}{2} < \sqrt{[x]} - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2 < \sqrt{[x]} < 3 \Rightarrow 4 < [x] < 9 \Rightarrow 5 \leq x < 9$$

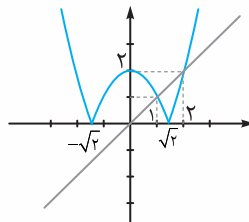
$$\Rightarrow [5, 9)$$

۸- گزینه «۴»

$$\begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ b \neq 1 \end{cases} \Rightarrow y = \log_b a \text{ دامنۀ تابع}$$

$$|x^2 - 2| - x > 0 \Rightarrow |x^2 - 2| > x$$

با رسم هندسی داریم:



توجه کنید محل برخورد دو شکل $x=1$ و $x=2$ است.

که با توجه به رسم نواحی که $|x^2 - 2|$ بالاتر از x است برابر

$$(-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \text{ است.}$$

حواستون باشه!

این سؤال را با رد گزینه نیز می‌توان پاسخ داد.

۹- گزینه «۳»

$$2 \log_a a + \log_a \sqrt{a} = 2 \Rightarrow 2 \log_a a + \frac{1}{2} \log_a a = 2$$

$$\xrightarrow{\log_a a = t} 2t + \frac{1}{2} = 2 \xrightarrow{(\times 2t)} 4t^2 + 1 = 4t$$

$$\Rightarrow 4t^2 - 4t + 1 = 0 \Rightarrow (2t-1)^2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

$$\log_a a = \frac{1}{2} \Rightarrow (a)^{\frac{1}{2}} = a \Rightarrow a = 3$$

۱۰- گزینه «۱»

$$y = 2^{x+|x|} \xrightarrow[\text{جهت منفی } (x+3)]{\text{واحد محور } x \text{ ها در}} y = 2^{x+3+|x+3|}$$

$$\xrightarrow[\text{واحد جهت منفی } y]{\text{محل } y \text{ ها}} y = 2^{x+3+|x+3|} - 2$$

$$\xrightarrow[y=0]{\text{محل برخورد با محور } x \text{ ها}} 2 = 2^{x+3+|x+3|}$$

$$x+3+|x+3|=1 \Rightarrow |x+3|=-x-2$$

$$\xrightarrow[\text{طرفین به توان } 2, -2 > x]{\text{با شرط } -x-2 > 0} x^2 + 6x + 9 = x^2 + 4x + 4$$

$$\Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$$

چون $-\frac{5}{2} < -2$ است پس در شرط صدق می‌کند و قابل قبول است.

۱۵- گزینه «۳»

با توجه به دو اطلاعات داده شده:

$$\log_2 3 = a \Rightarrow 2^a = 3$$

$$\log_8 b = \frac{2+2a}{3} \Rightarrow (2^2)^{\frac{2+2a}{3}} = b \Rightarrow 2^{2+2a} = b \Rightarrow 2^2 \times 2^{2a} = b$$

$$\Rightarrow 4 \times (2^a)^2 = b \Rightarrow 4 \times 3^2 = b \Rightarrow 36 = b$$

$$\log_3 (36) - 8 = \log_{10} 100 = 2$$

۱۶- گزینه «۱»

$$1 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}a+b} \Rightarrow 1 = 2^{\frac{a+b}{3}} \Rightarrow \frac{a}{2} + b = 0 \Rightarrow b = -\frac{a}{2} \Rightarrow a = -2b$$

$$f^{-1}(\lambda) = \delta \Rightarrow (\lambda, \delta) \in f^{-1} \Rightarrow (\delta, \lambda) \in f$$

$$\lambda = \sqrt[3]{\delta a + b} \Rightarrow 2^3 = \sqrt[3]{\delta^{-1} b + b} = 2^9 = 2^{-9b} \Rightarrow 9 = -9b$$

$$\Rightarrow \boxed{-1 = b}, \boxed{a = 2}$$

$$a - b = 2 - (-1) = 3$$

۱۷- گزینه «۲»

