

✍ فصل ششم - بخش ۲ صفحه ۱۸۱ - سؤال ۲۶ - (صورت سوال اصلاح شود).

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

✍ فصل ششم - بخش ۱ - سوال ۴ - گزینه ۳ صحیح است.

✍ فصل ششم - بخش ۲ - سوال ۱۱ - گزینه ۴ صحیح است.

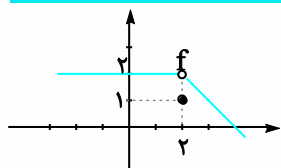
✍ فصل ششم - بخش ۳ - سوال ۲۸ - گزینه ۲ صحیح است.

✍ فصل ششم - آزمون پایان فصل - سوال ۱۵ - گزینه ۲ صحیح است.

✍ فصل ششم - آزمون پلاس - سوال ۱۹ - گزینه ۲ صحیح است.

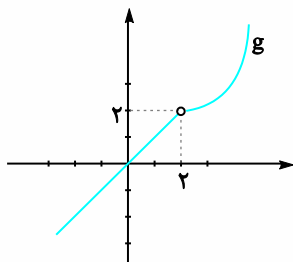
آسان

-۴



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2$$

$$f(2) = 1$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2$$

$$g(2) = \text{وجود ندارد}$$

متوسط

-۵

$$D_f = (-\infty, 3]$$

با توجه به دامنه تابع، تابع f در همسایگی چپ ۳ تعریف شده و در همسایگی راست آن تعریف نشده است پس حد کلی ندارد.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{3-x} = \sqrt{3-3} = 0$$

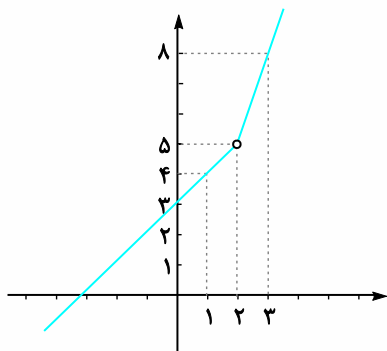
اما حد چپ آن در ۳ برابر ۰ است و بنابراین وجود دارد.

آسان

-۶

(آ) تابع f در $x=2$ تعریف نشده است زیرا هیچ یک از زیربازه‌ها شامل عدد ۲ نمی‌شوند (هیچ کدام مساوی ندارند)
(ب)

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & x > 2 \\ x+3 & x < 2 \end{cases} \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline 3x-1 & 5 & 8 \\ x & 1 & 2 \\ \hline x+3 & 4 & 5 \end{array}$$



همان‌طور که از روی نمودار پیداست، حد تابع f در $x=2$ برابر ۵ است پس

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$



سؤالات تشریحی

پاسخنامه

بخش ۱

آسان

-۱

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$a=2$ در دامنه تابع نیست و f در آن تعریف نشده است اما در اطراف $a=2$ داریم:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$$

x	$1/80$	$1/9$	$1/99$	2	$2/001$	$2/01$	$2/02$
f	$3/81$	$3/9$	$3/99$	$?$	$4/001$	$4/01$	$4/02$

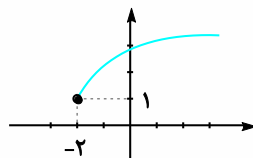
توی جدول مقادیر بزرگ‌تر و کوچک‌تر از ۲ رو نگاه کن! هر چقدر به عدد ۲ نزدیک‌تر میشیم مقدار f به ۴ نزدیک میشه پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$$

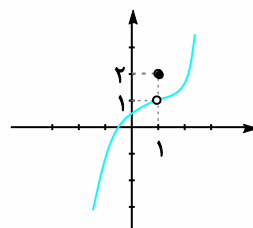
آسان

-۲

(آ)



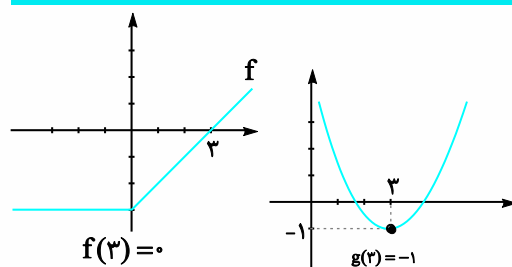
در همسایگی راست عدد ۲- نمودار وجود دارد اما در سمت چپ ۲- نموداری نداریم.
(ب)



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1 \Rightarrow f(1) = 2$$

آسان

-۳



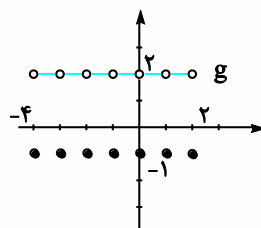
$$f(3) = 0$$

$$g(3) = -1$$

آسان

-۷

۱)



$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} g(x) = 2$$

متوسط

-۸

$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

۱)

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow 1 \geq |x| \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_f = [-1, 1] - \{0\}$$

ب) دامنه f شامل همسایگی محذوف ۰ است.

پ) بله - دامنه این تابع شامل عدد $0/9$ به عنوان یک نقطه درون دامنه است و بنابراین در همسایگی $0/9$ تعریف شده است.

ت) بله تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است زیرا سمت چپ $x=1$ در دامنه وجود دارد اما در همسایگی راست آن تعریف نشده است زیرا دامنه f شامل عددهای بعد از ۱ نمی‌شود.

آسان

-۹

اگر بازه $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی برای ۲ باشد به این معناست که نقطه ۲ یک نقطه درون این بازه است و بنابراین:

$$x-1 < 2 \Rightarrow x < 3$$

$$2x+3 > 2 \Rightarrow 2x > -1 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \quad \cap \quad -\frac{1}{2} < x < 3$$

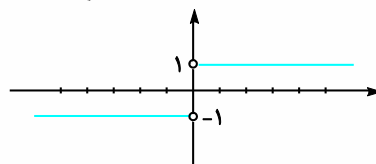
دقت کن که در نوشتن نامعادلات بالا مساوی نداریم زیرا اگر ابتدا یا انتهای بازه برابر ۲ شود دیگر عدد ۲ نقطه درونی نمی‌شود.

دشوار

-۱۰

اول بیا f رو به صورت دوضابطه‌ای بنویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x} & x > 0 \\ \frac{-x}{x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

سوالات تستی

پاسخنامه

بخش ۱

آسان

۱- گزینه «۴»

$$D_f = [-3, 0]$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

همون طوری که از روی نمودار پیداست، تابع در همسایگی چپ ۳- تعریف نشده (نمودار نداریم) و بنابراین حد چپ وجود ندارد و حد تابع نیز وجود ندارد.

آسان

۲- گزینه «۳»

سطر بالای جدول رو ببین! عددها چه از سمت چپ و چه از سمت راست به

عدد ۳ نزدیک میشن پس $a = 3$

حالا به سطر پایین جدول نگاه کن! عددها از هر دو طرف چپ و راست، به عدد

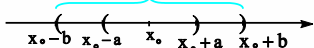
۱ نزدیک میشن پس $L = 1$

$$a + L = 3 + 1 = 4$$

آسان

۳- گزینه «۲»

همسایگی دوم



همسایگی اول

اگر اجتماع دو همسایگی متقارن از یک عدد، یک همسایگی باز همان عدد باشه، همان‌طور که از شکل پیداست، یکی از همسایگی‌ها زیرمجموعه دیگری است و بنابراین اشتراک آنها برابر با یکی از آنهاست.

متوسط

۴- گزینه «۳»

اگر این بازه همسایگی متقارن a هست پس a وسط بازه قرار می‌گیره و چون شروع بازه $(a-1)$ هست پس شعاع همسایگی ۱ واحد هست. در مسأله گفته شعاع b است بنابراین $b = 1$

از طرفی انتهای بازه هم باید به فاصله ۱ واحد بیشتر از a باشد یعنی:

$$b-3 = a+1 \xrightarrow{b=1} -2 = a+1 \Rightarrow a = -3$$

$$2a+b = -6+1 = -5$$

آسان

۵- گزینه «۱»

یک همسایگی باز متقارن به مرکز a و شعاع R به صورت زیر است:

$$|x-a| < R$$

$$\Rightarrow |x - \frac{5}{2}| < 7 \Rightarrow -7 < x - \frac{5}{2} < 7$$

$$\Rightarrow \frac{5}{2} - 7 < x < 7 + \frac{5}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2} < x < \frac{19}{2}$$

$$x = -4, -3, -2, -1, 0, 1, \dots, 9 \quad \text{صحیح}$$

آسان

۹- گزینه «۴»

$$2 \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) - f(2) = 2(1) + 4 - 2 = 4$$

آسان

۱۰- گزینه «۲»

با مقایسه مولفه‌های اول زوج مرتب‌ها می‌بینیم اعداد در اطراف $x=2$ هستند و مولفه‌های دوم به عدد ۱۰ نزدیک می‌شوند پس مقدار f به عدد ۱۰ نزدیک می‌شود به عبارتی

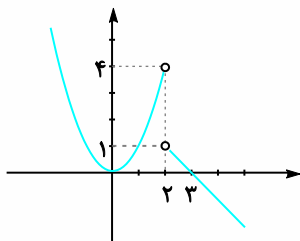
$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 10$$



آسان

-۱

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & x > 2 \xrightarrow{\text{خطی}} \begin{array}{c|cc} x & 2 & 3 \\ \hline -x+3 & 1 & 0 \end{array} \\ x^2 & x < 2 \xrightarrow{\text{سه‌می}} \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 & 2 \\ \hline x^2 & 0 & 1 & 4 \end{array} \end{cases}$$

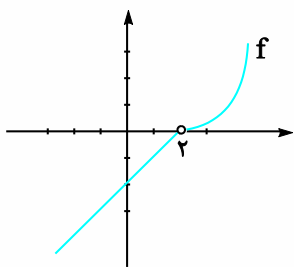


f در $x=2$ دارای حد نیست. $1 \neq 4 \Rightarrow$ حد چپ $= 4$
حد راست $= 1$

متوسط

-۲

آ)



$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$$

دشوار

۶- گزینه «۱»

$$\left| \frac{x-3}{2x-1} \right| > 1 \Rightarrow \frac{x-3}{2x-1} > 1 \Rightarrow \frac{x-3-2x+1}{2x-1} > 0 \Rightarrow \frac{-x-2}{2x-1} > 0$$

$$\Rightarrow -2 < x < \frac{1}{2}$$

یا

$$\frac{x-3}{2x-1} < -1 \Rightarrow \frac{x-3+2x-1}{2x-1} < 0 \Rightarrow \frac{3x-4}{2x-1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$$

با توجه به گزینه‌ها، گزینه ۳ و ۴ غلط هستند زیرا $\frac{1}{2}$ نقطه درون هیچ‌یک از بازه‌ها نیست و $\frac{11}{6}$ خارج از بازه‌هاست.

از بین گزینه‌های ۱ و ۲، گزینه اول درست است زیرا:

$$-\frac{7}{6} < -\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{5}{6}$$

$$-2 < -\frac{3}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow R = \frac{5}{4}$$

و در تست گفته شده بیشترین مقدار ممکن برای شعاع.

متوسط

۷- گزینه «۴»

بیا به فرمول بهت یاد بدم: اگر بازه (h, k) بازه مربوط به یک همسایگی متقارن با مرکز تقارن a و شعاع R باشد آنگاه:

$$a = \frac{h+k}{2}$$

$$R = \frac{k-h}{2}$$

$$\text{مرکز تقارن} = 3 \Rightarrow \frac{3a - 7 + a + 5}{2} = 3$$

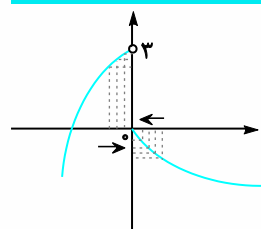
بنابراین داریم:

$$\Rightarrow 4a - 2 = 6 \Rightarrow 4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

$$\Rightarrow \text{بازه} = (-1, 7) - \{3\} \Rightarrow \text{شعاع همسایگی} = R = \frac{7 - (-1)}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

آسان

۸- گزینه «۴»



هرچه از سمت راست به صفر نزدیک می‌شویم مقدار تابع نیز به صفر نزدیک می‌شود پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

هرقدر با مقادیر کمتر از صفر به صفر نزدیک می‌شویم مقدار f به عدد ۳ نزدیک می‌شود پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0 + 3 = 3$$

دشواری

-۴

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \frac{[0^+]}{0^+} = \frac{0}{0} = 0$$

حواست باشد که صفری که در صورت کسر از داخل براکت خارج میشه دقیقاً صفر هست و بهش می‌گیم «صفر مطلق»! اما 0^+ یعنی عددی خیلی نزدیک به صفر و سمت راست اون که بهش می‌گیم صفرِ حدی (0^- هم همینطوره) و می‌دونیم حاصل تقسیم صفر بر هر عددی، مساوی صفر هستش. یه نکته دیگه: برای هر عدد صحیح:

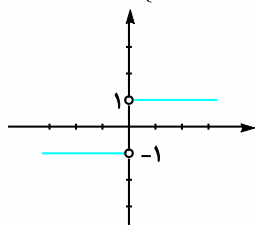
$$[n^+] = n$$

$$[n^-] = n - 1$$

آسان

-۵

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \quad D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

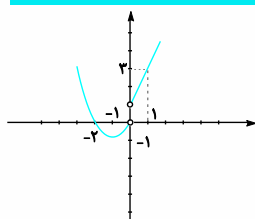
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$$

تابع در $x=0$ حد ندارد. $1 \neq -1 \Rightarrow$

زیرا حد چپ و راست مساوی نیستند.

