

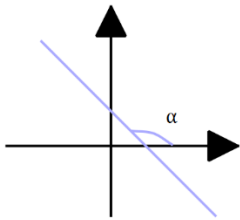
شیب خط

$y = ax + b \leftarrow$ شیب خط ضریب $a(x)$ می باشد

$ax + by = c$ یا $ax + by + c = 0 \leftarrow$ شیب خط $-\frac{a}{b}$ می باشد.

در صورتی که دو نقطه از یک خط را داشته باشیم: $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ ، شیب خط $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ می باشد.

تائزانت زاویه ای که خط با جهت مثبت محور طول ها می سازد، شیب خط است. $m = \tan \alpha$



معادله خط

۱. داشتن شیب و یک نقطه: $A(x_0, y_0) \leftarrow y - y_0 = m(x - x_0)$

۲. داشتن دو نقطه: $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2) \leftarrow y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$

تذکر: می توان معادله خط را $y = ax + b$ فرض کرد و نقاط را داخل آن جایگذاری کرد.

مثال ۱: معادله خط گذرنده از دو نقطه $A(1, 4)$ و $B(2, -1)$ کدام است؟

$$y = x + 3(1)$$

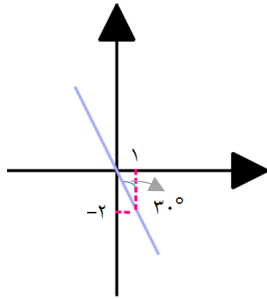
$$y = 5x - 1(2)$$

$$y = -5x + 9(3)$$

$$y = 9x - 5(4)$$

تذکر: در معادله خط برای بدست آوردن عرض از مبدأ $x = 0$ و طول از مبدأ $y = 0$ را در معادله قرار می دهیم.

مثال ۲: عرض از مبدأ خط مقابل را بدست آورید.



مثال ۳: خط گذرنده از دو نقطه $(1, 3)$ و $(2, 7)$ محور طول ها را در کدام نقطه قطع می کند؟

- (۱) $-\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{5}$ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $-\frac{1}{5}$

تذکر: سه نقطه A ، B و C وقتی روی یک خط راست هستند که شیب AB و AC و BC باهم مساوی شود که چک کردن دوتا از اینها کافی است.

مثال ۴: آیا $A(1, 2)$ و $B(2, -3)$ و $C(0, 4)$ روی یک خط راست هستند؟

شیب خطوط موازی و عمود بر هم

- دو خط موازی شیب های برابر دارند. $m = m'$
- حاصلضرب شیب های دو خط عمود بر هم برابر -1 است یعنی $mm' = -1$ (شیب های آنها عکس و قرینه اند).

تذکر: اگر $m \neq m'$ باشد، دو خط متقاطع خواهند بود.

تذکر: اگر خطوط افقی و عمودی باشند، داریم:

$$y = \beta \rightarrow \begin{cases} \text{خطوط موازی با آن نیز افقی. } y = y. \\ \text{خطوط عمود بر آن عمودی. } x = x. \end{cases} \quad x = \alpha \rightarrow \begin{cases} \text{هر خط عمود بر آن (افقی). } y = y. \\ \text{هر خط عمود بر آن (عمودی). } x = x. \end{cases}$$

مثال ۵: وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید.

$$\Delta: x + 2y = 0 \quad T: y = 2x - 3 \quad L: 2x - y = 1$$

مثال ۶: از نقطه $(1, 4)$ خطی موازی $3y - 2x = 1$ و خطی عمود بر $2y + x = 1$ رسم می کنیم. عرض از مبدأ دو خط جدید اختلافشان چقدر است؟

$$(1) \quad \frac{4}{3} \quad (2) \quad \frac{2}{3} \quad (3) \quad \frac{10}{3} \quad (4) \quad \frac{16}{3}$$

مثال ۷: معادله خطی بنویسید که از نقاط $A(1, 2)$ و $B(1, 5)$ بگذرد؟

مثال ۸: معادله خطی بنویسید که از نقاط $A(2, 4)$ و $B(3, 4)$ بگذرد؟

مثال ۹: به ازای چه مقداری از a ، خط $(a - 3)x - (a + 1)y = 5$ موازی با خط $y = -x$ است؟

$$(1) \quad -2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad 2$$

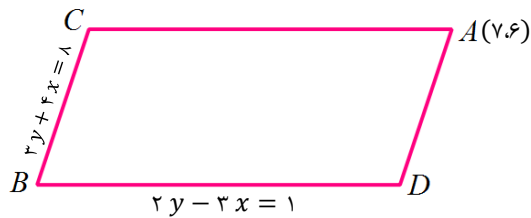
مثال ۱۰: به ازای کدام مقدار b خطی که از نقطه $A(-2, 3)$ و مبدأ مختصات می گذرد با خط $y = \frac{2}{b}x + 2$ موازی است؟

$$(1) \quad 1 \quad (2) \quad 2 \quad (3) \quad -1 \quad (4) \quad -2$$

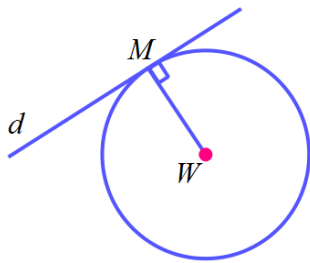
مثال ۱۱: در یک مستطیل $A(0, 2)$ و $B(2, -4)$ دو رأس مجاور هستند. اگر رأس سوم آن باشد، آنگاه خط گذرنده از ضلع CD محور x ها را با چه طولی قطع می کند؟

$$(1) \quad 3 \quad (2) \quad -3 \quad (3) \quad 4 \quad (4) \quad -4$$

مثال ۱۲: در متوازی الاضلاع مقابل عرض نقطه C کدام است؟



مثال ۱۳: خط به معادله $x + y = 4$ بر دایره ای به مرکز $W(1, -2)$ در نقطه M مماس است. مختصات نقطه M را بیابید.



مثال ۱۴: به ازای چه مقداری از m دو خط $y - (2m + 1)x = 1$ و $(m + 1)y - x = 2$ برهم عمودند؟

- (۱) $-\frac{2}{3}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $-\frac{2}{3}$ (۴) $\frac{2}{3}$

مثال ۱۵: اگر $A(-1, 2)$ و $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ سه رأس مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC از رأس A کدام است؟

$y = -x - 3$ (۱)

$y = -x + 1$ (۲)

$y = -2x$ (۳)

$y = x + 3$ (۴)

مثال ۱۶: نقاط $A(۲,۵)$ و $B(۳,-۱)$ و $C(۰,۲)$ سه رأس مثلث هستند. مختصات پای ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) $(\frac{1}{۲}, \frac{۳}{۲})$ (۲) $(\frac{1}{۲}, \frac{۵}{۲})$ (۳) $(-\frac{1}{۲}, \frac{۵}{۲})$ (۴) $(-\frac{1}{۲}, \frac{۷}{۲})$

مثال ۱۷: $A(-۱,۴)$ و $B(۳,۱)$ و $C(x,y)$ و $D(-۱-x, y+۳)$ رئوس یک مستطیل اند. رأس های C و D مجاور هستند. محیط مستطیل کدام است؟

- (۱) ۱۳ (۲) ۱۴ (۳) ۱۵ (۴) ۱۶

فاصله دو نقطه (طول پاره خط AB)

① اگر $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ دو نقطه باشند، $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ و فاصله هر نقطه مانند $OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ از مبدأ مختصات:

② مختصات $M(x_M, y_M)$ وسط پاره خط AB برابر است با: $y_M = \frac{y_A + y_B}{۲}$

مثال ۱۸: اگر $A(۸, -۴)$ و $B(۲, ۴)$ باشند، طول پاره خط AB و مختصات نقطه M وسط پاره خط AB را پیدا کنید.

مثال ۱۹: نقاط $A(K, ۴)$ و $B(۲, K+۱)$ مفروض اند. به ازای کدام مقدار K نقطه وسط پاره خط AB روی خط $۱ = y - ۲x$ قرار دارد؟

مثال ۲۰: اگر $A(-۱, ۰)$ و $B(۳, ۴)$ و $C(۲, ۵)$ سه رأس مثلث باشند، طول میانه CM کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) $\sqrt{۱۰}$ (۳) $\sqrt{۱۱}$ (۴) $\sqrt{۱۲}$

مثال ۲۱: نشان دهید مثلث با رأس های $A(۱, ۲)$ و $B(۲, ۵)$ و $C(۴, ۱)$ یک مثلث متساوی الساقین قائم الزاویه است.

