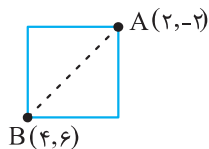


متوسط

-۴

حواستون باشه! برای به دست آوردن فاصله دو نقطه $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ از رابطه $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ استفاده می‌کنیم پس: ۲ رأس مقابل در مربع به صورت شکل مقابل است:



فاصله AB قطر مربع را می‌دهد و می‌دانیم (طول ضلع) $(\sqrt{2})$ قطر

$$AB = \sqrt{(4-2)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

پس طول ضلع مربع $\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}$ خواهد بود در نتیجه مساحت مربع:

$$S = \left(\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{2}}\right)^2 = 4 \times \frac{17}{2} = 34 \quad \text{یا} \quad S = \frac{(\text{قطر})^2}{2} = \frac{68}{2} = 34$$

آسان

-۵

فاصله نقطه‌ای روی دایره تا مرکز دایره را شعاع دایره می‌نامند پس:

$$r = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-2)^2} = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$$

دشوار

-۶

حواستون باشه! نقاط روی نیمساز ربع اول و سوم از رابطه $y = x$ پیروی می‌کنند پس نقاط به صورت (α, α) .

فاصله (α, α) تا $(0, 3)$ را برابر ۴ قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{(\alpha-0)^2 + (\alpha-3)^2} = 4$$

$$\alpha^2 + \alpha^2 - 6\alpha + 9 = 16 \Rightarrow 2\alpha^2 - 6\alpha - 7 = 0$$

مجموع طول‌های خواسته شده بنا به معادلات درجه ۲ از رابطه $\frac{-b}{a}$ به دست

$$\text{می‌آید. پس } \frac{-(-6)}{2} = 3$$

آسان

-۷

حواستون باشه! بنا به فرمول یافتن نقطه وسط پاره خط اگر:

$$\begin{array}{l} \text{A}(x_A, y_A) \quad \text{M} \quad \text{B}(x_B, y_B) \\ \text{A}(x_A, y_A) \quad (e, f) \quad ?(x_B, y_B) \end{array} \quad \begin{array}{l} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{array}$$

$$\text{تصویر } x_B = 2e - x_A$$

$$\text{تصویر } y_B = 2f - y_A$$

پس بنا به فرمول داریم:

$$\text{تصویر } x = 2(2) - 3 = 1$$

$$\text{تصویر } y = 2(1) - (-1) = 3$$

پس نقطه تصویر $(1, 3)$ است.



آسان

-۱

حواستون باشه!

(۱) فرمول معادله به صورت $y = ax + b$ و یا $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.

(۲) محل تلاقی به معنای حل دستگاه و یا جایگذاری است.

(۳) شرط موازی بودن دو خط برابر بودن شیبها و شرط عمود بودن دو خط قرینه و معکوس بودن شیبهاست.

ابتدا محل تلاقی خط $y = x - 2$ و محور x را به دست می‌آوریم.

$$y = 0 \Rightarrow 2(0) = x - 2 \Rightarrow x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس نقطه $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ در معادله خط جدید صدق می‌کند و با خط $3y = x + 2$

موازی است پس شیبهای برابر دارند و شیب خط $3y = x + 2$ برابر $\frac{1}{3}$

$$\text{است پس: } y - 0 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

آسان

-۲

ابتدا فرمول معادله خط $y - y_1 = m(x - x_1)$ را می‌نویسیم. شرط عمود بودن قرینه و معکوس بودن شیبهاست پس:

$$\frac{-2}{3} = \text{شیب} \rightarrow \text{عمود} = \frac{3}{2} = \frac{-(-3)}{2} = \text{شیب} \Rightarrow \frac{-(-3)}{2} = \text{شیب} \Rightarrow \frac{-2}{3} = \text{شیب}$$

نقطه مورد نظر با $x = 2$ را در معادله خط $y + 2x = 3$ جایگذاری می‌کنیم تا $y = -1$ به دست آید.

$$y - (-1) = \frac{-2}{3}(x - 2) \xrightarrow{\times 3} 3y + 3 = -2x + 4 \Rightarrow 3y = -2x + 1$$

دشوار

-۳

(آ) برای مشخص کردن نوع مثلث داریم: [طول اضلاع و شیبها را بیابید]

$$AB = \sqrt{(5-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$AC = \sqrt{(2+2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(-2-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

چون $5\sqrt{2}$ از بقیه ضلعها بزرگتر است و رابطه فیثاغورس بین اضلاع برقرار است پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

(پ) چون مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است پس:



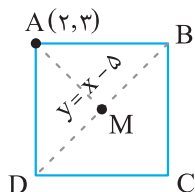
$$\text{محیط} = 5 + 5 + 5\sqrt{2} = 10 + 5\sqrt{2}$$

$$\text{مساحت} = \frac{5 \times 5}{2} = \frac{25}{2}$$

دشوار

-۱۱

با توجه به اینکه نقطه در خط صدق نمی‌کند پس:



ابتدا معادله خط AM را به دست می‌آوریم چون شیب AM قرینه و معکوس

قطر است پس شیب AM (-1) است.

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = -1(x - 2)$$

$$y - 3 = -x + 2 \Rightarrow y = -x + 5$$

محل برخورد AM و قطر BD جواب مسئله است.

$$\begin{cases} y + x = 5 \\ y - x = -5 \end{cases}$$

$$2y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 5$$

$$M(5, 0)$$

متوسط

-۱۲

با استفاده از فاصله نقطه از خط داریم:

$$ax + 4y - 1 = 0 \text{ و } A(1, 2)$$

$$\frac{|a + 8 - 1|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow \frac{|a + 7|}{\sqrt{a^2 + 16}} = 2 \Rightarrow |a + 7| = 2\sqrt{a^2 + 16}$$

$$a^2 + 14a + 49 = 4(a^2 + 16) \Rightarrow a^2 + 14a + 49 = 4a^2 + 64$$

$$3a^2 - 14a + 15 = 0 \Rightarrow (3a - 5)(a - 3) = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{3}, a = 3$$

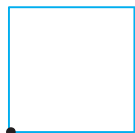
آسان

-۱۳

چون نقطه A در ضلع داده شده صدق نمی‌کند سپس فاصله A تا خط

$3x - 4y = 9$ طول ضلع مربع را می‌دهد پس:

$$3x - 4y = 9$$



$$A(2, 3)$$

$$3x - 4y - 9 = 0$$

$$\text{طول ضلع} = \frac{|3(2) - 4(3) - 9|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|6 - 12 - 9|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

$$S = 3^2 = 9 \text{ پس مساحت مربع}$$

دشوار

-۸

اگر نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ باشد یعنی نقاطی به صورت $(\alpha, 2\alpha)$ خواهد