آسان

-۶



$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x > 0 \Rightarrow \frac{x}{2x-1} \left| \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{array} \right. \\ x^2+2x & x < 0 \Rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2} = -1 \left| \begin{array}{c|c} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{array} \right. \end{cases}$$

f در $x=0$ حد ندارد زیرا حد چپ برابر صفر و حد راست برابر ۱ است و حد چپ و راست برابر نیستند.

متوسط

-۷

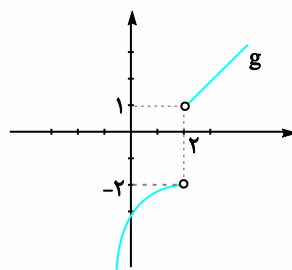
$$f(x) = \sqrt{x^2 - x}$$

$$x^2 - x \geq 0 \Rightarrow x(x-1) \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \cup x \geq 1$$

$$D_f = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$$

تابع تنها به ازای مقادیر بزرگ‌تر و مساوی ۱ تعریف شده و بنابراین حد چپ تابع در $x=1$ وجود ندارد زیرا سمت چپ ۱ تابع تعریف نشده است.

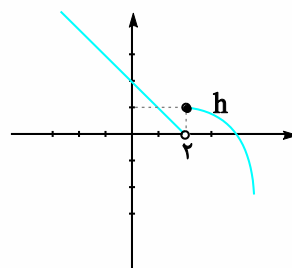
ب)



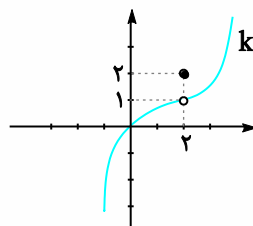
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -2 \quad 1 \neq -2$$

پ)



$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = 1$$

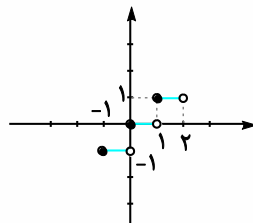


$$\lim_{x \rightarrow 2} k(x) = 1$$

$$f(2) = 2$$

آسان

-۸



$$\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$$

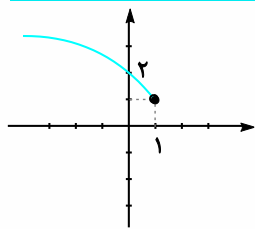
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$$

$0 \neq 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [x] =$ وجود ندارد.

و یادت ب نمونه به طور کلی تابع جزء صحیح در اعداد صحیح دارای حد نیست.

آسان

-۱۲



تابع f در همسایگی راست ۱ تعریف نشده است بنابراین در $x=1$ حد ندارد.

متوسط

-۱۳

وقتی $x \rightarrow 2^+$ یعنی $x > 2$ پس از ضابطه اول برای محاسبه حد راست استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{2x^2 - 4a} = \sqrt{2(2)^2 - 4a} = \sqrt{8 - 4a} \Rightarrow \sqrt{8 - 4a} = 2$$

$$\Rightarrow 8 - 4a = 4 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

f در $x = -2$ دارای حد است پس حد چپ و حد راست در $x = -1$ برابر است:

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow -2^-} (x^2 + bx + 3a) = 4 - 2b + 3a$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x + b) = -2 + b$$

$$\Rightarrow 4 - 2b + 3 = -2 + b$$

$$9 = 3b \Rightarrow b = 3$$

متوسط

-۱۴

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x}{[x] + 1} = \frac{-1}{[(-1)^+] + 1} = \frac{-1}{-1 + 1} = \frac{-1}{0}$$

$$\text{چون } x^2 + x + 2 \geq 0 \Rightarrow D = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$$

وجود ندارد پس این

تابع در ۲ حد ندارد

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2[x]) = 1[1^+] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2[x]) = 1[1^-] = 1(0) = 0$$

$$1 \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} x^2[x] \text{ وجود ندارد}$$

متوسط

-۸

$$f(x) = \frac{x}{[x] - 2}$$

$$[x] - 2 = 0 \Rightarrow [x] = 2 \Rightarrow \underbrace{2 \leq x < 3}_{\text{مقادیر صفر کننده مخرج}}$$

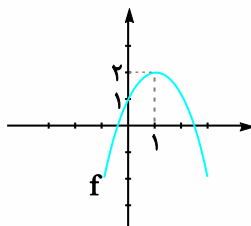
$$D_f = (-\infty, 2) \cup [3, +\infty)$$

تابع در همسایگی راست ۲ تعریف نشده است بنابراین حد راست تابع در $x=2$ وجود ندارد.

دشوار

-۹

$$f(x) = -(x-1)^2 + 2$$



آ) با توجه به شکل، در همسایگی ۱ داریم: $1 < f(x) < 2$ و بنابراین

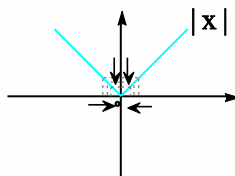
$$[f(x)] = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] = \lim_{x \rightarrow 1} 1 = 1$$

$$\text{ب) } [\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] = [2] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)] \neq [\lim_{x \rightarrow 1} f(x)] \text{ که این هست و ب داریم آ و ب مقایسه آ و ب داریم این هست}$$

متوسط

-۱۰



$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

$$\text{ب) } f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$a > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (x) = a = |a|$$

$$a < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (-x) = -a = |a| \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$$

متوسط

-۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x]) = 1 - [1^-] = 1 - 0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x]) = 1 - [1^+] = 1 - 1 = 0$$

تابع f در $x=1$ دارای حد نیست $1 \neq 0 \Rightarrow$

-۱۵

متوسط

$$\text{آ)} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x-3)[x] = 0 \cdot [3^-] = 0 \cdot (2) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-3)[x] = 0 \cdot [3^+] = 0 \cdot (3) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x-3)[x] = 0$ پس حد وجود دارد

$$\text{ب)} \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3)[x] = 6(2) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (x+3)[x] = 6(3) = 18 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} (x+3)[x] = \text{وجود ندارد}$$

$$\text{پ)} x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq 9 \Rightarrow x \leq -3 \cup x \geq 3$$

با توجه به دامنه، تابع فقط دارای حد راست است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 - 9} = 0$$

و حد کلی در $x = 3$ وجود ندارد.

$$\text{ت)} f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad 9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$$

با توجه به دامنه تابع، این تابع فقط در همسایگی چپ ۳ تعریف شده پس فقط حد چپ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = \sqrt{9 - 9} = 0$$

و حد کلی تابع در $x = 3$ وجود ندارد.

-۱۶

متوسط

چون گفته شده $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ موجود است پس آن را $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = M$ در نظر می‌گیریم

$$\text{آ)} \lim_{x \rightarrow a} c(f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} cM = cM, c(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = cM$$

$$\begin{aligned} \text{ب)} \lim_{x \rightarrow a} f^2(x) &= \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot f(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \\ &= \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow a} (-f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (-1) \times \lim_{x \rightarrow a} f(x) = - \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

-۱۷

آسان

ابتدا باید چک کنیم هر یک از توابع f و g به تنهایی در $x = 2$ دارای چه حدی است.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 5) = -3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (1 - x^2) = 1 - 4 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (4 - x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f + g = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) + \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 + 2 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f - g = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) - \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -3 - 2 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = (-3)(2) = -6$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 2} g(x)} \\ &= \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

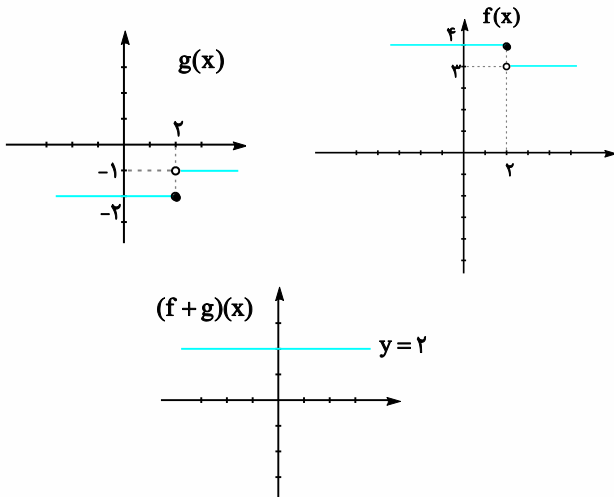
-۱۸

دشوار

$$\text{آ)} (f+g)(x) = \begin{cases} (-1)+3 & x > 2 \\ (-2)+4 & x \leq 2 \end{cases} \Rightarrow (f+g)(x) = \begin{cases} 2 & x > 2 \\ 2 & x \leq 2 \end{cases}$$

$(f+g)(x) = 2$ پس تابع $(f+g)$ ثابت است.

ب)



$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \text{وجود ندارد}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \text{وجود ندارد}$$

چون توابع f و g حد ندارند پس تابع $f+g$ در $x = 2$ حد نخواهد داشت. ت)

-۱۹

آسان

$$\text{۱)} \lim_{x \rightarrow -1} x^4 = 1$$

$$\text{۲)} \lim_{x \rightarrow 10} (\Delta(10)^3 - 6(10) + 1) = 5000 - 60 + 1 = 4941$$

$$\text{۳)} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)^2}{4(8) - 7(2) + 1} = \frac{16}{32 - 14 + 1} = \frac{16}{19}$$

$$\text{۴)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - [x]}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x - 0}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{x}{1 - x} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

-۲۰

آسان

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

چون 2^+ در دامنه $\sqrt{x-2}$ قرار دارد پس اجازه داشتن حد را داریم.

-۲۱

آسان

$$\text{آ)} \lim_{x \rightarrow -\pi} \frac{\pi \cos(-\pi)}{-\pi} = \frac{-\pi}{-\pi} = 1$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

آسان

-۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{9 - 9}{3 - 3} = \frac{0}{0}$$

تو محاسبه حدها اول عدد رو جایگذاری می‌کنیم اگر به حالت صفر صفرم که یک حالت مبهم هست برسیم باید رفع ابهام کنیم. تو این سوال با تجزیه کردن، عامل صفرکننده صورت و مخرج رو از بین می‌بریم و بعد حد رو حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 3+3 = 6$$

آسان

-۲۷

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-2)}{(x-2)(x+2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{2-2}{2+2} = \frac{0}{4} = 0$$

متوسط

-۲۸

$$\text{آ)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{3x^2 + 3x} = \frac{0}{0}$$

$(x+1)$ عامل صفرکننده

یادت باشه که اگر $x \rightarrow a$ ، آن‌گاه عامل صفر کننده $(x-a)$ است و

می‌دونیم در حالت $\frac{0}{0}$ حتماً عامل $(x-a)$ در صورت و مخرج وجود داره.

توی تجزیه ازشون کمک می‌گیریم.

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(2x-1)}{3x(x+1)} = \frac{2(-1)-1}{3(-1)} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2[x] - 8}{x - 2}$$

توی حدهایی که $\frac{0}{0}$ میشن و شامل جزء صحیح هستند اول براکت‌ها رو

جایگذاری کن و بعد تجزیه کن:

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)(x+2)}{x-2} = 2(2+2) = 8$$

آسان

-۲۹

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x).g(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{x+1}{2x^2-x-1} \times \frac{2x+1}{x}$$

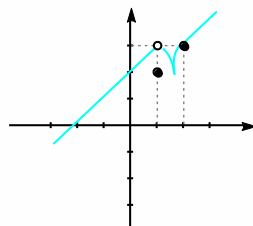
عامل صفر کننده $2x+1$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(2x+1)}{(2x+1)(x-1)(x)} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

آسان

-۳۲

خیر -



آسان

-۳۳

$$\text{آ)} \lim_{x \rightarrow 9} (\sqrt{x} - 9)^3 = -6^3 = -216$$

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow -1} (-6x^3 - 4x^2 + 5) = 6 - 4 + 5 = 7$$

$$\text{پ)} \lim_{x \rightarrow -\frac{5}{3}} \frac{(-\frac{5}{3} + \pi)(-\frac{5}{3} + 5)}{(-\frac{5}{3} + 6)(-\frac{125}{27} + 1)} = 0$$

$$\text{ت)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}^+} \frac{1-x^2}{x^2-4} = \frac{1-2}{2-4} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ث)} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sqrt{4x^2 + 6x} = \sqrt{4(\frac{1}{4}) + 6(\frac{1}{2})} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\text{ج)} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x + \cos x} = \frac{0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\text{چ)} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{|\cos x|}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{-\cos x}{x - \pi} = \frac{0}{-\frac{\pi}{2}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{|\cos x|}{x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{x - \pi} = 0$$

آسان

-۳۴

می‌توان تابع ثابت $g(x) = 12$ را در نظر گرفت

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{12}{x^2 - 1} = \frac{12}{3} = 4$$

می‌توان هر تابعی که با جایگذاری $x = 2$ مضرری از ۱۲ تولید کند به جای

$g(x)$ در نظر گرفت. می‌توان $g(x) = 2x^2 + 4$ را در نظر گرفت و ...