رابطه بین مختصات رئوس متوازی الاضلاع

در هر متوازی الاضلاع ABCD :



$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \\ y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

مثال ۲۲: رئوس متوازی الاضلاع BCAD ، $A(10, 4)$ و $B(-6, -2)$ و $C(0, 2)$ است. مختصات رأس D را پیدا کنید.

مثال ۲۳: دو نقطه $A(1, -2)$ و $B(-3, 0)$ دو سر قطر مربع هستند. محیط مربع کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) ۱۰ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $\sqrt{160}$

مثال ۲۴: نقاط $A(-2, 5)$ و $B(0, 1)$ دو سر قطری از دایره هستند. مساحت دایره کدام است؟

- (۱) $2/5 \pi$ (۲) 5π (۳) 10π (۴) $7/5 \pi$

مثال ۲۵: نقطه $A(7, 6)$ یکی از رئوس متوازی الاضلاع مقابل است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط به معادلات

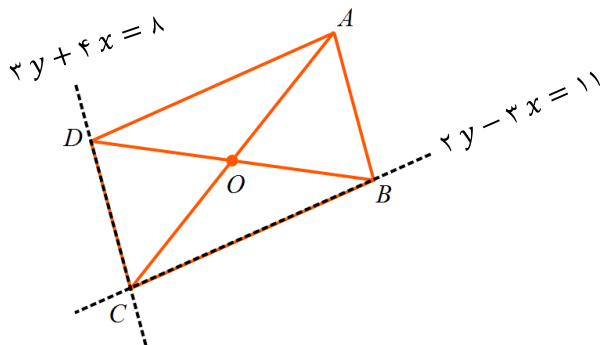
$$3y - 2x = 11 \text{ و } 3y + 4x = 8 \text{ می باشند. مختصات وسط قطر آن کدام است؟}$$

- (۱) (۱، ۵)

- (۲) (۳، ۴)

- (۳) (۳، ۵)

- (۴) (۴، ۳)



مثال ۲۶: دو انتهای یکی از قطر های دایره ای نقاط $A(0,0)$ و $B(4,2)$ هستند. کدام یک از نقاط زیر روی دایره قرار دارد؟

- (۱) $(3,3)$ (۲) $(7,4)$ (۳) $(-1,2)$ (۴) $(-3,-3)$

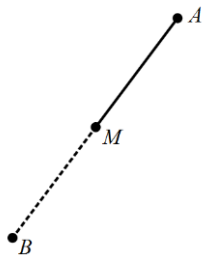
مثال ۲۷: نقطه A در ربع سوم روی خط $y = 3x$ قرار دارد. اگر فاصله مبدأ مختصات از نقطه A برابر $\sqrt{10}$ باشد، مجموع طول و عرض نقطه A کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) -۴ (۳) -۸ (۴) ۸

مثال ۲۸: دو نقطه روی نیم ساز ربع اول و سوم داریم که از نقطه $A(1,2)$ به فاصله ۲ هستند. مجموع طول های این نقاط کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

قرینه يك نقطه نسبت به نقطه یا خط



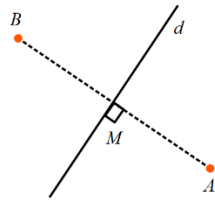
$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 2x_M = x_A + x_B \rightarrow \boxed{x_B = 2x_M - x_A}$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow 2y_M = y_A + y_B \rightarrow \boxed{y_B = 2y_M - y_A}$$

مثال ۲۹: قرینه نقطه $A(5,1)$ را نسبت به نقطه $M(3,2)$ بدست آورید.

مثال ۳۰: اگر نقطه $A(3,4)$ قرینه نقطه $B(0,0)$ نسبت به نقطه M باشد، فاصله نقاط A و B را بدست آورید.

قرینه نقطه A نسبت به خط d



با ذکر یک مثال توضیح می دهیم.

قرینه نقطه $A(2,0)$ را نسبت به خط $y = x$ می خواهیم پیدا کنیم.

خط AB بر خط d عمود است چون شیب خط $y = x$ یک می باشد. پس $m_{AB} = -1$

$$\text{معادله خط } AB: y - 0 = -1(x - 2) \rightarrow y = -x + 2$$

خطوط d و AB را در یک دستگاه قرار می دهیم تا محل برخورد دو خط (M) بدست آید.

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ y = x \end{cases} \rightarrow M(1,1)$$

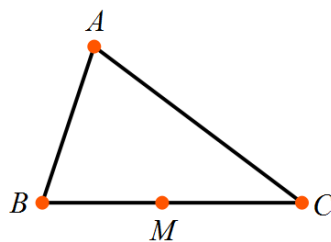
با استفاده از فرمول مختصات وسط پاره خط مختصات نقطه B (قرینه A) را می یابیم.

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 1 = \frac{2 + x_B}{2} \rightarrow x_B = 0$$

$$y_M = \dots$$

مثال ۳۱: اگر نقطه $A(3,2)$ را نسبت به نقطه $B(2\alpha - 1, 8)$ قرینه کنیم به نقطه $C(5, \beta + 1)$ می رسمیم. مقدار $\alpha + \beta$ کدام است؟

نکته: معادله خط عمود منصف



① مختصات M وسط ضلع BC را پیدا می کنیم.

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \text{ و } y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$$

② شیب BC را پیدا کن، سپس عکس و قرینه کن.

③ با داشتن نقطه M و شیب معادله عمود منصف وارد بر BC را بنویس:

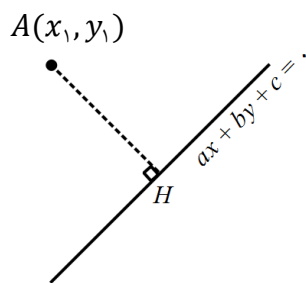
$$y - y_M = \frac{-1}{m_{BC}}(x - x_M)$$

مثال ۳۲: اگر $A(-1,2)$ و $B(3,0)$ و $C(1,-2)$ باشند، معادله عمود منصف وارد بر ضلع BC را بدست آورید.

مثال ۳۳: اگر $A(2,1)$ و $B(5,3)$ دو سر قطر مربع ACBD باشند، عرض از مبدأ خط عبوری از قطر CD کدام است؟

- (۱) $\frac{21}{4}$ (۲) $\frac{7}{2}$ (۳) $\frac{29}{4}$ (۴) ۵

فاصله نقطه از خط



فاصله نقطه $A(x_1, y_1)$ از خط به معادله $ax + by + c = 0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۳۴: فاصله نقطه $A(-1, 2)$ از خط $y = x - 3$ چند است؟

مثال ۳۵: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $2x + y = k$ برابر با $2\sqrt{5}$ است. مقادیر ممکن برای k را بدست آورید.

مثال ۳۶: فاصله نقطه $A(1, 2)$ از خط $y = 7x - 1$ چند برابر فاصله مبدأ از خط $5x - 5y = 3$ است؟

- (۱) $\frac{4}{5}$ (۲) $\frac{4}{3}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{2}{3}$

مثال ۳۷: فاصله نقطه $P(7, -4)$ از خط $x = 5$ چند برابر فاصله اش از خط $y = 0$ است؟

- (۱) ۲ (۲) $\frac{4}{7}$ (۳) $\frac{7}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

مثال ۳۸: یکی از اضلاع مربعی بر خط $y = 2x - 1$ واقع است. اگر یکی از رئوس این مربع $A(3, 0)$ باشد، مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۵ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{5}$ (۴) $4\sqrt{5}$

مثال ۳۹: نقطه $A(3, -1)$ وسط قطر مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط به معادله $2y - x = 5$ است. مساحت مربع کدام است؟

- (۱) ۴۰ (۲) ۴۵ (۳) ۷۵ (۴) ۸۰

مثال ۴۰: قطر مربعی منطبق بر نیمساز ناحیه اول و سوم است. نقطه $A(2, -4)$ یکی از رئوس آن است. مساحت مربع چند است؟

- (۱) ۳ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴) ۳۶

مثال ۴۱: دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ است و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

- (۱) $7/2$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

مثال ۴۲: دو نقطه بر روی خط به معادله $y = x - 1$ قرار دارند که فاصله این نقاط از خط به معادله $2x - 3y = 5$ برابر $\sqrt{13}$ است. طول این دو نقطه کدام است؟

- (۱) $-15, 9$ (۲) $-15, 11$ (۳) $-11, 15$ (۴) $-9, 11$

تذکر: اگر دایره ای بر خط $ax + by + c = 0$ مماس باشد، فاصله مرکز دایره از آن خط برابر شعاع می باشد.

