

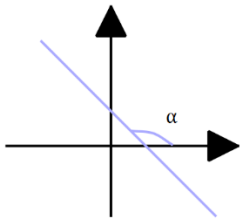
شیب خط

$y = ax + b \leftarrow$ شیب خط ضریب $a(x)$ می باشد

$ax + by = c$ یا $ax + by + c = 0 \leftarrow$ شیب خط $-\frac{a}{b}$ می باشد.

در صورتی که دو نقطه از یک خط را داشته باشیم: $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، شیب خط $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ می باشد.

تائزانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور طول ها می سازد، شیب خط است. $m = \tan \alpha$



معادله خط

۱. داشتن شیب و یک نقطه: $A(x_0, y_0) \leftarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

۲. داشتن دو نقطه: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \leftarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

تذکر: می توان معادله خط را $y = ax + b$ فرض کرد و نقاط را داخل آن جایگذاری کرد.

مثال ۱: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 4)$ و $B(2, -1)$ کدام است؟

$$y = x + 3(1)$$

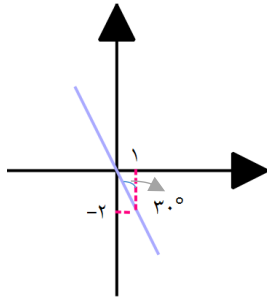
$$y = 5x - 1(2)$$

$$y = -5x + 9(3)$$

$$y = 9x - 5(4)$$

تذکر: در معادله خط برای بدست آوردن عرض از مبدأ $x = 0$ و طول از مبدأ $y = 0$ را در معادله قرار می دهیم.

مثال ۲: عرض از مبدأ خط مقابل را بدست آورید.



مثال ۳: خط گذرنده از دو نقطه $(1, 3)$ و $(2, 7)$ محور طول ها را در کدام نقطه قطع می کند؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

تذکر: سه نقطه A ، B و C وقتی روی یک خط راست هستند که شیب AB و AC و BC باهم مساوی شود که چک کردن دوتا از اینها کافی است.

مثال ۴: آیا $A(1, 2)$ و $B(2, -3)$ و $C(0, 4)$ روی یک خط راست هستند؟

شیب خطوط موازی و عمود بر هم

- دو خط موازی شیب های برابر دارند. $m = m'$
- حاصلضرب شیب های دو خط عمود بر هم برابر -1 است یعنی $mm' = -1$ (شیب های آنها عکس و قرینه اند).

تذکر: اگر $m \neq m'$ باشد، دو خط متقاطع خواهند بود.

تذکر: اگر خطوط افقی و عمودی باشند، داریم:

$$y = \beta \rightarrow \begin{cases} \text{خطوط موازی با آن نیز افقی. } y = y. \\ \text{خطوط عمود بر آن عمودی. } x = x. \end{cases} \quad x = \alpha \rightarrow \begin{cases} \text{هر خط عمود بر آن (افقی). } y = y. \\ \text{هر خط عمود بر آن (عمودی). } x = x. \end{cases}$$

مثال ۵: وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$\Delta: x + 2y = 0 \quad T: y = 2x - 3 \quad L: 2x - y = 1$$

مثال ۶: از نقطه $(1, 4)$ خطی موازی $3y - 2x = 1$ و خطی عمود بر $2y + x = 1$ رسم می کنیم. عرض از مبدأ دو خط جدید اختلافشان چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{10}{3} \quad (4) \quad \frac{16}{3}$$

مثال ۷: معادله خطی بنویسید که از نقاط $A(1, 2)$ و $B(1, 5)$ بگذرد؟

مثال ۸: معادله خطی بنویسید که از نقاط $A(2, 4)$ و $B(3, 4)$ بگذرد؟

مثال ۹: به ازای چه مقداری از a ، خط $5 = (a + 1)y - (a - 3)x$ موازی با خط $y = -x$ است؟

$$(1) \quad -2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad 2$$

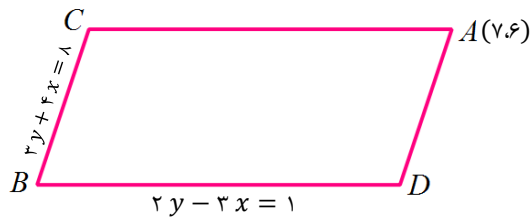
مثال ۱۰: به ازای کدام مقدار b خطی که از نقطه $A(-2, 3)$ و مبدأ مختصات می گذرد با خط $y = \frac{2}{b}x + 2$ موازی است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad -2$$