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 1} = \frac{12}{3} = 4$$

آسان

-۳۵

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = L - L = 0$$

$$\text{عکس: } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - L) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} L = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2 + 3x + 2} = \frac{0}{0}$$

عامل صفر کننده $(x+2)$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - x + 1 \quad | \quad x+2 \\ \hline x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\ \hline 2x^2 - x + 9 \\ \hline -2x^2 + 4x - 8 \\ \hline 3x - 1 \\ \hline 3x - 6 \\ \hline 5 \\ \hline 5x + 10 \\ \hline 5x + 10 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 3x + 5)}{(x+2)(x+1)} = \frac{4+6+5}{-2+1} = -15$$

متوسط

۳۳-

$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3$$

حواست باشد که وقتی $x \rightarrow 1^+$ یعنی $x > 1$ و بنابراین $|x-1| = x-1$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2)}{(x-3)} = \frac{4}{-1} = -4$$

متوسط

۳۴-

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2[x] - 16}{x[x] - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2[2^-] - 16}{x[2^-] - 4}$$

$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = 2+4=6$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - |x|}{[x+1] - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x - (-x)}{[1^-] + 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x}{2-x} = 0$$

حواست باشد که وقتی $x \rightarrow 0^-$ آن گاه: $[x+1] = [1^-] = 1$ ، $|x| = -x$

متوسط

۳۵-

$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \frac{1+1+1}{-1} = -3$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + x)}{(x-2)(x+2)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 2x \quad | \quad x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 + 4x - 8 \\ \hline 2x^2 - 6x + 8 \\ \hline -2x^2 + 4x - 8 \\ \hline -2x + 0 \\ \hline -2x + 4 \\ \hline 4 \\ \hline 4x - 8 \\ \hline 4x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

آسان

۳۰-

$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 2+2=4$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x+3)}{x+2} = -2+3=1$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{x-1} = 3$$

متوسط

۳۱-

$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} = 4+4+4=12$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-2}{[x]+1} = \frac{3-2}{[3^+]+1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{[x]} = \frac{2}{[2^+]} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x] - 3}{x} = \frac{[1^+] - 3}{1} = 1-3=-2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x]}{x} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{[x]}{x} = \frac{[2^-]}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{[x]}{x} = \text{وجود ندارد}$$

متوسط

۳۲-

$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2 + 2x - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{(x-2)(x+4)} = \frac{1}{2+4} = \frac{1}{6}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{1+1}{1+1+1} = \frac{2}{3}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

عامل صفر کننده $(x-1)$

اگر در تجزیه، چندجمله‌ای داریم که به راحتی قابل تجزیه نیست، لازمه با

تقسیم بر عامل صفر کننده، عبارت رو تجزیه کنیم:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - x - 1 \quad | \quad x-1 \\ \hline 2x^3 - 2x^2 + 2x - 1 \\ \hline 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline 2x^2 - 2x - 1 \\ \hline -x + 2 \\ \hline -x + 1 \\ \hline -1 \\ \hline -1x + 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$2x^2 - 3x + 1$$

$$-x + 2$$

$$-x + 1$$

$$0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2 + 2x + 1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2+2+1}{1+1} = \frac{5}{2}$$

آسان

-۴۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x^2 + x + 2)}{x-1} = 1 + 1 + 2 = 4$$

$$\frac{x^2 + x - 2}{x^2 + x + 2} \left| \frac{x-1}{x^2 + x + 2} \right.$$

$$\ominus x^2 \oplus x^2$$

$$x^2 + x$$

$$\ominus x^2 \oplus x$$

$$2x - 2$$

$$2x - 2$$

.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} ax - 3 = a - 3 = 4 \Rightarrow a = 7$$

متوسط

-۴۲

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = [2^-] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \left([-x] + \frac{a|x-2|}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} ([-x] + a)$$

$$= -3 + a$$

$$-3 + a = 1 \Rightarrow a = 4$$

به ازای $a = 4$ تابع در $x = 2$ دارای حد است و مقدار این حد برابر ۱ است.

متوسط

-۴۳

برای وجود حد کافی است مقدار حد چپ و مقدار حد راست را با هم مساوی

قرار دهیم:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x^2 - 3x} = a = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-1}{x} = \frac{-a}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} [x] = [3^+] = 3$$

$$\frac{-a}{3} = 3 \Rightarrow a = -9$$

آسان

-۴۴

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x^3 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x+5)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+5}{x(x+1)} = \frac{7}{(1)(2)} = \frac{7}{2}$$

متوسط

-۴۵

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (a[x] + 3[-x]) = a(1) + 3(-2) = a - 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (a[x] + 3[-x]) = a(2) + 3(-3) = 2a - 9$$

$$a - 6 = 2a - 9 \Rightarrow 3 = a$$

متوسط

-۳۶

$$\text{آ)} \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x^2 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{9}}{0} = \infty$$

به عبارتی این حد وجود ندارد.

$$\text{ب)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}{x-1} = 7$$

فعلاً این تجزیه رو یادگیر تا سال بعد:

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1)$$

متوسط

-۳۷

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 4}{2x^2 + 5x + 2} \times \frac{x-3}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)(x-3)}{(x+2)(2x+1)(x^2)} = \frac{(-5)(-3)}{(3)(4)} = \frac{5}{4}$$

دشوار

-۳۸

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 + ax + b} = 2 \Rightarrow \frac{0}{1+a+b} = 2$$

از اونجایی که کسری داریم با صورت صفر که مقدار حد اون کسر برابر ۲ شده،

معنی این هست که حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بوده و بعد از رفع ابهام برابر ۲ شده به

عبارتی $x=1$ ریشه مخرج نیز هست:

$$x^2 + ax + b \xrightarrow{x=1} 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1$$

متوسط

-۳۹

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^{2n} - 9}{x^n - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^n)^2 - 3^2}{x^n - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x^n - 3)(x^n + 3)}{x^n - 3} = 3^n + 3$$

دشوار

-۴۰

از اونجایی که مخرج کسر به ازای جایگذاری $x=1$ صفر شده و مقدار حد برابر عدد

شده یعنی حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بوده پس صورت هم در $x=1$ صفر می‌شود:

$$x^3 + 2x^2 + ax + 2 \xrightarrow{x=1} 1 + 2 + a + 2 = 0 \Rightarrow a = -5$$

حال مقدار حد را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + 3x - 2)}{(x-1)(x+4)} = \frac{1+3-2}{1+4} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x + 2}{x^2 + 3x - 4} \left| \frac{x-1}{x^2 + 3x - 4} \right.$$

$$\ominus x^3 \oplus x^2$$

$$3x^2 - 5x$$

$$\ominus x^3 \oplus 3x$$

$$-2x + 2$$

$$-2x + 2$$

.

-۴۶

دشوار

عامل صفرکننده $(x-2)$ در مخرج کسر وجود دارد اما مقدار حد برابر عدد شده پس حالت مبهم $\frac{0}{0}$ بوده است و عامل صفر کننده در صورت کسر هم وجود دارد.

$$x^2 + ax - 10 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+?)$$

به جای علامت سوال عددی قرار می‌دهیم که ضرب آن در -2 برابر -10 است یعنی $5 = ?$ و داریم:

$$x^2 + ax - 10 = (x-2)(x+5) = x^2 + 3x - 10 \Rightarrow a = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+5)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+5) = 7 \Rightarrow b = 7$$

-۴۷

دشوار

تنها گزاره «پ» صحیح است و در بقیه موارد نمی‌توان نظر قطعی داد مثلاً داریم:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x > 1 \\ -2 & x \leq 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} -2 & x > 1 \\ 2 & x \leq 1 \end{cases}$$

f و g در 1 حد ندارند اما $(f+g)(x) = 0$, $(f \times g)(x) = -4$ که هر دو در $x = 1$ دارای حد هستند.

و یا اگر $f(x) = \begin{cases} 3 & x > 1 \\ -1 & x \leq 1 \end{cases}$, $g(x) = 0$ آن‌گاه $(f \times g)(x) = 0$ در $x = 1$ حد دارد.

-۴۸

دشوار

$$(f-g)(x) = [x] - (x - [x]) = -x + 2[x]$$

این تابع در نقاط $\mathbb{Z}$ حد ندارد مثلاً فرض کن $a \in \mathbb{Z}$ ، اون وقت:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (-x + 2[x]) = -a + 2a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} (-x + 2[x]) = -a + 2(a-1) = a-2$$

و هیچ وقت تساوی $a = a-2$ برقرار نیست بنابراین گزاره‌های آ و ب درست و گزاره پ نادرست است.

-۴۹

دشوار

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2ax^2 - x - 2a}{ax^2 + x(1-a) - 1} = \frac{0}{0}$$

پس عامل $(x-1)$ هم در صورت و هم در مخرج وجود دارد. با دسته‌بندی در صورت و مخرج، آن‌ها را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x^2-1) + 2a(x^2-1)}{ax(x-1) + (x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)(x+2a)}{(x-1)(ax+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x+2a)}{ax+1} = \frac{(2)(2a+1)}{a+1}$$

$$\Rightarrow \frac{4a+2}{a+1} = 1 \Rightarrow 4a+2 = a+1 \Rightarrow 3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

-۵۰

متوسط

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^8 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3)^2 - 1}{(x^4)^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{(x^4-1)(x^4+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)}{(x^2-1)(x^2+1)(x^4+1)}$$

$$= \frac{(3)(2)}{(2)(2)} = \frac{3}{2}$$



۱- گزینه «۴»

متوسط

f در $x = 1$ حد دارد معنیش اینه که حد چپ و حد راست تابع برابر هستند.

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{|x|} + 2m \right) = 2 + 2m$$

$$\Rightarrow 2 + 2m = m - 1 \Rightarrow m = -3$$

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (mx - 1) = m - 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -3x - 1 & x > 1 \\ \frac{2}{|x|} - 6 & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{|x|} - 6 \right) = 2 - 6 = -4$$

۲- گزینه «۱»

متوسط

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x))) = g(5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (3x-1) = 5 \quad (\text{زیرا } g \text{ در } 5 \text{ تعریف نشده است})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)) = g(5)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (2x+1) = 5$$

و در حالت کلی حد $g(f(x))$ در $x = 2$ دارای حد نیست.

۳- گزینه «۲»

متوسط

$$f(x) = \left\lfloor \frac{3x}{4} \right\rfloor$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(4 - 3x^2) = f(\lim_{x \rightarrow 0} (4 - 3x^2)) = f(4) = \left\lfloor \frac{3(4)}{4} \right\rfloor = 6$$

دشوار

۸- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{2[f(x)] + 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) - 1}{2[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)] + 1} = \frac{-1 - 1}{2[(-1)^-] + 1}$$

$$= \frac{-2}{2(-2) + 1} = \frac{-2}{-4 + 1} = \frac{2}{3}$$

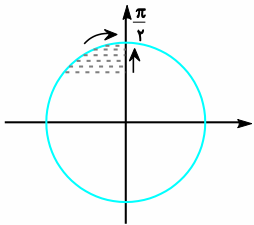
حواست باشه که وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، نمودار به -1 از سمت پائین نزدیک میشه

یعنی $(-1)^-$

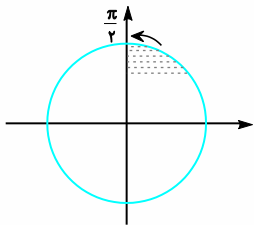
دشوار

۹- گزینه «۱»

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(\sin \frac{\pi x}{2})] = [f(1^-)] = [(-1)^+] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \sin \frac{\pi x}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1^+ \end{cases}$$



$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} [f(\sin \frac{\pi x}{2})] = [f(1^-)] = [(-1)^+] = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin \frac{\pi x}{2} = \sin \frac{\pi}{2} = 1^- \end{cases}$$



متوسط

۱۰- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (f(x-2) + f(2-x)) = f(0^-) + f(0^+) = 2 + 1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (f(x-2) + f(2-x)) = f(0^+) + f(0^-) = 1 + 2 = 3$$

مقدار حد وجود دارد و برابر ۳ است. $3 = 3 \Rightarrow$

دشوار

۱۱- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^-} [4x + 1] = [4(-\frac{1}{4})^- + 1] = [(-1)^- + 1] = [0^-] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{4})^+} [4x + 1] = [4(-\frac{1}{4})^+ + 1] = [(-1)^+ + 1] = [0^+] = 0$$

حد راست یک واحد بیشتر از حد چپ است.