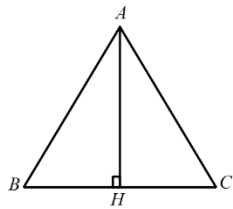
مثال ۴۳: اگر دایره ای به مرکز $O(1, 2)$ بر خط به معادله $3x + 4y + 1 = 0$ مماس باشد، شعاع دایره را بدست آورید.

مثال ۴۴: خط $4x - 3y = 0$ بر دایره ای به مرکز $(3, -1)$ مماس است. مساحت دایره را محاسبه کنید.
(خرداد ۱۴۰۳)

نکته: ارتفاع در مثلث

① نوشتن معادله خط BC

② فرمول فاصله نقطه از خط برای محاسبه فاصله A از ضلع BC که همان ارتفاع است.



$$\text{ارتفاع } AH = \frac{|ax_A + by_A + C|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال ۴۵: اگر $A(0, 5)$ و $B(2, 1)$ و $C(-2, -1)$ سه رأس یک مثلث باشند، طول ارتفاع وارد بر ضلع BC را بدست آورید.

تذکر: برای نوشتن معادله ارتفاع (AH) در مثلث ABC ابتدا شیب خط BC را بدست بیاور و سپس آن را قرینه و معکوس کن. از معادله خط $y - y_A = m_{AH}(x - x_A)$ استفاده کن.

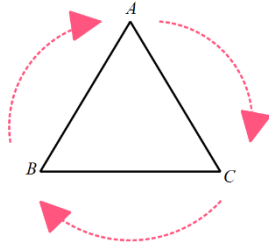
مثال ۴۶: اگر $A(3, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(-2, 0)$ سه رأس یک مثلث باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع AC را بنویسید.

مثال ۴۷: سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: 2y - x = 3$ و $AC: y - 2x = 5$ و $BC: 2y + 3x = 6$ هستند. معادله ارتفاع AH را بنویسید.

مثال ۴۸: سه ضلع مثلثی به معادلات $AB: y + 2x = 7$ و $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول ارتفاع BH کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

(۱) $4/4$ (۲) $9/6$ (۳) $11/4$ (۴) $12/8$

نکته: محاسبه مساحت مثلث ABC اگر $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ و $C(x_C, y_C)$ سه رأس مثلث باشند، به صورت زیر است:



$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

مثال ۴۹: مساحت مثلثی با سه رأس به مختصات $A(2, 5)$ و $B(3, 0)$ و $C(0, 2)$ کدام است؟

- (۱) ۶ (۲) ۶/۵ (۳) ۷ (۴) ۷/۵

فاصله دو خط موازی

$$ax + by + c = 0 \text{ و } a'x + b'y + c' = 0 \quad d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

شرط موازی بودن دو خط این است که ضرایب x و y در هر دو معادله باهم برابر باشند.

مثال ۵۰: فاصله دو خط موازی $x + y + 1 = 0$ و $2x + 2y - 4 = 0$ را بدست آورید.

مثال ۵۱: فاصله بین دو خط $y = \sqrt{3}x + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ را بیابید.

مثال ۵۲: دو ضلع یک مربع منطبق بر خط به معادلات $y - x = 1$ و $4x - 4y = 6$ است. طول ضلع مربع را بدست آورید.

مثال ۵۳: فاصله بین دو خط $y = x\sqrt{3} + 2$ و $\sqrt{3}y - 3x + 6 = 0$ کدام است؟

- (۱) $2 - \sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{3} - 1$ (۳) $\sqrt{3} + 1$ (۴) $2 + \sqrt{3}$

نکته: معادله خطی که دقیقاً وسط دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ است برابر $ax + by + \frac{c+c'}{2} = 0$ است.

تکالیف هندسی تحلیلی

① اگر نقاط $A(2,5)$ ، $B(-1,2)$ و $C(5,1)$ رئوس متوازی الاضلاع ABCD باشند، معادله ضلع DC کدام است؟

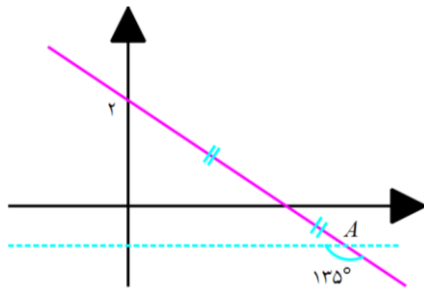
$$y = -4 + 6 \quad (2)$$

$$y = 2x - 9 \quad (4)$$

$$y = x - 4 \quad (1)$$

$$x + 6y = 11 \quad (3)$$

② فاصله نقطه A از مبدأ مختصات کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۳)



$$2\sqrt{5} \quad (1)$$

$$3\sqrt{6} \quad (2)$$

$$4\sqrt{3} \quad (3)$$

$$5\sqrt{2} \quad (4)$$

③ قرینه نقطه $A(1,4)$ نسبت به مبدأ و نقطه $B(-1,2)$ را نقاط C و B می نامیم. مساحت مثلث ABC کدام است؟

$$12 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

$$16 \quad (2)$$

$$20 \quad (1)$$

④ مثلثی با رئوس $A(0,-1)$ و $B(3,1)$ و $C(2,-4)$ قائم الزاویه و متساوی الساقین (در جای خالی است یا نیست قرار دهید).

⑤ نقاط $A(0,3)$ و $B(2,0)$ و $C(1,1)$ رأس های یک مثلث اند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{14}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{\sqrt{13}} \quad (1)$$

⑥ مرکز دایره ای روی خط $y = x + 9$ است و از دو نقطه $(1,-4)$ و $(5,2)$ می گذرد. مساحت این دایره چند است؟

$$82\pi \quad (4)$$

$$64\pi \quad (3)$$

$$37\pi \quad (2)$$

$$50\pi \quad (1)$$

7) دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه رأس مربع روی قطر دیگر است؟

- (۱) $(0, \frac{5}{4})$ (۲) $(\frac{5}{4}, -\frac{3}{4})$ (۳) $(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ (۴) $(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$

8) یک رأس از مثلث متساوی الاضلاع $A(0,1)$ است و یک ضلع آن روی خط $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$ قرار دارد. مساحت این مثلث کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $2\sqrt{3}$ (۳) $4\sqrt{3}$ (۴) ۳

9) نقاط $A(6,5)$ و $B(-1,4)$ و $C(5,2)$ سه رأس مثلث اند. فاصله نقطه M وسط BC از ارتفاع AH کدام است؟

- (۱) $\sqrt{10}$ (۲) $\sqrt{5}$ (۳) $2\sqrt{10}$ (۴) $2\sqrt{5}$

10) فاصله خط d از خط $2x + 4y = 1$ برابر ۲ است. اختلاف مقادیر عرض از مبدأ خط d کدام است؟

- (۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) ۳

11) فاصله دو خط به معادلات $2x - 3y + a = 0$ و $4x - 6y + 3 = 0$ برابر $\sqrt{13}$ می باشد. مجموع مقادیر a کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) $4/5$ (۴) $3/5$

12) دو نقطه روی خط $y = 2x + 1$ قرار دارند که از نیمساز ربع اول و سوم به فاصله $4\sqrt{2}$ هستند. اختلاف عرض های این نقاط کدام اند؟

- (۱) ۱۶ (۲) ۹ (۳) ۱۸ (۴) ۳۲

اگر α و β ریشه های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند: ($\Delta > 0$)

$$S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{مجموع ریشه ها}$$

$$P = \alpha \cdot \beta = \frac{c}{a} \quad \text{حاصل ضرب ریشه ها}$$

مثال ۵۴:

① $3x^2 - 3x - 5 = 0$

② $2x^2 + 3x + 4 = 0$

مثال ۵۵: در معادله درجه دوم $mx^2 + (m-1)x + 3m-1 = 0$ ، m را طوری پیدا کنید که :

(الف) معادله دو ریشه قرینه داشته باشند.