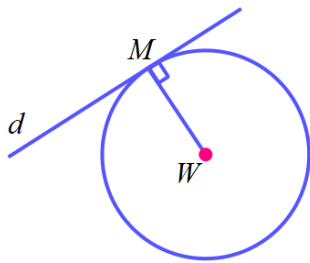
مثال ۱۱: در یک مستطیل $A(0, 2)$ و $B(2, -4)$ دو رأس مجاور هستند. اگر $C(3, 3)$ رأس سوم آن باشد، آنگاه خط گذرنده از ضلع CD محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad -3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad -4$$

مثال ۱۲: در متوازی الاضلاع مقابل عرض نقطه C کدام است؟



مثال ۱۳: خط به معادله $x + y = 4$ بر دایره ای به مرکز $W(1, -2)$ در نقطه M مماس است. مختصات نقطه M را بیابید.



مثال ۱۴: به ازای چه مقداری از m دو خط $y - (2m + 1)x = 1$ و $(m + 1)y - x = 2$ برهم عمودند؟

(۴) $\frac{3}{2}$

(۳) $-\frac{2}{3}$

(۲) $\frac{2}{3}$

(۱) $-\frac{2}{2}$

مثال ۱۵: اگر $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟

(۱) $y = -x - 3$

(۲) $y = -x + 1$

(۳) $y = -2x$

(۴) $y = x + 3$

مثال ۱۶: نقاط $A(۲,۵)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۰,۲)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{۲}, \frac{۲}{۳})$ (۲) $(\frac{1}{۲}, \frac{۵}{۳})$ (۳) $(-\frac{1}{۲}, \frac{۵}{۳})$ (۴) $(-\frac{1}{۲}, \frac{۷}{۳})$

مثال ۱۷: $A(-۱,۴)$ و $B(۳,۱)$ و $C(x,y)$ و $D(-۱-x, y+۳)$ رئوس یک مستطیل اند. رأس های C و D مجاور هستند. محیط مستطیل کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

فاصله دو نقطه (طول پاره خط AB)

① اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه باشند، $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ و فاصله هر نقطه مانند $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ از مبدأ مختصات:

② مختصات $M(x_M, y_M)$ وسط پاره خط AB برابر است با: $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$

مثال ۱۸: اگر $A(۸, -۴)$ و $B(۲, ۴)$ باشند، طول پاره خط AB و مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را پیدا کنید.

مثال ۱۹: نقاط $A(K, ۴)$ و $B(۲, K+۱)$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار K نقطه وسط پاره خط AB روی خط $۱ = y - ۲x$ قرار دارد؟

مثال ۲۰: اگر $A(-۱, ۰)$ و $B(۳, ۴)$ و $C(۲, ۵)$ سه رأس مثلث باشند، طول میانه CM کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{۱۰}$ (۳) $\sqrt{۱۱}$ (۴) $\sqrt{۱۲}$

مثال ۲۱: نشان دهید مثلث با رأس های $A(۱, ۲)$ و $B(۲, ۵)$ و $C(۴, ۱)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

رابطه بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع ABCD :



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

مثال ۲۲: رئوس متوازی الاضلاع BCAD ، $A(10, 4)$ و $B(-6, -2)$ و $C(0, 2)$ است. مختصات رأس D را پیدا کنید.