بود. حالا فاصله این نقطه از مبدا مختصات و نقطه $A(2, 4)$ می‌یابیم:

$$\sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2\alpha - 0)^2} + \sqrt{(\alpha - 2)^2 + (2\alpha - 4)^2} = 5$$

$$\sqrt{\alpha^2 + 4\alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4 + 4\alpha^2 - 16\alpha + 16} = 5$$

$$\sqrt{5\alpha^2} + \sqrt{5\alpha^2 - 20\alpha + 20} = 5 \Rightarrow \sqrt{5}|\alpha| + \sqrt{5}|\alpha - 2| = 5$$

باتوجه به بسط قدر مطلق‌ها داریم:

$$\alpha < 0: -\sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow -2\sqrt{5}\alpha = 5 - 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$0 \leq \alpha \leq 2: \sqrt{5}\alpha - \sqrt{5}\alpha + 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5} \neq 5$$

$$\alpha > 2: \sqrt{5}\alpha + \sqrt{5}\alpha - 2\sqrt{5} = 5 \Rightarrow 2\sqrt{5}\alpha = 5 + 2\sqrt{5} \Rightarrow \alpha = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

آسان

-۹

حواستون باشه! باتوجه به تمرین کتاب درسی اگر A, B, C, D چهار رأس

متوازی الاضلاع باشد داریم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

ابتدا رأس پیدا می‌کنیم:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 3 + 4 = 2 + x_D \Rightarrow 5 = x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 1 + (-2) = 0 + y_D \Rightarrow y_D = -1$$

حالا فاصله نقطه B و D را پیدا می‌کنیم:

$$BD = \sqrt{(2 - 5)^2 + (0 + 1)^2} \Rightarrow BD = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

متوسط

-۱۰

چون نقطه داده شده در خط صدق نمی‌کند پس روی ضلع قرار ندارد در نتیجه:

$$2x + y = 3$$



$$A(2, 1)$$

فاصله نقطه A تا خط $2x + y - 3 = 0$ طول ضلع مربع است پس:

$$\text{طول ضلع} = \frac{|2(2) + 1 - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$$

دشواری

-۱۷

ابتدا برای یافتن H معادله خط AH و معادله خط BC را به دست می‌آوریم تا دستگاه حل کنیم:
معادله خط BC :

$$BC \text{ شیب} = \frac{-2 - (-1)}{8 - 1} = \frac{-1}{7} p$$

$$y + 1 = \frac{-1}{7}(x - 1) \Rightarrow y + 1 = \frac{-1}{7}x + \frac{1}{7} \Rightarrow y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7}$$

معادله خط AH :

$$AH \text{ شیب} = 7$$

$$y - 2 = 7(x - 4) \Rightarrow y = 7x - 28 + 2 \Rightarrow y = 7x - 26$$

دستگاه حل می‌کنیم. تا محل برخورد BC و AH را بیابیم که همان نقطه H است.

$$\begin{cases} y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7} \\ -y = -7x + 26 \end{cases}$$

$$0 = -\frac{50}{7}x + \frac{176}{7} \Rightarrow 176 = 50x \Rightarrow x = \frac{176}{50} = \frac{88}{25}, y = \frac{34}{25}$$

$$H\left(\frac{88}{25}, \frac{34}{25}\right)$$

برای یافتن M نقطه وسط BC را می‌یابیم: $M\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$$MH = \sqrt{\left(\frac{88}{25} - \frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{34}{25} + \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{49}{50}\right)^2 + \left(\frac{143}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{22850}{2500}} = \sqrt{9.14}$$

متوسط

-۱۸

$$\text{وسط } AB = O = \left(\frac{6+2}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right) = (4, 1)$$

$$r = OA = \sqrt{(2-4)^2 + (-2-1)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

ب) اگر اندازه OC به اندازه شعاع دایره باشد یعنی C روی محیط دایره قرار دارد.

$$OC = \sqrt{(4-7)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} = r$$

پس C روی محیط دایره قرار دارد.

متوسط

-۱۹

ابتدا با توجه به شیب دو ضلع متوجه می‌شویم چون قرینه و معکوس یکدیگر هستند پس حتماً دو ضلع مجاور هم هستند سپس با حل کردن دستگاه مختصات c را می‌یابیم.

$$\begin{matrix} A(5, 2) & B \\ & 3x + y = 3 \\ D & x - 3y = 1 & C \end{matrix}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 3 \\ x - 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3x + y = 3 \\ -3x + 9y = -3 \end{matrix}$$

$$10y = 0 \Rightarrow y = 0, x = 1$$

$$c(1, 0)$$

مختصات محل برخورد قطرها، نقطه وسط قطر AC است پس:

$$M = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{0+2}{2}\right) \Rightarrow M = (3, 1)$$

متوسط

-۱۴

حواستون باشه! عمود منصف دارای ویژگی عمود بودن (شیب‌های قرینه و معکوس) و میانه بودن پاره خط است. $AB = \frac{-3-15}{0-6} = \frac{-18}{-6} = 3$

پس شیب عمودمنصف $-\frac{1}{3}$ خواهد بود.

$$AB \text{ وسط پاره خط } M = (3, 6) = \left(\frac{0+6}{2}, \frac{-3+15}{2}\right)$$

پس معادله عمودمنصف:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 3) \Rightarrow y - 6 = -\frac{1}{3}x + 1$$

از صدق دادن نقطه p در معادله متوجه می‌شویم:

$$y = -\frac{1}{3}x + 7 \Rightarrow 11 = -\frac{1}{3}(-12) + 7 = 4 + 7 = 11$$

نقطه p روی خط قرار دارد.

متوسط

-۱۵

حواستون باشه! وقتی حرف از میانه باشه به نقطه وسط پاره خط احتیاج داریم. (آ) چون طول میانه خواسته شده ابتدا نقطه M پیدا می‌کنیم سپس از فاصله دو نقطه طول AM را پیدا می‌کنیم: $M = \frac{BC \text{ وسط}}{\rightarrow} \left(\frac{3+7}{2}, \frac{11+1}{2}\right) = (5, 6)$

$$AM = \sqrt{(5-1)^2 + (6-9)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

ب) معادله میانه به معنای نوشتن معادله خط است پس:

$$\text{شیب } AM = \frac{6-9}{5-1} = \frac{-3}{4}$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}(x - 5) \Rightarrow y - 6 = \frac{-3}{4}x + \frac{15}{4}$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{39}{4}$$

متوسط

-۱۶

(آ) مثلث متساوی الساقین دو ضلع برابر دارد پس طول اضلاع را به دست می‌آوریم:

$$AB = \sqrt{(-6+1)^2 + (-2-7)^2} = \sqrt{25+81} = \sqrt{106}$$

$$AC = \sqrt{(3+1)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(3+6)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{81+25} = \sqrt{106}$$

پس چون $BC = AB$ ، مثلث متساوی الساقین است.