(ب) معادله دو ریشه عکس هم داشته باشند.

(ج) یکی از ریشه های معادله عکس و قرینه ریشه دیگر باشد.

مثال ۵۶: اگر $x = 2$ یکی از ریشه های معادله $2x^2 - mx - 2 = 0$ باشد، مقدار m و ریشه دیگر معادله را بیابید.

مثال ۵۷: معادله $3x^2 + (2m-1)x + 2-m = 0$ دارای دو ریشه حقیقی است. اگر مجموع ریشه ها با معکوس حاصل ضرب آن ها برابر باشد، مقدار m کدام است؟

$$\frac{-5}{2} \quad (4) \qquad -1 \quad (3) \qquad 3 \quad (2) \qquad \frac{7}{2} \quad (1)$$

مثال ۵۸: اگر معادله $(2m-1)x^2 + 6x + m-2 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی باشد، محدوده m کدام است؟

$$\begin{array}{ll} -2 < m < 3/5 \quad (2) & -2 < m < 2/5 \quad (1) \\ -1 < m < 2/5 \quad (4) & -1 < m < 3/5 \quad (3) \end{array}$$

تذکر: در مسائلی که رابط بین ریشه ها داده شود، می توان از $\alpha + \beta = S$ یا $\alpha\beta = P$ و حل دستگاه استفاده کرد.

مثال ۵۹: مقدار a را در معادله درجه دوم $x^2 + 6x + a + 3 = 0$ چنان پیدا کنید که یکی از ریشه ها دو برابر دیگری شود.

مثال ۶۰: در معادله $x^2 + mx - 3 = 0$ مقدار m را چنان بیابید که رابطه ی $\alpha + \beta = 4$ بین ریشه های معادله برقرار باشد.

نکته: معادله درجه دوم را می توان با داشتن S و P نوشت: $x^2 - Sx + P = 0$

مثال ۶۱: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش $\sqrt{6} + 6$ و $\sqrt{6} - 6$ باشند.

مثال ۶۲: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه های آن $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ باشند.

مثال ۶۳: محیط و مساحت یک مستطیل به ترتیب ۴۸ و ۱۴۳ است. طول و عرض مستطیل را پیدا کنید.

مثال ۶۴: معادله درجه دومی که ریشه هایش $1 + \sqrt{a}$ و $1 - \sqrt{a}$ باشند، کدام است؟

$$x^2 + 2x + (1 - a) = 0 \quad (۱)$$

$$x^2 - 2x + (1 - a) = 0 \quad (۲)$$

$$x^2 + 2\sqrt{a}x + 1 = 0 \quad (۳)$$

$$x^2 - 2\sqrt{a}x - 1 = 0 \quad (۴)$$

مثال ۶۵: اگر مجموع دو عدد $\frac{1}{p}$ و حاصلضرب آنها $-\frac{5}{18}$ باشد، آن دو عدد را بیابید.

رابطه متقارن بین ریشه های معادله درجه دوم

رابطه ای که با تغییر α و β و بالعکس آن، رابطه تغییر نکند را متقارن گوئیم.

$$\alpha^2 + \beta^2 = \beta^2 + \alpha^2$$

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\beta\alpha}$$

$$\textcircled{1} \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = S^2 - 2P$$

$$\textcircled{2} \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = S^3 - 3PS$$

$$\textcircled{3} \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{S}{P}$$

$$\textcircled{4} |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|\alpha|} = \sqrt{S^2 - 4P}$$

$$\textcircled{5} \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} = \sqrt{(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2} = \sqrt{\alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}} = \sqrt{S + 2\sqrt{P}}$$

مثال ۶۵: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 6x + 2$ باشند، مقادیر زیر را بدست آورید.

$$\textcircled{1} \frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$$

$$\textcircled{2} \sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta} \quad (\alpha > \beta)$$

مثال ۶۶: اگر تفاضل ریشه های معادله $x^2 - 5x + m = 0$ برابر ۱ باشد، m را بیابید.

مثال ۶۷: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 2x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 + \alpha^3 + \beta^2 + \beta^3$ کدام است؟

۲۲ (۴)

۱۸ (۳)

۲۰ (۲)

۴ (۱)

مثال ۶۸: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 5x + 2 = 0$ باشند، کدام گزینه درست است؟

$$\alpha^2\beta + \beta^2\alpha = 7 \quad (۱)$$

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{5} \quad (۲)$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = 125 \quad (۳)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = \frac{21}{2} \quad (۴)$$

مثال ۶۹: اگر α و β ریشه های معادله $x^2 - 4x - 2 = 0$ باشند، حاصل $|\alpha^2 - \beta^2|$ کدام است؟

$$8\sqrt{5} \quad (۱)$$

$$4\sqrt{5} \quad (۲)$$

$$4\sqrt{6} \quad (۳)$$

$$8\sqrt{6} \quad (۴)$$

مثال ۷۰: به ازای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه های حقیقی معادله $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ می شود؟

$$-\frac{9}{5} \quad (۱)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$-\frac{9}{5} \text{ و } ۱ \quad (۳)$$

$$۱ \text{ و } -\frac{9}{5} \quad (۴)$$

مثال ۷۱: به ازای کدام مقدار m ، مجموع جذر هر دو ریشه معادله درجه دوم $2x^2 - (m+1)x + \frac{1}{8} = 0$ برابر ۲ است؟

$$۳ \quad (۱)$$

$$۴ \quad (۲)$$

$$۵ \quad (۳)$$

$$۶ \quad (۴)$$

مثال ۷۲: مقدار m را طوری بیابید که در معادله $x^2 - 6x + m = 0$

الف) دو ریشه باهم برابر باشند.

ب) یک ریشه چهار واحد بیشتر از ریشه دیگر باشد.

پ) یک ریشه ۵ برابر ریشه دیگر باشد.

رابطه های نامتقارن بین ریشه های معادله درجه دوم

در این روابط با تغییر α و β یا بالعکس ، حاصل عبارت متفاوت میشود. مانند :

$$\alpha^2 + \beta \quad \text{یا} \quad \alpha^2 \beta \quad \text{یا} \quad 2\alpha + 3\beta$$

روش حل جایگذاری ریشه در اصل معادله است. یعنی رابطه را از حالت نامتقارن به حالت متقارن تبدیل می کنیم.

مثال ۷۳: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $3x^2 - x - 5 = 0$ باشند، حاصل $3\alpha\beta^3 - \alpha\beta^2$ کدام است؟

$$(1) -\frac{5}{3} \quad (2) \frac{5}{3} \quad (3) -\frac{25}{3} \quad (4) \frac{25}{3}$$

مثال ۷۴: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 7x + 1 = 0$ باشند، حاصل $\beta^2 + 7\alpha$ کدام است؟

$$(1) 46 \quad (2) 47 \quad (3) 48 \quad (4) 49$$

مثال ۷۵: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - 2x - 4 = 0$ باشند، حاصل $(\alpha^2 - 4)^2 + 4\beta^2$ چقدر است؟

$$(1) 48 \quad (2) 12 \quad (3) 16 \quad (4) 24$$

مثال ۷۶: در معادله $ax^2 + bx + c = 0$ داریم $4a - 2b + c = 0$. یکی از ریشه های این معادله کدام است؟

$$(1) \frac{cb}{a} \quad (2) \frac{ac}{2b} \quad (3) -\frac{c}{2a} \quad (4) -\frac{2b}{ac}$$

مثال ۷۷: در معادله درجه دوم $x^2 - 5x + 2 = 0$ ، اگر α و β ریشه های معادله باشند، حاصل $2 + \alpha^2\beta^2 - 5\beta - \alpha^2$ کدام است؟

$$(1) 17 \quad (2) 25 \quad (3) 21 \quad (4) 23$$

مثال ۷۸: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ باشند، حاصل $\beta^4(3\alpha + 2)$ چقدر است؟

- (۱) -۱ (۲) -۵ (۳) ۱ (۴) ۳

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در روش تغییر متغیر، قسمتی از معادله را برابر متغیر جدیدی مثل U فرض می کنیم. اگر بعد از نوشتن معادله بر حسب U ، به یک معادله درجه دوم رسیدیم، معادله بدست آمده را حل می کنیم و مقدارهای U را پیدا می کنیم. سپس به جای U عبارت مساوی آن بر حسب X را قرار می دهیم و X را پیدا می کنیم.