۱۲/۵ درصد را از دست بدهد یعنی ۸۷/۵ درصد آن باقی خواهد ماند پس بعد

از n مرحله:

$$\left(\frac{87}{100}\right)^n A_0 = \frac{1}{V} A_0 \Rightarrow \left(\frac{87}{100}\right)^n = \frac{1}{V} \Rightarrow \left(\frac{87}{100}\right)^n = \frac{1}{V}$$

$$n = \log_{\frac{87}{100}} \frac{1}{V} = \log_{\frac{V \times \delta}{10^3}} 2^{-1} = \frac{1}{\log_{V^{-1}} \frac{10^3}{V \times \delta^3}}$$

$$= \frac{1}{\log_{V^{-1}} \frac{1}{V} + \log_{V^{-1}} 2^3} = \frac{1}{1 + (-3) \log_V 2} = \frac{1}{1 + (-3) \frac{\log_3 2}{\log_3 V}}$$

$$= \frac{1}{1 + (-3) \frac{10}{16}} = \frac{1}{1 + (-3) \left(\frac{5}{8}\right)} = \frac{1}{1 - \frac{15}{8}} = \frac{1}{\frac{3}{8}} = \frac{8}{3} = 2 \text{ هفته}$$

که ۸ هفته معادل ۲۸ روز است.

۱۸- گزینه «۲»

$$\log_8 x + 4 \log_x 2 = \frac{1}{3} \log_2 x + \frac{4}{3} \log_x 2$$

رابطه مهم $ax + \frac{b}{x} \geq 2\sqrt{ab}$ را می‌دانیم پس:

$$\frac{1}{3} \log_2 x + \frac{4}{3} \log_x 2 \geq 2 \sqrt{\frac{1}{3} \log_2 x \times \frac{4}{3} \log_x 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \log_2 x + \frac{4}{3} \log_x 2 \geq 2 \left(\frac{2}{3}\right) \xrightarrow{\text{پس}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \log_2 x + \frac{4}{3} \log_x 2}} \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3} \log_2 x + \frac{4}{3} \log_x 2}} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

۱۹- گزینه «۲»

اختلاف ریشه‌ها از رابطه $\sqrt{S^2 - 4p}$ به دست می‌آید پس:

$$S = \frac{-b}{a} = \frac{-\log 9}{\log \frac{\delta}{3}} = \frac{-\log 3^2}{\log \delta - \log 3} = \frac{-2 \log 3}{1 - \log 2 - \log 3} = \frac{-2(0.4)}{1 - 0.3 - 0.4}$$

$$= \frac{-0.8}{0.3} = -\frac{8}{3}$$

$$p = \frac{c}{a} = \frac{-\log 15}{\log \frac{\delta}{3}} = \frac{-(\log 3 + \log 5)}{\log \delta - \log 3} = \frac{-(0.4 + 0.7)}{0.7 - 0.4} = \frac{-1.1}{0.3} = -\frac{11}{3}$$

$$\text{اختلاف ریشه‌ها} = \sqrt{S^2 - 4p} = \sqrt{\frac{64}{9} - 4\left(-\frac{11}{3}\right)} = \sqrt{\frac{64}{9} + \frac{44}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{196}{9}} = \frac{14}{3}$$

۲۰- گزینه «۴»

تابع f مجموع دو تابع نزولی است که به توان فرد رسیده پس تابع f نزولی است پس:

$$(f \circ f)(x) < f(2^{-3x}) \Rightarrow f(f(x)) < f(2^{-3x})$$

$$\Rightarrow f(x) > 2^{-3x} = (2^{-x})^3$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{5/8} x\right)^3 > (2^{-x})^3 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{5/8} x > 2^{-x}$$

$$\Rightarrow \log_{5/8} x > 0 \Rightarrow \log_{5/8} x > \log_{5/8} 1 \Rightarrow x < 1$$

همچنین با توجه به دامنه لگاریتم $x > 0$ پس:

$$x \in (0, 1)$$