دشوار

۱۲- گزینه «۳»

$$\text{حد چپ} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (f(x^2 - 1) + f(1 - |x|))$$

$$= f(\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1)) + f(\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - |x|)) = f(0^-) + f(0^+)$$

از روی نمودار واضح است که حد تابع f در صفر از چپ و راست به ترتیب ۱ و ۲ است و بنابراین:

$$\text{حد چپ} = 1 + 2 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (f(x^2 - 1) + f(1 - |x|)) = f(0^+) + f(0^-) = 2 + 1 = 3$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0^+ \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - |x|) = 1 - 1^+ = 0^- \end{cases}$$

پس حد کل وجود دارد و برابر ۳ است.

دشوار

۵- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(f(x)) = \lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(f(x)) = f(\lim_{x \rightarrow (-3)^-} f(x)) = f(3)$$

برای یافتن $f(3)$ ، معادله خطی که $f(3)$ روی اون قرار دارد رو پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases} (0, -1) \\ (2, 0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = \frac{0 - (-1)}{2 - 0}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y(3) = \frac{1}{2}(3 - 2) = \frac{1}{2}$$

متوسط

۶- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (f \circ f)(x) + \lim_{x \rightarrow 1^+} (f \circ f)(x) = f(0^-) + f(0^+) = 1 + (-1) = 0$$

آسان

۷- گزینه «۲»

بررسی گزینه ۱: وقتی از راست به (-1) نزدیک میشیم نمودار به سمت بالا یعنی $+\infty$ میره پس حد برابر $+\infty$ است.

بررسی گزینه ۳: از هر دو طرف وقتی به (-3) نزدیک میشیم مقدار y به ۲ نزدیک میشه و مقدار حد برابر ۲ میشه.

بررسی گزینه ۴: وقتی از راست به صفر نزدیک میشیم مقدار تابع به (-2) نزدیک میشه و مقدار حد برابر -2 میشه.

اما در گزینه ۲ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$$

متوسط

۱۷- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - [-x]}{-2|x| + [x]} = \frac{0 - [0^-]}{2(0) + [0^-]} = \frac{0 - (-1)}{0 + (-1)} = \frac{1}{-1} = -1$$

متوسط

۱۸- گزینه «ا»

تابع در $x = 12$ حد دارد پس حد چپ و حد راست آنها برابر است.

$$\text{حد چپ} = a[-\frac{12}{4}] + [\frac{12}{3}] = a[-3^-] + [4^-] = -3a + 3$$

$$\text{حد راست} = a[-\frac{12^+}{4}] + [\frac{12^+}{3}] = a[-3^+] + [4^+] = -4a + 4$$

$$-3a + 3 = -4a + 4 \Rightarrow a = 1$$

آسان

۱۹- گزینه «ب»

$$x = 1 \text{ حد چپ در } a[1^-] + [1^- + 1] = 0 + 1 = 1$$

$$x = 1 \text{ حد راست در } a[1^+] + [1^+ + 1] = a + 2$$

متوسط

۲۰- گزینه «ب»

گزینه ۱ درست است زیرا $\sqrt{x}$ در همسایگی چپ صفر تعریف نشده و حد چپ ندارد.

گزینه ۳ درست است زیرا می‌دانیم $[x] + [-x]$ به ازای $x \notin \mathbb{Z}$ برابر ۱- است و وقتی $x \rightarrow 1^+$ یعنی عدد صحیحی نداریم.

گزینه ۴ درست است زیرا حدهای چپ و راست متفاوت هستند.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{[x] - 2} = \frac{1}{2 - 2} = \frac{1}{0} \quad \text{بررسی گزینه ۲: وجود ندارد}$$

متوسط

۲۱- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [f(2^-)] = \lim_{x \rightarrow 2^+} [1^-] = \lim_{x \rightarrow 2^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [f(f(x))] \neq [\lim_{x \rightarrow 2^+} f(f(x))] \text{ توجه داشته باشید که}$$

متوسط

۲۲- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} ([\frac{-2}{x}] - [-4x^2]) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} ([4^+] - [-4(\frac{1}{4})^+])$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} 4 + 5 = 9$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} ([\frac{-2}{x}] - [-4x^2]) = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} ([4^-] - [-4(\frac{1}{4})^+]) = 3 + 5 = 8$$

دشوار

۱۲- گزینه «ب»

$$f(2x-1) = \frac{3-x}{4-3x}$$

برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$ باید $2x-1=6$ یعنی $x=\frac{7}{2}$

$$\lim_{x \rightarrow 6} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \frac{3-x}{4-3x} = \frac{3-\frac{7}{2}}{4-3(\frac{7}{2})} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{13}{2}} = \frac{1}{13}$$

متوسط

۱۳- گزینه «ا»

می‌دانیم که در محاسبه حد، ما به (-1) نزدیک میشیم اما به خود -1 نمی‌رسیم بنابراین برای محاسبه هر دو حد چپ و راست از ضابطه اول $(x \neq -1)$ استفاده می‌کنیم:

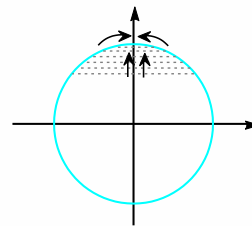
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{-1+1} = \frac{-2}{0} \quad \text{وجود ندارد}$$

متوسط

۱۴- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{10}} [\sin \Delta x] = [\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{10}} \sin \Delta x]$$

$$= [\sin \frac{\Delta \pi}{10}] = [\sin \frac{\pi^+}{10}] = [1^-] = 0$$

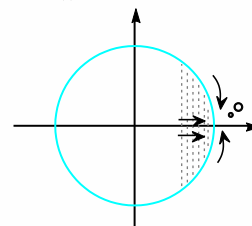


دشوار

۱۵- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} [\frac{-3}{2 \cos x + 1}] = [\frac{-3}{2 \cos(0^-) + 1}]$$

$$= [\frac{-3}{2(1)^- + 1}] = [\frac{-3}{3^-}] = [-(1^+)] = -2$$



دشوار

۱۶- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} ([\frac{3}{x}] + [\frac{-2}{x}]) = [\frac{3}{(-\frac{1}{2})^-}] + [\frac{-2}{(-\frac{1}{2})^-}]$$

$$= [(-6)^+] + [4^-] = -6 + 3 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} ([\frac{3}{x}] + [\frac{-2}{x}]) = [\frac{3}{(-\frac{1}{2})^+}] + [\frac{-2}{(-\frac{1}{2})^+}]$$

$$= [(-6)^-] + [4^+] = -6 + 4 = -2$$

برای محاسبه براکت این جور کسرها عددگذاری و مقایسه کن.

متوسط

۲۹- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x^2 - 4|}{-x^2 - x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|(x-2)(x+2)|}{-(x^2 + x - 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x-2| \cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)} = \frac{4}{3}$$

آسان

۳۰- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x(x-1)}{x^2 - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2 - x^2 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{-(x+1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2}$$

آسان

۳۱- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{6}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x-2} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - x^2 - x}{x^2 - 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{-(x-2)}(x+3)}{\cancel{x}(x-2)} = -\frac{5}{2}$$



آسان

۱-

شرط پیوستگی که باید هر سه برقرار باشند اینهاست:

(۱) f در عدد تعریف شده باشد f در عدد دارای حد باشد

(۳) مقدار حد با مقدار تابع در اون عدد یکی باشد.

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}, D_f = \mathbb{R} - \{3\} \Rightarrow \text{شرط اول رو نداره}$$

پس f در $x = 3$ پیوسته نیست.

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

$$g(3) = 6$$

در g هر سه شرط پیوستگی در $x = 3$ برقرار است پس g در $x = 3$ پیوسته است.

متوسط

۲۳- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{-x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x+1) = 1^+$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [2x] = 2$$

متوسط

۲۴- گزینه «۳»

$$(\lim_{x \rightarrow 2} f(x))(\lim_{x \rightarrow 2} g(x))$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 4) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - 2x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 2$$

در نتیجه حد ضرب آنها نیز موجود و برابر با صفر خواهد بود.

متوسط

۲۵- گزینه «۴»

ابتدا حد توابع f و g را در $x = 1$ بررسی می کنیم

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - [x]) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x^2 - 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (3x^2 - 0) = 3$$

چون تابع f در $x = 1$ حد ندارد پس طبق قضایای حد $\lim_{x \rightarrow 1} (f+g)$ موجود

نیست.

آسان

۲۶- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x+1}{2x^2 - x + 1} \times \frac{2x+1}{x} \right) = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$$

متوسط

۲۷- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{2x^2 + 5x + 2} - \frac{4}{x^2 - 4} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{3}{(x+2)(2x+1)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 6 - 4x - 4}{(x-2)(x+2)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\cancel{-5(x+2)}}{\cancel{-5(x+2)}(x-2)(2x+1)}$$

$$= \frac{-5}{(-4)(-3)} = -\frac{5}{12}$$

متوسط

۲۸- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{x+2}{x^2 - 2x} + \frac{2[x]}{2-x} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2-2[x]x}{x(x-2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2-2x}{x(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{2-x}}{x\cancel{(x-2)}} = -\frac{1}{2}$$

متوسط

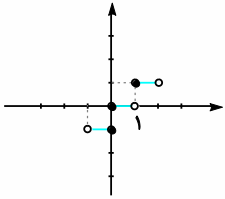
-۷

(آ) تابع جزء صحیح در نقاط صحیح دارای حد نیست و بنابراین ناپیوسته است اما در نقاط غیر صحیح پیوسته است پس f تنها در $x = \frac{1}{2}$ پیوسته است.
(ب) تابع f در همه نقاط صحیح پیوستگی راست دارد پس در $x = 0, x = 2$ پیوستگی راست دارد.
(پ) f در $x = \frac{1}{2}$ پیوستگی کامل دارد اما در هیچکدام از این نقاط دارای تنها پیوستگی چپ نیست.

متوسط

-۸

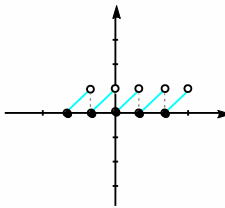
(آ) نادرست - همانطور که از نمودار مشخص هست تابع f در این بازه پیوستگی دارد.
(ب) درست - به نمودار $f(x) = [x]$ توجه کن.
(پ) بازه $(0, 1)$ پیوسته است اما در $[0, 1]$ پیوسته نیست زیرا در ۱ پیوستگی چپ ندارد.



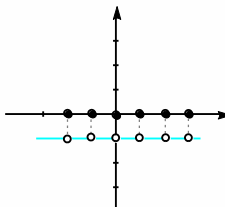
متوسط

-۹

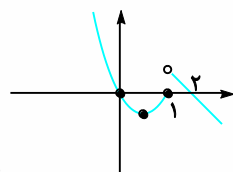
(آ) همانواره پیوسته است.
(ب) در اعداد صحیح ناپیوسته است اما پیوستگی راست دارد.



(پ) در اعداد صحیح ناپیوسته است و پیوستگی یک طرفه ندارد.



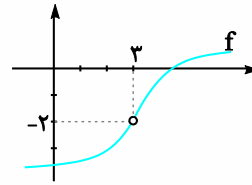
در $x = 1$ ناپیوسته است.



(ت)

آسان

-۱۲



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -2$$

اما

همانطوری که از نمودار مشخص هست این تابع در $x = 3$ ناپیوسته است.

آسان

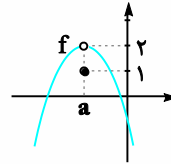
-۱۳

$$a \in D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2$$

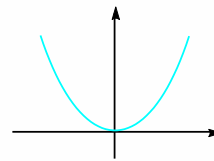
$$f(x) = 1$$

$$1 \neq 2$$



آسان

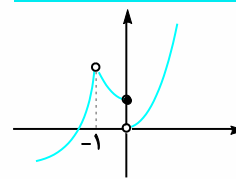
-۱۴



خطها، سهمی‌ها و به طور کلی توابع چندجمله‌ای از انواع توابعی هستند که همواره پیوسته هستند.

آسان

-۱۵



این تابع در $x = 0$ به دلیل عدم وجود حد و در $x = -1$ به دلیل تعریف نشدن در (-1) ناپیوسته است اما در بقیه نقاط محور، تعریف شده است.

آسان

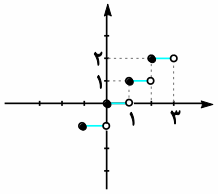
-۱۶

$$1) \circ \in D_f$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^-} (3x^2 + x) = 0$$

آسان

-۱۳



تابع جزء صحیح روی هر پله پیوسته است و چون جزء صحیح اصلی را داریم، طول پله‌ها یک واحد است بنابراین حداکثر مقداری که k می‌تواند بگیرد ۳ است.