مثال ۷۹:

① $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$.

② $x^4 + 20x^2 + 64 = 0$.

③ $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$.

④ $x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{6}} - 6 = 0$.

⑤ $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$.

⑥ $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3 = 0$.

مثال ۸۰: معادله $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است. (خرداد ۱۴۰۳)

نکته: هرگاه معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ را داشته باشیم و بخواهیم معادله درجه دو دومی تشکیل دهیم که ریشه هایش با ریشه های معادله اول رابطه خاصی داشته باشند، ابتدا جمع ریشه های معادله جدید S' و ضرب ریشه های معادله جدید P' را تشکیل می دهیم. سپس در معادله زیر جایگذاری می کنیم:

$$x^2 - S'x + P' = 0$$

مثال ۸۱: معادله درجه دومی بنویسید که ریشه هایش ۹ برابر ریشه های $x^2 + x - 4 = 0$ باشند.

تذکر: اگر ریشه های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، α و β باشند:

① معادله ای که ریشه هایش k برابر معادله فوق باشند. $(k\beta, k\alpha)$

$$ax^2 + b k x + c k^2 = 0$$

② معادله ای که ریشه هایش عکس ریشه های معادله فوق باشند. $(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta})$

$$c x^2 + b x + a = 0$$

③ معادله ای که ریشه هایش قرینه ریشه های معادله فوق باشند. $(-\alpha, -\beta)$

$$a x^2 - b x + c = 0$$

④ معادله ای که ریشه هایش عکس و قرینه ریشه های معادله فوق باشند. $(-\frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\beta})$

$$c x^2 - b x + a = 0$$

⑤ اگر ریشه ها K واحد بیشتر باشد $x \rightarrow x - K$ و اگر K واحد کمتر باشد $x \rightarrow x + K$ تبدیل می شود.

مثال ۸۲: اگر α و β ریشه های معادله درجه دوم $x(5x + 3) = 2$ باشند، به ازای کدام مقدار k ریشه های

$$4x^2 - kx + 25 = 0, \left\{ \frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2} \right\}$$
 است؟

۳۱ (۴)

۲۹ (۳)

۲۸ (۲)

۲۷ (۱)

مثال ۸۳: ریشه های معادله $3x^2 + ax + b = 0$ از ریشه های معادله $3x^2 - 4x - 1 = 0$ یک واحد بیشتر است. b کدام است؟

مثال ۸۴: ریشه های کدام معادله از معکوس ریشه های معادله $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟

$$(1) \quad x^2 - 3x - 1 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 3x + 1 = 0$$

$$(3) \quad 2x^2 - 5x + 2 = 0 \quad (4) \quad x^2 + 5x + 2 = 0$$

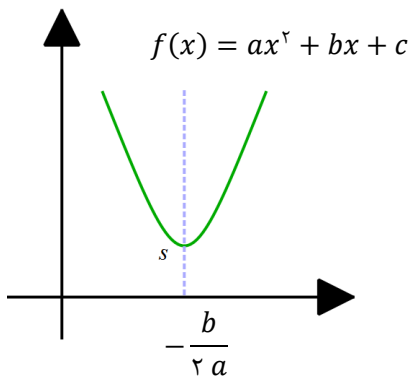
مثال ۸۵: اگر α و β ریشه های معادله $5x^2 - 14x - 3 = 0$ باشند، معادله درجه دومی که ریشه هایش $5\alpha^2 - 15\alpha - 3$ و $5\beta^2 - 14\beta - 3$ باشد، کدام است؟

$$(1) \quad 5x^2 + 14x + 3 = 0 \quad (2) \quad 5x^2 - 14x + 3 = 0$$

$$(3) \quad 5x^2 + 14x - 3 = 0 \quad (4) \quad 5x^2 - 14x - 3 = 0$$

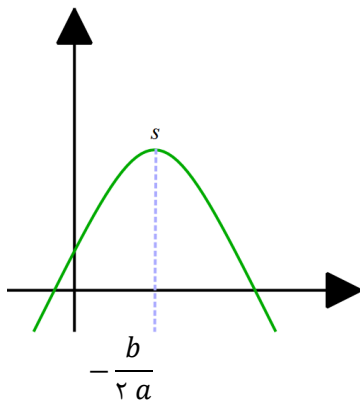
ماکزیم یا مینیمم سهم

① $a > 0$ ← دهانه رو به بالا و $\min$



$$S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

② $a < 0$ ← دهانه رو به پایین و $\max$



$$S\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

تذکر: مقدار max یا min برابر $f(-\frac{b}{2a})$ یا $-\frac{\Delta}{4a}$ است.

مثال ۸۷: min و max سهمی های زیر را مشخص کنید.

$$f(x) = x^2 - 4x + 10$$

$$f(x) = -2x^2 + x - 1$$

$$f(x) = (x - 1)^2 - (2x + 1)^2$$

$$f(x) = -\frac{x^2}{2} + 20x$$

مثال ۸۸: مقدار m را طوری بیابید که max ، $f(x) = mx^2 + 2x + m + 3$ برابر ۳ شود.

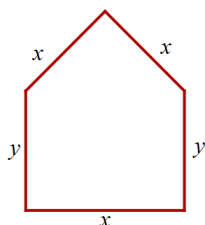
مثال ۸۹: معادله حرکت یک موشک نسبت به زمان $h(t) = -2t^2 + 28t$ است. ماکزیمم ارتفاع موشک و زمانی که موشک به زمین برخورد می کند را بدست آورید.

مثال ۹۰: مسیر حرکت یک گلوله توپ $y = -\frac{1}{4}x^2 + 10x$ است.

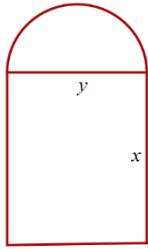
الف) حداکثر ارتفاع گلوله را پیدا کنید.

ب) فاصله نقطه برخورد گلوله با زمین از نقطه شلیک چند است؟

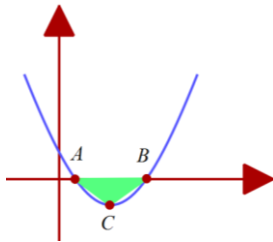
مثال ۹۱: اگر میله پنجره روبرو $2\sqrt{3}$ باشد، به ازای کدام مقدار x بیشترین نوردهی را داریم؟



مثال ۹۲: پنجره ای از یک مستطیل و یک نیم دایره بالای آن ساخته شده است. اگر محیط مستطیل ۲۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری پیدا کنید که پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد.



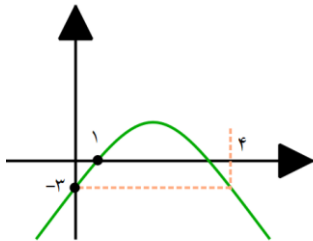
مثال ۹۳: شکل مقابل نمودار $f(x) = x^2 - 6x + 8$ است. مساحت مثلث ABC کدام است؟



نوشتن معادله سهمی از روی نمودار سهمی

الف) سه نقطه عادی: جایگذاری در $f(x) = ax^2 + bx + c$ و حل دستگاه سه معادله و سه مجهول:

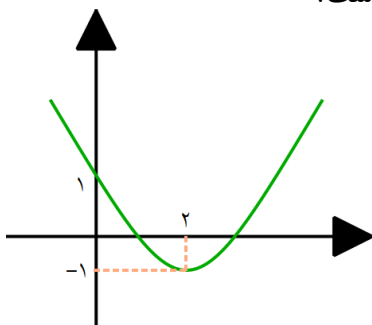
مثال ۹۴: نمودار زیر، نمودار $y = ax^2 + bx + c$ است. b کدام است؟



ب) رأس و یک نقطه عادی: $y = a(x - m)^2 + h$

نقطه $S(m, h)$ رأس سهمی است. برای پیدا کردن a مختصات نقطه عادی را در ضابطه تابع جایگذاری کن.