مثال ۲۳: دو نقطه $A(1, -2)$ و $B(-3, 0)$ دو سر قطر مربع هستند. محیط مربع کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) ۱۰ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{160}$

مثال ۲۴: نقاط $A(-2, 5)$ و $B(0, 1)$ دو سر قطری از دایره هستند. مساحت دایره کدام است؟

- (۱) $2/5 \pi$ (۲) 5π (۳) 10π (۴) $7/5 \pi$

مثال ۲۵: نقطه $A(7, 6)$ یکی از رئوس متوازی الاضلاع مقابل است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات

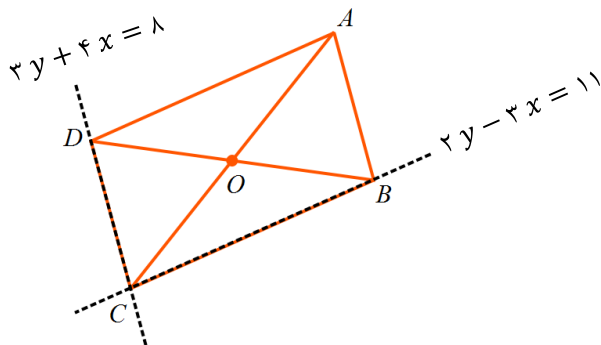
$$3y - 2x = 11 \text{ و } 3y + 4x = 8 \text{ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟}$$

- (۱) (۱، ۵)

- (۲) (۳، ۴)

- (۳) (۳، ۵)

- (۴) (۴، ۳)



مثال ۲۶: دو انتهای یکی از قطر های دایره ای نقاط $A(0,0)$ و $B(4,2)$ هستند. کدام یک از نقاط زیر روی دایره قرار دارد؟

- (۱) $(3,3)$ (۲) $(7,4)$ (۳) $(-1,2)$ (۴) $(-3,-3)$

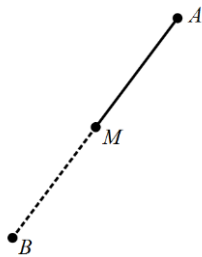
مثال ۲۷: نقطه A در ربع سوم روی خط $y = 3x$ قرار دارد. اگر فاصله مبدأ مختصات از نقطه A برابر $\sqrt{10}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) -۸ (۴) ۸

مثال ۲۸: دو نقطه روی نیم ساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه $A(1,2)$ به فاصله ۲ هستند. مجموع طول های این نقاط کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

قرینه يك نقطه نسبت به نقطه یا خط



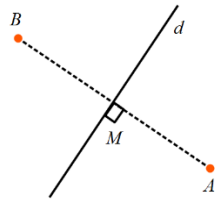
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 2x_M = x_A + x_B \rightarrow \boxed{x_B = 2x_M - x_A}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow 2y_M = y_A + y_B \rightarrow \boxed{y_B = 2y_M - y_A}$$

مثال ۲۹: قرینه نقطه $A(5,1)$ را نسبت به نقطه $M(3,2)$ بدست آورید.

مثال ۳۰: اگر نقطه $A(3,4)$ قرینه نقطه $B(0,0)$ نسبت به نقطه M باشد، فاصله نقاط A و B را بدست آورید.

قرینه نقطه A نسبت به خط d



با ذکر یک مثال توضیح می دهیم.

قرینه نقطه $A(2,0)$ را نسبت به خط $y = x$ می خواهیم پیدا کنیم.

خط AB بر خط d عمود است چون شیب خط $y = x$ یک می باشد. پس $m_{AB} = -1$

$$\text{معادله خط } AB: y - 0 = -1(x - 2) \rightarrow y = -x + 2$$

خطوط d و AB را در یک دستگاه قرار می دهیم تا محل برخورد دو خط (M) بدست آید.

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases} \rightarrow M(1,1)$$

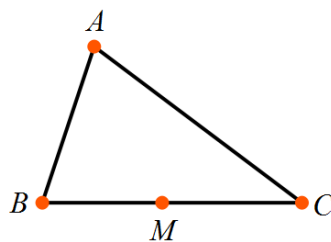
با استفاده از فرمول مختصات وسط پاره خط مختصات نقطه B (قرینه A) را می یابیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 1 = \frac{2 + x_B}{2} \rightarrow x_B = 0$$

$$y_M = \dots$$

مثال ۳۱: اگر نقطه $A(3,2)$ را نسبت به نقطه $B(2\alpha - 1, 8)$ قرینه کنیم به نقطه $C(5, \beta + 1)$ می رسمیم. مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

نکته: معادله خط عمود منصف



① مختصات M وسط ضلع BC را پیدا می کنیم.