ب) حواستون باشه! عمودمنصف و ارتفاع به فاصله نقطه از خط، شیب‌های قرینه و معکوس مربوط است.

عمودمنصف BC شیبی قرینه معکوس BC خواهد داشت پس:

$$\text{شیب } BC = \frac{-2-3}{-6-3} = \frac{-5}{-9} = \frac{5}{9} \xrightarrow{\text{قرینه معکوس}} \frac{-9}{5}$$

عمودمنصف از وسط ضلع BC نیز می‌گذرد پس:

$$BC \text{ وسط} = \left(\frac{-6+3}{2}, \frac{3+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$BC \text{ معادله: } y - \frac{1}{2} = -\frac{9}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) \xrightarrow{\times 10} 10y - 5 = -18x - 27$$

$$18x + 10y + 22 = 0$$

ت) فاصله نقطه A تا خط BC را به دست می‌آوریم:

$$AH = \frac{|18(-1) + 10(7) + 22|}{\sqrt{18^2 + 10^2}} = \frac{74}{\sqrt{344}}$$

متوسط

-۲۴

فاصله مرکز دایره از خطوط مماس برابر شعاع دایره است پس در نتیجه این دو فاصله با یکدیگر برابر است.

فاصله $(-1, 4)$ تا خط $3x + 4y + 2 = 0$:

$$\frac{|3(-1) + 4(4) + 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|-3+16+2|}{\sqrt{25}} = \frac{15}{5} = 3$$

فاصله $(-1, 4)$ تا خط $5x - 12y - k = 0$:

$$\frac{|5(-1) - 12(4) - k|}{\sqrt{25+144}} = \frac{|-5-48-k|}{\sqrt{169}} = \frac{|-53-k|}{13}$$

$$\frac{|-53-k|}{13} = 3 \Rightarrow |-53-k| = 39 \Rightarrow -53-k = 39$$

$$-53 - 39 = k \Rightarrow k = -92$$

$$-53 - k = -39 \Rightarrow -53 + 39 = k \Rightarrow k = -14$$

متوسط

-۲۵

(آ) محل برخورد سهمی با محور x ها یعنی $y = 0$

$$x^2 - 8x - 20 = 0 \Rightarrow (x-10)(x+2) = 0$$

$$x = 10, x = -2$$

(ب) طول AB فاصله x های به دست آمده:

$$|x_B - x_A| = |10 - (-2)| = 12$$

(پ) بیشترین ضخامت در y رأس به دست می آید:

$$y_S = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-[-64 - 4(-20)]}{4} = \frac{-[64 + 80]}{4} = \frac{-144}{4} = -36$$

پس بیشترین ضخامت ۳۶ است.

دشوار

-۲۶

مختصات محل تلاقی سه خط در هر سه آن ها صدق می کند.

با قرار دادن رو خط معلوم در دستگاه دو معادله و دو مجهول، مختصات محل تلاقی را مشخص می کنیم.

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases} \xrightarrow{\times(-2)} \begin{cases} -2x - 2y - 2 = 0 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

$$y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \text{ و } x = -2$$

نقطه $(-2, 1)$ در خط $mx + 7y = 5$ صدق می کند:

$$m(-2) + 7(1) = 5 \Rightarrow -2m = -2 \Rightarrow m = 1$$

دشوار

-۲۷

$$r = OS = \sqrt{x^2 + 64} = 10$$

$$x^2 + 64 = 100 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = 6$$

(ب)

$$P(-10, 0) \Rightarrow \text{شیب } PS = \frac{8-0}{6-(-10)} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$Q(10, 0) \Rightarrow \text{شیب } SQ = \frac{8-0}{6-10} = \frac{8}{-4} = -2$$

(پ) چون شیب های قرینه و معکوس یکدیگرند سپس در رأس S قائمه است.

متوسط

-۲۰

حواستون باشه! این فرمول را حتما بخاطر بسپارید.

$$\text{فاصله دو خط موازی} = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

اثبات: (۱) ابتدا نقطه ای از خط $ax + by + c = 0$ در نظر می گیریم.

$$\left(\alpha, -\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}\right)$$

(۲) فاصله این نقطه را از خط $ax + by + c' = 0$ به دست می آوریم:

$$\frac{|a\alpha + b(-\frac{a}{b}\alpha - \frac{c}{b}) + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a\alpha - a\alpha - c + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

متوسط

-۲۱

با توجه به فرمول به دست آمده در سوال قبل:

$$\sqrt{3}y - 3x + 5 = 0$$

$$y - \sqrt{3}x + 1 = 0 \xrightarrow{\times\sqrt{3}} \sqrt{3}y - 3x + \sqrt{3} = 0$$

$$\frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-3)^2}} = \frac{|5 - \sqrt{3}|}{\sqrt{3+9}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{12}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$$

آسان

-۲۲

نقطه روی خط $y = x + 1$ به صورت $(\alpha, \alpha + 1)$ است.

$$\frac{|2\alpha - \alpha - 1 + 3|}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5} \Rightarrow \frac{|\alpha + 2|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow |\alpha + 2| = 5$$

$$\alpha + 2 = 5 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$\alpha + 2 = -5 \Rightarrow \alpha = -7$$

متوسط

-۲۳

باتوجه به شیب های خط خطوط داریم:

$$\begin{array}{ccc} A & 2x+3y+5=0 & B \\ x-2y-1=0 & \square & x-2y-3=0 \\ D & 2x+3y-1=0 & C \end{array}$$

ابتدا فاصله دو ضلع موازی AB و DC را می یابیم:

$$BC = AD = \frac{|5 - (-1)|}{\sqrt{4+9}} = \frac{6}{\sqrt{13}}$$

سپس فاصله دو ضلع موازی AD و BC را می یابیم:

$$AB = DC = \frac{|-1 - (-3)|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\text{محیط} = 2\left(\frac{6}{\sqrt{13}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$



آسان

۱- گزینه «۳»

$$x_A = 2n - 3, \quad y_A = \frac{1}{2} - 3n$$

$$x_A = 3y_A + 1 \Rightarrow 2n - 3 = 3\left(\frac{1}{2} - 3n\right) + 1$$

$$\Rightarrow 2n - 3 = \frac{3}{2} - 9n + 1 \Rightarrow 11n = \frac{11}{2} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A(-2, -1) \Rightarrow A \text{ در ربع سوم قرار دارد.}$$