مثال ۹۵: با توجه به نمودار $f(x) = ax^2 + bx + c$ کدام گزینه صحیح است؟



$$a + b + c = -\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$a + b + c = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$a - b + c = -\frac{1}{2} \quad (3)$$

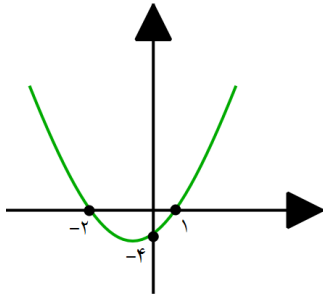
$$a - b + c = \frac{1}{2} \quad (4)$$

پ) صفرهای تابع و یک نقطه عادی:

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \text{ اند. ریشه های معادله } x_1 \text{ و } x_2$$

برای پیدا کردن a نقطه سوم را در تابع جایگذاری کن.

مثال ۹۶: در شکل روبرو $f(x) = ax^2 + bx + c$ است. حاصل b کدام است؟



نکته مهم: اگر سهمی از نقاط هم عرض (x_1, m) و (x_2, m) عبور کند، معادله آن به صورت زیر نوشته می

$$\text{شود: } y = a(x - x_1)(x - x_2) + m$$

مثال ۹۷: اگر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ از نقاط $(-2, 5)$ و $(0, 5)$ و $(1, 11)$ بگذرد، این سهمی از کدام نقطه زیر عبور می کند؟

$$(1, 3) \quad (2, 4) \quad (-1, 4) \quad (3, 9) \quad (4, 15) \quad (2, 9)$$

تذکر: اگر دو نقطه هم عرض از یک سهمی را داشته باشیم، معادله محور تقارن سهمی $x = \frac{x_A + x_B}{2}$ است. یعنی میانگین طول آن نقاط است.

مثال ۹۸: نقاط $A(1, 2)$ و $B(-2, 2)$ روی سهمی $y = ax^2 + bx + c$ می باشند. معادله محور تقارن سهمی را بنویسید.

مثال ۹۹: به ازای چند مقدار m نمودار تابع $y = (3 - \frac{x}{m})(mx - 1)$ مماس بر محور x هاست؟

$$(1) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (3) \quad 3 \quad (4) \quad \text{صفر}$$

مثال ۱۰۰: اگر $(1, 2)$ و $(-3, 2)$ دو نقطه از یک سهمی باشند، فاصله مبدأ مختصات از محل برخورد محور تقارن سهمی و خط $y = 2x - 1$ کدام است؟

- (۱) $2\sqrt{2}$ (۲) $\sqrt{10}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\sqrt{6}$

مثال ۱۰۱: نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی یک تابع درجه دوم واقع اند. مجموع صفرهای این تابع کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۳)

- (۵) $\frac{3}{2}$ (۶) $\frac{3}{4}$ (۷) $\frac{5}{2}$ (۸) $\frac{5}{4}$

مثال ۱۰۲: به ازای کدام مقدار a ، نقطه max ، $y = ax^2 - 2x + a$ ، روی خط $y = 1$ است؟

- (۱) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ (۲) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (۴) -1

مثال ۱۰۳: محور تقارن سهمی های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی، خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab کدام است؟ (تجربی ۱۴۰۱)

- (۵) -8 (۶) -4 (۷) 8 (۸) 40

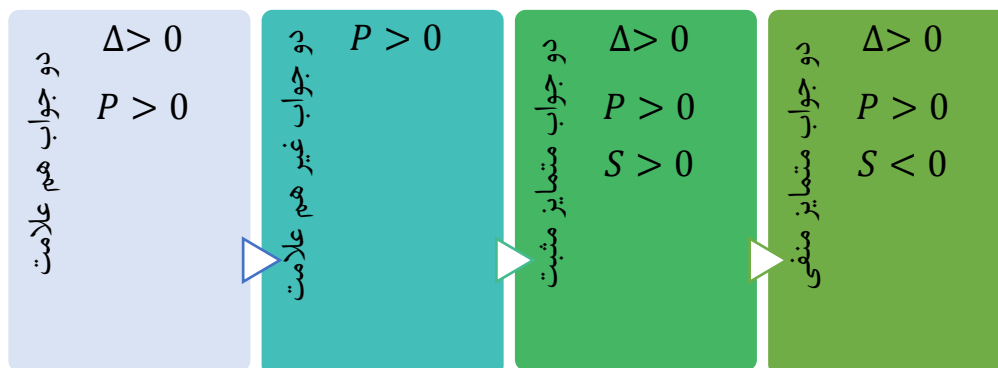
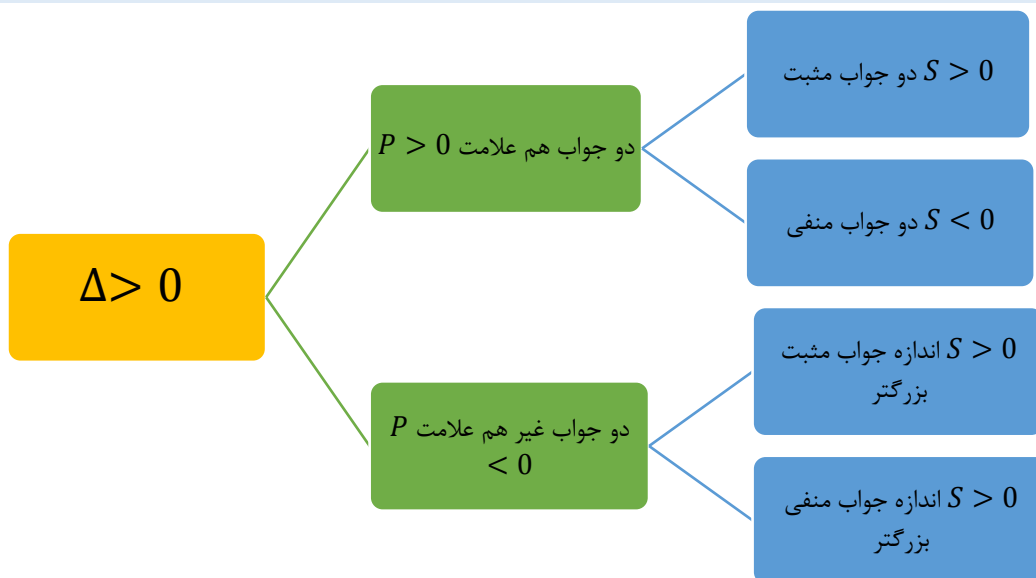
مثال ۱۰۴: نقطه $S(1, 2)$ رأس سهمی $y = ax^2 + 2bx + c$ است. اگر این سهمی از نقطه $(-1, 1)$ بگذرد، عرض نقطه به طول $x = 2$ کدام است؟

- (۱) $\frac{5}{2}$ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $-\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{7}{4}$

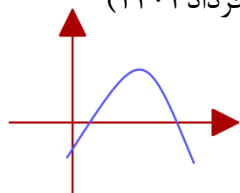
مثال ۱۰۵: اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25\alpha x^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس سهمی در کدام ناحیه است؟ (تجربی ۱۴۰۳)

- (۵) اول (۶) دوم (۷) سوم (۸) چهارم

علامت ریشه های معادله درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$



مثال ۱۰۶: در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ زیر علامت $b \times c$ می باشد. (خرداد ۱۴۰۳)



مثال ۱۰۷: به ازای کدام مجموعه مقادیر m ، سهمی $(m+2)x^2 + 3x + 1 - m = 0$ دو جواب مختلف علامت دارد؟

(۲) $-2 < m < 1$

(۱) $m > -2$ یا $m > 1$

(۴) فقط $m > 1$

(۳) فقط $m < -2$

مثال ۱۰۸: به ازای کدام مجموعه مقادیر a ، سهمی $y = ax^2 + (a + 3)x - 1$ محور x ها را در دو نقطه به طول منفی قطع می کند؟