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ و } y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

② شیب BC را پیدا کن، سپس عکس و قرینه کن.

③ با داشتن نقطه M و شیب معادله عمود منصف وارد بر BC را بنویس:

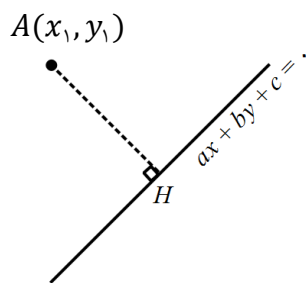
$$y - y_M = \frac{-1}{m_{BC}}(x - x_M)$$

مثال ۳۲: اگر $A(-1,2)$ و $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ باشند، معادله عمود منصف وارد بر ضلع BC را بدست آورید.

مثال ۳۳: اگر $A(2,1)$ و $B(5,3)$ دو سر قطر مربع ACBD باشند، عرض از مبدأ خط عبوری از قطر CD کدام است؟

- (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{29}{4}$ (۴) ۵

فاصله نقطه از خط



فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۳۴: فاصله نقطه $A(-1, 2)$ از خط $y = x - 3$ چند است؟

مثال ۳۵: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $2x + y = k$ برابر با $2\sqrt{5}$ است. مقادیر ممکن برای k را بدست آورید.

مثال ۳۶: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $y = 7x - 1$ چند برابر فاصله مبدأ از خط $5x - 5y = 3$ است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

مثال ۳۷: فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط $x = 5$ چند برابر فاصله اش از خط $y = 0$ است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

مثال ۳۸: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر یکی از رئوس این مربع $A(3, 0)$ باشد، مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

مثال ۳۹: نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

مثال ۴۰: قطر مربعی منطبق بر نیمساز ناحیه اول و سوم است. نقطه $A(2, -4)$ یکی از رئوس آن است. مساحت مربع چند است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۳۶

مثال ۴۱: دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ است و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) $7/2$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

مثال ۴۲: دو نقطه بر روی خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟

- (۱) $-15, 9$ (۲) $-15, 11$ (۳) $-11, 15$ (۴) $-9, 11$

تذکر: اگر دایره ای بر خط $ax + by + c = 0$ مماس باشد، فاصله مرکز دایره از آن خط برابر شعاع می باشد.

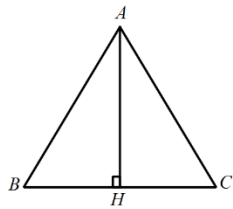
مثال ۴۳: اگر دایره ای به مرکز $O(1, 2)$ بر خط به معادله $3x + 4y + 1 = 0$ مماس باشد، شعاع دایره را بدست آورید.

مثال ۴۴: خط $4x - 3y = 0$ بر دایره ای به مرکز $(3, -1)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید.
(خرداد ۱۴۰۳)

نکته: ارتفاع در مثلث

① نوشتن معادله خط BC

② فرمول فاصله نقطه از خط برای محاسبه فاصله A از ضلع BC که همان ارتفاع است.



$$\text{ارتفاع } AH = \frac{|ax_A + by_A + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۴۵: اگر $A(0, 5)$ و $B(2, 1)$ و $C(-2, -1)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را بدست آورید.

تذکر: برای نوشتن معادله ارتفاع (AH) در مثلث ABC ابتدا شیب خط BC را بدست بیار و سپس آن را قرینه و معکوس کن. از معادله خط $y - y_A = m_{AH}(x - x_A)$ استفاده کن.

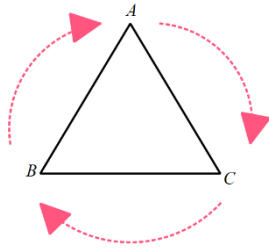
مثال ۴۶: اگر $A(3, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(-2, 0)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع AC را بنویسید.

مثال ۴۷: سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ و $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH را بنویسید.