متوسط

-۱۴

$$f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$$

$$3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

هر زیر مجموعه‌ای از این دامنه، می‌تواند جواب مسأله باشد برای مثال: $[0, 3]$

متوسط

-۱۵

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 2a) = -2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin \frac{x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 =$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$f(0) = b - 1$$

$$-2a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$b - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

آسان

-۱۶

(آ) یک سهمی در هر عدد حقیقی پیوسته است پس در $x=1$ نیز پیوسته است.

$$b) g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 1 \\ -1 & x < 1 \end{cases} \Rightarrow \text{در } x=1 \text{ ناپیوسته است}$$

$$\text{حد چپ} = -1 + 2 = 1$$

$$پ) f(1) = 2 \Rightarrow \text{در } x=1 \text{ ناپیوسته است}$$

$$\text{حد راست} = 1$$

آسان

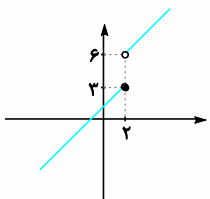
-۱۷

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x+1) = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (3x) = 3(2) = 6$$

$$\text{در } x=2 \text{ پیوسته نیست} \Rightarrow 3 \neq 6$$

به نمودار توجه کنیم:



ناپیوستگی از روی نمودار هم مشهود است.

آسان

-۱۰

برای پیوسته بودن و یافتن مجهول‌ها کافیست سه تا مقدار برابر باشند:

حد چپ، حد راست و مقدار تابع

$$\text{آ) حد چپ} = 2(1) - 1 = 1$$

$$\text{حد راست} = -1 + 2 = 1$$

$$f(1) = a$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$ب) \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+2) = 3$$

$$g(1) = a \Rightarrow a = 3$$

$$پ) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] + a) = [1^+] + a = 1 + a$$

$$1 + a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$ت) \lim_{x \rightarrow 1^-} ([x] - a)[x] = -a(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ([x] - a)[x] = (1 - a)(1) = 1 - a \Rightarrow 1 - a = 0 \Rightarrow a = 1$$

متوسط

-۱۱

$$\text{آ) } \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (2x + 1) = 1$$

پیوسته نیست $\Rightarrow$ حد ندارد $\Rightarrow 0 \neq 1$

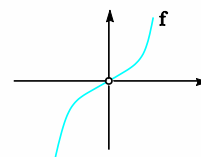
$$ب) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax}{|x|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{ax}{x} = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax}{-x} = -a \end{cases} \Rightarrow a = -a \Rightarrow a = 0$$

$$g(0) = 1 \Rightarrow 0 \neq 1 \Rightarrow \text{پیوسته نیست} \Rightarrow x=0$$

آسان

-۱۲

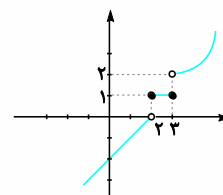
(آ)



$$0 \notin D_f$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

(ب)



پ) $x=2$, $x=-2$ در دامنه تابع نیستند و بنابراین f در این نقاط ناپیوسته است و f در بقیه اعداد حقیقی پیوسته است.

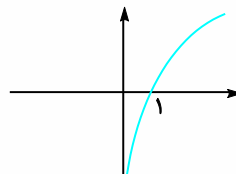
آسان

-۱۸

(آ) درست - چند جمله‌ای‌ها در کل $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

(ب) نادرست - توابع سینوس و کسینوس در کل $\mathbb{R}$ پیوسته هستند.

(پ) درست - از روی نمودار کاملاً واضح است.



(ت) درست

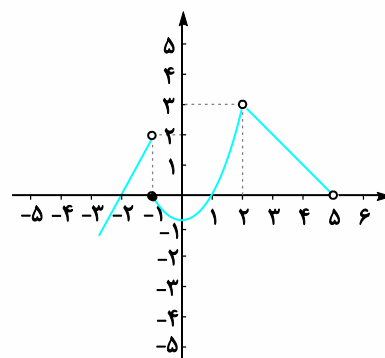
(ث) درست

(ج) درست - شبیه قسمت (پ)، این تابع روی $(0, +\infty)$ پیوسته است پس روی هر زیر بازه آن پیوسته است.

متوسط

-۱۹

(آ)



(ب) $D_f = (-\infty, 5) - \{2\}$

$R_f = (-\infty, 3)$

(پ) پیوسته $\Rightarrow [-1, 1]$

پیوسته $\Rightarrow (2, 5)$

ناپیوسته در $x = -1 \Rightarrow [-2, 0]$

آسان

-۲۰

(آ) نادرست - زیرا در $x = -1$ پیوستگی چپ ندارد.

(ب) درست - زیرا در این بازه کاملاً پیوسته است.

(پ) نادرست - زیرا در ۲ از راست پیوسته نیست. (در ۲ تعریف نشده است)

(ت) نادرست - زیرا تابع در همسایگی راست ۵ تعریف نشده است و حد کلی ندارد.

(ث) درست

(ج) نادرست - f در بازه در این $x = -1$ ناپیوسته است.

آسان

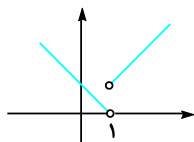
-۲۱

(آ) تابع در $[-1, 1]$ پیوسته است و در $[-1, 2]$ ناپیوسته است.

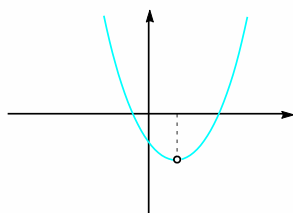
(ب) f در $[2, 4]$ پیوسته و در $[2, 4]$ ناپیوسته است.

آسان

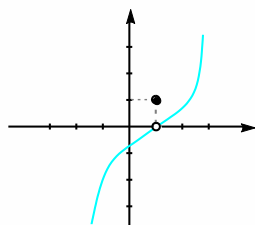
(آ)



(ب)



(پ)



دشواری

-۲۲

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8} - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x+8} - 2)(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+8-8}{x(\sqrt[3]{(x+8)^2} + 2\sqrt[3]{x+8} + 4)} = \frac{1}{\sqrt[3]{8^2} + 2\sqrt[3]{8} + 4} = \frac{1}{12}$$

$$f(0) = a$$

$$\text{مقدار تابع در } (x=0) = \text{مقدار حد} \Rightarrow a = \frac{1}{12}$$

متوسط

-۲۳

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+2} + 2}{\sqrt{x+2} + 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2-4}{(x-2)(\sqrt{x+2} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{\sqrt{x+2} + 2} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+1}{x^3+4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{در } x=2 \text{ پیوسته است.}$$

$$f(2) = \frac{1}{4}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} x[x] = 2[2^-] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} x[x] = 2[2^+] = 4$$

$$f(2) = 2[2] = 4$$

f در $x=2$ پیوستگی کلی ندارد اما پیوستگی راست دارد.

متوسط

-۲۹

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin x}{\sqrt{2 \sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} \sin x}{\sqrt{2} (-\sin x)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (b[-2x] + 3) = b[-2(0^+)] + 3 = -b + 3$$

$$f(0) = a \cos 0 = a$$

$$a = -1$$

$$-b + 3 = -1 \Rightarrow b = 4$$

$$\Rightarrow b - a = 4 + 1 = 5$$

متوسط

-۳۰

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{x-1}{[x^2]}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{[x^2]} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{[0^+]} = \frac{-1}{0} = \infty$$

تابع $\frac{g}{f}$ در $x=0$ دارای حد نیست بنابراین پیوسته نیست.

متوسط

-۲۵

اگر f بخواهد در $x=1$ پیوستگی راست داشته باشد لازم است مقدار تابع یعنی $f(1)$ با حد راست برابر باشد:

$$\text{حد راست} = a[1-1^+] + [1^+] = -a + 1$$

$$f(1) = a[1-1] + [1] = 1$$

$$-a + 1 = 1 \Rightarrow a = 0$$

متوسط

-۲۶

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)} = -2$$

تابع در f در $x=1$ دارای حد نیست و هیچ مقداری وجود ندارد که به جای a قرار دهیم و f پیوسته شود.

متوسط

-۲۷

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}|}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{\sin x} = -\sqrt{2} \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0) = a$$

$$\Rightarrow a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

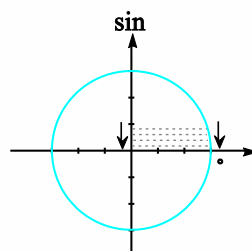
متوسط

-۲۸

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\sin x]}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\sin 0^+]}{x} = \frac{[0^+]}{0^+} = \frac{0}{0} = 0$$

صفر مطلق
↑
0
↓
صفر حدی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$



حد چپ و راست یکی نیست پس f در $x=0$ ناپیوسته است.

متوسط

۱- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (2 \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 1}{x}$$

$$= 1 \times \frac{2 \cos 0 - 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow$$

تابع در $x=0$ دارای حد نیست و بنابراین $x=0$ پیوسته نیست.

متوسط

۲- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{a}{4} \xrightarrow{\times 4a} 4 = 4a - a^2$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \left(1 - \frac{x}{4}\right) = 1 - \frac{a}{4}$$

$$\Rightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Rightarrow (a-2)^2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

سوالات تستی

پاسخنامه

بخش ۳

آسان

۸- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^-} \sin \frac{\pi}{x} = \sin \frac{\pi}{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}^+} (a + \cos^{\frac{2}{3}} \frac{\pi x}{6}) = a + \cos^{\frac{2}{3}} \frac{\pi}{6} = a + \frac{3}{4}$$

$$a + \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

دشوار

۹- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} a \cos \frac{2x}{3} = a \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{a}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{1 + \cos x}}{x - \pi} \times \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{\sqrt{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\sqrt{\sin^2 x}}{(x - \pi) \sqrt{2} \sin^{\frac{1}{2}} \frac{x}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{|\sin x|}{(x - \pi) \times \sqrt{2} |\sin \frac{x}{2}|} = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{-\sin x}{-(x - \pi) \times \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}$$

$$\sin \frac{\pi^+}{2} = 1^-, t = x - \pi \Rightarrow x = t + \pi, \sin \pi^+ = 0^-$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\pi + t)}{t} \times \frac{1}{\sqrt{2}(1)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin t}{t} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{-a}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = \sqrt{2}$$

دشوار

۱۰- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^3 x}{\cos x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}{\cos(\frac{\pi}{2} - t)}$$

$$t = \frac{\pi}{2} - x \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^3 t}{+\sin t} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\sin \Delta x - a) = \sin \frac{\Delta \pi}{2} - a = 1 - a$$

$$1 - a = -3 \Rightarrow a = 4$$

متوسط

۱۱- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x^2 - 2x} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a(1 + \sqrt[3]{1-x})}{x(x-2)(1 - \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{(1-x)^2})}$$

$$= \frac{-a}{2(2)} = \frac{-a}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x - a) = 2 - a$$

$$\frac{-a}{4} = 2 - a \xrightarrow{\times 4} -a = 8 - 4a \Rightarrow \Delta a = 8 \Rightarrow a = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$$

دشوار

۱۲- گزینه «ب»

$$f(x) = \begin{cases} [\frac{\sin x}{x}] \cos^2 x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ a & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin x}{x}] \cos^2 x = [1^-] \times 1 = 0 \Rightarrow a = 0$$

حواست باشد که در اطراف صفر، $\sin x \leq x$ و بنابراین $\frac{\sin x}{x} \leq 1$ و حد آن 1^- می‌شود.

متوسط

۱۳- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax - a + 2) = a - a + 2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-\sqrt{x}} \times \frac{x+\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+\sqrt{x})}{x(x-1)} = \frac{1+\sqrt{1}}{1} = 2$$

$$f(1) = a(1) - a + 2 = 2$$

همانطور که مشخص است هر سه مقدار حد چپ و راست و مقدار تابع بدون این که به مقدار a وابسته باشند برابر هستند و بنابراین تابع به ازای هر مقدار a پیوسته است.

متوسط

۱۴- گزینه «ا»

جداکننده بازه بالا و پایین اعداد صحیح است، پس پیوستگی را در اعداد صحیح بررسی می‌کنیم:

می‌دانیم که به ازای $x \notin \mathbb{Z}$ داریم: $[x] + [-x] = -1$ و داریم:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x \notin \mathbb{Z} \\ a & x \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

برای پیوسته بودن باید $a = -1$.

دشوار

۱۵- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{\sin^2 x} \times \frac{\cos x + \sqrt{\cos x}}{\cos x + \sqrt{\cos x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos x}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos x - 1)}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x \times 2 \sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 x (\cos x + \sqrt{\cos x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} \times \frac{-1}{2}}{\frac{x^2}{4} (1 + \sqrt{1})} = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} = -\frac{1}{4}$$

دشوار

۱۶- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \tan^2 x}{\cot^2 x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x) \sin^2 x}{\cos^2 x \times \cos^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} a \cos^3 x = a \cos^3 \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a$$

$$a = \frac{-4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$$

آسان

۱۷- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{1-x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - \pi t)}{t}$$

$$t = 1 - x \Rightarrow x = 1 - t$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin \pi t}{t} = \pi \Rightarrow a = \pi$$

آسان

۱۸- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2 - \sqrt{3-x}}{(x+1)(2 + \sqrt{3-x})} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} (ax+1) = -a+1$$

$$-a+1 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

آسان

۱۹- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = 1$$

$$\Rightarrow a+2=1 \Rightarrow a=-1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (a+2\sin \frac{\pi}{x}) = a+2$$

آسان

۲۰- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 4) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + 5x - a) = 5$$

به ازای هیچ مقداری پیوسته نیست. $3 \neq 5 \Rightarrow$

آسان

۲۱- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x+1)}{x-1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} (ax - a + 3) = 3$$

بدون توجه به مقدار a به هر حال این تابع پیوسته است. $3 = 3 \Rightarrow$

متوسط

۲۲- گزینه «ب»

توابع براکتی به ازای مقادیری که داخل براکت را به عدد صحیح تبدیل می کنند ناپیوسته هستند مگر اینکه ریشه عبارت پشت براکت باشد!