- | | |
|--------------|------------------|
| (۱) $a < -9$ | (۲) $a < -3$ |
| (۳) $a > -1$ | (۴) $-3 < a < 0$ |

مثال ۱۰۹: اگر نمودار سهمی $y = -x^2 + (m - 2)x - 4$ فقط از ناحیه دوم عبور نکند، حدود m کدام است؟

- | | |
|--------------------|---------------------|
| (۱) $(2, +\infty)$ | (۲) $(-\infty, -2)$ |
| (۳) $(6, +\infty)$ | (۴) $(-2, 6)$ |

مثال ۱۱۰: به ازای چه مقدار a ، سهمی $y = ax^2 + (3 + 2a)x$ از ناحیه سوم محور های مختصات نمی گذرد؟ (تجربی ۱۴۰۱)

- | | |
|---------------|---------------------|
| (۱) هیچ مقدار | (۲) تمام مقادیر a |
| (۳) ۱ | (۴) ۲ |

مثال ۱۱۱: به ازای کدام مقادیر m ، نمودار $y = (1 - m)x^2 + x + 2 - m$ از چهار ناحیه مختصات گذشته و $\max$ دارد؟

- | | |
|-----------------|------------------|
| (۱) $m < 1$ | (۲) $m > 2$ |
| (۳) $1 < m < 2$ | (۴) $-1 < m < 2$ |

مثال ۱۱۲: به ازای کدام مقدار m ، نمودار $y = mx^2 + (m - 1)x$ فقط از ناحیه سوم محورهای مختصات نمی گذرد؟

$$(۱) \quad m < ۱$$

$$(۲) \quad ۰ < m < ۱$$

$$(۳) \quad m > ۱$$

$$(۴) \quad ۱ < m < ۲$$

تذکر: $y = f(x)$ و $y = g(x)$

① همدیگر را قطع نکنند ← معادله تقاطع $\Delta < ۰$

② مماس باشند ← معادله تقاطع $\Delta = ۰$

③ همدیگر را قطع کنند ← معادله تقاطع $\Delta > ۰$

تذکر: نقطه تقاطع در هر دو تابع صدق می کند.

مثال ۱۱۳: سهمی $y = -mx^2 + mx + ۱$ و خط $y = -m - x$ یکدیگر را در هیچ نقطه ای قطع نمی کنند. حدود m شامل چند مقدار صحیح است؟ (تجربی ۱۴۰۳)

$$(۱) \quad ۳$$

$$(۲) \quad ۲$$

$$(۳) \quad ۱$$

$$(۴) \quad \text{صفر}$$

مثال ۱۱۴: خط $y = mx + ۴$ و منحنی $y = -x^2 + ۲x$ نقطه ی اشتراکی ندارند. مجموعه مقادیر m کدام است؟

$$(۱) \quad m < ۰$$

$$(۲) \quad m > ۴$$

$$(۳) \quad -۱ < m < ۴$$

$$(۴) \quad -۲ < m < ۶$$

تکالیف معادله و تابع درجه ۲

① معادله $(x + \frac{1}{x})^2 - 7(x + \frac{1}{x}) + 12 = 0$ چند ریشه دارد؟

(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

② اگر α و β ریشه های معادله $4x^2 - 12x + 1 = 0$ باشند، $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ چند است؟

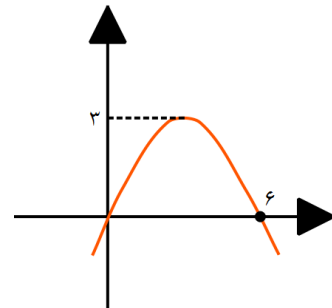
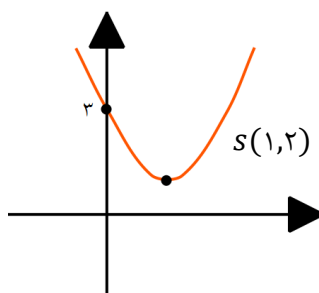
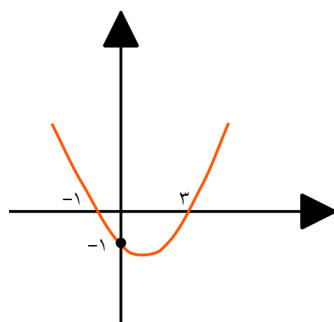
(۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

③ در معادله $x^2 - 8x + m = 0$ یک ریشه از نصف ریشه دیگر ۵ واحد بیشتر است. m کدام است؟

(۱) ۱۰ (۲) ۱۲ (۳) ۱۴ (۴) ۱۵

④ در کنار یک رودخانه محوطه ای مستطیل شکل ایجاد می کنیم. سه ضلع محوطه باید نرده کشی شود. اگر تنها هزینه نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم. ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

⑤ معادله های سهمی های زیر را بنویسید.



⑥ اگر α و β ریشه های معادله $x(2x + 3) = 4$ باشند، کدام معادله دارای ریشه های $1 - \frac{2}{\alpha}$ و $1 - \frac{2}{\beta}$ می باشند؟

$$x(2x + 1) = 7 \quad (2)$$

$$x(2x + 1) = 5 \quad (1)$$

$$x(2x - 1) = 5 \quad (4)$$

$$x(2x - 7) = 5 \quad (3)$$

⑦ حاصلضرب ریشه های معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

⑧ به ازای کدام مجموعه مقادیر m معادله درجه دوم $x^2 + (m - 2)x + m + 1 = 0$ دارای دو ریشه حقیقی مثبت است؟

$$m < 0 \quad (2)$$

$$-1 < m < 0 \quad (1)$$

$$m > 8 \quad (4)$$

$$2 < m < 8 \quad (3)$$

⑨ رأس سهمی $y = a(x - 1)(x + 5)$ روی نیمساز ناحیه دوم است. مقدار a کدام است؟

$$-2 \quad (4)$$

$$2 \quad (3)$$

$$-\frac{2}{9} \quad (2)$$

$$\frac{2}{9} \quad (1)$$

⑩ اختلاف ریشه های معادله $x^2 + 2kx + 5 = 0$ برابر $\frac{4}{3}k$ است. مقدار $\left[\frac{k^2}{3}\right]$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۳)

$$4 \quad (4)$$

$$3 \quad (3)$$

$$1 \quad (2)$$

$$0 \quad (1)$$

⑪ به ازای کدام مقدار m نمودار $y = 2x^2 + (m+1)x + m + 6$ بر نیمساز ناحیه اول محورهای مختصات مماس است؟

- (۱) -4 (۲) -12 و 4 (۳) 4 و 12 (۴) 12

معادلات گویا

معادلاتی هستند که مجهول معادله در مخرج قرار می گیرد. برای حل ک.م.م مخرج ها را پیدا و طرفین را در آن ضرب می کنیم تا معادله از حالت کسری خارج شود. عبارت را ساده کرده، جواب هایی که هیچ کدام از مخرج ها را صفر نکند، قبول می کنیم:

مثال ۱۱۵:

$$\frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1$$

$$\frac{2}{x-2} + \frac{x-1}{x-3} = 5$$

تست ۱: معادله $\frac{x}{2-x} + \frac{2}{x} = -\frac{2}{2}$ چند جواب دارد؟

- (۱) فقط یک جواب مثبت (۲) فقط یک جواب منفی
(۳) دو جواب هم علامت (۴) دو جواب غیر هم علامت

تست ۲: مجموع ریشه های $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{160}{9}$ کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۲)

- (۱) 1 (۲) $1/75$ (۳) 2 (۴) $2/25$

تست ۳: معادله $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{2-x}{x^2-x}$ چند جواب دارد؟

- (۱) دو جواب مثبت
(۲) دو جواب منفی
(۳) یک جواب منفی
(۴) جواب ندارد

نکته: در برخی از معادلات گویا پارامتر وجود دارد که برای حل ریشه معادله که در صورت سوال داده شده است را داخل معادله می گذاریم و پارامتر را پیدا می کنیم. سپس معادله را حل کرده و جواب دیگر را می یابیم.