مثال ۴۸: سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: y + 2x = 7$ و $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

(۱) $4/4$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

نکته: محاسبه مساحت مثلث ABC اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث باشند، به صورت زیر است:



$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

مثال ۴۹: مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۶/۵ (۳) ۷ (۴) ۷/۵

فاصله دو خط موازی

$$ax + by + c = 0 \text{ و } a'x + b'y + c' = 0 \quad d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

شرط موازی بودن دو خط این است که ضرایب x و y در هر دو معادله باهم برابر باشند.

مثال ۵۰: فاصله دو خط موازی $x + y + 1 = 0$ و $2x + 2y - 4 = 0$ را بدست آورید.

مثال ۵۱: فاصله بین دو خط $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ را بیابید.

مثال ۵۲: دو ضلع یک مربع منطبق بر خط به معادلات $y - x = 1$ و $4x - 4y = 6$ است. طول ضلع مربع را بدست آورید.

مثال ۵۳: فاصله بین دو خط $y = x\sqrt{3} + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

نکته: معادله خطی که دقیقاً وسط دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ است برابر $ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0$ است.

تکالیف هندسی تحلیلی

① اگر نقاط $A(2,5)$ ، $B(-1,2)$ و $C(5,1)$ رئوس متوازی الاضلاع ABCD باشند، معادله ضلع DC کدام است؟

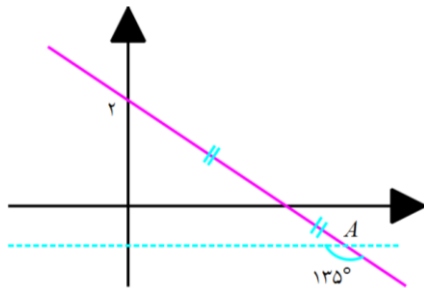
$$y = -4 + 6 \quad (2)$$

$$y = 2x - 9 \quad (4)$$

$$y = x - 4 \quad (1)$$

$$x + 6y = 11 \quad (3)$$

② فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۳)



$$2\sqrt{5} \quad (1)$$

$$3\sqrt{6} \quad (2)$$

$$4\sqrt{3} \quad (3)$$

$$5\sqrt{2} \quad (4)$$

③ قرینه نقطه $A(1,4)$ نسبت به مبدأ و نقطه $B(-1,2)$ را نقاط C و B می نامیم. مساحت مثلث ABC کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$

④ مثلثی با رئوس $A(0,-1)$ و $B(3,1)$ و $C(2,-4)$ قائم الزاویه و متساوی الساقین (در جای خالی است یا نیست قرار دهید).

⑤ نقاط $A(0,3)$ و $B(2,0)$ و $C(1,1)$ رأس های یک مثلث اند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}} \quad (1)$$

⑥ مرکز دایره ای روی خط $y = x + 9$ است و از دو نقطه $(1,-4)$ و $(5,2)$ می گذرد. مساحت این دایره چند است؟

$$82\pi \quad (4)$$

$$64\pi \quad (3)$$

$$37\pi \quad (2)$$

$$50\pi \quad (1)$$

7) دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه رأس مربع روی قطر دیگر است؟

- (۱) $(0, \frac{5}{4})$ (۲) $(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4})$ (۳) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ (۴) $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

8) یک رأس از مثلث متساوی الاضلاع $A(0,1)$ است و یک ضلع آن روی خط $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ قرار دارد. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) ۳

9) نقاط $A(6,5)$ و $B(-1,4)$ و $C(5,2)$ سه رأس مثلث اند. فاصله نقطه M وسط BC از ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $2\sqrt{5}$

10) فاصله خط d از خط $2x + 4y = 1$ برابر ۲ است. اختلاف مقادیر عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۳

11) فاصله دو خط به معادلات $2x - 3y + a = 0$ و $4x - 6y + 3 = 0$ برابر $\sqrt{13}$ می باشد. مجموع مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $4/5$ (۴) $3/5$

12) دو نقطه روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارند که از نیمساز ربع اول و سوم به فاصله $4\sqrt{2}$ هستند. اختلاف عرض های این نقاط کدام اند؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۳۲