این تابع در $x = \pm 1$ که داخل براکت صحیح است و ریشه $(x^2 - 1)$ هستند پیوسته است.

متوسط

۲۳- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \frac{0}{0^+} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$f(0) = \frac{[0]}{0} = \text{تعریف نشده}$$

$$0 \notin D_f$$

دشواری

۱۲- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}}}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - x + \sqrt{x+1}}{(x-3)(1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1 - 2x + x^2 - x - 1}{(x-3)(1 - \sqrt{x - \sqrt{x+1}})(1 - x + \sqrt{x+1})}$$

$$= \frac{-1}{8} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 3x}{x-3} = \frac{-1}{8} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x(x-3)}{x-3} = \frac{-3}{8}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (ax - 3a - \frac{3}{8}) = 3a - 3a - \frac{3}{8} = -\frac{3}{8} = f(3)$$

مقدار حد و مقدار تابع وابسته به مقدار a نیست پس به ازای هر مقدار a پیوسته است.

آسان

۱۳- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)[x] = (2-1)[2^-] = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (a + 2\sin \frac{\pi}{x}) = a + 2\sin \frac{\pi}{2} = a + 2$$

$$a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$$

آسان

۱۴- گزینه «ب»

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & -1 < x < 1 \\ ax + b & x \leq -1 \cup x \geq 1 \end{cases}$$

$$-1 \Rightarrow [(-1)^+] = -a + b \Rightarrow b - a = 1$$

$$1 \Rightarrow [1^-] = a + b \Rightarrow a + b = 0$$

$$\begin{cases} b - a = 1 \\ b + a = 0 \end{cases}$$

$$\underline{b + a = 0}$$

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

آسان

۱۵- گزینه «ا»

برای پیوستگی در بازه $[2, 3]$ لازم است در ۲ پیوستگی راست داشته باشد.

$$\text{حد راست} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - [x]}{x^3 - x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{(x-2)(x^2 + 2x + 3)} = \frac{1}{11}$$

$$f(2) = a \Rightarrow a = \frac{1}{11}$$

متوسط

۱۶- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{x-1} \times \frac{\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}}{\sqrt{(1-\sqrt{x})^2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{1-\sqrt{x}}}{-(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})\sqrt{(1-x)^2}}$$

حد وجود ندارد پس پیوستگی ندارد.

دشوار

۲۸- گزینه «۲»

$$f(x) = [x^2]$$

این تابع در نقاطی ناپیوسته است که مقدار داخل براکت به عدد صحیح تبدیل

بشه

$$x = -1 \Rightarrow \text{حد راست} = [((-1)^+)^2] = [1^-] = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{در } x = -1 \text{ ناپیوسته} \\ f(-1) = 1 \end{array} \right\}$$

$$x = 2 \Rightarrow \text{حد چپ} = [(2^-)^2] = [4^-] = 3 \quad \left. \begin{array}{l} \text{در } x = 1 \text{ ناپیوسته} \\ f(2) = 4 \end{array} \right\}$$

$$x = 0 \Rightarrow [(0^\pm)^2] = [0] = 0 \Rightarrow \text{پیوسته}$$

در نقاط $x = \sqrt{2}, \sqrt{3}$ نیز ناپیوسته است. پس در ۴ نقطه ناپیوسته است.

دشوار

۲۹- گزینه «۳»

$$f+g = \begin{cases} -2x - \frac{1}{2} & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{ناپیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f \circ f)(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x)) = f(0^+) = 0 \Rightarrow \text{ناپیوسته}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(f(x)) = f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(f(x)) = g(0^+) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(f(x)) = g(-\frac{1}{2}) = 1 \Rightarrow \text{پیوسته}$$

به همین ترتیب گزینه ۴ نیز نادرست است.

آسان

۳۰- گزینه «۱»

$$k(x) = f+g = \begin{cases} 2x+a+1 & x < 1 \\ \frac{a}{x+1}+1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} k(x) = 3+a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = 1 + \frac{a}{2}$$

$$3+a = 1 + \frac{a}{2} \Rightarrow \frac{a}{2} = -2 \Rightarrow a = -4$$

متوسط

۲۴- گزینه «۱»

$$x = -1 \Rightarrow \text{پیوسته در } -1 \Rightarrow -a+b = (-1)[(-1)^+]]$$

$$\Rightarrow -a+b=1$$

$$x = 1 \Rightarrow \text{پیوسته در } 1 \Rightarrow a+b = 1[1^-] \Rightarrow a+b=0$$

$$\begin{cases} -a+b=1 \\ a+b=0 \end{cases}$$

$$2b=1 \Rightarrow b=\frac{1}{2} \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & |x| \geq 1 \xrightarrow{x=2} y = \frac{-3}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \\ x[x] & |x| < 1 \xrightarrow{x=3} \text{ غرق (در بازه نیست)} \end{cases}$$

متوسط

۲۵- گزینه «۱»

از اونجایی که $f+g, f-g$ هر دو در x پیوسته هستند پس جمع و تفریق

اونها هم پیوسته است:

$$f+g+f-g = 2f \text{ پیوسته}$$

$$\Rightarrow f \text{ پیوسته}$$

$$f+g-(f-g) = f+g-f+g = 2g \text{ پیوسته} \Rightarrow g \text{ پیوسته}$$

بنابراین f و g پیوسته هستند.

متوسط

۲۶- گزینه «۱»

$$f(x) = (-1)^{[x]} \sin \frac{\pi}{2} x, \quad x \in \mathbb{Z}$$

x عدد صحیح است پس $[x] = x$ و داریم:

$$f(x) = (-1)^x \sin \frac{\pi}{2} x$$

$$\text{همواره پیوسته} \Rightarrow x = 2k \Rightarrow f(x) = \underbrace{(-1)^{2k}}_1 \underbrace{\sin \frac{\pi}{2} (2k)}_0 = 0$$

$$\text{ناپیوسته} \Rightarrow x = 2k+1 \Rightarrow f(x) = \underbrace{(-1)^{2k+1}}_{-1} \sin \frac{\pi}{2} (2k+1) = \pm 1$$

متوسط

۲۷- گزینه «۴»

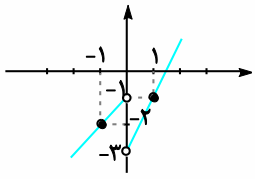
$$f(x) = [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x)-1 & x \in \mathbb{Z} \\ f(x) & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} = \begin{cases} -1 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow g(x) = -1$$

بنابراین تابع g یک تابع ثابت است و روی این بازه نقطه ناپیوستگی ندارد.

متوسط

-۵



$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &\neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)\end{aligned}$$

پس در $x=0$ حد ندارد

متوسط

-۶

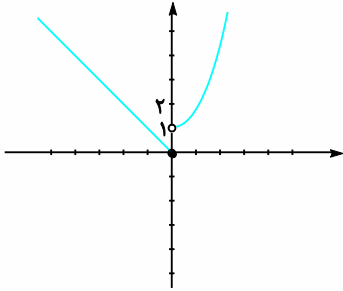
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

چون حد چپ و راست برابر است پس در $x=2$ حد دارد.

متوسط

-۷



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

حد ندارد

متوسط

-۸

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \times \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$$

چون حد چپ و راست برابرند پس در $x=1$ حد دارد.

متوسط

-۹

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} x - b = -3 - b$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^2 + 4}{-x} = \frac{13}{3}$$

چون در $x=-3$ ، حد دارد پس حد چپ و راست برابرند.

$$-3 - b = \frac{13}{3} \Rightarrow -3 - \frac{13}{3} = b \Rightarrow \frac{-22}{3} = b$$



سوالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۱

متوسط

-۱

(آ) نادرست -

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6$$

دارای حد است.

(ب) نادرست - چون حد ندارد

(پ) درست - تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح دارای حد نمی‌باشد و در دیگر

نقاط دارای حد است.

متوسط

-۲

(آ) وجود ندارد چون $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

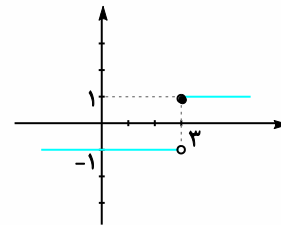
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (4x^2 - 7) = -7 \quad (\text{ب})$$

(پ) در نقطه $x=2$ حد ندارد چون تابع $f(x) = [x]$ در نقاط صحیح دارای

حد نیست.

آسان

-۳

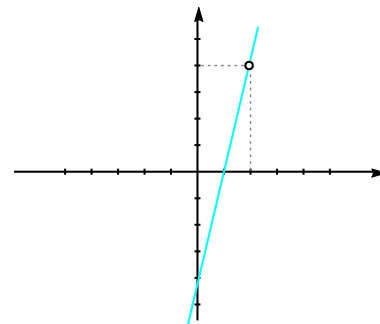


$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 3 \\ -1 & x < 3 \end{cases}$$

متوسط

-۴

$$f(x) = \frac{4x^2 - 12x + 8}{x - 2}$$





سؤالات تشریحی

پاسخنامه

آزمون تشریحی ۲

متوسط

-۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4$$

(آ) درست

(ب) نادرست - با توجه به دامنه f که $\mathbb{R} - \{1\}$ است مقدار تابع در $x=1$ وجود ندارد.

(پ) نادرست - $2 \geq x \Rightarrow D_f: 2-x \geq 0$ پس حد چپ با توجه به دامنه تابع f حد چپ وجود ندارد.

دشوار

-۲

$$k=3 \quad (\text{آ})$$

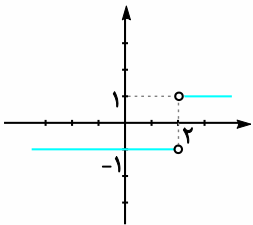
(ب) نیست چون حد چپ و راست برابر نیستند.

(پ) نیستند.

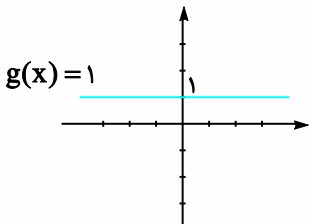
متوسط

-۳

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x > 2 \\ -1 & x < 2 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1 \Rightarrow \text{در } x=2 \text{ حد ندارد}$$



$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$$

متوسط

-۴

$$\text{آ)} \quad \frac{3 \lim_{x \rightarrow 1} f(x)}{\lim_{x \rightarrow 1} g(x) - 2 \lim_{x \rightarrow 1} h(x)} = \frac{3(3)}{-4 - 2(0)} = \frac{9}{-4}$$

$$\text{ب)} \quad [\lim_{x \rightarrow 1} h(x)]^3 = 0^3 = 0$$

دشوار

-۱۰

$$\text{آ)} \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{x^2-9} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{مبهم}} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x+3} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{مبهم}} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+15}-4}{x-1} \times \frac{\sqrt{x+15}+4}{\sqrt{x+15}+4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+15-16}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} = \frac{1}{8}$$

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+15-16}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+15}+4)} = \frac{1}{8}$$

$$\text{پ)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{\frac{3}{5}x^2-2x+1} = \frac{1-1}{\frac{3}{5}-2+1} = \frac{0}{-\frac{2}{5}} = 0$$

دشوار

-۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (2x-a) = 4-a$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a^2 x^2 + 1) = 4a^2 + 1$$

$$f(2) = 4-a$$

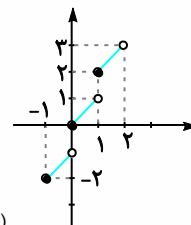
$$\Rightarrow 4-a = 4a^2 + 1 = 4-a$$

شرط پیوستگی

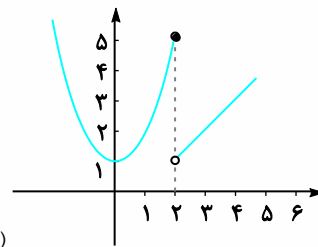
$$\Rightarrow 4a^2 + a - 3 = 0 \Rightarrow (4a-3)(a+1) = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4}, a = -1$$

متوسط

-۱۲



(آ) در نقاط صحیح ناپیوستگی دارد. ($x \in \mathbb{Z}$)



(ب) در $x=2$ ناپیوستگی دارد.

متوسط

-۱۳

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x+1) = 2$$

$$f(1) = 1$$

چون حد تابع با مقدار تابع پس در $x=1$ پیوسته نیست.