آسان

۲- گزینه «۳»

A در ربع دوم است بنابراین x منفی و y مثبت است.

$$-2m < 0 \Rightarrow m > 0, \quad 3m - 1 > 0 \Rightarrow m > \frac{1}{3}$$

باتوجه به گزینه‌ها تنها گزینه ۳ می‌تواند جواب باشد اما ادامه با حل آن داریم:
اگر بخواهد فاصله A تا محورهای یکسان باشد یعنی باید قدرمطلق طول و عرض آن برابر باشند:

$$|x| = |y| \Rightarrow \begin{cases} 3m - 1 = -2m \Rightarrow 5m = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{5} \text{ غ ق} \\ 3m - 1 = 2m \Rightarrow m = 1 \text{ ق ق} \end{cases}$$

آسان

۳- گزینه «۳»

در ربع چهارم طول مثبت و عرض منفی است.

$$m + 2 > 0 \Rightarrow m > -2$$

$$3m + 1 < 0 \Rightarrow m < -\frac{1}{3} \quad \cap \quad -2 < m < -\frac{1}{3}$$

آسان

۴- گزینه «۲»

طول نقطه M متشکل از یک عبارت نامنفی و یک عدد مثبت است پس همواره مثبت است پس تا اینجا نواحی ۲ و ۳ حذف هستند.

اما در مورد علامت $n^2 - 1$ نمی‌توان نظری داد یعنی ممکن است مثبت، منفی یا صفر باشد طبق گفته سوال روی مرز است پس $n^2 - 1 = 0$ و $n = \pm 1$ است و نقطه روی مرز نواحی ۱ و ۴ قرار دارد.

آسان

۲۸-

فاصله pA و pB را حساب کرده فاصله کم‌تر جواب مسئله است.

$$pA = \sqrt{(50-10)^2 + (30+20)^2} = \sqrt{1600 + 2500} = \sqrt{4100}$$

$$pB = \sqrt{(50-80)^2 + (30-90)^2} = \sqrt{900 + 3600} = \sqrt{4500}$$

چون $pA < pB$ است پس پایگاه A مناسب‌تر است.

متوسط

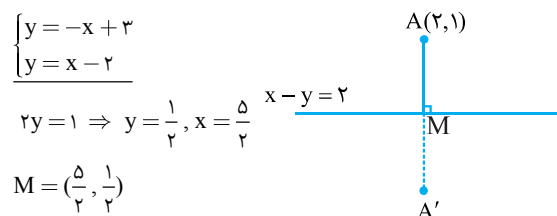
۲۹-

(۱) ابتدا معادله خط AM را می‌یابیم:

چون $x - y = 2$ عمود بر AM است شیب آن قرینه و معکوس است:

$$y - 1 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 3 \quad \text{معادله خط}$$

محل تلاقی $x - y = 2$, $y = -x + 3$ نقطه M خواهد بود.



حال قرینه A(2, 1) را نسبت به $M(\frac{5}{2}, \frac{1}{2})$ پیدا می‌کنیم:

$$x = 2\left(\frac{5}{2}\right) - 2 = 3$$

$$(3, 0)$$

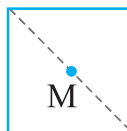
$$y = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = 0$$

آسان

۳۰-

فاصله نقطه M تا خط $2y + x = 1$ نصف طول ضلع مربع است پس:

$$2y + x = 1$$



$$\frac{|2(4) + 0 - 1|}{\sqrt{4 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{5}}$$

یعنی طول ضلع مربع $\frac{14}{\sqrt{5}}$ است پس مساحت مربع:

$$S = \left(\frac{14}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{196}{5}$$

$$\Rightarrow 4y = 3\sqrt{3} \Rightarrow y = \frac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow x = \sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{9}{4} \Rightarrow C\left(\frac{9}{4}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$AB = 3$$

$$AC = \sqrt{\frac{81}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{108}{16}} = \frac{\sqrt{108}}{4}$$

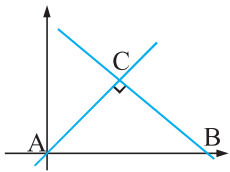
$$BC = \sqrt{\left(3 - \frac{9}{4}\right)^2 + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{27}{16}} = \sqrt{\frac{36}{16}} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

طول ضلع **AB** از همه بیشتر است که برابر ۳ است.

روش دوم:

دو خط $y + \sqrt{3}x = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}y = x$ بر هم عمودند پس خط **AB** وتر

مثلث قائم‌الزاویه است و بزرگترین ضلع محسوب می‌شود.



متوسط

۹- گزینه ۲»

چون نقطه **C** روی خط $y = 2x + 1$ است پس مختصات آن $C(x, 2x + 1)$ است:

$$AC = 5 \Rightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (2x+1)^2} = 5$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + 4x^2 + 4x + 1 = 25 \Rightarrow 5x^2 = 20 \Rightarrow x^2 = 4$$

$$\Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} C_1(2, 5) \\ C_2(-2, -3) \end{cases}$$

$$OC_1 = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

$$OC_2 = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

پس $\sqrt{29}$ بزرگ‌تر است.

حواست باشد فاصله نقطه $A(x_A, y_A)$ از مبدأ $\sqrt{x_A^2 + y_A^2}$ است.

متوسط

۱۰- گزینه ۳»

$$AB = \sqrt{(2 + \sqrt{2} - 2)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{2 + 1} = \sqrt{3}$$

$$AC = \sqrt{(3 - 2)^2 + (5 + \sqrt{2} - 5)^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

$$BC = \sqrt{(3 - 2 - \sqrt{2})^2 + (5 + \sqrt{2} - 4)^2} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2} \\ = \sqrt{1 + 2 - 2\sqrt{2} + 1 + 2 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{6}$$

از برابری $AB = AC$ نتیجه می‌گیریم مثلث متساوی‌الساقین است. اما از

اونجایی که در گزینه‌ها قائم‌الزاویه اومده پس بررسی می‌کنیم رابطه فیثاغورس

برقرار هست یا نه.

BC بزرگ‌ترین ضلع هست پس ممکنه وتر باشه:

$$(\sqrt{6})^2 = (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow 6 = 3 + 3$$

متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه است.