مثال ۱۱۶: به ازای کدام مقدار a معادله $\frac{x-2}{ax-5} = \frac{a+2}{x-1}$ دارای جواب $x = 3$ است؟

- (۱) $-\frac{1}{3}, -2$ (۲) $-\frac{1}{3}, 2$ (۳) $-\frac{2}{3}, 1$ (۴) $\frac{2}{3}, 1$

مثال ۱۱۷: اگر $x = 4$ یک جواب معادله $\frac{x-a}{x^2-x-6} - \frac{1}{x^2-4} = \frac{a-1}{2x-4}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۵ (۳) ۲ (۴) جواب دیگر ندارد.

نکته: در حل مسائل معادلات گویا ابتدا با توجه به صورت مسئله یک معادله گویا می نویسیم و سپس آن را حل می کنیم:

مثال ۱۱۸: دو کارگر اگر کاری را با هم انجام دهند ۶ روزه تمام می شود و اگر به تنهایی انجام دهند کارگر اول کل کار را ۵ روز زودتر از کارگر دوم انجام می دهد. هر یک از کارگرها به تنهایی در چند روز کار را انجام می دهند؟

مثال ۱۱۹: بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می کند. اگر هر دو با هم کار کنند در ۲۰ ساعت این کار انجام میشود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می دهد؟ (داخل ۹۸)

- (۱) ۳۲ (۲) ۳۳ (۳) ۳۵ (۴) ۳۶

مثال ۱۲۰: سرعت یک قایق موتوری در آب را که ۱۰۰ متر در دقیقه است، این قایق فاصله ۱۲۰۰ متری در رودخانه را رفته و برگشته است. اختلاف زمان رفت و برگشت ۵ دقیقه است. سرعت آب رودخانه چند متر در دقیقه است؟ (داخل ۹۸)

- (۱) ۱۲ (۲) ۱۵ (۳) ۲۰ (۴) ۲۵

مثال ۱۲۱: در یک مغازه ماهی در محلول آب نمک ۷ درصدی نگهداری می شود. یک کارگر ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته، چگونه این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

- (۱) نمک به اندازه موجود است.
(۲) نمک در مغازه موجود نیست.
(۳) فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود است.

مثال ۱۲۲: یازده کیلوگرم رنگ با غلظت ۴۰ درصد، با ۴ کیلوگرم رنگ از همان نوع با غلظت ۷۰ درصد مخلوط شده اند. با تبخیر چند کیلو گرم از آن غلظت محلول به ۵۰ درصد می رسد؟ (خارج ۱۳۹۲)

- (۱) ۰/۴ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۶ (۴) ۰/۸

مثال ۱۲۳: در یک مستطیل نسبت مجموع طول و عرض به طول مستطیل برابر نسبت طول مستطیل به عرض آن است. نسبت طول به عرض مستطیل را پیدا کنید.

نکته: معادلات گویا مرتبط با p و s و تفاضل ریشه ها در معادله درجه دوم:

مثال ۱۲۴: به ازای کدام مقدار k مجموع ریشه های معادله $\frac{k}{x} + \frac{x}{x-3} = 2$ برابر ۷ است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

نکته: معادلات گویایی که با تغییر متغیر حل می شوند:

مثال ۱۲۵: معادله $\frac{1}{x^2-3x-2} + \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x^2-3x}$ را حل کنید.

معادلات گنگ (رادیکال)

معادلاتی که در آنها x زیر رادیکال باشد را گنگ می گوئیم.

هرچند بار که لازم باشد طرفین را به توان فرجه می رسانیم تا رادیکال ها از بین برود. فقط در آخر جواب هایی را می پذیریم که در معادله اولیه صدق می کند.

تذکر: زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر است. خروجی رادیکال نیز باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد.

مثال ۱۲۶: معادلات زیر را حل کنید.

$$\textcircled{1} x + \sqrt{x-3} = 3$$

$$\textcircled{2} x - \sqrt{x-2} = 4$$

$$\textcircled{3} \sqrt{x+1} + 4 = 2x$$

$$\textcircled{4} \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$$

$$\textcircled{5} \sqrt{x-1} + \sqrt{x+4} = \sqrt{2x+15}$$

$$\textcircled{6} \sqrt{x+3} + \frac{2}{\sqrt{x+2}} = 3$$

مثال ۱۲۷: معادله $\sqrt{x+2} + 4 = x$ را حل کنید. (خرداد ۱۴۰۳)

مثال ۱۲۸: کدام عدد صحیح ۶ واحد از جذرش بیشتر است؟

مثال ۱۲۹: عدد صحیحی بیابید که تفاضل آنها از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

مثال ۱۳۰: عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر با نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

مثال ۱۳۱: معادله ای شامل دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن باشد.

نکته: حل معادلات گنگ به کمک دامنه و برد:

گاهی دامنه توابع موجود در معادله اشتراکی ندارد و معادله جواب ندارد و گاهی اشتراک دامنه ها یک یا چند نقطه است که با جایگذاری و برابر شدن طرفین معادله آنها را پیدا می کنیم.

مثال ۱۳۲: معادله $\sqrt{x} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2-x} + \sqrt{2x-2}$ چند جواب حقیقی دارد؟

مثال ۱۳۳: معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه حقیقی دارد؟ (تجربی دی ۱۴۰۲)

(۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۱ (۴) صفر

نکته: مجموع عبارات نامنفی برابر صفر است.

مثال ۱۳۴: معادله $(x^2 - 4x + 3)^6 + \sqrt[4]{4x^3 - x^2 - x - 2} = 0$ چند ریشه حقیقی دارد؟

(۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

مثال ۱۳۴: به ازای کدام مقدار a ، $\sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^3 + ax + 2} = 0$ دارای ریشه است؟

- (۱) -۳ (۲) -۴ (۳) -۵ (۴) -۶

نکته: در حل معادلات گنگ از تغییر متغیر نیز می توان استفاده کرد.

مثال ۱۳۵: حاصل ضرب ریشه های معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟ (داخل ۱۳۹۴)

- (۱) -۲ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۴

تست ۴: اگر $2 = 3a + \sqrt{2a^2 + 4a}$ باشد، مقدار $\frac{a+1}{a}$ کدام است؟

- (۱) ۱/۵ (۲) ۲/۵ (۳) ۳/۵ (۴) ۴/۵

تست ۵: اگر $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$ باشد، مقدار $4a + 9$ کدام است؟ (خارج ۱۳۹۸)

- (۱) ۴ (۲) ۶ (۳) ۱۵ (۴) ۲۱

تست ۶: در معادله $2x + 1 = \sqrt{11x - 2}$ قدر مطلق تفاضل دو ریشه کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{4}$ (۲) $\frac{1}{2}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{3}{2}$

تست ۷: معادله $3x - 2 + \sqrt{4x - 3}$ از نظر تعداد جواب ها چگونه است؟

- (۱) یک جواب
(۲) دو جواب هم علامت
(۳) دو جواب غیر هم علامت
(۴) جواب ندارد

تست ۸: تعداد و علامت جواب معادله $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x+5} = 1$ چگونه است؟

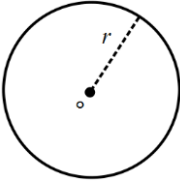
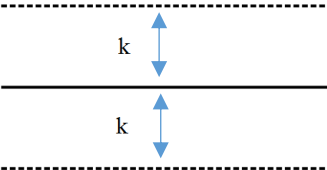
- (۱) یک جواب منفی
(۲) فقط یک جواب مثبت
(۳) دو جواب مثبت و منفی
(۴) دو جواب مثبت

تست ۹: تعداد جواب های معادله $\sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{x^2 + 2x} = 0$ کدام است؟

- (۱) ۳
(۲) ۲
(۳) ۱
(۴) ۵

ترسیم های هندسی

مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه که دارای ویژگی مشترکی هستند را مکان هندسی می گوئیم. برخی از مکان هندسی های مهم در جدول زیر آمده اند.

شکل	توصیف مکان هندسی	نام مکان هندسی
	مجموعه نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله r هستند.	دایره به مرکز O و شعاع r
	مجموعه نقاطی که از خط L به فاصله k باشند.	دو خط موازی با خط L