دشوار

-۱۰

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{2x^2 + x - 1}{4x^2 - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{(2x-1)(x+1)}{(2x-1)(2x+1)}$$

$$= \frac{2}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}{1 - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 + \sin x = 1 + \sin \frac{\pi}{2} = 1 + 1 = 2$$

متوسط

-۱۱

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] + a = 1 + a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \times \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2}$$

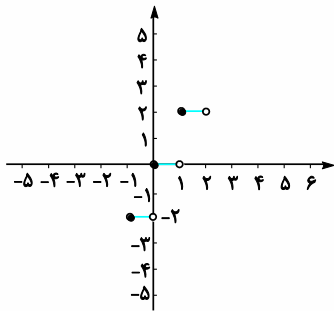
$$f(1) = 1 + a$$

اگر پیوسته باشد $1 + a = \frac{1}{2} = 1 + a$ پس $a = -\frac{1}{2}$.

دشوار

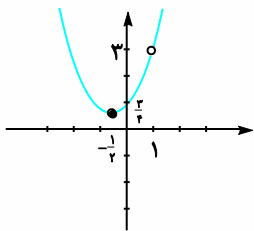
-۱۲

$$f(x) = [x] + [x] = 2[x]$$



در نقاط صحیح ناپیوستگی دارد ($x \in \mathbb{Z}$)

$$g(x) = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)} = x^2 + x + 1, \quad D_g: x \neq 1$$



$$g(x) = x^2 + x + 1$$

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2}$$

$$y_s = -\frac{\Delta}{4a} = \frac{-(1-4)}{4} = \frac{3}{4}$$

متوسط

-۵

(آ) چون دامنه f برابر $\mathbb{R}$ است پس همسایگی (-1) تعریف شده است.

(ب)

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 2) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x - 3) = -5$$

حد چپ و راست برابر نیست پس در $x = -1$ دارای حد نیست.

(پ)

$$f(-1) = x^2 - 2 = (-1)^2 - 2 = -1$$

متوسط

-۶

$$D_f \Rightarrow x^2 - 3x \geq 0 \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 3$$

x	0	3
f	+	+

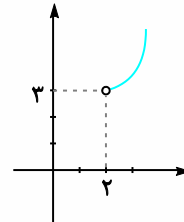
$$D_f: (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$$

با توجه به دامنه f حد چپ در $x = 3$ وجود ندارد پس تابع در $x = 3$ حد

ندارد.

متوسط

-۷



این تابع می‌تواند حد راست داشته باشد.

متوسط

-۸

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{[x] - 3}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2 - 3}{x - 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2x - b) = 4 - b$$

چون دارای حد است پس حد چپ و راست باید برابر باشد پس

$$4 - b = -1 \Rightarrow b = 5$$

آسان

-۹

چون تابع g در $x = a$ حد ندارد پس $f + g$ در $x = a$ دارای حد نخواهد

بود.

آسان

۳- گزینه «۳»

ابتدا شرطهای تابع چندضابطه‌ای را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} x[x] & -1 < x < 1 \\ ax + b & x \geq 1 \text{ یا } x \leq -1 \end{cases}$$

پس در $x = -1, x = 1$ باید پیوسته باشد:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= a + b \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= x(\circ) = \circ \\ f(-1) &= a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow a + b = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= -x = +1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= -a + b \\ f(-1) &= -a + b \end{aligned} \right\} \Rightarrow -a + b = 1$$

با حل دستگاه دومعادله داریم:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

$$2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2}, a = -\frac{1}{2}$$

آسان

۴- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin^2 \pi x}{[x] + \cos \pi x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - \cos^2 \pi x}{1 + \cos \pi x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(1 - \cos \pi x)(1 + \cos \pi x)}{(1 + \cos \pi x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (1 - \cos \pi) = 2$$

متوسط

۵- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)}{2(x - 2)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{2|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x - 2)(x + 2)}{-2(x - 2)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$f(2) = 2$$

تابع پیوستگی راست دارد چون حد راست با مقدار تابع برابر است.

آسان

۶- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = f(-2) \quad \text{تعریف پیوستگی چپ:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\lambda + x^3}{|x + 2|} = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(2 + x)(4 - 2x + x^2)}{-(x + 2)} = \frac{12}{-1} = -12$$

$$f(-2) = a$$

$$a = -12 \quad \text{پس:}$$

متوسط

۱۳-

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1$$

$$f(-1) = -1$$

چون حد راست و حد چپ و مقدار تابع با هم برابرند پس در $x = -1$ پیوسته است.



سوالات تستی

پاسخنامه

آزمون تستی پایانی

متوسط

۱- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x + 2}}{\Delta x^2 - 18x + 16} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 - \sqrt{3x + 2}}{(\Delta x - 8)(x - 2)} \times \frac{4 + 2\sqrt{3x + 2} + \sqrt{(3x + 2)^2}}{4 + 2\sqrt{3x + 2} + \sqrt{(3x + 2)^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lambda - (3x + 2)}{(\Delta x - 8)(x - 2)(12)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\lambda - 3x - 2}{(\Delta x - 8)(x - 2)(12)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{6 - 3x}{(\Delta x - 8)(x - 2)(12)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(2 - x)}{(\Delta x - 8)(x - 2)(12)} = \frac{-3}{(2)(12)} = \frac{-1}{8}$$

روش دیگر حل این سوال استفاده از قاعده هسپیتال است.

متوسط

۲- گزینه «۳»

چون جواب بی‌نهایت شده است حتماً ۲ ریشه مخرج بوده است.

همچنین چون به ازای $x = 2$ صورت کسر منفی می‌شود پس حتماً $x = 2$ ریشه مضاعف مخرج بوده است پس:

$$(x - 2)^2 = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow a = -4, b = 4$$

متوسط

۱۱- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 7\sqrt{x} + 5}{2x - \sqrt{3x+1}} \times \frac{2x + \sqrt{3x+1}}{2x + \sqrt{3x+1}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 1)(2x + \sqrt{3x+1})}{4x^2 - 3x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 1)(2x + \sqrt{3x+1})}{(4x+1)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{(-3)(2+2)}{(5)(2)} = \frac{-12}{10} = \frac{-6}{5} = -1\frac{1}{5}$$

هویتال روش دیگر حل این سوال است.

آسان

۱۲- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{[x] + 3}{x + 2} = \frac{[(-2)^-] + 3}{(-2)^- + 2} = \frac{0}{0} \text{ مطلق} = 0$$

دشوار

۱۳- گزینه «۴»

این سوال در سال ۹۹ بحث‌برانگیز شد. ابتدا بدانیم که $x \in [-2, 2]$ و در این بازه نقاط صحیح نقاط ناپیوستگی $[x]$ را تشکیل می‌دهند اما با توجه به $\sin \pi x$ که در آن ضرب شده است و $\sin \pi x$ همان صفر هستند پس برکت در نقاط صحیح صفر می‌شود و در نتیجه پیوسته است. اما در کتاب درسی نقاط ابتدا و انتهای بازه را به دلیل آنکه پیوستگی راست و پیوستگی چپ دارند نقاط ناپیوستگی بیان می‌کند پس باید گزینه ۲ جواب مسئله باشد اما سازمان سنجش سال ۹۹ جواب را گزینه ۴ اعلام کرد و سروه بازه را پیوسته در نظر گرفت.

دشوار

۱۴- گزینه «۱»

ابتدا بازه‌های شرط را ساده کنید:

$$-1 < x - 1 < 1 \Rightarrow 0 < x < 2$$

$$\Rightarrow x - 1 \geq 1 \text{ یا } x - 1 \leq -1 \Rightarrow x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0$$

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)[x] & ; 0 < x < 2 \\ x^2 + ax + b & ; x \geq 2 \text{ یا } x \leq 0 \end{cases}$$

چون تابع روی $\mathbb{R}$ پیوسته است پس باید در $x=2$, $x=0$ نیز پیوسته باشد پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + ax + b) = 4 + 2a + b$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1)(1) = 1$$

$$f(2) = 4 + 2a + b$$

$$\Rightarrow 2a + b + 4 = 1 \Rightarrow 2a + b = -3 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 + 0 + b = b \\ f(0) = 0 + 0 + b \end{cases}$$

متوسط

۷- گزینه «۳»

$$f(x) = \frac{f-g+f+g}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f-g}{2} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f+g}{2} \\ = \frac{5}{2} + \frac{0}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f-g}{2} + \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f+g}{2} \\ = \frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \end{cases}$$

آسان

۸- گزینه «۳»

در $x=2$ باید پیوسته باشد:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x-6}{x-\sqrt{x+2}} \times \frac{x+\sqrt{x+2}}{x+\sqrt{x+2}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(x+\sqrt{x+2})}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x-2)(4)}{(x-2)(x+1)} = \frac{12}{3} = 4$$

از هویتال برای رفع ابهام هم می‌توانستیم استفاده کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} ax - 1 = 2a - 1$$

$$f(2) = 2a - 1$$

$$2a - 1 = 4$$

شرط پیوستگی

$$2a = 5 \Rightarrow a = 2\frac{1}{2}$$

متوسط

۹- گزینه «۳»

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x^2 + 10x + 16}{12 + 6\sqrt{x}} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \xrightarrow{\text{رفع ابهام}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(x+8)}{6(2+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow -8} \frac{(x+2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}{6(2+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{(-6)(12)}{6} = -12$$

هویتال روش دیگر حل این سوال است.

آسان

۱۰- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{(2\sin x + 1)(\sin x - 1)}{1 - \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{(2\sin x + 1)(\sin x - 1)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^{\pm}} \frac{-(2\sin x + 1)}{1 + \sin x} = \frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = a = -1\frac{1}{2}$$

متوسط

۱۹- گزینه «۴»

ابتدا تکلیف قدرمطلق و براهتها را مشخص می‌کنیم:

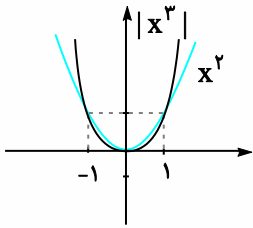
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(x+1)+(-1)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x+1-1}{x} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x} = 1$$

دشوار

۲۰- گزینه «۳»

ابتدا $|x^3| = x^3$ را ساده‌تر می‌کنیم

$$x^3 |x| = x^3 \Rightarrow x^3 |x| - x^3 = 0 \Rightarrow x^3 (|x| - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

همچنین با توجه به نکته رسم $|x^3|$ و رسم x^3 داریم:

$$f(x) = \begin{cases} |x| + [-x] & x \in (-1, 1) - \{0\} \\ 1 + \cos \pi x & x = 0, 1, -1 \\ [x^3] - [x] & ; x < -1 \text{ یا } x > 1 \end{cases}$$

ضابطه سوم در تمام x های منفی و همچنین تمام x هایی که در آن x^3 صحیح و x غیر صحیح است، ناپیوسته است. پس این تابع در بی شمار نقطه ناپیوسته است.

دشوار

۱۵- گزینه «۲»

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[\frac{-2}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \left[\frac{-2}{(\frac{1}{4})^-} \right] = [-8^+] = -9$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \left[\frac{3}{x^2} \right] = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^+} \left[\frac{3}{(\frac{1}{4})^-} \right] = [12^+] = 12$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^+} \frac{16x+9}{24x+12} = \frac{1}{(-12)^+ + 12} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

دشوار

۱۶- گزینه «۱»

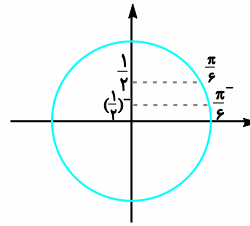
$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x-5+[3 \times (4)^-]}{16x-[-2 \times 4^-]} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x-5+[12^-]}{16x-[-(-8)^+]}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}^-} \frac{10x-5+11}{16x-(-8)} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^-} \frac{10x+6}{16x+8} = \frac{-5+6}{(-8)^- + 8} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

متوسط

۱۷- گزینه «۱»

از روی دایره مثلثاتی داریم:



پس:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{6})^-} \left[2 \sin \frac{\pi}{6} - 1 \right] = \left[2 \left(\frac{1}{2} \right)^- - 1 \right] = [0/8] - 1 = -1$$

دشوار

۱۸- گزینه «۳»

$$f \text{ معادله سهمی: } y = a(x-x_s)^2 + y_s \Rightarrow 0 = a(0-2)^2 + 1$$

$$0 = 4a + 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$$

$$f(x) = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1$$

$$g \text{ معادله خط: } \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ و نقطه } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x-2)^2 + 1 + -\frac{1}{4}x + 1}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + x - 1 + 1 - \frac{1}{4}x + 1}{4-x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1}{4-x} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-\frac{1}{4}(x+1)(x-4)}{4-x} = +\frac{1}{4}(x+1) = \frac{5}{4}$$

۳- گزینه «۴»

با کمی دقت متوجه می‌شویم که $x=1$ ریشه صورت است پس حتماً ریشه
مخرج نیز بوده است.

$$a+b=0 \Rightarrow a=-b$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt{x}}-b}{-bx+b} \times \frac{b\sqrt{2-\sqrt{x}}+b}{b\sqrt{2-\sqrt{x}}+b} = \frac{b^2(2-\sqrt{x})-b^2}{(-bx+b)(2b)}$$

$$\frac{b^2[(2-\sqrt{x}-1)]}{(-b)(x-1)(2b)} = \frac{(b^2)((1-\sqrt{x}))}{(-2b^2)(x-1)} = \frac{b^2(1-\sqrt{x})}{(-2b^2)(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}^2+\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{-b^2}{(-2b^2)(2)} = \frac{-b^2}{-4b^2} = \frac{1}{4}$$

از قاعده هوییتال این سوال راحت‌تر رفع ابهام می‌شود.