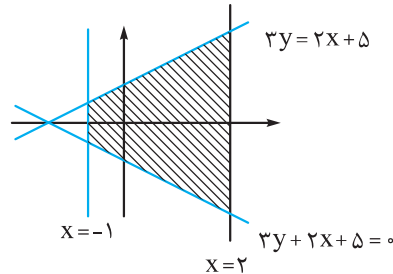
آسان

۵- گزینه ۳»

با کمی دقت در معادله‌های خطوط، می‌دانیم که دو خط $x = 2$, $x = -1$

موازی هم هستند اما دو خط دیگر با شیب‌های $\frac{2}{3}$ و $-\frac{2}{3}$ ارتباط خاصی باهم

ندارند. چهار ضلعی که فقط دو ضلع موازی دارد دوزنقه است.



متوسط

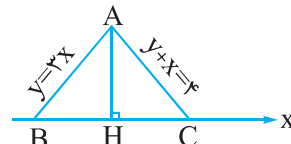
۶- گزینه ۴»

دو خط $y + x = 4$, $y = 3x$ با شیب‌های ۳ و -۱ هستند محل

تقاطع این دو خط، یک رأس مثلث را به ما می‌دهد.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3(1) = 3 \Rightarrow A(1, 3)$$



از آنجایی که ضلع سوم محور **x** هاست پس فاصله **A** تا محور **x** ارتفاع مثلث

را به ما می‌دهد که همان عرض **A** است پس $AH = 3$.

محل برخورد دو خط با محور **x** را هم به دست می‌آوریم:

$$y = 0 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\Rightarrow BC = 4 - 0 = 4 \Rightarrow S = \frac{1}{2} BC \times AH = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6$$

آسان

۷- گزینه ۴»

$$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$S = \text{عرض} \times \text{طول} \Rightarrow 15 = 5 \times x \Rightarrow x = 3$$

پس طول مستطیل ۵ و عرض آن ۳ هست.

دشواری

۸- گزینه ۱»

$$\begin{cases} y = 0 \\ \sqrt{3}y = x \end{cases} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A(0, 0)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow B(3, 0)$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}y = x \\ y + \sqrt{3}x = 3\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow y + \sqrt{3}(\sqrt{3}y) = 3\sqrt{3} \Rightarrow y + 3y = 3\sqrt{3}$$

۱۱- گزینه «۳»

آسان

$$A(-2, 0), B(x, y), O(0, 0)$$

$$AB = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$$

$$AO = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$BO = \sqrt{x^2 + y^2}$$

شرط متساوی‌الاضلاع بودن یک مثلث این هست که هر سه ضلع مساوی باشند:

$$\sqrt{(x+2)^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4 \quad (1)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \quad (2)$$

(۲) را در (۱) جای گذاری می‌کنیم:

$$4x + 4 + \cancel{y^2} = \cancel{y^2}$$

$$\Rightarrow 4x = -4 \Rightarrow x = -1 \xrightarrow{(2)} 1 + y^2 = 4$$

$$\Rightarrow y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow B(-1, \sqrt{3}) \text{ یا}$$

$$B(-1, -\sqrt{3}) \text{ در گزینه‌ها نیست.}$$

۱۲- گزینه «۱»

آسان

مختصات M به صورت $(x, 4x+2)$ نوشته می‌شود.

$$MA = MB \Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (4x+2-0)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (4x+2-\cancel{2})^2}$$

$$\xrightarrow{\text{توان } 2} \cancel{x^2} + \cancel{16x^2} + 16x + 4 = \cancel{x^2} + \cancel{16x^2} \Rightarrow 16x + 4 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

۱۳- گزینه «۴»

آسان

میانۀ وارد بر ضلع BC همان میانه‌ای است که از رأس A به وسط BC وصل شده پس ابتدا M وسط BC رو پیدا می‌کنیم و بعد طول AM رو به دست می‌آییم.

$$M \begin{vmatrix} x_B + x_C \\ 2 \\ y_B + y_C \\ 2 \end{vmatrix} \Rightarrow M \begin{vmatrix} 2+0 \\ 2 \\ 1+5 \\ 2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow M(1, 3)$$

$$AM = \sqrt{(1+1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

متوسط

۱۴- گزینه «۴»

نقاط A و B نیز روی خط قرار دارند و $C(x, x-2)$. نقطه C از A و B به یک فاصله است بنابراین C وسط پاره خط AB است یعنی:

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow C(2, 1)$$

$$y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{5-3}{2} = 1$$

عرض نقطه C برابر ۱ است.

۱۵- گزینه «۴»

دشووار

$$a \times a' = -1 \Rightarrow a' = -\frac{1}{a}$$

$$a + a' = 1 \Rightarrow a - \frac{1}{a} = 1 \Rightarrow a^2 - a - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad a' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$y = ax + b \Rightarrow y = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)x + b$$

$$y = a'x + b' \Rightarrow y = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)x + b'$$

با شیب منفی کار داریم پس نقطه A را در معادله دوم قرار می‌دهیم:

$$A(2, 1) \Rightarrow 1 = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)(2) + b' \Rightarrow b' = \sqrt{5}$$

۱۶- گزینه «۲»

دشووار

شیب خط برابر $-\frac{3}{4}$ هستش پس شیب MH برابر $\frac{4}{3}$ هست که همیشه:

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1) : \text{معادله خط MH}$$

$$\Rightarrow 3y - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - 3y + 2 = 0$$

H محل تلاقی در خط است.

$$\begin{cases} 4x - 3y = -2 \\ 3x + 4y = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16x - 12y = -8 \\ 9x + 12y = 108 \end{cases} \Rightarrow 25x = 100 \Rightarrow x = 4$$

$$\xrightarrow{\text{معادله اول}} 16 - 3y = -2 \Rightarrow 16 + 2 = 3y \Rightarrow 3y = 18 \Rightarrow y = 6$$

$$\Rightarrow H(4, 6)$$

البته خواسته سوال فقط $x = 4$ است.

۱۷- گزینه «۲»

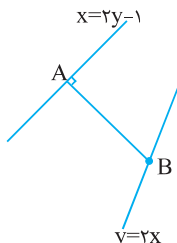
متوسط

$$x = 2y - 1 \xrightarrow{y=2} x = 3 \Rightarrow A(3, 2)$$

شیب خط $x = 2y - 1$ برابر $\frac{1}{2}$ است پس شیب AB برابر ۲- است اگر

فرض کنیم $B(x, y)$ باشد:

$$\text{معادله خط AB: } y - 2 = -2(x - 3) \Rightarrow 2x + y = 8$$



از طرفی B روی خط $y = 2x$ قرار دارد پس:

$$2x + y = 8 \xrightarrow{y=2x} 2x + 2x = 8 \Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow B(2, 4)$$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{(2-3)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

دشوار

۲۲- گزینه «۱»

$$x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{x}{2}$$

پس فرض می‌کنیم مختصات نقطه به صورت $(x, -\frac{x}{2})$ باشد:

خط $y = x$ را به فرم استاندارد فاصله نقطه از خط می‌نویسیم:

$$x - y = 0 \Rightarrow \text{فاصله} = \frac{|x - (-\frac{x}{2})|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow |\frac{3x}{2}| = 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{3x}{2} = \pm 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \frac{3x}{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow 3x = 4\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow A(\frac{4\sqrt{2}}{3}, -\frac{2\sqrt{2}}{3}) \\ \frac{3x}{2} = -2\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{-4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow B(\frac{-4\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}) \end{cases}$$

$$AB = \sqrt{(\frac{8\sqrt{2}}{3})^2 + (\frac{4\sqrt{2}}{3})^2} = \frac{\sqrt{10}}{3} \times \sqrt{80} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$$

$$CH = \frac{|1(0) + 2(3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{20\sqrt{2}}{3} \times \frac{6}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{10}$$

متوسط

۲۳- گزینه «۲»

نقطه بر خط $y = x - 1$ را به صورت $A(x, x-1)$ در نظر می‌گیریم:

$$AH = \frac{|2x - 3(x-1) - 5|}{\sqrt{4+9}} = \frac{|2x - 3x + 3 - 5|}{\sqrt{13}} = \frac{|-x - 2|}{\sqrt{13}}$$

فاصله برابر $\sqrt{13}$ شده پس داریم:

$$\frac{|x+2|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Rightarrow |x+2| = 13 \Rightarrow \begin{cases} x+2 = 13 \Rightarrow x = 11 \\ x+2 = -13 \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

متوسط

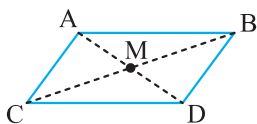
۲۴- گزینه «۳»

تو این مدل سوال‌ها اول چک می‌کنیم A در دو خط داده شده صدق می‌کند یا

نقطه‌ای خارج از این دو ضلع است؟

$A(7, 6)$ در هیچ‌کدام از خطوط صدق نمی‌کند پس A خارج از دو خط

هست. پس معادله خطوط داده شده مربوط به BD و DC هست.



$$\begin{cases} 2y - 3x = 11 \\ 3y + 4x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 4$$

$$A \begin{vmatrix} 7 \\ 6 \end{vmatrix}, D \begin{vmatrix} -1 \\ 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \text{وسط AD} M \begin{vmatrix} 3 \\ 5 \end{vmatrix} \Rightarrow M(3, 5)$$

بنابراین:

آسان

۱۸- گزینه «۳»

اگر خط d عمودمنصف پاره‌خط AB باشد، آن‌گاه هم بر آن عمود است یعنی شیب آن عکس و قرینه شیب AB است از وسط آن یعنی M می‌گذرد:

$$M(\frac{3-1}{2}, \frac{4+0}{2}) = (1, 2)$$

$$m_{AB} = \frac{4-0}{3-(-1)} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow m_d = -1$$

$$\Rightarrow y - y_0 = m_d(x - x_0) \Rightarrow y - 2 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1 + 2$$

$$\Rightarrow y = -x + 3 \text{ یا } x + y = 3$$

آسان

۱۹- گزینه «۲»

$$AB: \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1, 1)$$

$$AC: \begin{cases} 2x - y = 1 \end{cases}$$

برای محاسبه طول ارتفاع AH کافیه فاصله A از BC به دست بیاوریم

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|1(1) + 1(1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

دشوار

۲۰- گزینه «۱»

قاعده را AC و ارتفاع BH در نظر می‌گیریم:

$$AC = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

فاصله نقطه B از قاعده BH =

بنابراین اول معادله خط AC رو می‌نویسیم:

$$m_{AC} = \frac{2-1}{-2-1} = \frac{-1}{3}$$

حالا با نقطه A، m_{AC} معادله می‌نویسیم:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1)$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} + 1 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \xrightarrow{\times 3} 3y = -x + 4$$

$$\Rightarrow x + 3y - 4 = 0 \xrightarrow{B(4,1)} BH = \frac{|4 + 3 - 4|}{\sqrt{1+9}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2} AC \times BH = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

توجه: راه‌حل تستی دیگری در تست شماره ۳۱ آورده شده که با داشتن مختصات سه رأس یک مثلث بتونیم مساحت رو پیدا کنیم. حتماً بهش سر بزن که خیلی جذابه!

دشوار

۲۱- گزینه «۱»

$$d_1: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases} \Rightarrow A(2, -1)$$

$$d_2: \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow B(-2, 2)$$

$$d_3: \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$$

$$d_4: \begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \Rightarrow C(\frac{2}{3}, -\frac{5}{3})$$

$$AC = \sqrt{(\frac{2}{3}-2)^2 + (-\frac{5}{3}+1)^2} = \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{4}{3}\sqrt{2}$$

$$m_{AC} = \frac{-\frac{5}{3} - (-1)}{\frac{2}{3} - 2} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{2} \Rightarrow y + 1 = x - 2 \text{ : معادله AC}$$

$$BH \text{ ارتفاع} = \frac{|-2-3-3|}{\sqrt{1+1}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\sqrt{2} \times \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{16}{3}$$

۲۵- گزینه «۳»

آسان

مختصات نقطه A رو با برخورد دادن AB, AC پیدا می‌کنیم و بعد به کمک

شیب BC, شیب خط AH به دست می‌آوریم و معادله می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} AB: & \begin{cases} 2y - x = 3 \\ y - 2x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - x = 3 \\ -2y + 4x = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 9 \\ 3x = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -9 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow y = 3 \end{aligned}$$

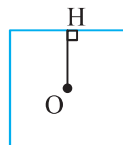
$$m_{BC} = \frac{-3}{2} \Rightarrow M_{AH} = \frac{2}{3}$$

$$AH: y - 3 = \frac{2}{3}(x - 3) \xrightarrow{\times 3} 3y - 9 = 2x - 6 \Rightarrow 3y - 2x = 3$$

۲۶- گزینه «۴»

متوسط

معادله رو به فرم استاندارد بنویسیم:



$$x - 2y + 5 = 0$$

$$OH = \frac{|3 + 2 + 5|}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \Rightarrow \text{طول ضلع} = \frac{20}{\sqrt{5}}$$

$$S = \left(\frac{20}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{400}{5} = 80$$

۲۷- گزینه «۱»