۴- گزینه «۴»

نظر شخصی بنده این است که با توجه به زمان محدود کنکور چنین سوالاتی را
رد کنید!

$$n \text{ فرد} \Rightarrow [n^+] = n \text{ و } [n^-] = n-1, [-n^+] = -n, [-n^-] = -n-1$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n^+} |[-x]-x| &= |(-n-1)-n| = 2n+1 \\ \lim_{x \rightarrow n^-} k-x+[x] &= k-n+n-1 = k-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2n+1 = k-1$$

$$\Rightarrow k = 2n+2$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n^+} |[-x]-x| &= |(n-1)+n| = 2n-1 \\ \lim_{x \rightarrow n^-} k-x+[x] &= k+n+(-n-1) = k-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2n-1 = k-1$$

$$\Rightarrow k = 2n$$

پس در n فرد نمی‌تواند پیوسته باشد.

$$n \text{ زوج} \Rightarrow [n^+] = n, [n^-] = n-1$$

$$[-n^+] = -n \text{ فرد}, [-n^-] = -n-1 \text{ زوج}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n^-} |[-x]-x| &= |-n-n| = 2n \\ \lim_{x \rightarrow n^+} k-x+[x] &= k-n+n = k \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = 2n$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow n^+} k-x+[x] &= k+n-n = k \\ \lim_{x \rightarrow n^-} |[-x]-x| &= |n-1+n| = 2n-1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow k = 2n-1$$

سوالات تستی

پاسخنامه

آزمون پلاس

۱- گزینه «۱»

چون در پیوستگی حد چپ و راست باید برابر باشند پس باید a ریشه مضاعف
زیر رادیکال و همچنین a باید ریشه مخرج کسر باشد.

$$\Delta=0 \Rightarrow (m-1)^2 - 4(3)(m-4) = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 - 12m + 48 = 0$$

$$\Rightarrow m^2 - 14m + 49 = 0 \Rightarrow (m-7)^2 = 0 \Rightarrow m = 7$$

$$a \text{ ریشه مخرج} \Rightarrow a^3 + a^2 = 0 \Rightarrow a^2(a+1) = 0 \Rightarrow a = 0, a = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} \frac{\sqrt{3x^2+6x+3}}{|x^2+1|} = \lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} \frac{\sqrt{3}\sqrt{x^2+2x+1}}{|x^2+1|}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^\pm} \frac{\sqrt{3}|\cancel{x+1}|}{|\cancel{x+1}||x^2-x+1|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(-1) = \frac{2 \sin b}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow b = \frac{\pi}{3}$$

۲- گزینه «۱»

a باید ریشه مضاعف زیر رادیکال باشد پس $\Delta=0$ است

$$\Delta=0 \Rightarrow (m+3)^2 - 4(3m) = 0 \Rightarrow m^2 + 6m + 9 - 12m = 0 \Rightarrow$$

$$m^2 - 6m + 9 = 0 \Rightarrow (m-3)^2 = 0 \Rightarrow m = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{\sqrt{6x^2+6x+\frac{3}{2}}}{2x^2+a^2}$$

همچنین حتماً a ریشه مخرج نیز بوده است پس:

$$2a^3 + a^2 = 0 \Rightarrow a^2(2a+1) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} \frac{\sqrt{6x^2+6x+\frac{3}{2}}}{|2x^2+\frac{1}{4}|} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^\pm} \frac{\sqrt{6}\sqrt{x^2+x+\frac{1}{4}}}{2|x^2+\frac{1}{4}|}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^\pm} \frac{\sqrt{6}|x+\frac{1}{2}|}{2|x+\frac{1}{4}|x^2-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}|} = \lim_{x \rightarrow (-\frac{1}{2})^\pm} \frac{\sqrt{6}}{2|\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}|}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{2 \tan b}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \sqrt{2} \tan b = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \tan b = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$$



۷- گزینه «۱»

با توجه به بازه $[1, 5]$ حتماً تابع در $x=1$ پیوستگی راست دارد پس:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x^2 + x - 2|}{a(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|(x-1)(x+2)|}{a(1-x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(x+2)}{a(1-x)} = \frac{3}{-a}$$

$$f(1) = \tan \frac{3\pi}{4} = -1$$

$$\text{در نتیجه: } a = 3 \leftarrow \frac{3}{-a} = -1$$

همچنین این تابع در $x=5$ پیوستگی چپ دارد پس

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{|(x-1)(x+2)|}{a(1-x)} = \frac{28}{-12} = \frac{7}{-3}$$

$$f(5) = b(5 - [-5]) = b(10) = 10b \Rightarrow 10b = \frac{-7}{3} \Rightarrow b = -\frac{7}{30}$$

$$\text{در نتیجه } ab = 3 \times -\frac{7}{30} = -\frac{7}{10}$$

۸- گزینه «۱»

تابع f در $x=1$ ناپیوسته است چون مقدار تابع در $x=1$ وجود ندارد پس

$x=1$ ریشه صورت کسر هم بوده است که ابهام اتفاق افتاده است در نتیجه:

$$x=1 \Rightarrow 1+a+b=0 \Rightarrow a+b=-1$$

همچنین چون سوال گفته $x=1$ ریشه $5-a+b=0$ است در نتیجه

$$5-a+b=0$$

از حل دستگاه دومعادله خواهیم داشت $a=2, b=-3$ پس

$$\left[\frac{-3-4}{3} \right] = \left[-\frac{7}{3} \right] = [-2/..] = -3$$

۹- گزینه «۴»

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} a[x] + b[-x] = 5 \Rightarrow 2a - 3b = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x-2|}{x-2} + b = -1 + b = 3 \Rightarrow b = 4 \xrightarrow{\text{جایگذاری}} 2a - 12 = 5$$

$$2a = 17 \Rightarrow a = \frac{17}{2}$$

۵- گزینه «۲»

مشابه حل این سوال را در تست ۴ نوشته‌ایم. حل دیگری از این تیپ سوال را

بررسی کنیم می‌توان سوال را برای $n=2, n=1$ بررسی کنیم یعنی پیوستگی

در ± 1 و پیوستگی در ± 2 بررسی می‌کنیم.

$$x=1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1-1+k = k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x - [-x]| = 2$$

به ازای $k=2$ مقادیر فرد قابل قبول‌اند.

$$x=-1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = k$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} |x - [x]| = 2$$

$$x=2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 5, \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1+k, f(2) = 2 - (-2) = 4$$

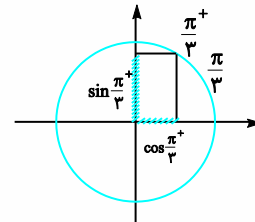
به ازای هیچ مقدار زوج پیوستگی نداریم.

۶- گزینه «۴»

اگر جواب کسری ∞ شود به آن معناست که مخرج صفر حدی بوده است

پس $\frac{\pi}{3}$ ریشه مخرج است.

$$a \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}a - \frac{\sqrt{3}}{3} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}a = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$



همچنین عبارت مخرج $\sqrt{3} \cos x - \sin x$ در $\frac{\pi}{3}$ با توجه به دایره مثلثاتی

صفر کم‌تر ایجاد می‌کند در نتیجه

$$\sqrt{3} \cos x - \sin x < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}^+} \frac{\sqrt{3}x + b}{0^-} = -\infty$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + b}{0^-} = -\infty$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\pi + b > 0 \Rightarrow b > \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \cong -1/8 \Rightarrow b > -1/8$$

پس کم‌ترین مقدار مخرج آن (-1) است.

۱۳- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} x - [x] + a \sin \frac{\pi[x]}{2} = 3 - 3 + a \sin \frac{3\pi}{2} = -a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} x - [x] + a \sin \frac{\pi[x]}{2} = 3 - 2 + a \sin \pi = 1$$

$$f(3) = 3 - 3 + a \sin \frac{3\pi}{2} = -a$$

$$a = -1$$

۱۴- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} a \log_r(x+1) = 2a$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} ax + r^{x-3} = 3a + r^0 = 3a + 1$$

$$f(3) = a$$

$$3a + 1 = 2a$$

بنا به تعریف پیوستگی

$$a = -1$$

$$f(2) = -1 \times 2 + 2^{2-3} = -2 + 2^{-1} = -2 + \frac{1}{2} = -1 \frac{1}{2}$$

۱۵- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \rightarrow \text{رفع ابهام} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{(x^6-1)(x^6+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)(x^3+1)}{(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^6+1)} = \frac{(3)(2)}{(2)(2)(2)} = \frac{3}{4}$$

۱۶- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \left[\frac{2}{2 \cos x + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \left[\frac{2}{2(-1^-) + 3} \right] = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{2}{2 \cos x + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \left[\frac{2}{2(-1^+) + 3} \right] = 2$$

۱۷- گزینه «ا»

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a}{x(x-1)} + \frac{2}{x(x+2)} = b \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax + 2a + 2x - 2}{x(x-1)(x+2)} = b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a+2)(x+2a-2)}{x(x-1)(x+2)} = b$$

چون $x=0$ ریشه مخرج است حتماً ریشه صورت نیز بوده است پس:

$$2a - 2 = 0 \Rightarrow a = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x(x-1)(x+2)} = \frac{3}{(-1)(2)} = -\frac{3}{2} = b$$

$$a + b = 1 + \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

۱۰- گزینه «ب»

$$\frac{1+2a-1-2a}{a+1-a-1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم} \rightarrow \text{صورت و مخرج بر } (x-1) \text{ بخش پذیر است.}$$

$$\frac{x^2 + 2ax^2 - x - 2a}{x^2 + (2a+1)x + 2a}$$

$$\frac{-x^2 + x^2}{(2a+1)x^2 - x - 2a}$$

$$\frac{-(2a+1)x^2 + (2a+1)x}{2ax - 2a}$$

$$\frac{-2ax + 2a}{-2ax + 2a}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\frac{ax^2 + x(1-a) - 1}{ax + 1}$$

$$\frac{-ax^2 + ax}{x - 1}$$

$$\frac{-x + 1}{-x + 1}$$

$$\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + (2a+1)x + 2a)}{(x-1)(ax+1)} = \frac{1+2a+1+2a}{a+1} = \frac{4a+2}{a+1} = 1$$

$$4a + 2 = a + 1$$

$$3a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

۱۱- گزینه «ب»

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{a-2}{4+2} = \frac{a-2}{6}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{a-1}{4+1} = \frac{a-1}{5}$$

$$f(2) = \frac{a-2}{6}$$

$$\frac{a-2}{6} = \frac{a-1}{5} \text{ به دلیل پیوستگی}$$

$$5a - 10 = 6a - 6 \Rightarrow -a = -4 \Rightarrow a = 4$$

۱۲- گزینه «ب»

$x = -1$ ریشه صورت است پس:

$$\sqrt{-a+b} + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{-a+b} = -1 \Rightarrow -a+b = 1$$

با استفاده از رفع ابهام داریم:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{ax+b}+x}{\sqrt{-x}-x^2} \times \frac{\sqrt{ax+b}-x}{\sqrt{ax+b}-x} \times \frac{\sqrt{-x}+x^2}{\sqrt{-x}+x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(ax+b-x^2)(2)}{((-x)-x^2)(2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2+ax+b}{-x-x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(-x+1+a)}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2+a}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow a=2, b=3$$

$$a-2b = 2-6 = -4$$

۱۸- گزینه «۱»

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} (4x + a^3)[3x] = (-8 + a^3)(-6) = 48 - 6a^3$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} (4x + a^3)[3x] = (-8 + a^3)(-6) = 48 - 6a^3$$

$$f(-2) = (-8 + a^3)(-6) = 48 - 6a^3$$

بنا به شرط پیوستگی:

$$48 - 6a^3 = 48 - 6a^3 \Rightarrow a^3 = 8 \Rightarrow a = 2$$

۱۹- گزینه «۲»

$$f(3) = 6 \Rightarrow 2a - b = 6$$

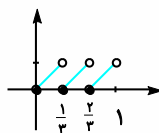
$$\lim_{x \rightarrow 3^\pm} f(x) = 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{a(x-3)(x+2)}{(3-x)} = -a(5) = 5 \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow 2(-1) - b = 6 \Rightarrow b = -8$$

پس:

۲۰- گزینه «۲»

با نمودار $3x - [3x]$ آشنا هستیم



پس نقاط ناپیوستگی آن در $\frac{1}{3}$ و $\frac{2}{3}$ است

همچنین نقاط سروته بازه را کتاب درسی نقاط ناپیوستگی در نظر می گیرد پس

به گفته کتاب در ۴ نقطه پیوستگی دارد.