دشوار

معادله خط به فرم استاندارد به صورت $mx - 2y + b = 0$ هست و از طرفی

(۱, ۲) نقطه‌ای از خط است پس در معادله صدق می‌دهیم:

$$m(1) - 2(2) + b = 0 \Rightarrow m + b = 4 \quad (1)$$

فاصله $O(0, 0)$ تا خط رو به دست بیاریم:

$$OH = 1 \Rightarrow \frac{|b|}{\sqrt{m^2 + 4}} = 1 \Rightarrow \sqrt{m^2 + 4} = |b| \xrightarrow{\text{توان ۲}} m^2 + 4 = b^2$$

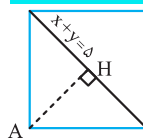
$$b^2 - m^2 = 4 \Rightarrow (b - m)(\underbrace{b + m}_f) = 4 \xrightarrow{(1)} b - m = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + m = 4 \\ b - m = 1 \end{cases}$$

$$2b = 5 \Rightarrow b = \frac{5}{2} \xrightarrow{\text{اولی}} \frac{5}{2} + m = 4 \Rightarrow m = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$$

۲۸- گزینه «۴»

متوسط



می‌دانیم که در مربع قطرهای هم بر همدیگر عمودند و هم یکدیگر را نصف

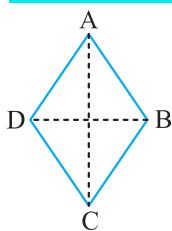
می‌کنند. پس فاصله رأس A تا قطر رو به دست می‌آریم:

$$AH = \frac{|-2 + 1 - 5|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

AH نصف یک قطر است پس طول قطر دو برابر AH است یعنی $6\sqrt{2}$

۲۹- گزینه «۱»

متوسط



حواست باشه اگه خود سوال ترتیب اسم‌گذاری رأس‌های یک چندضلعی رو

بهت نداد، خودت به ترتیب به صورت ساعتگرد یا پادساعتگرد اسم‌گذاری کنی

پس ABCD اسم لوزی ما هست.

لوزی یک نوع متوازی‌الاضلاع هست پس ویژگی رئوس متوازی‌الاضلاع رو

داره:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \Rightarrow 6 + 6 = 5 + x_D \Rightarrow x_D = 7$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow 2 + 8 = 5 + y_D \Rightarrow y_D = 5$$

$$\Rightarrow D(7, 5) \quad \text{هم عرض} \quad AC \quad |8 - 2| = 6 \quad \text{هم طول} \quad BD \quad |7 - 5| = 2$$

$$\Rightarrow S_{\text{لوزی}} = \frac{1}{2} (\text{حاصل ضرب قطرها}) = \frac{1}{2} \times 6 \times 2 = 6$$

۳۰- گزینه «۳»

دشوار

برای محاسبه مختصات محل تلاقی میانه‌های یک مثلث کافی بین Xها و Yهای

سه رأس میانگین بگیریم:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right) = (2, 0)$$

$$\Rightarrow GM = \sqrt{(2+1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$$

۳۱- گزینه «۲»

دشوار

برای محاسبه مساحت یک مثلث با داشتن مختصات سه رأس A, B, C از

فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3}) - (\textcircled{4} + \textcircled{5} + \textcircled{6})|$$

در این سوال داریم:

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |(-2 - 12 + 0) - (0 + 0 - 6)| = \frac{1}{2} |-8| = \frac{8}{2} = 4$$

متوسط

۳۵- گزینه «۴»

با توجه به فرمول فاصله نقطه از خط در مثلث ABC باید فاصله نقطه A تا خط BC را به دست آوریم پس ابتدا معادله خط BC را می‌نویسیم:

$$\text{شیب BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{-2 - 3}{2 - 7} = \frac{-5}{-5} = 1$$

$$\text{BC معادله خط } y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 7)$$

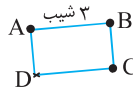
$$\Rightarrow y - x + 4 = 0$$

$$\text{فاصله A از BC } d = AH = \frac{|y - x + 4|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \frac{|5 - 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \quad \text{با گویا کردن جواب نهایی:}$$

دشوار

۳۳- گزینه «۳»



با توجه به شکل ابتدا معادله خط AB را می‌نویسیم:

$$\text{شیب } A(2, 4) \text{ و } B(3, 1) = 3$$

$$y - 4 = 3(x - 2) \Rightarrow y - 4 = 3x - 6 \Rightarrow y = 3x - 2$$

چون ضلع BC بر ضلع AB عمود است پس شیب‌های آن قرینه و معکوس

$$\text{یکدیگرند پس شیب BC} = -\frac{1}{3}$$

$$C(-3, -1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{3}(x + 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - 2$$

حال اگر، فاصله نقطه C از ضلع AB را به دست آوریم طول ضلع BC حساب

می‌شود پس:

$$y - 3x + 2 = 0, C(-3, -1) \Rightarrow BC = \frac{|-1 + 9 + 2|}{\sqrt{1 + 9}} = \frac{10}{\sqrt{10}} \times \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$$

از طرفی با حل دستگاه معادلات خط AB و BC می‌توان مختصات B را به

$$3x - 2 = -\frac{1}{3}x - 2 \quad \text{دست آورد پس:}$$

$$x = 0, y = -2 \quad B(0, -2) \Rightarrow AB = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

پس محیط مستطیل (عرض + طول) ۲

$$2(\sqrt{10} + 2\sqrt{10}) = 2(3\sqrt{10}) = 6\sqrt{10}$$

دشوار

۳۳- گزینه «۳»

طبق فرمولی که توی تست ۳۱ داشتیم، مساحت مثلث MNP را به دست می‌آوریم:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left| \frac{(2-6+3)}{5} - \frac{(9+4-4)}{9} \right| = \frac{1}{2} (4) = 2$$

از طرفی مثلثی که رئوسش نقاط میانی یک مثلث دیگر باشند، مساحتش $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث اصلی است پس:

$$S_{ABC} = 4S_{MNP} = 4(2) = 8$$

دشوار

۳۳- گزینه «۱»

ابتدا برای یافتن رأس B دستگاه بین خطوط AB و BC می‌نویسیم:

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 3y - 7x = -19 \end{cases} \xrightarrow{\times -2} \begin{cases} y + 2x = 7 \\ 6y - 14x = -38 \end{cases} \xrightarrow{-2y} \begin{cases} y + 2x = 7 \\ 6y - 14x = -38 \\ -4x = -33 \end{cases}$$

$$x = 3, y = 1 \quad B(3, 1)$$

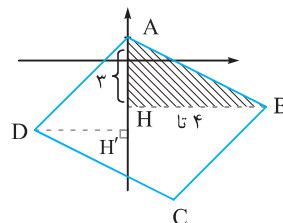
حال فاصله رأس B از خط AC طول ارتفاع BH را به ما می‌دهد:

$$BH = \frac{|4 - 9 - 17|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$

دشوار

۳۴- گزینه «۳»

با استفاده از موقعیت نقاط روی دستگاه مختصات:



چون دو مثلث ABH و ADH' هم‌نهشت هستند پس

$$DH' = AH = 2 \Rightarrow x_D = -3$$

روش دوم:

$$\text{طول ضلع مربع } AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{شیب AB} = \frac{-3}{4} \Rightarrow \text{شیب AD} = \frac{4}{3}$$

$$\text{معادله خط AD: } y - 1 = \frac{4}{3}(x - 0) \Rightarrow y = \frac{4x + 3}{3} \Rightarrow D(x, \frac{4x + 3}{3})$$

$$\text{معادله خط AB: } y - 1 = \frac{-3}{4}(x - 0) \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0$$

$$\text{ضلع مربع} = \text{فاصله نقطه D تا خط AB} = 5$$

$$\frac{|3x + 4y - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5 \Rightarrow \frac{|3x + 4(\frac{4x + 3}{3}) - 4|}{5} = 5$$

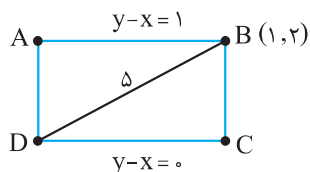
$$\Rightarrow |3x + \frac{16x + 12}{3} - 4| = 25 \Rightarrow \frac{|9x + 16x + 12 - 12|}{3} = 25$$

$$|25x| = 25 \Rightarrow \begin{cases} 25x = 25 \Rightarrow x = 1 \\ 25x = -25 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

D ربع سوم است پس $x < 0$



نقطه $(1, 2)$ در خط $y - x = 1$ صدق می‌کند پس معادلات ضلع به صورت مقابل خواهد بود.



با استفاده از فاصله نقطه از خط طول ضلع BC را به دست می‌آوریم پس:

$$BC = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

حال با استفاده از فیثاغورس در مثلث BCD داریم:

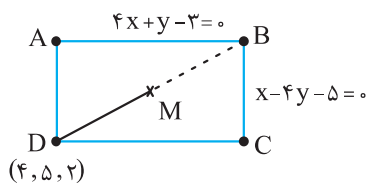
$$BD^2 = BC^2 + DC^2$$

$$5^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + DC^2 \Rightarrow 25 = \frac{1}{2} + DC^2 \Rightarrow 25 - \frac{1}{2} = DC^2 \Rightarrow DC^2 = \frac{49}{2}$$

$$DC = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} \xrightarrow{\text{در نتیجه مساحت مستطیل}} S = BC \times DC = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{49}}{2} = \frac{7}{2}$$

دشوار

۴- گزینه «۱»



بیشترین فاصله M از اضلاع، فاصله نقطه M تا ضلع BC خواهد بود پس

می‌توان با محاسبه طول‌های مستطیل و نصف کردن آن‌ها به بیشترین فاصله

M از اضلاع رسید پس ابتدا فاصله D تا خط BC را محاسبه می‌کنیم تا طول

ضلع DC حساب شود.

$$DC = \frac{|4/5 - 8 - 5|}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{8/5}{\sqrt{17}} = \frac{8}{5\sqrt{17}} = \frac{8\sqrt{17}}{85}$$

با گویا کردن جواب و نصف کردن آن به جواب مسئله می‌رسیم:

$$\frac{8\sqrt{17}}{85} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{8 \times \sqrt{17}}{85 \times \sqrt{17}} = \frac{8}{85} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{4}{85}$$

$$AD = \frac{|4(4/5) + 2 - 3|}{\sqrt{16 + 1}} = \frac{17}{5\sqrt{17}} \times \frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}} = \frac{17}{5\sqrt{17}} \xrightarrow{\text{نصف}} \frac{17}{10\sqrt{17}}$$

روش دوم:

مختصات B (محل برخورد دو ضلع AB و BC) را به دست آورده و مختصات

M وسط AB را به دست آورده و فاصله M را تا اضلاع AB و BC به دست

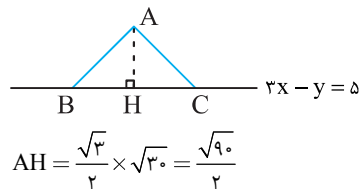
می‌آوریم.

دشوار

۳۷- گزینه «۲»

محیط مثلث مورد سوال $\sqrt{270} = 3\sqrt{30}$ است پس طول هر ضلع آن $\sqrt{30}$ خواهد

بود و از طرفی می‌دانیم در مثلث متساوی‌الاضلاع ارتفاع $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ضلع است یعنی:



فاصله نقطه A تا خط $3x - y = 5$ برابر $\frac{\sqrt{90}}{2}$ است. پس با نوشتن معادله

خط AH نقطه A را به صورت پارامتری نوشته و فاصله آن را از خط

$3x - y = 5$ برابر $\frac{\sqrt{90}}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$AH \text{ شیب: } = -\frac{1}{3}$$

$$H = (2, 1)$$

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow y - 1 = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$$

$$\xrightarrow{\text{نقطه A}} (\alpha, \frac{5 - \alpha}{3})$$

$$AH \text{ فاصله: } \frac{|3\alpha - \frac{5 - \alpha}{3} - 5|}{\sqrt{9 + 1}} = \frac{\sqrt{90}}{2} \Rightarrow (\alpha - 2)^2 = \frac{81}{4}$$

$$\Rightarrow \alpha - 2 = \pm \frac{9}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{13}{2}$$

متوسط

۳۸- گزینه «۱»

نقطه A به صورت $(x, -x + a)$ است فاصله AB و AC را می‌نویسیم:

$$\sqrt{(x + 3)^2 + (-x + a - 2)^2} = \sqrt{29} \Rightarrow 2x^2 + (10 - 2a)x + (a - 2)^2 = 20$$

$$\sqrt{(x + 1)^2 + (-x + a - 4)^2} = 5 \Rightarrow 2x^2 + (10 - 2a)x + (a - 4)^2 = 24$$

با برابر قرار دادن دو معادله ی فوق خواهیم داشت:

$$20 - (a - 2)^2 = 24 - (a - 4)^2$$

$$20 - (a^2 - 4a + 4) = 24 - (a^2 - 8a + 16)$$

$$20 - a^2 + 4a - 4 = 24 - a^2 + 8a - 16 \Rightarrow 8 = 4a \Rightarrow a = 2$$

دشوار

۳۹- گزینه «۲»

چون دو خط موازی هستند داریم:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

اگر $a = 1$ باشد نقطه $(1, 2)$ در هیچ کدام از خطوط صدق نمی‌کند پس

$a = 1$ فقط می‌تواند باشد.